

CHƯƠNG II: HÀM BIẾN PHỨC

- ☐ Hàm số phức với biến số phức
- ☐ Đa trị và đơn trị
- ☐ Giới hạn
- ☐ Liên tục
- ☐ Đạo hàm
- ☐ Điều kiện Cauchy – Riemann
- ☐ Các định nghĩa về hàm giải tích
- ☐ Các tính chất về hàm giải tích

II.1. Hàm số phức với biến số phức:

- Cho D là tập con trong $\mathbb{C}$.
- Ta kí hiệu phần tử của D là $z = x + iy$
- Xét một hàm f : xác định trên D là một quy luật sao cho $z \in D \Rightarrow$ ta xác định được một số phức w thỏa:

$$f: D \rightarrow \mathbb{C}$$

$\Rightarrow f$ là ảnh của $D \in \mathbb{C}$

- Nếu f tồn tại, ta sẽ tìm được một số phức w :

$$w = u + iv, \text{ sao cho } w = f(z).$$

□ Khi đó ta viết:

$$w = f(z) = u + iv = f(x + iy)$$

$$\Rightarrow w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y),$$

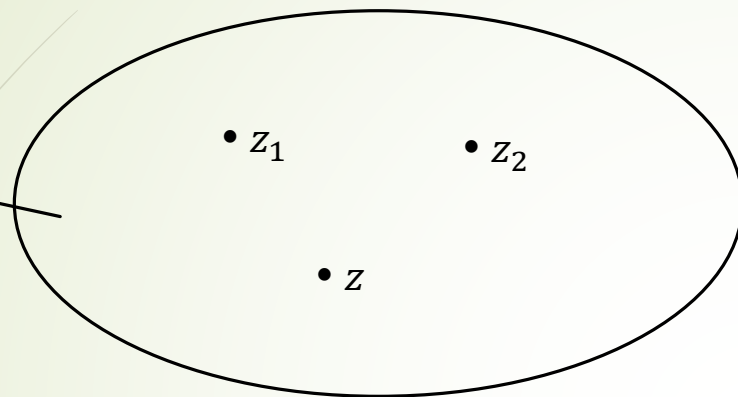
ở đây,

$$u(x, y) = \operatorname{Re} f(z)$$

$$\text{và } v(x, y) = \operatorname{Im} f(z)$$

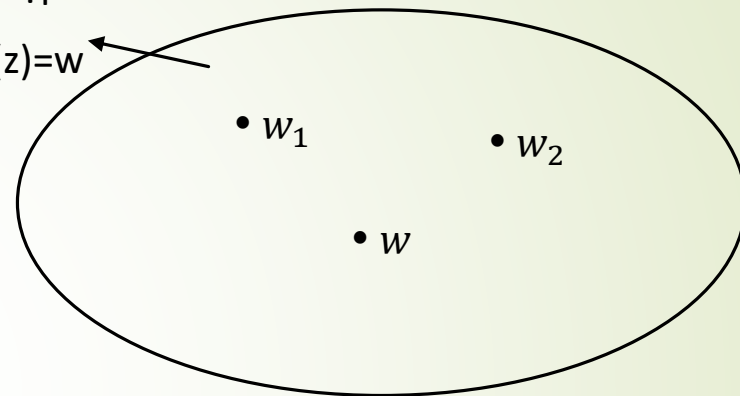


Tập D



Ảnh Tập D

$\rightarrow f(z)=w$



Ví dụ 2.1: Cho $w = f(z) = x^2 - y^2 + i(x + y^2)$.

