TẬP ĐO ĐƯỢC - ĐỘ ĐO DƯƠNG
HÀM SỐ ĐO ĐƯỢC

Chúng ta đã cân, đong, đo, đếm . . . , nhưng có bao giờ chúng ta nghĩ đến câu hỏi sau: có phải chúng ta có thể cân, đong, đo, đếm được mọi thứ ? Có phải chúng ta đo được độ dài của mọi tập hợp con trong $\mathbb{R}$?

Ông Lebesgue đã chỉ ra có các tập con trong $\mathbb{R}$ không thể nào đo được theo cách đo thông thường.

Ta sẽ dùng chử “đo” để chỉ việc cân, đong, đo, đếm . ..

Cho Ω là một tập hợp khác trống. Để thực hiện một phép đo trên Ω , trước hết chúng ta phải xác định các đối tượng đo : một họ tập con của Ω .

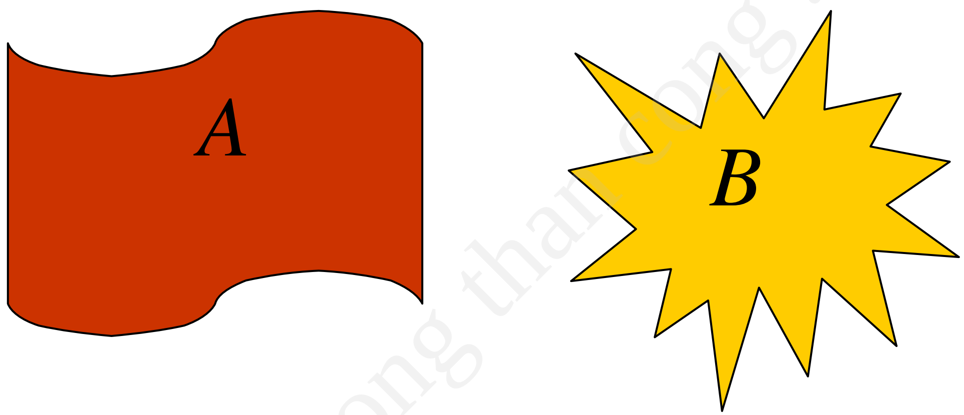
$\mathcal{P}(\Omega)$ là họ tất cả các tập con của Ω, và $\mathfrak{M}$ là một tập con của $\mathcal{P}(\Omega)$.

Giả sử $\mathfrak{M}$ là họ tất cả các đối tượng trong một phép đo.

Ta thấy tập rỗng ϕ đo được và có độ đo là không. Nên ϕ luôn là một phần tử của $\mathfrak{M}$.

Ta thấy tập Ω đo được và có độ đo lớn nhất trong các độ đo của các phần tử trong $\mathfrak{M}$. Nên Ω luôn là một phần tử của $\mathfrak{M}$ và có thể có độ đo là ∞. Thí dụ độ dài của $\mathbb{R}$ là ∞.

Giả sử $\mathfrak{M}$ là họ tất cả các đối tượng trong một phép đo. Cho A và B trong $\mathfrak{M}$, nghĩa là A và B có thể đo được. Nếu A và B rời nhau, ta phải có $C = A \cup B$ cũng có thể đo được.



Nếu $m(A)$ và $m(B)$ *là độ đo của* A và B, *thì*

$$m(A \cup B) = m(A) + m(B).$$

Cho $A_1, \ldots, A_n$ là n tập rời nhau trong $\mathfrak{M}$. Đặt

$$A = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$$

Dùng qui nạp toán học ta có công thức sau

$$m(A) = \sum_{i=1}^{n} m(A_i)$$

Cho $A_1, \ldots, A_n, \ldots$ là một họ đếm được các tập rời nhau trong $\mathfrak{M}$. Đặt

$$A = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$$

Lý luận tương tự như trong định nghĩa của chuỗi số, ta có thể chấp nhận $A \in \mathfrak{M}$ và

$$m(A) = \sum_{i=1}^{\infty} m(A_i)$$

Nay cho $\{A_i\}_{i\in I}$ là một họ các tập rời nhau trong $\mathcal{M}$, và $A = \bigcup_{i\in I} A_i$. Ta có thể tính độ đo của A dựa trên các độ đo của A_i hay không ?

