

Chương III: Các Hàm Phức Cơ Bản

- Đa thức
- Hàm mũ
- Hàm lượng giác
- Hàm hyperbol
- Hàm lôgarit
- Hàm lượng giác ngược
- Hàm lũy thừa tổng quát

III.1. Đa thức

$$P_n(z) = a_n z^n + \dots + a_2 z^2 + a_1 z + a_0, \quad a_n \neq 0$$

$P_n(z)$ là hàm nguyên.

Đạo hàm:

$$P'_n(z) = n a_n z^{n-1} + \dots + 2 a_2 z + a_1$$

III.2. Hàm mũ – Exponential

Hàm mũ $\exp(z)$

$$\exp(z) = e^z = e^{x+iy} = e^x (\cos y + i \sin y)$$

$$\Rightarrow u(x, y) = e^x \cos y; \quad v(x, y) = e^x \sin y$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = e^x \cos y; \quad \frac{\partial v}{\partial y} = e^x \cos y$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -e^x \sin y; \quad \frac{\partial v}{\partial x} = e^x \sin y$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \end{cases} \quad (\text{thỏa điều kiện Cauchy - Riemann})$$

Vậy: e^z là hàm nguyên.

Khi đó:

$$f'(z) = \frac{de^z}{dz} = \frac{\partial(e^x e^{iy})}{\partial x} = e^x e^{iy} = e^z$$

$$\forall z = r.e^{i\theta} \Rightarrow e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy} \\ = e^x (\cos y + i \sin y)$$

- Modulus: e^x (tức $|e^z| = e^x$)
- Argument: y (pha $\arg(e^z) = y$)
- Phần thực và phần ảo:

$$\operatorname{Re}(w) = u(x,y) = e^x \cos y;$$

$$\operatorname{Im}(w) = v(x,y) = e^x \sin y$$

❑ *Tuân theo quy tắc cho hàm mũ :*

$$e^{z_1} e^{z_2} = e^{z_1 + z_2}$$

$$e^{z_1} / e^{z_2} = e^{z_1 - z_2}$$

$$1/e^z = e^{-z}$$

- Tuân theo quy tắc đạo hàm hàm mũ:

$$(e^z)' = e^z.$$

- Không bao giờ bằng zero.

$$\text{Vì } e^z = e^x \cdot e^{iy} \quad |e^z| = e^x \neq 0$$

Lý do: modulus của e^z là e^x , mà e^x là một hàm mũ thực nên luôn khác zero, vậy hàm mũ phức luôn khác zero.

❖ Hàm mũ phức khác hàm mũ thực ở những tính chất sau:

- Hàm mũ thực không tuần hoàn, nhưng hàm mũ phức tuần hoàn với chu kì $2\pi i$

$$e^z = e^{(z+ik2\pi)}, k \in \mathbb{Z}$$

- Hàm mũ thực luôn dương, nhưng hàm mũ phức không nhất thiết phải dương.

Ví dụ 1: $e^{i(2k+1)\pi} = -1$

III.3. Hàm lượng giác I

- Hàm Sin, Cos:

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}; \quad \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$$

$\sin z$ và $\cos z$ là các hàm nguyên.

- Hàm Tang và Cotang:

$$\tan z = \frac{\sin z}{\cos z}; \quad \cot z = \frac{\cos z}{\sin z}$$

Các hàm $\tan z$ và $\cot z$ không giải tích trên toàn mặt phẳng phức, mà có các điểm dị thường $\Rightarrow$ không là hàm nguyên.