Tìm $f(2 + i)$

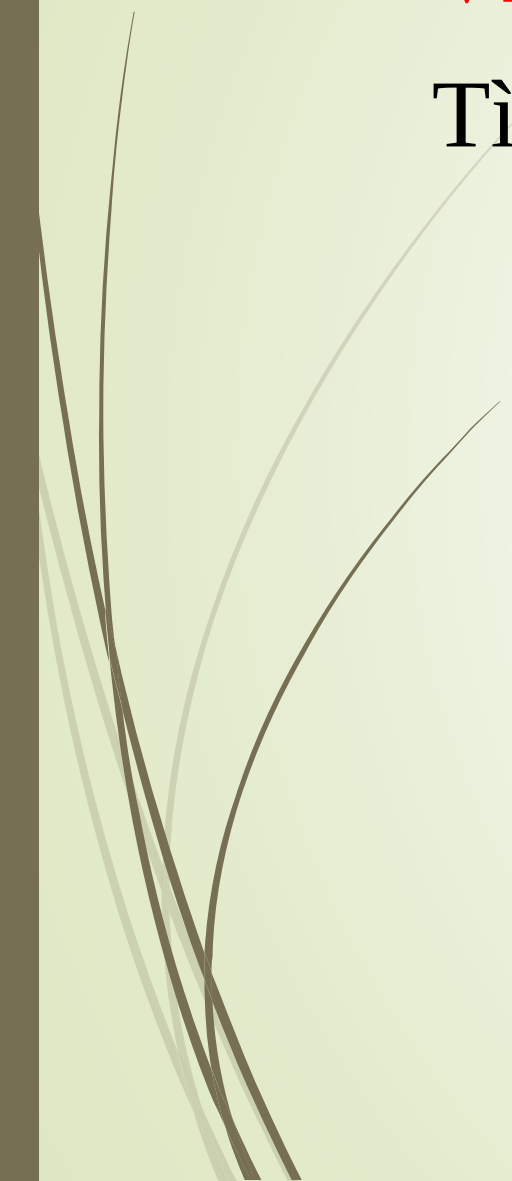
Giải: Ta có: $x = 2$; $y = 1$

Vậy: $w = f(2 + i) =$



Ví dụ 2.2: Cho hàm $f(z) = z^2$.

Tìm phần thực và phần ảo của $f(z)$



Giải: Ta có thể viết: Vì $z = (x + iy)$

$$\Rightarrow f(z) = (x + iy)^2$$

$$= x^2 + i^2 y^2 + 2ixy$$

$$f(z) = x^2 - y^2 + 2ixy$$

Do đó, phần thực của $f(z)$ là:

$$\operatorname{Re} (f(z)) = u(x, y) = x^2 - y^2$$

Phần ảo của $f(z)$ là :

$$\operatorname{Im} (f(z)) = v(x, y) = 2xy$$

II.2. Đa trị và đơn trị:

- ➡ Nếu ứng với một giá trị biến phức z ta có nhiều giá trị của w thì ta gọi $f(z)$ là hàm đa trị.
- ➡ Tính đa trị của hàm phức xuất phát từ tính đa trị của argument θ

❑ Nếu chia miền giá trị của θ ra thành những khoảng có chiều dài 2π , thì trên những khoảng đó, **hàm phức là đơn trị**.

❑ Một hàm $f: D \rightarrow \mathbb{C}$ (xác định trên $D \subset \mathbb{C}$) được gọi là **đơn trị một- một hay đơn điệu** nếu các ảnh của những điểm khác nhau của D là khác nhau. Nói cách khác, $f(z)$ là đơn điệu nếu:

$$\forall z_1, z_2 \in D, z_1 \neq z_2 \implies f(z_1) \neq f(z_2).$$

Ví dụ 1: Xác định tính đa trị hay đơn trị của các hàm $f(z)$ sau:

a/ $w = f(z) = z^2$

b/ $w = f(z) = z^{\frac{1}{2}}$

II. 3. Giới hạn:

- ➡ Cho hàm $f(z)$ xác định trên D và điểm $z_0 \in D$. Ta nói hàm $f(z)$ có giới hạn là L khi z tiến tới z_0 nếu:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall z \in D: |z - z_0| < \delta \\ \Rightarrow |f(z) - L| < \varepsilon$$

- ➡ Khi đó ta viết:

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = L$$

- ➡ Với L : là hằng số phức

II.4. Liên tục:

- ➡ Cho hàm $f(z)$ xác định trên D và điểm $z_0 \in D$. Ta nói hàm $f(z)$ liên tục tại điểm z_0 nếu:

$$|f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$$

Hay: $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = f(z_0)$

❖ *Các Định lý về hàm liên tục:*

- Nếu hàm f liên tục tại z_0 và g liên tục tại $w = f(z_0)$ thì hàm hợp $f \circ g$ (xác định bởi $(f \circ g)(z) = g[f(z)]$) cũng liên tục tại z_0 .
- Nếu hàm f liên tục tại z_0 thì $|f|$ cũng liên tục tại z_0 (chú ý rằng $|f|(z) = |f(z)|$).