Nếu $I = [0,1]$ và $A_i = \{i\}$ $\forall\, i \in I$. Ta thấy độ dài của mỗi A_i bằng 0, và đô dài của A bằng 1.

Như vậy vấn đề tính độ đo của phần hợp một họ bất kỳ các tập con dựa trên các độ đo của từng tập con không đơn giản . Ta sẽ thấy sự đếm được của I rất có ý nghĩa trong lý thuyết độ đo.

Từ các nhận xét trên chúng ta xét các định nghĩa trong lý thuyết đô đo sau.

Định nghĩa. Cho $\mathfrak{M}$ là một họ các tập con của một tập khác trống Ω . Ta nói $\mathfrak{M}$ là một σ-đại số trong Ω nếu $\mathfrak{M}$ có các tính chất sau

(D1) $\Omega \in \mathfrak{M}$.

(D2) $\Omega \setminus A \in \mathfrak{M} \quad \forall A \in \mathfrak{M}$.

(D3) $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathfrak{M} \quad \forall \{A_n\} \in \mathfrak{M}$.

Lúc đó ta nói $(\Omega,\mathfrak{M})$ là một không gian đo được. Nếu $A \in \mathfrak{M}$, ta nói A là một tập con $\mathfrak{M}$-đo được trong Ω .

Bài toán 1.1. Cho $(\Omega, \mathfrak{M})$ là một không gian đo được. Cho $A_1, A_2, \ldots, A_m, \in \mathfrak{M}$. Đặt

$$A = \bigcup_{n=1}^{m} A_n$$

Chứng minh A là một tập con $\mathfrak{M}$-đo được trong Ω.

(D3) $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathfrak{M} \quad \forall \{A_n\} \in \mathfrak{M}$.

$\bigcup_{n=1}^{m} A_n \in \mathfrak{M} \quad \forall \{A_1, A_2, \ldots, A_m\} \in \mathfrak{M}$.

(D3) $\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n \in \mathfrak{M} \quad \forall \{B_n\} \in \mathfrak{M}$.

(D3) $\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n \in \mathfrak{M} \quad \forall \{B_n\} \in \mathfrak{M}$.

$\bigcup_{n=1}^{m} A_n \in \mathfrak{M} \quad \forall \{A_1, A_2, \ldots, A_m\} \in \mathfrak{M}$.

(D3) $\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n \in \mathfrak{M}$

$\forall \{B_1, B_2, \ldots, B_m, B_{m+1}, B_{m+2}, \ldots\} \in \mathfrak{M}$.

$\bigcup_{n=1}^{m} A_n \in \mathfrak{M} \quad \forall \{A_1, A_2, \ldots, A_m\} \in \mathfrak{M}$.

Đặt $B_1 = A_1, \quad B_2 = A_2, \ldots, \quad B_m = A_m,$

$B_{m+1} = \phi, \quad B_{m+2} = \phi, \ \ldots$

Bài toán 1.2. Cho $(\Omega, \mathfrak{M})$ là một không gian đo được. Cho $A, B \in \mathfrak{M}$. Chứng minh $A \cap B$ là một tập con $\mathfrak{M}$-đo được trong Ω.

(D1) $\Omega \in \mathfrak{M}$.

(D2) $\Omega \setminus A \in \mathfrak{M} \quad \forall A \in \mathfrak{M}$.

(D3) $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathfrak{M} \quad \forall \{A_n\} \in \mathfrak{M}$.

