ĐỀ CƯƠNG ÔN TẬP 2016
Độ đo xác suất

1. Độ đo

Định nghĩa. Cho $\mathcal{M}$ là một họ các tập con của tập X. Ta nói $\mathcal{M}$ là một σ-đại số nếu $\mathcal{M}$ thỏa

a) $X \in \mathcal{M}$,

b) Nếu $A \in \mathcal{M}$ thì $A^c \in \mathcal{M}$

c) Nếu $A_n \in \mathcal{M}$ $n = 1, 2, ...$ thì $\cup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{M}$.

Khi đó $(X, \mathcal{M})$ gọi là một không gian đo được và phần tử của $\mathcal{M}$ gọi là các tập đo được.

Hệ quả. *Cho $(X, \mathcal{M})$ là một không gian đo được. Ta có*

a) $\emptyset \in \mathcal{M}$,

b) Nếu $A_n \in \mathcal{M}$ $n = 1, 2, ...$ thì $\cap_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{M}$.

Bài tập. Chứng minh hệ quả bằng cách sử dụng luật De Morgan

$$A \setminus \bigcup_{i \in I} A_i = \bigcap_{i \in I} (A \setminus A_i), A \setminus \bigcap_{i \in I} A_i = \bigcup_{i \in I} (A \setminus A_i).$$

Mệnh đề. *a) Nếu $\mathcal{M}_i$ $(i \in I)$ là một họ các σ-đại số trên X thì $\cap_{i \in I} \mathcal{M}_i$ là một σ-đại số. Cho $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(X)$.*

b) Đặt $\sigma(\mathcal{F}) = \{A : \ A \in \mathcal{M}, \ \forall \mathcal{F} \subset \mathcal{M}\}$. Khi đó, $\sigma(\mathcal{F})$ là $sigma$-đại số nhỏ nhất chứa $\mathcal{F}$, nghĩa là cho $sigma$-đại số $\mathcal{M}$,

$$\mathcal{F} \subset \mathcal{M} \Rightarrow \sigma(\mathcal{F}) \subset \mathcal{M}.$$

Ta nói $\sigma(\mathcal{F})$ là σ-đại số sinh ra bởi $\mathcal{F}$.

Bài tập. a) Chứng minh ba tính chất của σ-đại số. b) CM tính nhỏ nhất của $\sigma(\mathcal{F})$.

Định nghĩa. Cho τ là họ các tập mở của $\mathbb{R}^n$. Khi đó σ-đại số nhỏ nhất trên $\mathbb{R}^n$ chứa τ gọi là *σ-đại số Borel* và ký hiệu là $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$. Các phần tử của $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$

gọi là các *tập Borel*. Các tập Borel thông thường là các tập mở trong $\mathbb{R}^n$, các tập đóng trong $\mathbb{R}^n$, giao đếm được các tập mở, hội đếm được các tập đóng.

Định nghĩa. Cho $(X, \mathcal{M})$ là một không gian đo được. Một ánh xạ $\mu : \mathcal{M} \to [0, \infty]$ gọi là một độ đo (dương) nếu

a) Tồn tại $A \in \mathcal{M}$ sao cho $\mu(A) < \infty$,

b) Nếu $A_n \in \mathcal{M}$, $n = 1, 2, ...$ và $A_i \cap A_j = \emptyset$ $(i \neq j)$ thì

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n).$$

Khi đó $(X, \mathcal{M}, \mu)$ gọi là một không gian đo. Nếu $\mu(X) = 1$ thì μ gọi là một độ đo xác suất và $(X, \mathcal{M}, \mu)$ gọi là một không gian xác suất.

Mệnh đề. *Với mỗi hàm tăng $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tồn tại một độ đo ký hiệu μ_F, gọi là độ đo Stieljes, xác định trên σ-đại số Borel $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ sao cho với mọi $a < b$ ta có*

$$\begin{aligned}
\mu_F([a,b]) &= F_+(b) - F_-(a),\\
\mu_F((a,b)) &= F_-(b) - F_+(a),\\
\mu_F([a,b)) &= F_-(b) - F_-(a),\\
\mu_F((a,b]) &= F_+(b) - F_+(a),
\end{aligned}$$

trong đó $F_+(x) = \lim_{t \to x^+} F(t)$ và $F_-(x) = \lim_{t \to x^-} F(t)$.