III.3. Hàm lượng giác II

- Các điểm dị thường của hàm $\tan z$:

$$\cos z = 0$$

$$\Leftrightarrow e^{iz} + e^{-iz} = 0$$

$$\Leftrightarrow e^{2iz} + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow e^{2iz} = -1 = e^{i(2k+1)\pi}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow z_k = (2k+1)\frac{\pi}{2}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

- Vậy: các điểm dị thường của $\tan z$ là các điểm:

$$z_k = (2k+1)\frac{\pi}{2}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

VD: Chứng minh rằng hàm $\cot z$ có các điểm dị thường tại:

$$Z_k = k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

- Điểm dị thường của hàm cot z tại $\sin z = 0$

$$\Leftrightarrow e^{iz} - e^{-iz} = 0$$

$$\Leftrightarrow e^{2zi} - 1 = 0 \Rightarrow e^{2zi} = 1 = e^{2k\pi i}$$

$$\Leftrightarrow 2z = 2k\pi$$

$$\Rightarrow z = k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

- Vậy: $z_k = k\pi$ là các điểm dị thường của hàm cot z

III.4. Hàm hyperbol

- Hàm Sin, Cosin hyperbolic:

$$\sinh z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}; \quad \cosh z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}$$

- Hàm Tang, Cotang hyperbolic:

$$\tanh z = \frac{\sinh z}{\cosh z}; \quad \coth z = \frac{\cosh z}{\sinh z}$$

- Mối quan hệ với các hàm lượng giác:

$$\begin{aligned} \cosh iz &= \cos z; & \sinh iz &= i \sin z \\ \cos iz &= \cosh z; & -i \sin iz &= \sinh z \end{aligned}$$

❑ BT1: Chứng minh các hệ thức:

1/ $\cosh^2 z - \sinh^2 z = 1$

2/ $\cos z = \cos(x + iy) = \cos x \cosh y - i \sin x \sinh y$

3/ $\sin z = \sin(x + iy) = \sin x \cosh y + i \cos x \sinh y$

4/ Tìm các giá trị của $\cos(1+2i)$ và $\sin(2+i)$

Giải:

$$a/ \cosh z = \cos iz; \quad \sinh z = -i \sin iz$$

$$\Rightarrow \cosh^2 z = (\cos iz)^2$$

$$\sinh^2 z = (-i)^2 \cdot (\sin iz)^2$$

$$\text{Vậy: } \cosh^2 z - \sinh^2 z = 1$$

□ BT2: Chứng minh rằng:

$$a/ \quad |\cos z|^2 = \cos^2 x + \sinh^2 y,$$

$$b/ \quad |\sin z|^2 = \sin^2 x + \sinh^2 y.$$

a/ $\cos(z) = \cos(x + iy) = \cos x \cdot \cosh y - i \cdot \sin x \cdot \sinh y$

Ta có: $|\cos z|^2 = \cos^2 x \cdot \cosh^2 y + \sin^2 x \cdot \sinh^2 y$

$$= \cos^2 x (1 + \sinh^2 y) + (1 - \cos^2 x) \cdot \sinh^2 y$$

$$= \cos^2 x + \cos^2 x \cdot \sinh^2 y + \sinh^2 y - \cos^2 x \cdot \sinh^2 y$$

$$= \cos^2 x + \sinh^2 y.$$

III.5. Hàm lôgarit

- Hàm $\log z$ được định nghĩa:

$$\omega = \log z \Leftrightarrow z = e^{\omega}$$

(chú ý: ta dùng ký hiệu $\ln ()$ cho lôgarit thực, còn $\log ()$ cho lôgarit phức.)

Mối liên hệ giữa $\log ()$ và $\ln ()$:

$$\text{Ta có } z = \rho e^{i\theta} = e^{\ln \rho} \cdot e^{i\theta} = e^{\ln \rho + i\theta} = e^{\omega}.$$

$$\Leftrightarrow \omega = \ln \rho + i\theta.$$

$$\Leftrightarrow \omega = \ln |z| + i \arg(z). \quad (\arg(z) = \theta + 2k\pi, k \in \mathbb{Z})$$

- Đạo hàm $\frac{d(\log z)}{dz} = \frac{1}{z}.$

Ví dụ:

1/ Tính $\text{Log}(i)$

2/ Tính $\text{Log}(-i)$

3 / Tính $\text{Log}(-1-i)$

Giải:

$$a/ \log(i) = \ln(1) + i\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right) = i\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)$$

$$b/ \log(-i) = \ln(1) + i\left(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right) = i\left(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)$$

III.6. Hàm lượng giác ngược

$$w = \arccos z \Rightarrow z = \cos w$$
$$\text{hay } w = \arcsin z \Rightarrow z = \sin w$$

□ BT3: Tìm nghiệm của phương trình: $\cos z = 2$.