Biến giao thành hội : $\Omega \setminus (A \cap B) = (\Omega \setminus A) \cup (\Omega \setminus B)$

Để ý : $A \cap B = \Omega \setminus [\Omega \setminus (A \cap B)]$

Định nghĩa. Cho $(\Omega,\mathcal{M})$ là một không gian đo được, và cho μ là một ánh xạ từ $\mathcal{M}$ vào $[0, \infty]$. Ta nói μ là một *độ đo dương* trên $\mathcal{M}$ nếu μ có các tính sau

(i) (COUNTABLE ADDITIVE) Nếu $\{A_n\}$ là một dãy các phần tử rời nhau trong $\mathcal{M}$ thì

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$$

(ii) có B trong $\mathcal{M}$ để cho $\mu(B) < \infty$

Ta thường dùng $(\Omega, \mathcal{M}, \mu)$ để chỉ một tập hợp Ω khác trống, một σ-đại số $\mathcal{M}$, trong Ω và một độ dương μ trên $\mathcal{M}$. Ta cũng gọi $(\Omega, \mathcal{M}, \mu)$ là một không gian đo được

Bài toán 1.3. Cho một không gian đo được $(\Omega, \mathfrak{M}, \mu)$. Chứng minh $\mu(\phi) = 0$.

(i) (COUNTABLE ADDITIVE) Nếu $\{A_n\}$ là một dãy các phần tử rời nhau trong $\mathfrak{M}$ thì

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$$

(ii) có B trong $\mathfrak{M}$ để cho $\mu(B) < \infty$

Đặt $A_1 = B$, $A_2 = \phi$, $A_3 = \phi$, $A_4 = \phi$, ...

$$\mu(B) = \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) = \lim_{m\to\infty} \sum_{n=1}^{m} \mu(A_n)$$

$$= \lim_{m\to\infty} [\mu(B) + (m-1)\mu(\phi)] = \mu(B) + \lim_{m\to\infty} [(m-1)\mu(\phi)]$$

Bài toán 1.4. Cho $(\Omega, \mathfrak{M}, \mu)$ là một không gian đo được. Cho $A_1, A_2, \ldots, A_m$ là các tập rời nhau trong $\mathfrak{M}$. Chứng minh

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{m} A_n\right) = \sum_{n=1}^{m} \mu(A_n)$$

(i) (COUNTABLE ADDITIVE) Nếu $\{A_n\}$ là một dãy các phần tử rời nhau trong $\mathfrak{M}$ thì

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$$

Đặt $A_{m+1} = \phi$, $A_{m+2} = \phi$, ...

Bài toán 1.5. Cho một không gian đo được $(\Omega, \mathcal{M}, \mu)$. Cho C và D trong $\mathcal{M}$. Giả sử $C \subset D$. Chứng minh $\mu(C) \leq \mu(D)$.

Đặt $A = C$ và $B = D \setminus C$

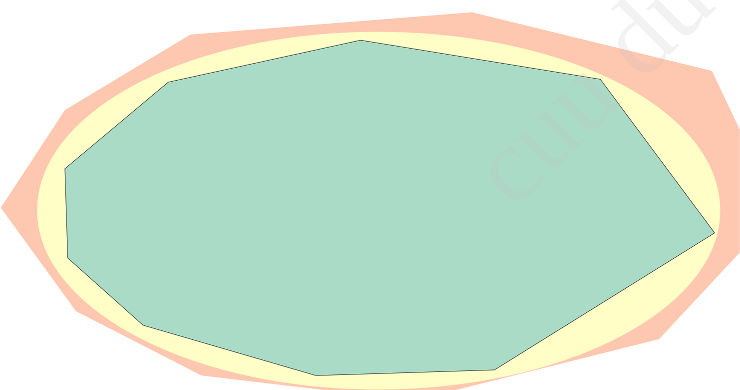
$$A \cap B = \phi \qquad A \cup B = D$$

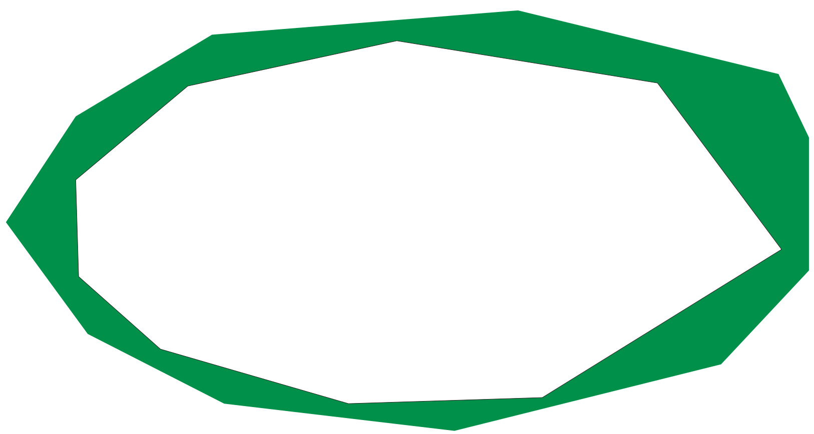
$$\mu(D) = \mu(A \bigcup B) = \mu(A) + \mu(B) \geq \mu(A) = \mu(C)$$