Định nghĩa. Nếu chọn $F(x) = x$ thì μ_F được gọi là độ đo Lebesgue trên $\mathbb{R}$ và ký hiệu là m hay m_1. Với độ đo Lebesgue, ta có $m(\{a\}) = 0$, $m((a,b)) = m([a,b)) = m((a,b]) = m([a,b]) = b - a$ với $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$.

Định lý. *Cho $(X, \mathcal{M}, \mu)$ là một không gian đo. Ta có*

a) $\mu(\emptyset) = 0$,

b) Nếu $A_n \in \mathcal{M}$, $n = 1, 2, ..., m$ và $A_i \cap A_j = \emptyset$ $(i \neq j)$ thì

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{m} A_n\right) = \sum_{n=1}^{m} \mu(A_n).$$

c) Nếu $A, B \in \mathcal{M}$ và $A \subset B$ thì $\mu(A) \leq \mu(B)$.

d) Nếu $A_n \in \mathcal{M}$ và $A_n \subset A_{n+1}$, , $n = 1, 2, ...$ thì

$$\lim_{n\to\infty} \mu(A_n) = \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right)$$

e) Nếu $A_n \in \mathcal{M}$, $A_{n+1} \subset A_n$, và $\mu(A_1) < \infty$, $n = 1, 2, \ldots$ thì

$$\lim_{n\to\infty} \mu(A_n) = \mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right)$$

f) Nếu $A_n \in \mathcal{M}$, $n = 1, 2, \ldots$ thì

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n).$$

Bài tập CM tính chất d) theo các bước sau

i) Đặt $B_1 = A_1$, $B_n = A_n \setminus A_{n-1}$, $n = 2, 3, \ldots$ CM $B_i \cap B_j = \emptyset$ khi $i \neq j$.
ii) CM $A_n = \cup_{i=1}^{n} B_i$.
iii) CM $A = \cup_{i=1}^{\infty} B_i$.
iv) Tính $\mu(A_n)$ và $\mu(A)$ theo $\mu(B_i)$.
v) Suy ra đpcm.

BÀI TẬP

1. Cho $X = \{a, b, c\}$. Tìm các σ-đại số chứa $\{a\}$. σ-đại số nhỏ nhất chứa $\{a\}$ là gì?

2. Cho $X = \{a, b, c, d\}$. Tìm các σ-đại số chứa $\{a, b\}$. σ-đại số nhỏ nhất chứa $\{a\}$ là gì? Trong σ-đại số đó, tập hợp $\{c\}$ có đo được không?

2. Hàm đo được

Mệnh đề. *Cho $(X, \mathcal{M})$ là một không gian đo được và $f : X \to Y$. Khi đó tập*

$$\mathcal{N}_f = \{W \subset Y : f^{-1}(W) \in \mathcal{M}\}$$

là một σ-đại số trên Y.

Định nghĩa. Cho $(X, \mathcal{M})$, $(Y, \mathcal{N})$ là hai không gian đo được. Ánh xạ $f : X \to Y$ gọi là*đo được* nếu $f^{-1}(W) \in \mathcal{M}$ với mọi $W \in \mathcal{N}$. Nếu

$(X, \mathcal{M}) = (\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$, $(Y, \mathcal{N}) = (\mathbb{R}^k, \mathcal{B}(\mathbb{R}^k))$ thì f được gọi là *Borel đo được* hay gọi vắn tắt là *hàm Borel.*

Định lý. *Cho $(X, \mathcal{M}), (\mathbb{R}^k, \mathcal{B}(\mathbb{R}^k))$ là không gian đo được. Ánh xạ $f : X \to \mathbb{R}^k$ là đo được nếu và chỉ nếu $f^{-1}(U) \in \mathcal{M}$ với mọi U là tập mở trong R^n.*

Bài tập CM Định lý theo các bước sau:

i) Đặt $\mathcal{N}_f = \{W \subset \mathbb{R}^k : f^{-1}(W) \in \mathcal{M}\}$. CM $\mathcal{N}_f$ là một σ-đại số trong $\mathbb{R}^k$.

ii) CM $\mathcal{B}(\mathbb{R}^k) \subset \mathcal{N}_f$.

Hệ quả. *Mọi ánh xạ liên tục $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ đều là một hàm Borel đo được.*

Bài tập. Sử dụng tính chất ảnh ngược liên tục của một tập mở là một tập mở và tính chất nếu $\mathcal{F} \subset \ \sigma-$đại số $\mathcal{M}$ thì $\sigma(\mathcal{F}) \subset \mathcal{M}$ để chứng minh mệnh đề.

