HÀM SỐ ĐO ĐƯỢC
TÍCH PHÂN LEBESGUE

Định nghĩa. Cho $(\Omega,\mathfrak{M},\mu)$ là một không gian đo được. Cho f là một ánh xạ từ Ω vào $\mathbb{R}$. Ta nói f là một ánh xạ đo được trên không gian đo được $(\Omega,\mathfrak{M},\mu)$ nếu $f^{-1}((a,\infty)) \in \mathfrak{M}$ với mọi số thực a.

Bài toán 2.1. Cho A là một tập đo được trong một không gian đo được $(\Omega,\mathfrak{M},\mu)$ và c là một số thực. Đặt

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & \forall\ x \in A, \\ 0 & \forall\ x \in \Omega \setminus A. \end{cases}$$

và $f(x) = c\ \chi_A(x)$. Chứng minh f đo được trên $(\Omega,\mathfrak{M},\mu)$

Định nghĩa. Cho A là một tập đo được trong một không gian đo được $(\Omega,\mathcal{M},\mu)$. Đặt

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & \forall\ x \in A, \\ 0 & \forall\ x \in \Omega \setminus A. \end{cases}$$

Ta gọi χ_A là hàm đặc trưng của A.

Đặt $A_1 = A$, $A_2 = \Omega \setminus A$, $c_1 = 1$ và $c_2 = 0$. Ta có A_1 và A_2 rời nhau , $A_1 \cup A_2 = \Omega$ và

$$\chi_A = c_1\chi_{A_1} + c_2\chi_{A_2}$$

Bài toán 2.2. Cho $A_1, A_2, \ldots, A_m$ là m tập đo được rời nhau trong một không gian đo được $(\Omega, \mathcal{M}, \mu)$ và $c_1, c_2, \ldots, c_m$ là m số thực. Giả sử $c_1 < c_2 < \ldots < c_m$ và

$$\Omega = \bigcup_{k=1}^{m} A_k$$

Đặt

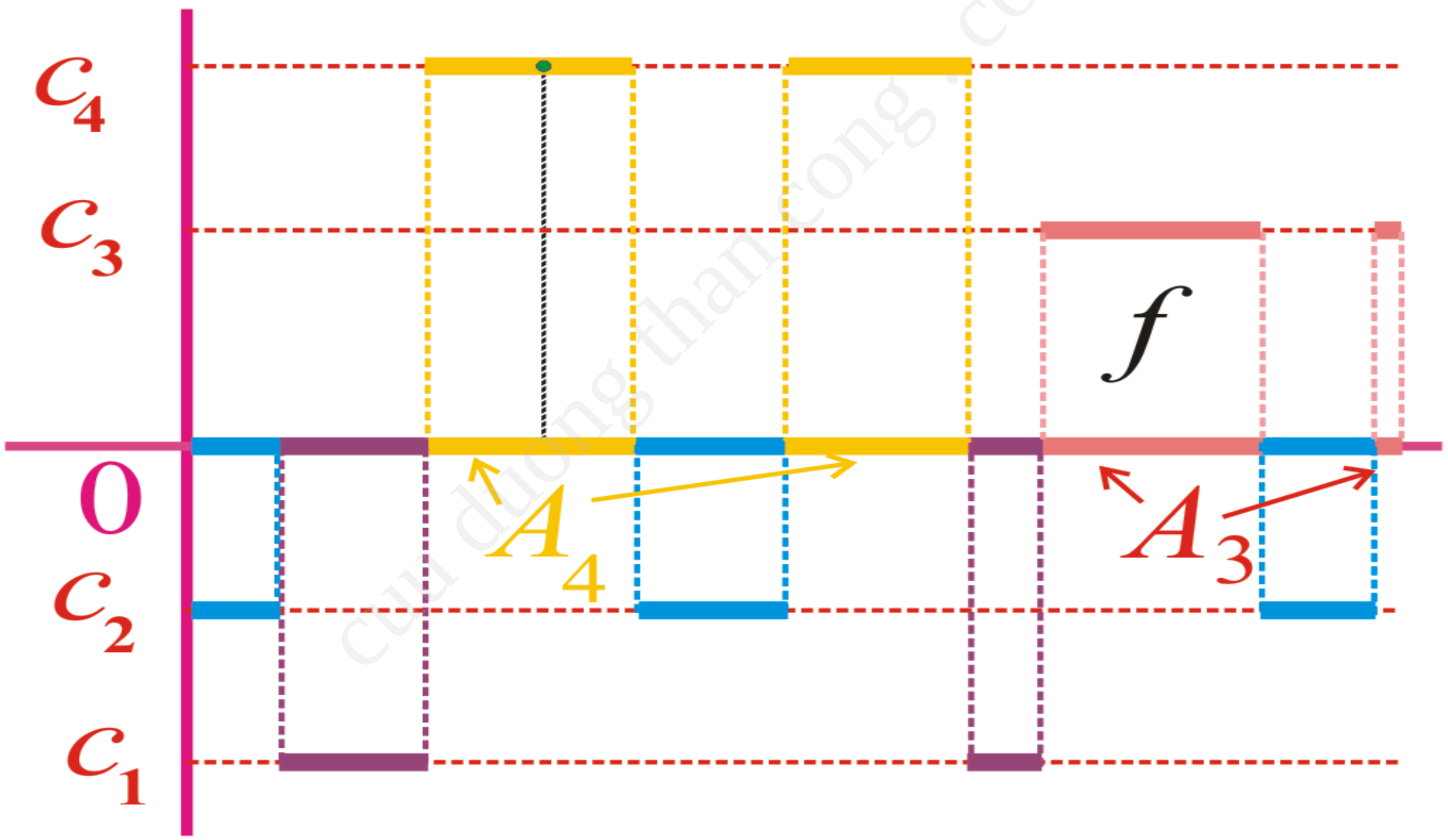
$$f(x) = \sum_{k=1}^{m} c_k \chi_{A_k}(x) \qquad \forall\ x \in \Omega$$

Chứng minh f đo được trên $(\Omega, \mathcal{M}, \mu)$.