Ta viết:

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = 2 \quad \Leftrightarrow \quad e^{iz} - 4 + e^{-iz} = 0$$

Ta đặt: $\omega = e^{iz}$

$$\omega - 4 + \frac{1}{\omega} = 0$$

$$\Leftrightarrow \omega^2 - 4\omega + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow (\omega - 2)^2 = 3$$

$$\Leftrightarrow \omega = 2 \pm \sqrt{3}$$

$$\Leftrightarrow e^{iz} = e^{\ln(2 \pm \sqrt{3})}$$

$$\Leftrightarrow iz = \ln(2 \pm \sqrt{3}) + 2k\pi i$$

$$\Leftrightarrow z = -i \ln(2 \pm \sqrt{3}) + 2k\pi.$$

1/ Tìm các hàm lượng giác ngược:

a/ $W = \arcsin z$

b/ $w = \arctan z$

c/ $w = \operatorname{argcosh} z$

d/ $w = \operatorname{argsinh} z$

a/ Tìm hàm $w = \arcsin z \Rightarrow z = \sin w = \frac{e^{iw} - e^{-iw}}{2i}$

Ta có: $z = \sin w = \frac{e^{iw} - e^{-iw}}{2i} \quad (5)$

- Đặt $X = e^{iw}$. Biểu thức (5) trở thành: $z = \frac{X - X^{-1}}{2i}$
- $\Leftrightarrow 2iz = X - X^{-1}$
- $X^2 - 1 - 2izX = 0$
- $\Leftrightarrow X^2 - 2izX + z^2 + z^2 - 1 = 0$
- $\Leftrightarrow (X - iz)^2 = (1 - z^2)$
- $\Leftrightarrow (X - iz) = \pm \sqrt{1 - z^2}$
- $\Rightarrow X = iz \pm \sqrt{1 - z^2}$

- $\Rightarrow e^{iw} = e^{\ln(iz + \sqrt{1-z^2})} e^{ik2\pi}$
- $\Rightarrow iw = \ln(iz \pm \sqrt{1-z^2}) + ik2\pi$
- $\Rightarrow i^2w = i \ln(iz \pm \sqrt{1-z^2}) + i^2k2\pi$
- $\Rightarrow w = -i \ln(iz \pm \sqrt{1-z^2}) + k2\pi$

Theo quy ước về tầm chính, ta chọn $k = 0$.

Vậy ta có hàm:

- $w = \arcsin z = -i \ln(iz \pm \sqrt{1-z^2}) \quad (6)$

III.7. Hàm lũy thừa tổng quát:

Cho một số phức s . Nếu z khác 0, ta định nghĩa hàm lũy thừa của z như sau:

$$z^s = e^{s \ln z}$$

□ Ví dụ 1: Tìm các giá trị của $i^{(-ei)}$

Ta có: $i^{(-2i)} = e^{(-2i)\ln i}$,

Mà: $\log(i) = \ln(1) + i\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right) = i\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)$

$$\Rightarrow w = i^{(-2i)} = e^{(-2i) \cdot i\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)} = e^{\pi + 4k\pi} = e^{(4k+1)\pi}$$

□ Ví dụ:

1/ Tìm trị chính của: $(-i)^i$

2/ Tìm trị chính của: $(1 + i)^i$

THE END OF CHAPTER 3