Có một σ-đại số $\mathfrak{M}$ và một độ đo dương μ trên không gian $\mathbb{R}^n$ có các tính chất sau

(i) Các tập mở và tập đóng trong $\mathbb{R}^n$ là các phần tử của $\mathfrak{M}$

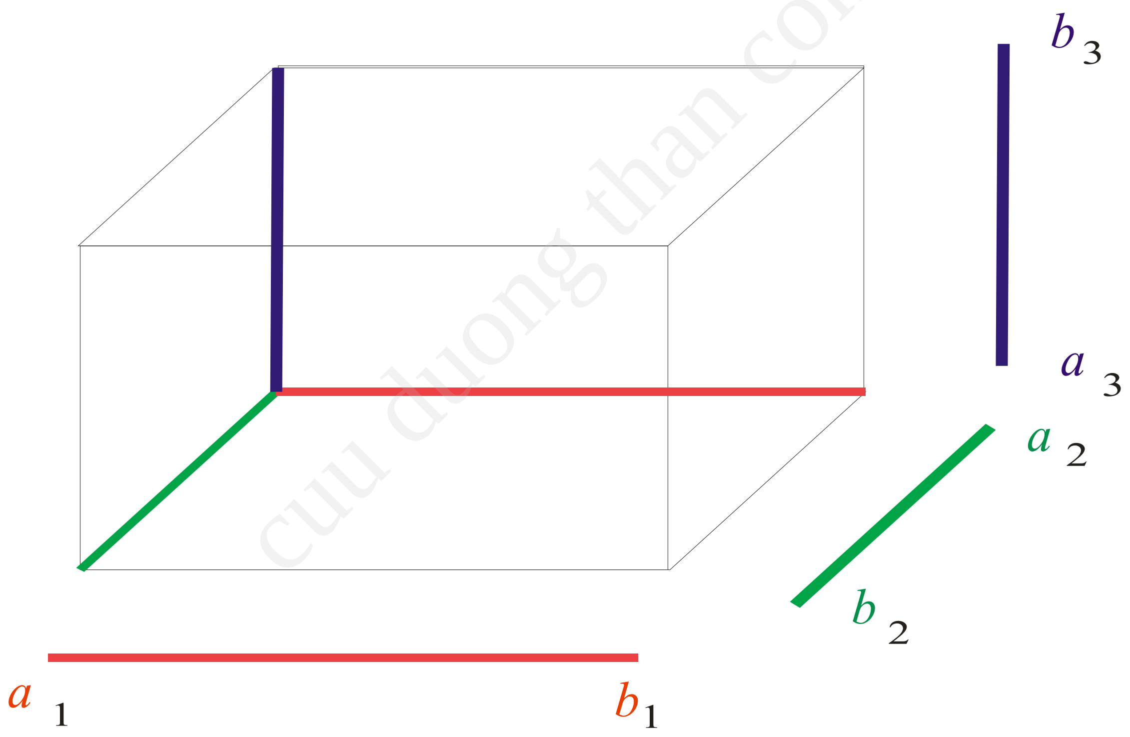
(ii) Cho $E \in \mathfrak{M}$ sao cho $\mu(E) < \infty$. Lúc đó với mọi $\varepsilon > 0$, có một tập đóng F và một tập mở U trong $\mathbb{R}^n$ có các tính chất sau: $F \subset E \subset U$, và $\mu(U \setminus F) < \varepsilon$.