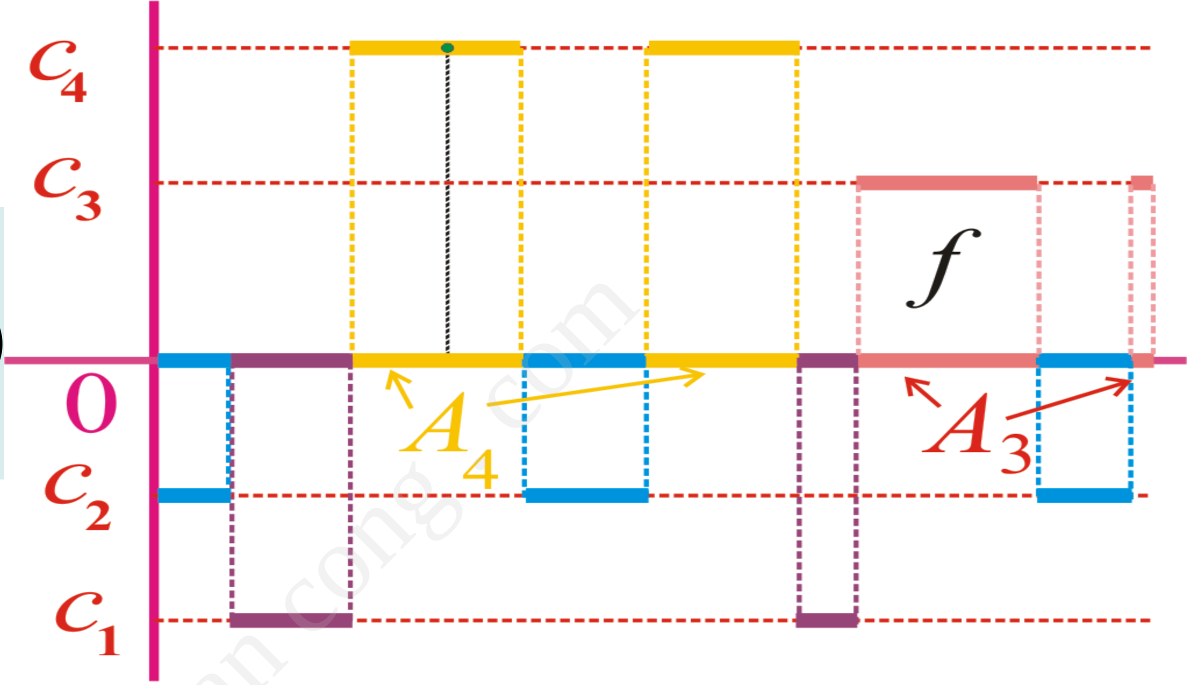
Hàm số f có dạng bên trên được gọi là một *hàm đơn*. Nếu $A_1, A_2, \ldots, A_m$ và Ω là các hội một số hữu hạn các khoảng trong $\mathbb{R}$, f được gọi hàm số *bậc thang*.

$c_1 < c_2 < \ldots < c_m$ và

$$f(x) = \sum_{k=1}^{m} c_k \chi_{A_k}(x) \qquad \forall\ x \in \Omega$$



$$f(x)=\sum_{k=1}^{m} c_k \chi_{A_k}(x)$$



$$f^{-1}((a,\infty))=\begin{cases}\phi & a\ge c_m,\\ \bigcup_{i=k}^{m} A_i & c_{k-1}\le a< c_k\\ \Omega & a<c_1\end{cases}$$

Bài toán 2.3. Cho $A_1, A_2, \ldots, A_m, B_1, B_2, \ldots, B_n$ là các tập đo được rời nhau trong một không gian đo được $(\Omega,\mathfrak{M},\mu)$ và $a_1, a_2, \ldots, a_m, b_1, b_2, \ldots, b_n$ là các số thực. Giả sử $a_1 < a_2 < \ldots < a_m$, $b_1 < b_2 < \ldots < b_n$ và $\bigcup_{k=1}^{m} A_k = \bigcup_{k=1}^{n} B_k = \Omega$. Đặt

$$f(x) = \sum_{i=1}^{m} a_i \chi_{A_i}(x) + \sum_{j=1}^{n} b_j \chi_{B_j}(x) \qquad \forall\ x \in \Omega$$

Chứng minh f đo được trên $(\Omega,\mathfrak{M},\mu)$.

$$f(x) = \sum_{i=1}^{m} a_i \chi_{A_i}(x) + \sum_{j=1}^{n} b_j \chi_{B_j}(x) \qquad \forall\ x \in \Omega$$

Tập $\{a_i + b_j : i = 1,2, \ldots, m \,;\, j = 1,2, \ldots, n\}$ có hữu hạn phần tử và có thể đánh số theo thứ tự tăng $\{d_1, d_2, \ldots, d_r\}$.

$$(A_i \cap A_j) \cap (A_i \cap A_{j'}) = A_i \cap (A_j \cap A_{j'}) = \phi \quad \text{nếu } j \neq j'$$

Đặt $D_s = \bigcup_{a_i + b_j = d_s} A_i \cap B_j \qquad \forall s = 1, \ldots, r.$

Ta thấy $D_1, \ldots, D_r$ rời nhau , $\bigcup_{s=1}^{r} D_s = \Omega$ và

$$f(x) = \sum_{s=1}^{r} d_s \chi_{A_s}(x) \qquad \forall\ x \in \Omega$$

Bài toán 2.4. Cho $A_1, A_2, \ldots, A_m, B_1, B_2, \ldots, B_n$ là các tập đo được rời nhau trong một không gian đo được $(\Omega, \mathfrak{M}, \mu)$ và $a_1, a_2, \ldots, a_m, b_1, b_2, \ldots, b_n$ là các số thực. Giả sử $a_1 < a_2 < \ldots < a_m$, $b_1 < b_2 < \ldots < b_n$ và $\bigcup_{k=1}^{m} A_k = \bigcup_{k=1}^{n} B_k = \Omega$. Đặt

$$f(x) = [\sum_{i=1}^{m} a_i \chi_{A_i}(x)][\sum_{j=1}^{n} b_j \chi_{B_j}(x)] \qquad \forall\ x \in \Omega$$

Chứng minh f đo được trên $(\Omega, \mathfrak{M}, \mu)$.

Định lý. Tích và tổng các hàm đơn là các hàm đơn.

Định lý 2.2. Cho f là một hàm đo được trên một không gian đo được $(\Omega,\mathcal{M},\mu)$. Lúc đó

(i) Có một dãy các hàm đơn $\{t_m\}$ trên $(\Omega,\mathcal{M},\mu)$ sao cho

$$\lim_{m\to\infty} t_m(x) = f(x) \qquad \forall \ x \in \Omega.$$

(ii) Nếu $f(x) \geq 0$ với mọi x trong Ω, ta có một dãy các hàm đơn $\{s_m\}$ trên $(\Omega,\mathcal{M},\mu)$ sao cho :

$$0 \leq s_1(x) \leq s_2(x) \leq \ldots \leq s_m(x) \leq f(x) \quad \forall \ x \in \Omega.$$

$$\lim_{m\to\infty} s_m(x) = f(x) \qquad \forall \ x \in \Omega.$$

Bài toán 2.5. Cho f là một hàm số thực đo được trên một không gian đo được $(\Omega,\mathfrak{M},\mu)$, b, c và d là ba số thực sao cho $b \le c < d$. Chứng minh các tập sau đây đo được : $f^{-1}([b, \infty))$, $f^{-1}((-\infty, b])$, $f^{-1}((-\infty, b))$, $f^{-1}([b, c])$, $f^{-1}([b, d))$, $f^{-1}((b, d))$, $f^{-1}((b, d])$.