Mệnh đề *a) Nếu X,Y,Z là các không gian đo được và $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ là đo được thì $g \circ f$ là đo được.*

b) Nếu X là không gian đo được, $f : X \to \mathbb{R}^n$ đo được và $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ đo được Borel thì $g \circ f$ là đo được.

Bài tập. a) Chứng minh tính chất $(g \circ f)^{-1}(A) = f^{-1}(g^{-1}(A))$ với $A \subset Z$.

b) CM mệnh đề.

Mệnh đề. *Hàm $f : X \to [-\infty, \infty]$ đo được nếu và chỉ nếu một trong các điều sau là đúng với mọi $a \in \mathbb{R}$*

a) $(f \geq a) := f^{-1}([a, \infty])$ đo được.

b) $(f > a) := f^{-1}((a, \infty])$ đo được.

c) $(f \leq a) := f^{-1}([-\infty, a])$ đo được.

d) $(f < a) := f^{-1}([-\infty, a))$ đo được.

e) $(f \in (a, b)) := f^{-1}((a, b))$ đo được với mọi $a < b$.

f) $(f \in V) := f^{-1}(V)$ đo được với mọi tập mở $V \subset \mathbb{R}$.

Bài tập. Cm mệnh đề trên theo các bước sau

i) CM $(f > a) = \cup_{n=1}^{\infty} \left(f \geq a + \frac{1}{n}\right)$. Từ đó CM a) $\Rightarrow$ b).

ii) CM b) $\Rightarrow$ c).

iii) CM $(f < a) = \cup_{n=1}^{\infty} \left(f \leq a - \frac{1}{n}\right)$. Từ đó CM c) $\Rightarrow$ d).

iv) CM $(f \in [a, b)) = (f < b) \setminus (f < a)$. Từ đó CM $(f \in [a, b))$ đo được.

CM $a + \delta_n < b$ với $\delta_n = \frac{b-a}{2n}$ và $(f \in (a,b)) = \cup_{n=1}^{\infty}(f \in [a + \delta_n, b)$. Từ đó CM d) $\Rightarrow$ e).

v) Sử dụng tính chất: mọi tập mở V trong $\mathbb{R}$ đều có thể viết dưới dạng $V = \cup_{n=1}^{\infty}(a_n, b_n)$, $a_n < b_n$, CM e) $\Rightarrow$ f).

Mệnh đề. *Cho $u, v : X \to R$ là các hàm số đo được và $\Phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ liên tục thì $h : X \to \mathbb{R}$ với $h(x) = \Phi(u(x), v(x))$ là một ánh xạ đo được.*

Mệnh đề. *Cho dãy hàm $f_n : X \to [-\infty, \infty]$ đo được thì $\sup f_n$, $\inf f_n$, $\limsup f_n$, $\liminf f_n$ là đo được.*

Bài tập. Đặt $g(x) = \sup_n f_n(x)$, $h(x) = \inf_n f_n(x)$. CM

$$(g > a) = \cup_{n=1}^{\infty}(f_n > a), (h < a) = \cup_{n=1}^{\infty}(f_n < a).$$

Từ đó CM mệnh đề.

Định nghĩa Cho H là một tập hợp, $A \subset H$. Khi đó ta định nghĩa

$$\mathbb{I}_A(x) = \begin{cases} 1 & (x \in A) \\ 0 & (x \in H \setminus A) \end{cases}$$

Hàm này còn được ký hiệu là χ_A.

Mệnh đề *Cho X là không gian đo được, $A \subset X$. Khi đó $\mathbb{I}_A$ đo được khi và chỉ khi A đo được.*

Bài tập. CM mệnh đề trên bằng cách tìm $\mathbb{I}_A^{-1}(V)$ với V mở. Xét các trường hợp a) $1 \in V, 0 \notin V$; b) $1 \notin V, 0 \in V$; c) $1 \in V, 0 \in V$; d) $1 \notin V, 0 \notin V$.

Định nghĩa Cho X là không gian đo được. Cho $s : X \to R$. Hàm s gọi là *hàm đơn* nếu $s(X)$ chỉ có hữu hạn giá trị.