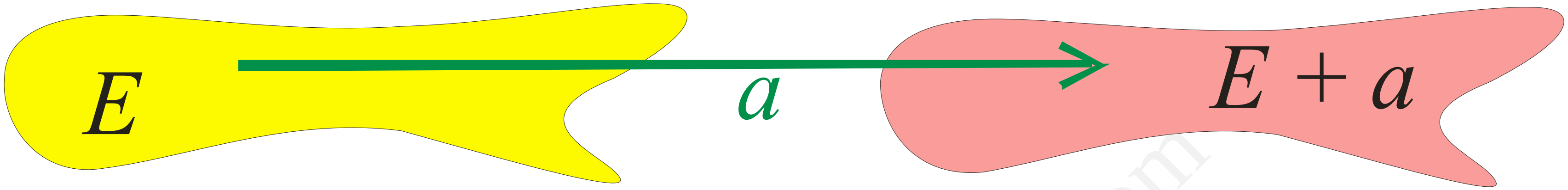


(*iii*) Cho E là một tập con của $\mathbb{R}^n$ sao cho có A và B trong $\mathfrak{M}$ sao cho : $A \subset E \subset B$, và $\mu(B \setminus A) = 0$. Lúc đó $E \in \mathfrak{M}$.

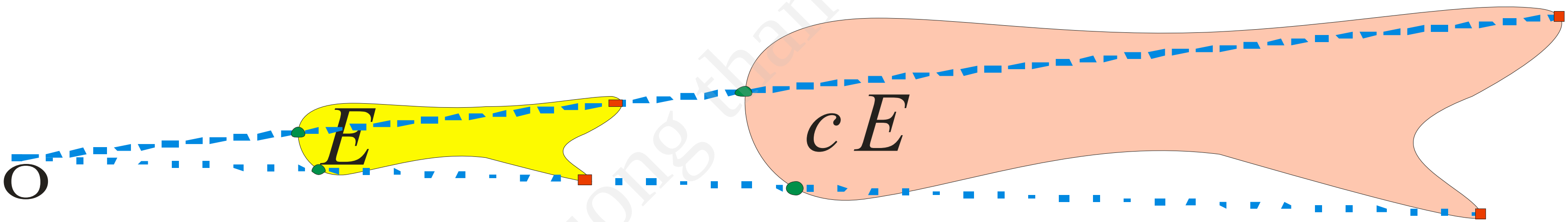
(iv) $\mu([a_1,b_1]\times\cdots\times [a_n,b_n]) = (b_1 - a_1)\times \cdots\times (b_n - a_n)$



(v) $\mu(E + a) = \mu(E) \qquad \forall\, E \in \mathfrak{M},\ a \in \mathbb{R}^n.$



(vi) $\mu(cE) = c\mu(E) \qquad \forall\, E \in \mathfrak{M},\ c \in (0, \infty).$



Định nghĩa 1.1. Ta gọi $\mathfrak{M}$ và μ lần lượt là σ-đại số Lebesgue và độ đo Lebesgue trên $\mathbb{R}^n$.

Bài toán 1.6. Cho Ω là một tập hợp Lebesgue đo được khác trống trong $\mathbb{R}^n$. Đặt

$$\mathfrak{N} = \{ A \in \mathfrak{M} : A \subset \Omega \}.$$

Chứng minh $\mathfrak{N}$ là một σ-đại số trong Ω.

(D1) $\Omega \in \mathfrak{N}$.

(D2) $\Omega \setminus A \in \mathfrak{N} \quad \forall A \in \mathfrak{N}$.

(D3) $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathfrak{N} \quad \forall \{A_n\} \in \mathfrak{N}$.

(D1)' $\mathbb{R}^n \in \mathfrak{M}$.

(D2)' $\mathbb{R}^n \setminus A \in \mathfrak{M} \quad \forall A \in \mathfrak{M}$.

(D3)' $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathfrak{M} \quad \forall \{A_n\} \in \mathfrak{M}$.

(D1) $\Omega \in \mathfrak{N}$.

(D1)’ $\Omega \in \mathfrak{M}$.

(D1) $X \in \mathfrak{N} = \{ A \in \mathfrak{M} : A \subset \Omega \}$.

(D2) $\Omega \setminus A \in \mathfrak{N} \quad \forall A \in \mathfrak{N}$.