$f^{-1}((a,\infty)) \in \mathfrak{M}$ với mọi số thực a.

$$[b,\infty) = \bigcup_{m=1}^{\infty}(b-\tfrac{1}{m},\infty)$$

$$f^{-1}\Big(\bigcup_{m=1}^{\infty}(b-\tfrac{1}{m},\infty)\Big) = \bigcup_{m=1}^{\infty} f^{-1}((b-\tfrac{1}{m},\infty))$$

$$(-\infty,b] = \mathbb{R} \setminus (b,\infty)$$

$$f^{-1}(\mathbb{R} \setminus (b,\infty)) = \Omega \setminus f^{-1}((b,\infty))$$

$$[b,c] = (-\infty,c] \bigcap [b,\infty)$$

$$f^{-1}((-\infty,c] \bigcap [b,\infty)) = f^{-1}((-\infty,c]) \bigcap f^{-1}([b,\infty))$$

Bài toán 2.6. Cho f và g là hai hàm số thực đo được trên một không gian đo được $(\Omega,\mathcal{M},\mu)$. Đặt

$$h(x) = \sup\ \{f(x)\ ,\ g(x)\ \} \qquad \forall\ x \in \Omega.$$

Chứng minh h đo được trên $(\Omega,\mathcal{M},\mu)$.

Cho một số thực a . Ta sẽ chứng minh

$$h^{-1}((a,\infty)) = f^{-1}((a,\infty)) \cup g^{-1}((a,\infty))$$

$$h^{-1}((a,\infty)) \subset f^{-1}((a,\infty)) \cup g^{-1}((a,\infty))$$

$$f^{-1}((a,\infty)) \cup g^{-1}((a,\infty)) \subset h^{-1}((a,\infty))$$

$$f^{-1}((a,\infty)) = \{x \in \Omega : f(x) > a\} \subset \{x \in \Omega : h(x) > a\}$$

$$f^{-1}((a,\infty)) \subset h^{-1}((a,\infty)) \qquad g^{-1}((a,\infty)) \subset h^{-1}((a,\infty))$$

Cho một số thực a .

$$h^{-1}((a,\infty)) = \{x \in \Omega : h(x) > a\}$$

$$= \{x \in \Omega : f(x) > a \text{ hoặc } g(x) > a \}$$

$$\subset \{x \in \Omega : f(x) > a\} \cup \{x \in \Omega : g(x) > a\}$$

$$h^{-1}((a,\infty)) \subset f^{-1}((a,\infty)) \cup g^{-1}((a,\infty))$$

Bài toán 2.7. Cho f và g là hai hàm số thực đo được trên một không gian đo được $(\Omega,\mathcal{M},\mu)$. Đặt

$$h(x) = \inf \{f(x) , g(x) \} \qquad \forall x \in \Omega.$$

Chứng minh h đo được trên $(\Omega,\mathcal{M},\mu)$.

Xét $f_1 = - f$, $g_1 = - g$ và $h_1 = - h$. Áp dụng bài 2.6.

Bài toán 2.7. Cho f và g là hai hàm số thực đo được trên một không gian đo được $(\Omega,\mathfrak{M},\mu)$. Đặt

$$h(x) = \inf\{f(x), g(x)\} \qquad \forall x \in \Omega.$$

Chứng minh h đo được trên $(\Omega,\mathfrak{M},\mu)$.

$$h^{-1}((a,\infty)) = f^{-1}((a,\infty)) \cap g^{-1}((a,\infty))$$

Bài toán 2.8. Cho f là một hàm số thực đo được trên một không gian đo được $(\Omega,\mathfrak{M},\mu)$. Đặt

$$f^{+}(x) = \sup\{f(x), 0\} \qquad \forall x \in \Omega,$$

$$f^{-}(x) = \sup\{-f(x), 0\} \qquad \forall x \in \Omega,$$

Chứng minh f^{+} và f^{-} đo được trên $(\Omega,\mathfrak{M},\mu)$.

Bài toán 2.9. Cho $\{f_m\}$ là một dãy hàm số thực đo được trên một không gian đo được $(\Omega,\mathfrak{M},\mu)$. Đặt

$$f(x) = \sup\{f_1(x), f_2(x), \ldots, f_m(x), \ldots\} \quad \forall x \in \Omega,$$

Chứng minh f đo được trên $(\Omega,\mathfrak{M},\mu)$.

$$f^{-1}((a,\infty)) = \bigcup_{m=1}^{\infty} f_m^{-1}((a,\infty)) \qquad \forall \; x \in \Omega.$$

Bài toán 2.10. Cho $\{f_m\}$ là một dãy hàm số thực đo được trên một không gian đo được $(\Omega,\mathfrak{M},\mu)$. Đặt

$$f(x) = \inf\{f_1(x), f_2(x), \ldots, f_m(x), \ldots\} \quad \forall x \in \Omega,$$

Chứng minh f đo được trên $(\Omega,\mathfrak{M},\mu)$.

$$f^{-1}((-\infty,a)) = \bigcap_{m=1}^{\infty} f_m^{-1}((-\infty,a)) \qquad \forall \; x \in \Omega.$$

Bài toán 2.11. Cho $\{f_m\}$ là một dãy hàm số thực đo được trên một không gian đo được $(\Omega,\mathfrak{M},\mu)$. Đặt

$$f(x) = \limsup_{m\to\infty} f_m(x) \qquad \forall \ x \in \Omega.$$

Chứng minh f đo được trên $(\Omega,\mathfrak{M},\mu)$.

Đặt $g_m(x) = \sup\{f_m(x), f_{m+1}(x), f_{m+2}(x), \ldots\}$ với mọi x trong Ω. Để ý) $= \inf\{g_1(x), g_2(x), g_3(x), \ldots\}$.

Bài toán 2.12. Cho $\{f_m\}$ là một dãy hàm số thực đo được trên một không gian đo được $(\Omega,\mathfrak{M},\mu)$. Đặt

$$f(x) = \liminf_{m\to\infty} f_m(x) \qquad \forall \ x \in \Omega.$$

Chứng minh f đo được trên $(\Omega,\mathfrak{M},\mu)$.

Định nghĩa . *Cho một không gian đo được* $(\Omega, \mathfrak{M})$ và μ là một độ đo dương trên $\mathfrak{M}$. Cho một tập con $E \in \mathfrak{M}$ và một hàm đơn không âm $s = \sum_{1 \le k \le m} c_k \chi_{A_k}$. Ta đặt

$$\int_E s \, d\mu = \sum_{1 \le k \le m} c_k \mu(E \bigcap A_k)$$

và gọi $\int_E s \, d\mu$ là *tích phân của s* trên E. Tích phân này có thể bằng ∞.

$$\int_\Omega s \, d\mu = \sum_{1 \le k \le m} c_k \mu(A_k)$$

Nếu $m = 1$ và $s = \chi_A$, thấy "độ đo" của A chính là

$$\int_E s\, d\mu$$

Đây là bước đầu của lý thuyết tích phân, nó tương thích với các khái niệm "đo đạt" ngoài đời.