Mệnh đề. *Cho hàm $s : X \to R$ có $s(X) = \{\alpha_1, ..., \alpha_n\}$ với $\alpha_i \neq \alpha_j$ với $i \neq j$. Đặt $A_i = s^{-1}(\alpha_i)$, ta có*

a) $A_i \cap A_j = \emptyset$ với $i \neq t$ và $\bigcup_{i=1}^{n} A_i = X$.

b) $s = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mathbb{I}_{A_i}$,

c) với mọi $g : R \to R$ ta có $g(s(x)) = \sum_{i=1}^{n} g(\alpha_i)\mathbb{I}_{A_i}$

d) hàm s đo được khi và chỉ khi A_i đo được với mọi $i = 1, 2, ...$

Bài tập. Chứng minh mệnh đề trên.

Định lý. *Với mọi hàm đo được $f : X \to [0, \infty]$ tồn tại các hàm đơn đo được không âm s_n trên X sao cho*
a) $0 \leq s_1 \leq s_2 \leq ... \leq f$,
b) $s_n(x) \to f(x)$ *khi* $n \to \infty$ *với mọi* $x \in X$.

Bài tập. i) Ký hiệu $[\alpha]$ là số nguyên lớn nhất không vượt quá $\alpha \in \mathbb{R}$. CM $\alpha - 1 \leq [\alpha] \leq \alpha$ và nếu $\alpha \leq \beta$ thì $[\alpha] \leq [\beta]$.
ii) Đặt $\varphi_n(t) = \frac{[2^n t]}{2^n}$ $(0 \leq t \leq n)$ và $\varphi_n(t) = n$ với $t > n$. CM $t - 2^{-n} \leq \varphi_n(t) \leq t$ với mọi $0 \leq t \leq n$. Từ đó suy ra $\lim_{n\to\infty} \varphi_n(t) = t$.
iii) CM $\varphi_n(t) \leq \varphi_{n+1}(t)$.
iv) CM

$$\varphi_n(t) = \sum_{k=0}^{n2^n-1} \frac{k}{2^n} \mathbb{I}_{[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n})}(t) + n\mathbb{I}_{[n,\infty)}(t).$$

v) Đặt $s_n(x) = \varphi_n(f(x))$. CM (s_n) thỏa định lý.

3. Tích phân Lebesgue của hàm không âm

Định nghĩa. Cho không gian đo $(X, \mathcal{M}, \mu)$, $E \in \mathcal{M}$. Cho hàm đơn đo được $s : X \to R$, $s(X) = \{\alpha_1, ..., \alpha_n\}$ với $\alpha_i \geq 0$ $(i = 1, ..., n)$. Ta định nghĩa

$$\int_E s(x)d\mu(x) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mu(A_i \cap E)$$

trong đó $A_i = (s = \alpha_i) := s^{-1}(\alpha_i)$. Nếu $f : X \to R$ đo được, ta định nghĩa

$$\int_E f(x)d\mu(x) = \sup_{0\leq s\leq f} \int_E s(x)d\mu(x)$$

trong đó s là các hàm đơn đo được.

Mệnh đề. *Cho không gian đo $(X, \mathcal{M}, \mu)$, $A, B, E \in \mathcal{M}$, $f, g : X \to R$ là các hàm đo được.*
a) nếu $0 \leq f \leq g$ thì $\int_E f d\mu \leq \int_E g d\mu$.

b) nếu $A \subset B$ và $f \geq 0$ thì $\int_A f d\mu \leq \int_B f d\mu$.
c) nếu $f \geq 0$ và $0 \leq c < \infty$ thì $\int_E cf d\mu = c \int_E f d\mu$.
d) nếu $f \geq 0$ thì $\int_E f d\mu = \int_X f \mathbb{I}_E d\mu$.
e) nếu $f(x) = c \geq 0$ với mọi $x \in E$ thì $\int_E f(x) d\mu = c\mu(E)$.
f) nếu $\mu(E) = 0$, $f \geq 0$ thì $\int_E f d\mu = 0$

Bài tập. Chứng minh mệnh đề theo các hướng dẫn sau

a) Lấy s đơn, đo được và $0 \leq s \leq f$. CM $\int_E s(x)d\mu \leq \int_E g(x)d\mu$. Từ đó suy ra đpcm.

b) Lấy s đơn, đo được và $0 \leq s \leq f$. CM $\int_A s(x)d\mu \leq \int_B s(x)d\mu$. Từ đó cm mệnh đề.

c) Lấy $s \geq 0$ đơn, đo được. CM $c \int_E s(x)d\mu = \int_E cs(x)d\mu$. Suy ra: nếu $0 \leq s \leq f$ thì $c \int_E s(x)d\mu \leq \int_E cf(x)d\mu$. Từ đó CM $c \int_E f(x)d\mu \leq \int_E cf(x)d\mu$ và suy ra $\int_E cf(x)d\mu \leq c \int_E f(x)d\mu$.