II.5. Đạo hàm:

- ❖ Đạo hàm cho hàm biến phức $w = f(z)$ là:
- ➡ Cho $f(z)$ xác định trên D , và $z_0 \in D$. Đạo hàm phức f' hoặc df/dz được định nghĩa như sau:

$$w' = f'(z) = \frac{df}{dz}(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta z}$$

Nếu giới hạn trên đây tồn tại, ta nói **hàm $f(z)$ khả vi tại z_0**

❑ Định nghĩa này như hàm biến thực và các công thức đạo hàm tương tự.

❑ Cụ thể, nếu w_1, w_2, w là các hàm của z , ta có các công thức đạo hàm:

- $(w_1 \pm w_2)' = w_1' \pm w_2'$
- $(w_1 w_2)' = w_1 w_2' + w_1' w_2$
- $\left(\frac{w_1}{w_2}\right)' = \frac{w_1 w_2' - w_1' w_2}{w_2^2}$
- $(w^n)' = (n w^{n-1}) w'$

II. 6. Điều kiện Cauchy – Riemann I:

- ➡ Nếu $u(x, y)$ và $v(x, y)$ là cá hàm thực đơn trị có các đạo hàm riêng cấp 1 liên tục, thì điều kiện cần và đủ để hàm $f(z) = u + iv$ có đạo hàm là:
- ➡ Điều kiện hàm Cauchy – Riemann có đạo hàm:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$$
$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

□ Để chứng minh định lý trên, ta viết biểu thức $\frac{\Delta f}{\Delta z}$ như sau:

$$\begin{aligned}\frac{\Delta f}{\Delta z} &= \frac{\frac{\partial f}{\partial x} \cdot \Delta x + \frac{\partial f}{\partial y} \Delta y}{\Delta x + i\Delta y} \\ &= \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \Delta x \frac{1 + \left[\frac{\partial f / \partial y}{i \partial f / \partial x} \right] \cdot i \frac{\Delta y}{\Delta x}}{\Delta x (1 + i \frac{\Delta y}{\Delta x})} \\ &= \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{1 + \left[\frac{\partial f / \partial y}{i \partial f / \partial x} \right] \cdot i \frac{\Delta y}{\Delta x}}{(1 + i \frac{\Delta y}{\Delta x})}\end{aligned}$$

❖ Bây giờ ta chứng minh điều kiện cần:

□ Nếu f có đạo hàm, thì giới hạn $\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$

phải tồn tại, và giới hạn này không phụ thuộc vào hướng tiến $z \rightarrow z_0$

- ✓ y thay đổi: $x = \text{const}$
- ✓ x thay đổi: $y = \text{const}$

- Mặt khác, hướng tiến $z \rightarrow z_0$ được đặc trưng bởi $(\frac{\Delta y}{\Delta x})$
- Do đó, để đạo hàm không phụ thuộc hướng tiến $z \rightarrow z_0$, biểu thức đạo hàm **không được chứa số hạng** $\frac{\Delta y}{\Delta x}$.

Suy ra: $\left[\frac{\partial f / \partial y}{i \partial f / \partial x} \right] = 1$

- Từ đó ta có :

$$\frac{\partial f}{\partial y} = i \frac{\partial f}{\partial x} \Leftrightarrow \frac{\partial u}{\partial y} + i \frac{\partial v}{\partial y} = i \left(\frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} \right) = -\frac{\partial v}{\partial x} + i \frac{\partial u}{\partial x}$$

- Phương trình cuối cùng trên đây cho ta hai số phức bằng nhau, vậy, một cách tương ứng ta có :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \end{cases}$$

=> Vậy ta đã chứng minh được các phương trình Cauchy – Riemann, nghĩa là **chứng minh xong điều kiện cần**.

❖ Bây giờ ta **chứng minh điều kiện đủ**.