Với khái niệm tích phân $\int_\Omega s\, d\mu = \sum_{1 \le k \le m} c_k \mu(A_k)$

của hàm đơn $s = \sum_{1 \le k \le m} c_k \chi_{A_k}$, lý thuyết tích phân tiếp cận những bài toán thực tiễn tổng quát hơn các phép đo đạt.

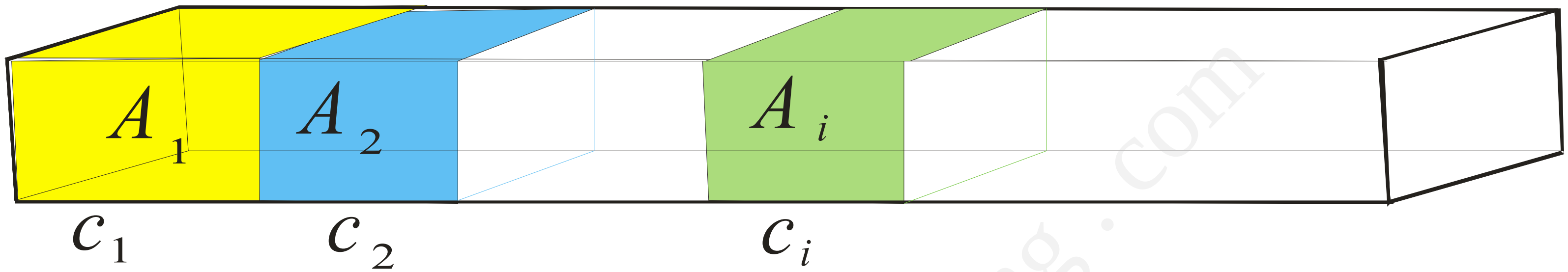
Đặt Ω là tập hợp các món hàng trong một siêu thị, $\mathfrak{M}$ là tập hợp tất cả các tập con của Ω và $\mu(E)$ là số phần tử trong E, với mọi tập con E của Ω. Đặt A_i là tập hợp các món hàng bạn mua có cùng giá c_i và $s = \sum_{1\le k\le m} c_k \chi_{A_k}$

Lúc đó ta đưa bài toán tính tổng số tiền phải trả về dạng tích phân

$$\int_{\Omega} s\, d\mu = \sum_{1\le k\le m} c_k \mu(A_k)$$

Dĩ nhiên ta có thể làm bài toán trên mà không thông qua lý thuyết độ đo và tích phân phức tạp. Nhưng chúng ta sẽ thấy cách tiếp cận này cho phép chúng ta khảo sát các bài toán mà cách tiếp cận giản đơn không làm được.

Cho một thanh kim loại không đồng chất có chiều dài 10m và có thiết diện là hình vuông mỗi cạnh dài 1 cm



Nếu ta chia thanh kim loại này ra m khúc $A_1, \ldots, A_m$ và gọi $c_1, \ldots, c_m$ là các tỉ trọng trung bình của các khúc $A_1, \ldots, A_m$. Đặt $s = \sum_{1 \le k \le m} c_k \chi_{A_k}$

Lúc đó trọng lượng của thanh sắt này chính là

$$\int_{\Omega} s \, d\mu = \sum_{1 \le k \le m} c_k \mu(A_k)$$

Ta phải mở rộng khái niệm tích phân để tiếp cận với các bài toán phức tạp hơn.

Định nghĩa. Cho $(\Omega, \mathfrak{M}, \mu)$ là một không gian đo được, $E \in \mathfrak{M}$, và f là một hàm đo được từ $(\Omega, \mathfrak{M})$ vào $[0, \infty)$. Đặt $\mathfrak{F}(f)$ là họ các hàm đơn s trên Ω sao cho $0 \le s \le f$ và đặt .

$$\int_E f \, d\mu = \sup_{s \in \mathfrak{F}(f)} \int_E s \, d\mu$$

Ta gọi $\int_E f \, d\mu$ là *tích phân Lebesgue* của f trên E với độ đo μ. Tích phân của f có thể bằng ∞.

Ý tưởng dùng khái niệm sup để định nghĩa tích phân của một hàm số đo được dương f rất hay. Từ thời Archimede cho đến mãi về sau người ta thường dùng một dãy $\{s_m\}$ hội tụ về f và cố gắng chứng minh dãy

$\{\int_E s_m d\mu\}$ hội tụ về một số thực nào đó và gọi đó là tích phân của f. Định nghĩa tích phân của Lebesgue không thấy rõ hình bóng của khái niệm dãy.

Khái niệm sup và inf của các hàm số trong tích phân quan hệ rất mật thiết với khái niệm hội và hợp của các tập hợp trong lý thuyết độ đo.

Để trở lại với các phương pháp dùng dãy thông dụng trong giải tích, Lebesgue đã bắt đầu với hình thức hội tụ dãy rất tương thích với khái niệm "sup" : sự hội tụ của các dãy tăng !

Để làm được việc này, Lebesgue đã dùng một số kỹ thuật rất hay và đẹp. Tronng khuôn giáo trình này, chúng tôi không đủ thời giờ để trình bày các ý toán đó cùng chi tiết chứng minh định lý sau. Phần chi tiết này sẽ được trình bày trong môn học "Lý thuyết đô đo".

Định lý hội tụ đơn điệu Lebesgue.

Cho $(\Omega, \mathcal{M}, \mu)$. là một không gian đo được và $\{f_m\}$ là một dãy ánh xạ đo được từ Ω vào $[0, \infty]$, f là một ánh xạ từ X vào $[0, \infty]$ và giả sử

(i) $f_1(x) \le f_2(x) \le \cdots \le f_m(x) \le \cdots \quad \forall x \in \Omega$

(ii) $f(x) = \lim\limits_{m\to\infty} f_m(x) \quad \forall x \in \Omega$

Lúc đó f đo được và

$$\int_X f\,d\mu = \int_X \lim_{m\to\infty} f_m\,d\mu = \lim_{m\to\infty} \int_X f_m\,d\mu .$$

Thí dụ. Cho $(\Omega, \mathfrak{M}, \mu)$ là không gian đo được $\mathbb{R}$ với độ đo Lebesgue. Đặt

$$f_n = \chi_{[0,2-n^{-1}]}$$

$$f = \chi_{[0,2]}$$

Ta thấy các điều kiện và kết luận của định lý hội tụ đơn điệu đều xãy ra. Nhưng $\{f_n\}$ không hội tụ đều về f.

Hiện tượng này luôn luôn xãy ra khi chúng ta xấp xĩ diện tích các hình cong bằng các phần hợp của các hình chữ nhật.

Việc kết hợp giữa sự hội tụ và sup và inf, cho ta khái niệm lim sup liminf. Ta có kết quả sau.