(D2)’ $\mathbb{R}^n \setminus A \in \mathfrak{M} \quad \forall A \in \mathfrak{M}$.

$$\Omega \setminus A = \{ x : x \in \Omega \text{ và } x \notin A \} = \Omega \cap (\mathbb{R}^n \setminus A) \subset \Omega$$

(D3)’ $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathfrak{M}$ $\quad \forall \{A_n\} \in \mathfrak{M}$.

(D3) $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathfrak{N}$ $\quad \forall \{A_n\} \in \mathfrak{N}$.

(D3) Cho $A_n \subset \Omega$ sao cho $A_n \in \mathfrak{M}, \forall n \in \mathbb{N}$. Chứng minh

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \subset X \text{ và } \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathfrak{M}$$

(D3)’ Cho $A_n \in \mathfrak{M}, \forall n \in \mathbb{N}$. Ta có

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathfrak{M}$$

Bài toán 1.7. Cho Ω là một tập hợp Lebesgue đo được khác trống trong $\mathbb{R}^n$. Đặt $\mathfrak{N} = \{ A \in \mathfrak{M} : A \subset \Omega\}$ và $\nu(A) = \mu(A) \ \forall A \in \mathfrak{N}$.

Chứng minh ν là một độ đo dượng trong không gian đo được $(\Omega, \mathfrak{N})$.

(i) Nếu $\{A_n\}$ là một dãy các phần tử rời nhau trong $\mathfrak{M}$ ta có

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$$

(i) Nếu $\{A_n\}$ là một dãy các phần tử rời nhau trong $\mathfrak{N}$ chứng minh

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$$

(ii) có B trong $\mathfrak{N}$ để cho $\mu(B) < \infty$

Bài toán 1.7. Cho Ω là một tập hợp Lebesgue đo được khác trống trong $\mathbb{R}^n$. Đặt $\mathfrak{N} = \{ A \in \mathfrak{M} : A \subset \Omega\}$ và

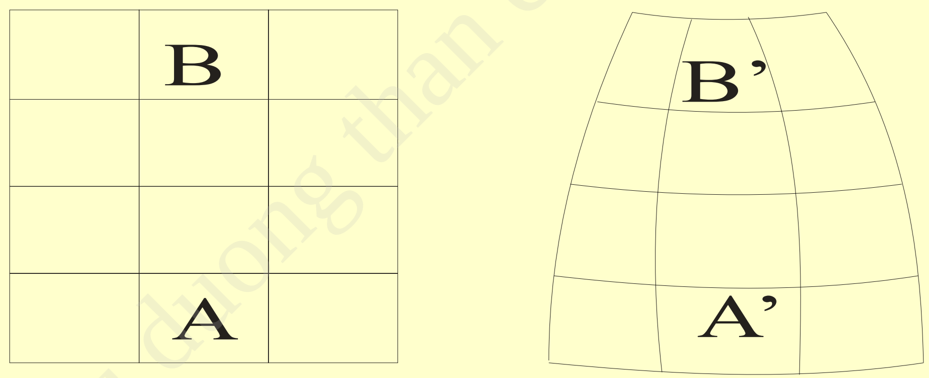
$$\nu(A) = \mu(A) \qquad \forall A \in \mathfrak{N}$$

Chứng minh ν là một độ đo dương trong không gian đo được $(\Omega , \mathfrak{N})$.

Định nghĩa . Độ đo dương ν được gọi là độ đo Lebesgue trong không gian đo được $(\Omega , \mathfrak{N})$.

Cho Ω là một hình chử nhật trên đó có bản đồ thế giới, $\mathfrak{M}$ là Lebesgue σ-đại số trên Ω.

Với mọi $E \in \mathfrak{M}$, ta đặt $\mu(E)$ là độ đo Lebesgue của E, và $\nu(E)$ là diện tích thật sự phần trên trái đất mà nó được vẽ ra. Ta thấy $\mu(A) = \mu(B)$ nhưng $\nu(A) \neq \nu(B)$.



Việc này cho thấy có nhiều độ đo khác nhau trên $\mathfrak{M}$