□ Khi đã có các phương trình Cauchy – Riemann, ta suy ra:

$$\frac{\Delta f}{\Delta z} = \frac{\partial f}{\partial x}$$

Do đó:

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta z} = \frac{\partial f}{\partial x}$$

Hay:

$$f'(z) = \frac{\partial f}{\partial x}$$

□ Vậy đạo hàm của $f(z)$ tồn tại, và ta đã chứng minh được điều kiện đủ. Chú ý rằng từ phần chứng minh này, ta có:

$$\text{Vậy } f'(z) = \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} \text{ hay } f'(z) = \frac{\partial v}{\partial y} - i \frac{\partial u}{\partial y}$$

□ Do đó, các công thức đạo hàm cho hàm thực vẫn còn đúng với hàm phức:

$$\Rightarrow f'(z) = \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} - i \frac{\partial u}{\partial y}$$

II.7. Các định nghĩa về hàm giải tích:

- Nếu hàm $f(z)$ có đạo hàm tại mọi điểm trong miền D thì ta nói $f(z)$ **giải tích** (analytic) trong D .
- Nếu hàm $f(z)$ giải tích trên toàn mặt phẳng phức thì ta gọi $f(z)$ là **hàm nguyên** (entire function).
- Ta nói hàm $f(z)$ giải tích tại điểm z_0 nếu có thể tìm được một miền lân cận quanh z_0 sao cho $f(z)$ có đạo hàm tại mọi điểm trong vùng lân cận cho hàm đó.
- Các điểm tại đó hàm $f(z)$ không giải tích được gọi là **các điểm dị thường** của hàm $f(z)$.

❖ Một số ví dụ về hàm giải tích và nguyên hàm:

- Ví dụ 1: Cho hàm $w = f(x) = a + ib$, với a, b là các hằng số thực.

Chứng minh: $f(x)$ là hàm nguyên

Ta viết: $w = u + iv$ nên $w = a + ib$

$$u + iv = a + ib$$

$$\Rightarrow u = u(x, y) = a; \quad v = v(x, y) = b$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = 0 = \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} = 0 = \frac{\partial v}{\partial x} \end{cases} \quad \forall (x, y)$$

$\Rightarrow f$ là hàm giải tích trong toàn mặt phẳng phức

$\Rightarrow f$ là hàm nguyên

Ví dụ 2

- a) Chứng minh $f(z) = z$ là nguyên hàm. Tính $f'(z)$
- b) Chứng minh $f(z) = z\operatorname{Re}(z)$ không là hàm giải tích


$$a) f(z) = z = (x + iy) = (u + iv) \Rightarrow \begin{cases} u = x \\ v = y \end{cases}$$

ĐK Cauchy – Riemann:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = 1 = \frac{\partial v}{\partial y} = 1 \\ \frac{\partial u}{\partial y} = 0 = -\frac{\partial v}{\partial x} = 0 \end{cases} \quad \text{thỏa } \forall (x, y)$$

$f(z) = z$ là hàm nguyên

$$\Rightarrow f'(z) = \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} = 1 + 0 = 1$$

b) Ta chứng minh rằng $f(z) = z\operatorname{Re}(z)$ không là hàm giải tích.

Hàm $z\operatorname{Re}(z)$ có thể được viết: vì $z = (x + iy) \Rightarrow \operatorname{Re}(z) = x$ nên:

$$\begin{aligned}\Rightarrow f(z) &= z\operatorname{Re}(z) = zx = (x + iy)x = x^2 + ixy \\ &= (u + iv)\end{aligned}$$

Vậy: $u = x^2$; $v = xy$

Ta kiểm tra xem điều kiện Cauchy – Riemann có được thỏa mãn hay không.

Với $\forall z \neq 0$, nghĩa là $\forall (x, y) \neq (0,0)$, ta thấy điều kiện Cauchy – Riemann bị vi phạm:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x \neq \frac{\partial u}{\partial y} = x$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 0 \neq -\frac{\partial v}{\partial x} = -y$$

Tuy nhiên, tại $z_0 = 0$ thì điều kiện Cauchy- Riemann được thỏa mãn.