Bổ đề Fatou . Cho $(\Omega, \mathfrak{M}, \mu)$ là một không gian đo được, $E \in \mathfrak{M}$, và $\{g_m\}$ là dãy ánh xạ đo được từ Ω vào $[0,\infty]$. Ta có

$$\int_E \liminf_{m\to\infty} g_m d\mu \quad \le \quad \liminf_{m\to\infty} \int_E g_m d\mu$$

$$f_m(x) = \inf_{k\ge m} g_k(x)$$

$$f(x) = \liminf_{n\to\infty} g_n(x)$$

$$f(x) = \liminf_{x\to\infty} g_n(x) = \lim_{m\to\infty}(\inf_{k\ge m} g_k(x)) = \lim_{m\to\infty} f_m(x)$$

$$0 \le f_1 \le f_2 \le \ldots \le f_{\mathrm{m}} \to f$$

$$\int_E \liminf_{n\to\infty} g_n d\mu = \int_E f d\mu = \lim_{m\to\infty} \int_E f_m d\mu = \liminf_{m\to\infty} \int_E f_m d\mu$$

$$\int_E f_m d\mu \le \int_E g_m d\mu$$

$$\liminf_{n\to\infty} \int_E f_n d\mu \le \liminf_{n\to\infty} \int_E g_n d\mu$$

Định nghĩa. Cho $(\Omega, \mathfrak{M}, \mu)$ là một không gian đo được. Cho f là một ánh xạ đo được từ Ω vào $\mathbb{R}$ sao cho

$$\int_X |f|\, dx < \infty$$

Lúc đó ta nói f là một *hàm khả tích* trên Ω theo độ đo μ.

Nếu f là một hàm khả tích Lebesgue trên X theo độ đo μ và $f = u - v$ với u và v là các hàm số đo được không âm, ta đặt

$$\int_X f d\mu = \int_X u d\mu - \int_X v d\mu$$

Định lý hội tụ bị chận Lebesgue .

Cho $(\Omega, \mathfrak{M}, \mu)$ là một không gian đo được và $\{f_m\}$ là một dãy hàm số khả tích trên Ω, f là một hàm số trên X và giả sử có một hàm số g khả tích trên Ω sao cho

(i) $|f_m(x)| \leq g(x) \cdots \quad \forall x \in \Omega, \ \forall m \in \mathbb{N}$

(ii) $f(x) = \lim_{m\to\infty} f_m(x) \quad \forall x \in \Omega$

Lúc đó f khả tích trên Ω và

$$\int_\Omega f\,d\mu = \lim_{m\to\infty}\int_\Omega f_m\,d\mu \quad \text{và}$$

$$\lim_{m\to\infty}\int_\Omega |f_m - f|\,d\mu = 0 .$$

MỘT SỐ ĐỘ ĐO DƯƠNG THÔNG DỤNG

Cho $\Omega = \{1,2,\ldots,m\}$, $\mathfrak{M} = \mathcal{P}(\Omega)$ (họ tất cả các tập con của Ω) và $\mu(E)$ là số phần tử của E với mọi $E \in \mathfrak{M}$. Cho f là một ánh xạ từ Ω vào $\mathbb{R}$. Lúc đó f đo được và khả tích và

$$\int_\Omega f d\mu = \sum_{i=1}^{m} a_i$$

ở đây $a_i = f(i)$ với mọi $i \in \{1,2,\ldots,m\}$.

Đặt $\nu(E) = m^{-1}\mu(E)$ với mọi $E \in \mathfrak{M}$. Ta có $\nu(\Omega) = 1$ và

$$\int_\Omega f d\mu = m^{-1}\sum_{i=1}^{m} a_i$$

Cho Ω là tập các số nguyên dương $\{1,2,\ldots,m,\ldots\}$, $\mathfrak{M} = \mathcal{P}(\Omega)$ (họ tất cả các tập con của Ω) và $\mu(E)$ là số phần tử của E với mọi $E \in \mathfrak{M}$ (có thể bằng ∞). Cho f là một ánh xạ từ Ω vào $\mathbb{R}$. Ta thấy f đo được và f khả tích khi

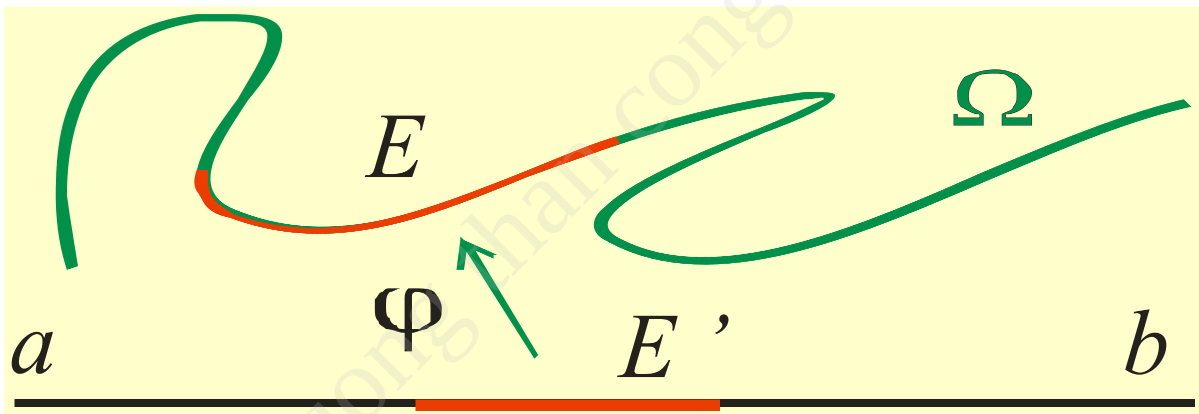
$$\sum_{i=1}^{\infty} |a_i| < \infty$$

Lúc đó
$$\int_{\Omega} f d\mu = \sum_{i=1}^{\infty} a_i$$

ở đây $a_i = f(i)$ với mọi $i \in \{1,2,\ldots,m,\ldots\}$.

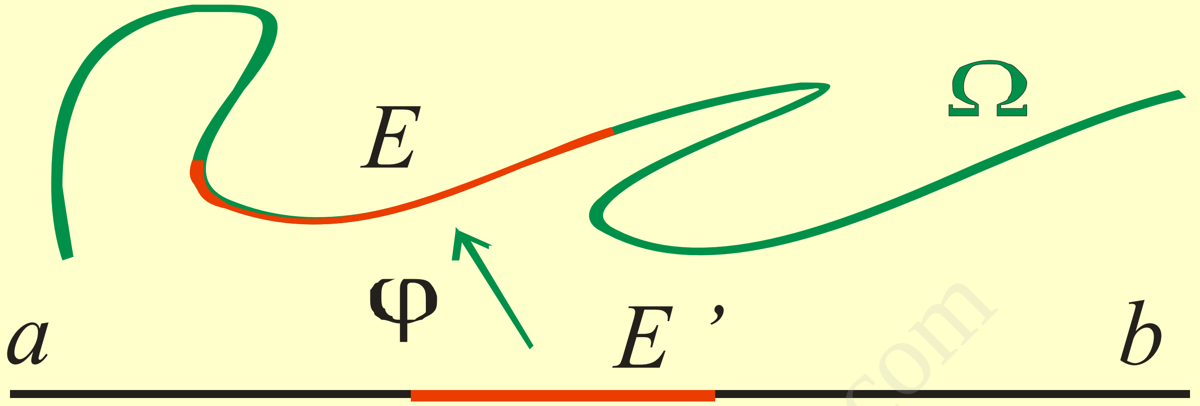
Cho a và b là hai số thực, $a < b$, và μ là độ đo Lebesgue trên $\mathbb{R}$. Cho $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$ là một đơn ánh khả vi liên tục từ (a,b) vào $\mathbb{R}^3$. Đặt $\Omega = \varphi((a,b))$.