Vậy, hàm chỉ có đạo hàm tại $z_0 = 0 \Rightarrow$ giải tích tại một điểm z_0

Do đó, hàm không giải tích $\Rightarrow$ Không phải là hàm nguyên

II.8. Tính chất của hàm giải tích:

- ➡ Tổng, tích, thương (nếu mẫu số khác 0) của hai hàm giải tích làm hàm giải tích
- ➡ Hàm giải tích của một hàm giải tích là hàm giải tích.
- ➡ Mọi hàm giải tích $f(z)$ đều có thể được viết dưới dạng chỉ chứa biến z , không chứa biến $\bar{z}$ (khi x, y bị loại hẳn ra khỏi biểu thức của hàm).

❖ Ta chứng minh tính chất 3.

□ Ta viết:

$$w = u + vi = u(x, y) + iv(x, y).$$

Vì $z = x + iy$ và $\bar{z} = x - iy$, nên ta có

$$x = \frac{z + \bar{z}}{2}$$

$$y = \frac{z - \bar{z}}{2i}$$

⇒ Chỗ nào có chứa x, y thì được thay bằng z và $\bar{z}$

- Vậy hàm w được biểu diễn thông qua 2 biến mới z và $\bar{z}$. Tuy nhiên:

$$\frac{\partial w}{\partial \bar{z}} = \frac{\partial w}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial \bar{z}} + \frac{\partial w}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial \bar{z}}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{1}{2} \frac{\partial w}{\partial y} \cdot i$$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + i \frac{\partial v}{\partial y} \right) i$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \cdot i \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{1}{2} \cdot i \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{1}{2} \frac{\partial v}{\partial y}$$

$$= 0. \text{ (theo điều kiện Cauchy – Riemann)}$$

- 
- Điều này có nghĩa là biến $\bar{z}$ không xuất hiện trong biểu thức của hàm w .

Do đó, hàm w được biểu diễn thông qua một biến z duy nhất.

➤ Nếu hàm f vừa chứa z , vừa chứa $\bar{z}$, thì f không thể là hàm giải tích.

➤ Để chuyển một hàm giải tích $w = f(x, y)$ về dạng $f(z)$ một cách nhanh chóng, ta cho $y = 0$; khi đó $x = z - iy = z$ và

$$w = f(z) = f(x, 0)$$

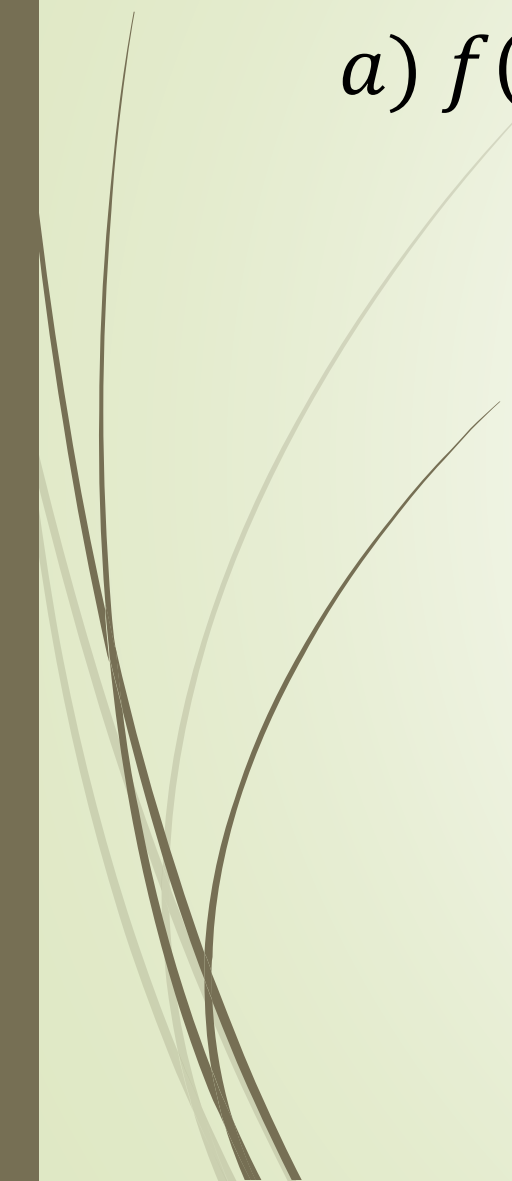


Ví dụ : Khảo sát đạo hàm của các hàm sau:

$a) f(z) = \bar{z}$

$b) f(z) = z \cdot \bar{z} = |z|^2$

$c) f(z) = z^2$



❑ **Ví dụ:** Cho hàm giải tích $f(z)$ có phần thực

$$u(x, y) = x^2 - y^2 + 2x$$

a) Chứng minh rằng: $\Delta u = 0$

b) Tìm hàm $f(z)$ và biểu diễn $f(z)$ theo z



a) Ta có:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x + 2 \implies \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 2$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -2y \implies \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -2$$

$$\implies \Delta u = 0$$

a) Ta có:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$$

$$\Rightarrow v = \int \frac{\partial u}{\partial x} dy = \int (2x + 2) dy = (2x + 2)y + \varphi(x) \Rightarrow \varphi(x) = ?$$

□ Tìm $\varphi(x)$ dựa vào:

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \Leftrightarrow -2y = -2y + \varphi'(x) \Rightarrow \varphi'(x) = 0$$

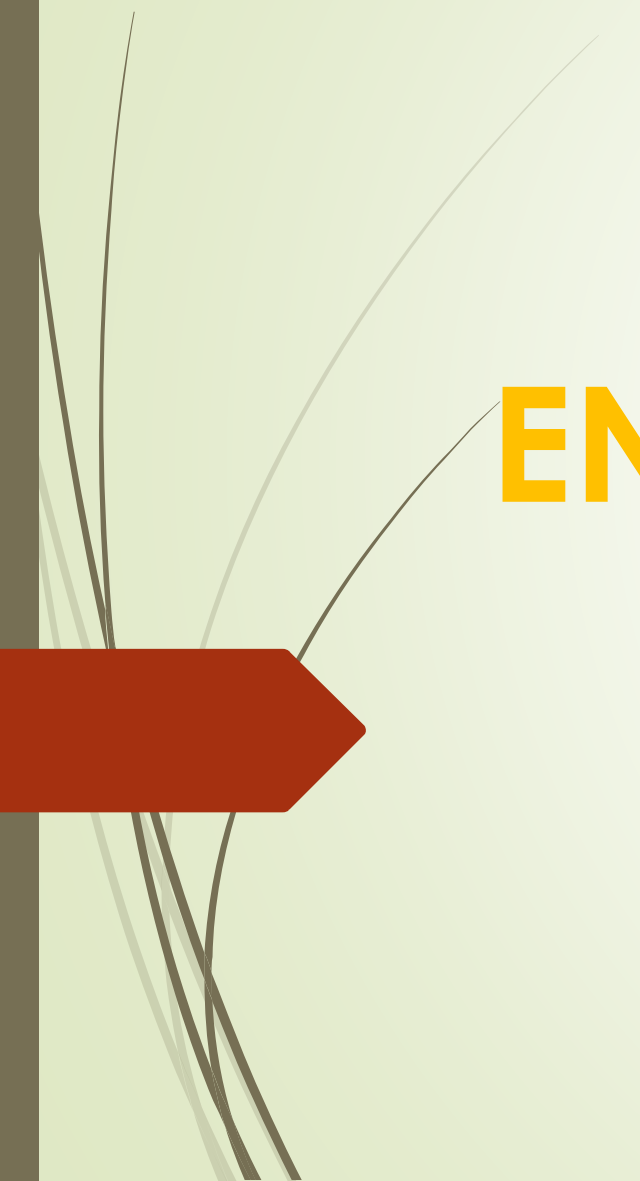
$$\Rightarrow \varphi(x) = a = \text{const}$$

$$\Rightarrow v(x, y) \Rightarrow (2x + 2)y + a$$

$$\Rightarrow f(x, y) = u(x, y) + iv(x, y)$$

$$= x^2 - y^2 + 2x + i[(2x + 2)y + a]$$

$$\Rightarrow f(z) = f(x; 0) = x^2 + 2x + ai = z^2 + 2z + ai$$



END OF CHAPTER 2