Ta nói Ω là một đường cong thuộc lớp C^1.



Đặt $\mathfrak{M}$ là họ các tập con E của Ω sao cho có một tập Lebesgue đo được E' trong (a,b) để cho $E = \varphi(E')$ và

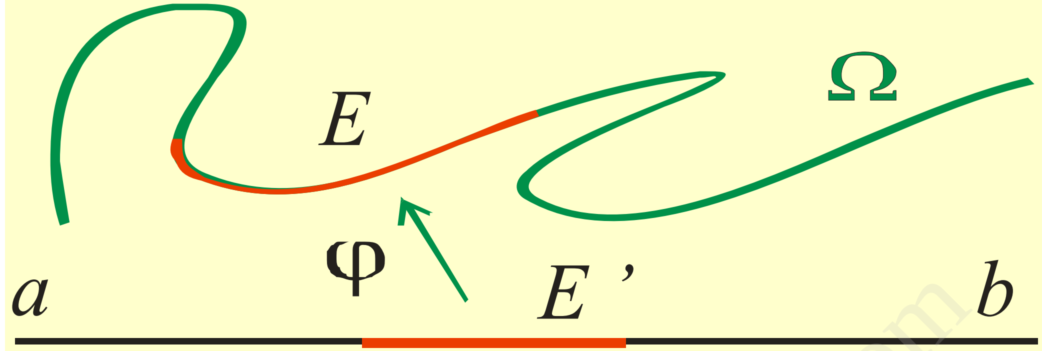
$$\nu(E) = \int_{E'} \left| \sqrt{|\varphi_1'|^2 + |\varphi_2'|^2 + |\varphi_3'|^2} \, d\mu \right.$$



Đặt $\mathfrak{M}$ là họ các tập con E của Ω sao cho có một tập Lebesgue đo được E' trong (a,b) để cho $E = \varphi(E')$ và

$$\nu(E) = \int_{E'} |\sqrt{|\varphi_1'|^2 + |\varphi_2'|^2 + |\varphi_3'|^2}\, d\mu$$

Lúc đó (Ω, $\mathfrak{M}$, ν) là một không gian đo được và ν chính là độ dài thực sự trên đường cong Ω . Phần chứng minh việc này xin xem trong sách "Dương Minh Đức - Làm quen toán đại học cùng máy tính II, NXB Giáo dục, 1998."



Đặt $\mathfrak{M}$ là họ các tập con E của Ω sao cho có một tập Lebesgue đo được E' trong (a,b) để cho $E = \varphi(E')$ và

$$\nu(E) = \int_{E'} |\sqrt{|\varphi_1'|^2 + |\varphi_2'|^2 + |\varphi_3'|^2}\, d\mu$$

Cho f là một hàm số khả tích trên $(\Omega, \mathfrak{M}, \nu)$, ta có công thức tích phân đường như sau :

$$\int_\Omega f d\upsilon = \int_{(a,b)} f(\varphi(x))\sqrt{|\varphi_1'|^2 + |\varphi_2'|^2 + |\varphi_3'|^2}\, d\mu$$

$$= \int_a^b f(\varphi(x))\sqrt{|\varphi_1'(x)|^2 + |\varphi_2'(x)|^2 + |\varphi_3'(x)|^2}\, dx$$

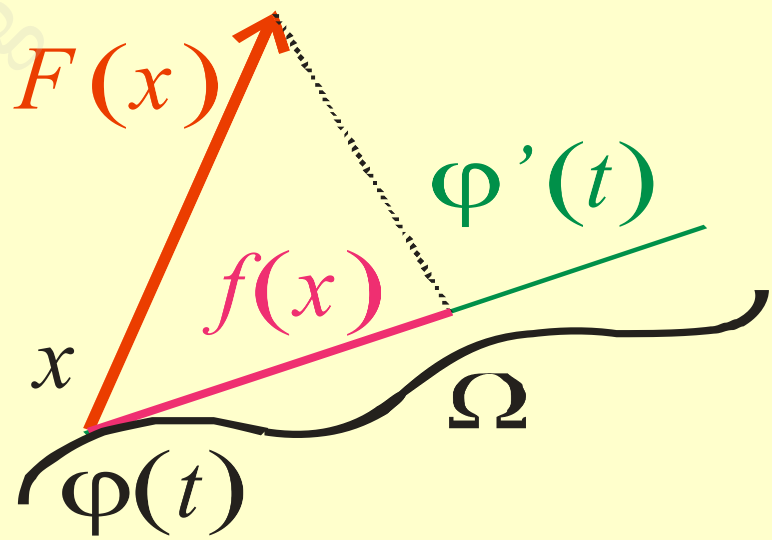
Khi ta đi xe đạp trong lúc có gió lớn trên một con đường quanh co ngoằn ngoèo , ta chắc thấy tác động của gió tùy thuộc vào hướng đi của chiếc xe đạp . Ta thử diễn tả sự kiện này bằng toán học .

Cho một đường cong $\Omega = \varphi((a, b))$ trong $\mathbb{R}^3$ và Q là một tập mở trong $\mathbb{R}^3$ và Q chứa Ω và một ánh xạ F từ Q vào $\mathbb{R}^3$. Tại mỗi điểm $x \in Q$ ta coi $F(x)$ như là một vectơ $(F_1(x), F_2(x), F_3(x))$ chỉ chiều và cường độ của một lực F (thí dụ như lực thổi của gió) , ở đây cường độ của $F(x)$ chính là

$$\| F(x) \| = \sqrt{| F_1(x) |^2 + | F_2(x) |^2 + | F_3(x) |^2}$$

Cho một điểm $x \in \Omega$, ta có $t \in (a,b)$ sao cho $x = \varphi(t)$. Tại điểm x đó hướng chuyển động của ta được xác định bởi $\varphi'(t) = (\varphi_1'(t), \varphi_2'(t), \varphi_3'(t))$.

Ta thấy lực $F(x)$ chỉ tác động thực sự lên sự di chuyển của ta theo thành phần $f(x)$ của $F(x)$ chiếu lên trên vectơ $\varphi'(t)$.



Với <. , .> là tích vô hướng trong $\mathbb{R}^3$, ta có công thức

$$f(\varphi(t)) = f(x) = \frac{< F(x), \varphi'(t) >}{\| \varphi'(t) \|} = \frac{< F(\varphi(t)), \varphi'(t) >}{\| \varphi'(t) \|}$$

Vậy công của lực F tác động lên vật di chuyển trên đường Ω chính là

$$\int_{\Omega} f dv = \int_a^b f(\varphi(t)) \| \varphi'(t) \| dt = \int_a^b < F(\varphi(t)), \varphi'(t) > dt$$

$$= \int_a^b [F_1(\varphi(t))\varphi_1'(t) + F_2(\varphi(t))\varphi_2'(t) + F_3(\varphi(t))\varphi_3'(t)]dt$$

Trong cơ học, ta dùng các ký hiệu sau : $M = F_1$, $N = F_2$, $Q = F_3$, $x(t) = \varphi_1(t)$, $y(t) = \varphi_2(t)$, $z(t) = \varphi_3(t)$. Vậy

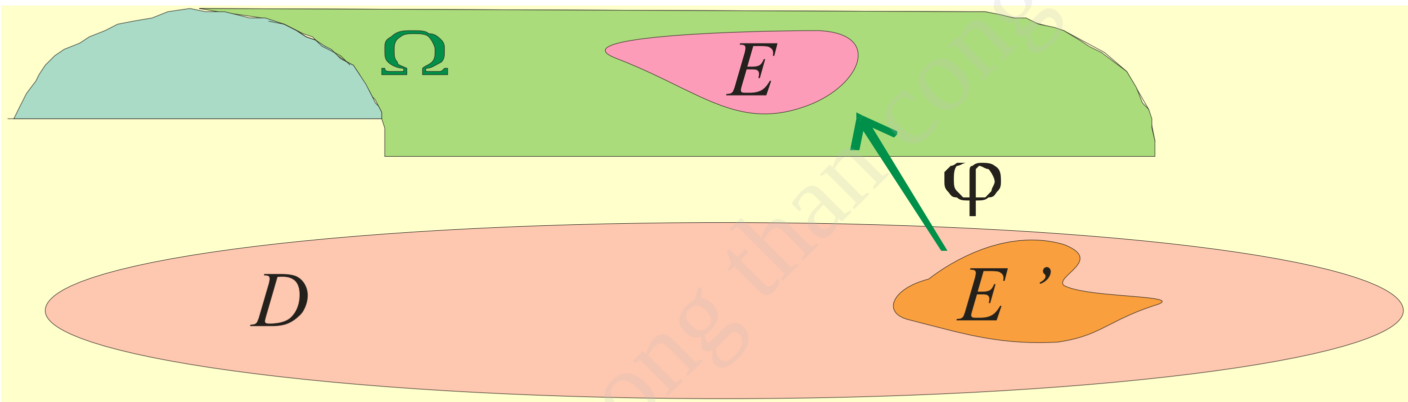
$$\frac{dx}{dt} = \varphi_1', \quad \frac{dy}{dt} = \varphi_2', \quad \frac{dz}{dt} = \varphi_3'$$

hay $\varphi'_1(t)dt = dx$, $\varphi'_2(t)dt = dy$, $\varphi'_3(t)dt = dz$, và công thức trên viết ra dạng công thức tích phân đường loại 2

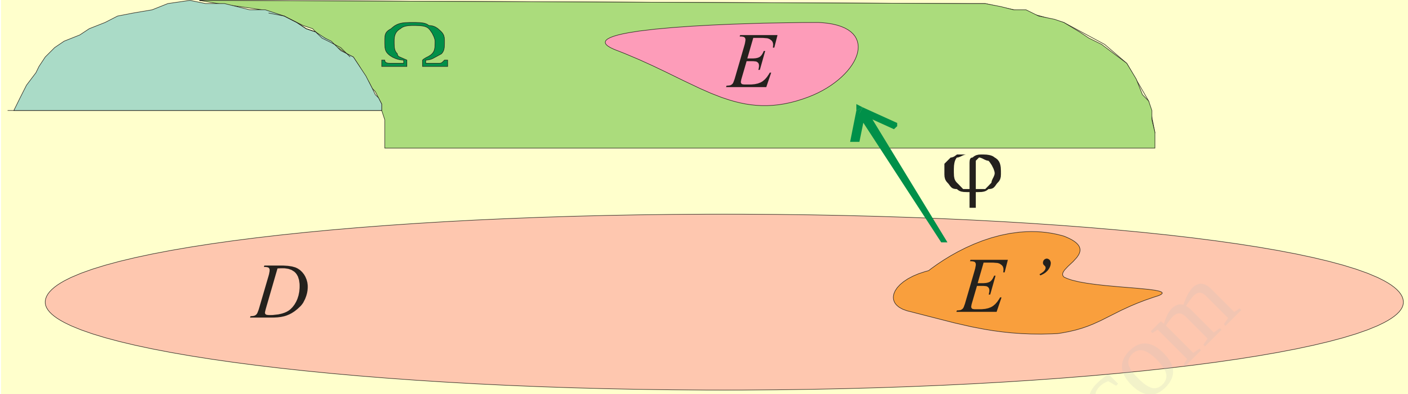
$$\int_{\Omega} f dv = \int_a^b M dx + N dy + Q dx$$

Cho D là một tập mở trong $\mathbb{R}^2$, và μ là độ đo Lebesgue trên $\mathbb{R}^2$. Cho $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$ là một đơn ánh khả vi liên tục từ D vào $\mathbb{R}^3$. Đặt $\Omega = \varphi(D)$.

Ta nói Ω là một mặt cong thuộc lớp C^1.



Đặt $\mathfrak{M}$ là họ các tập con E của Ω sao cho có một tập Lebesgue đo được E' trong D để cho $E = \varphi(E')$. Lúc đó $\mathfrak{M}$ là một σ- đại số trong Ω.



Đặt $\mathfrak{M}$ là họ các tập con E của Ω sao cho có một tập Lebesgue đo được E' trong D để cho $E = \varphi(E')$. Lúc đó

$\mathfrak{M}$ là một σ- đại số trong Ω. Ta đặt

$$\nu(E) = \int_{E'} | \sqrt{|\, w_1 \,|^2 + |\, w_2 \,|^2 + |\, w_3 \,|^2} \, d\mu$$

với

$$w_1 = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial \varphi_2}{\partial x} & \dfrac{\partial \varphi_3}{\partial x} \\ \dfrac{\partial \varphi_2}{\partial y} & \dfrac{\partial \varphi_3}{\partial y} \end{vmatrix}, \quad w_2 = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial \varphi_3}{\partial x} & \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial x} \\ \dfrac{\partial \varphi_3}{\partial y} & \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial y} \end{vmatrix}, \quad w_3 = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial x} & \dfrac{\partial \varphi_2}{\partial x} \\ \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial y} & \dfrac{\partial \varphi_2}{\partial y} \end{vmatrix}$$

Lúc đó $(\Omega, \mathfrak{M}, \nu)$ là một không gian đo được và ν chính là độ đo diện thực sự trên mặt cong Ω.

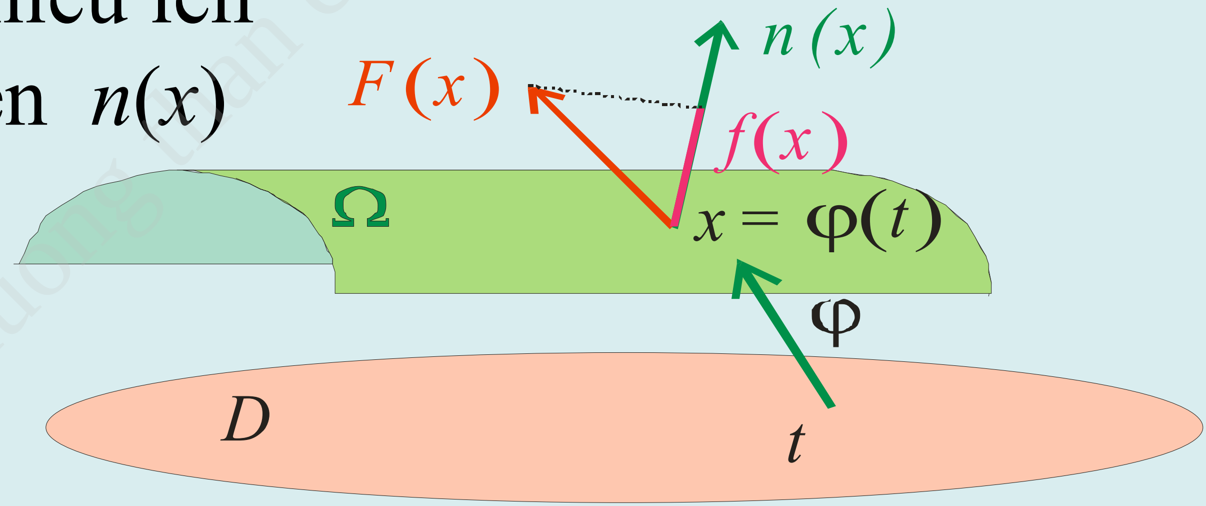
Cho f là một hàm số khả tích trên $(\Omega, \mathfrak{M}, \nu)$, ta có công thức tích phân mặt như sau :

$$\int_{\Omega} f d\upsilon = \int_{(a,b)} f(\varphi(t))\sqrt{|w_1|^2 + |w_2|^2 + |w_3|^2}\, d\mu$$

$$= \int_a^b f(\varphi(t))\sqrt{|w_1(t)|^2 + |w_2(t)|^2 + |w_3(t)|^2}\, dt$$

Cho một mặt cong $\Omega = \varphi(D)$ trong $\mathbb{R}^3$ và Q là một tập mở trong $\mathbb{R}^3$ và Q chứa Ω và một ánh xạ F từ Q vào $\mathbb{R}^3$. Tại mỗi điểm $x \in Q$ ta coi $F(x)$ như là một vectơ $(F_1(x), F_2(x), F_3(x))$ (thí dụ như lực thổi của gió)

Ta thấy lực $F(x)$ chỉ tác động thực sự lên Ω là thành phần $f(x)$ của $F(x)$ chiếu lên trên vectơ pháp tuyến $n(x)$ Với $<.\,,.>$ là tích vô hướng trong $\mathbb{R}^3$, ta có công thức



$$f(\varphi(t)) = f(x) = \frac{<F(x), n(x)>}{\| n(x) \|} = \frac{<F(\varphi(t)), n(\varphi(t))>}{\| n(\varphi(t)) \|}$$

Ta thấy

$$n(x) = n(\varphi(t)) = \frac{(w_1(t), w_2(t), w_3(t))}{\sqrt{|w_1(t)|^2 + |w_2(t)|^2 + |w_3(t)|^2}}$$

$$f(x) = f(\varphi(t)) = \frac{F_1(\varphi(t))w_1(t) + F_2(\varphi(t))w_2(t) + F_1(\varphi(t))w_3(t)}{\sqrt{|w_1(t)|^2 + |w_2(t)|^2 + |w_3(t)|^2}}$$

Do đó công của lực F trên mặt Ω là tích phân

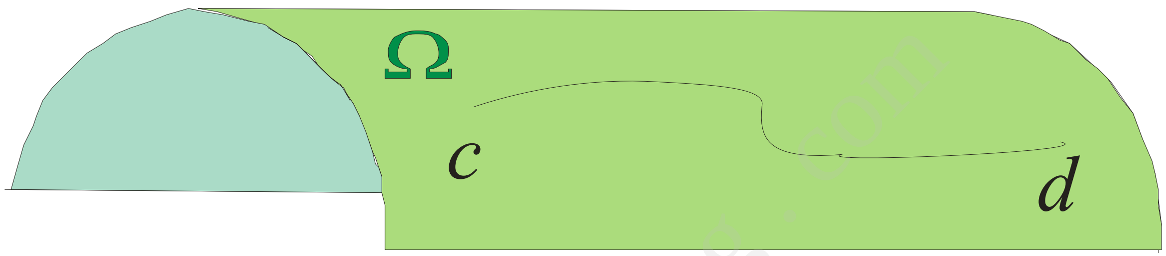
$$\int_\Omega f d\upsilon = \int_D f(\varphi(t))\sqrt{|w_1(t)|^2 + |w_2(t)|^2 + |w_3(t)|^2}\,dt$$

$$= \int_D [F_1(\varphi(t))w_1(t) + F_2(\varphi(t))w_2(t) + F_3(\varphi(t))w_3(t)]dt$$

$$= \int_D F_1 dydz + F_2 dxdz + F_3 dxdy$$

Đây là tích phân mặt loại hai.

Lý thuyết độ đo và tích phân còn cho phép chúng ta tiếp cận những thứ rất phức tạp.



Cho c và d ở trên mặt Ω. Cứ mỗi đường cong S thuộc lớp C^1 nằm trên Ω nối c và d , ta tính được độ dài của của S. Chặn dưới lớn nhất các độ dài này, được gọi là khoảng cách $\delta(c,d)$ (metric) giữa c và d.

Trong một số trường hợp có một đường cong S có độ dài bằng đúng metric $\delta(c,d)$. Lúc đó S được gọi là đường egodic trên Ω nối c và d. Đây là định nghĩa hiện đại về "đường thẳng".

Nếu Ω là mặt cầu đơn vị trong $\mathbb{R}^3$, các "đường thẳng" trên Ω là các vòng tròn giao tuyến giữa Ω và các mặt phẳng đi qua tâm quả cầu đơn vị.

Với $\Omega = \mathbb{R}^3 \{(0,0)\}$, $x = (1,0)$ và $y = (-1,0)$. Khoãng cách (trong độ đo Lebesgue) là 2 nhưng không có đường thẳng nào trong Ω chứa cả x và y.