d) Lấy $s \geq 0$ đơn, đo được. CM $\int_E s(x)d\mu = \int_X s(x)\mathbb{I}_E(x)d\mu$. Từ đó suy ra nếu $0 \leq s \leq f$ thì $\int_E s(x)d\mu \leq \int_X f(x)\mathbb{I}_E(x)d\mu$. Mặt khác, nếu s' đơn và $0 \leq s' \leq f\mathbb{I}_E$ thì $\int_X s'(x)d\mu \leq \int_E f(x)d\mu$. Từ đó suy ra đpcm.

e) Áp dụng câu d).

f) Lấy s đơn, đo được và $0 \leq s \leq f$. CM $\int_E s(x)d\mu = 0$. Suy ra f).

Mệnh đề. *Cho s,t là hai hàm đơn đo được không âm trên $(X, \mathcal{M}, \mu)$, $E \in \mathcal{M}$. Ta có*

a) Hàm $\varphi : \mathcal{M} \to [0, \infty)$ xác định bởi

$$\phi(E) = \int_E s d\mu$$

là một độ đo dương trên $\mathcal{M}$.

b) $\int_E (s + t)d\mu = \int_E s d\mu + \int_E t d\mu$.

Bài tập. a) Giả sử $s = \sum_{i=1}^n \alpha_i \mathbb{I}_{A_i}$ với $s(X) = \{\alpha_1, ..., \alpha_n\}$ và $A_i = s^{-1}(\alpha_i)$. Viết biểu thức của $\phi(E)$. Từ đó CM các tính chất của độ đo.

b) Giả sử thêm $t = \sum_{i=1}^k \beta_i \mathbb{I}_{B_j}$ với $t(X) = \{\beta_1, ..., \beta_k\}$ và $B_j = t^{-1}(\beta_j)$. CM $\int_{E \cap A_i \cap B_j} (s+t)d\mu = \int_{E \cap A_i \cap B_j} s d\mu + \int_{E \cap A_i \cap B_j} t d\mu$. Từ đó suy ra mệnh đề.

Định lý hội tụ đơn điệu. *Cho không gian đo $(X, \mathcal{M}, \mu)$, $E \in \mathcal{M}$. Cho (f_n) là dãy các hàm đo được trên X sao cho*

a) $0 \leq f_n(x) \leq f_{n+1}(x)$ với mọi $n \geq n_0$
b) $f_n(x) \to f(x)$ khi $n \to \infty$ với mọi $x \in X$

Khi đó f là hàm đo được không âm và

$$\lim_{n\to\infty}\int_E f_n d\mu = \int_E \lim_{n\to\infty} f_n d\mu = \int_E f d\mu$$

ho

Bài tập. Chứng minh định lý hội tụ đơn điệu theo các câu sau:

a) CM $L = \lim_{n\to\infty}\int_E f_n d\mu$ tồn tại và $L \leq \int_E f d\mu$.

b) Cho $c \in (0,1)$, s là hàm đơn đo được thỏa $0 \leq s \leq f$. Đặt $A_n = \{x \in X : f_n(x) \geq cs(x)\}$. CM $A_n \subset A_{n+1}$ và $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$.

c) CM $c\int_{E\cap A_n} s d\mu \leq \int_E f_n d\mu$.

d) CM $\lim_{n\to\infty}\int_{E\cap A_n} s d\mu = \int_E s d\mu$.

e) suy ra $\int_E s d\mu \leq L$. Từ đó $\int_E f d\mu \leq L$.

Mệnh đề. *Cho $f_n, g, h : X \to [0,\infty]$ là các hàm đo được không âm trên $(X, \mathcal{M}, \mu)$. Ta có*

$$\int_X (g+h) d\mu = \int_X g d\mu + \int_X h d\mu$$

và

$$\int_X \sum_{n=1}^{\infty} f_n d\mu = \sum_{n=1}^{\infty}\int_X f_n d\mu.$$

Bài tập. Chọn hai dãy hàm đơn đo được s_n, t_n thỏa $0 \leq s_1 \leq s_2 \leq \ldots$, $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq \ldots$ và $\lim_{n\to\infty} s_n = g$, $\lim_{n\to\infty} t_n = h$. Dùng định lý hội tụ đơn điệu để CM mệnh đề.

Bổ đề Fatou. *Cho $f_n : X \to [0,\infty]$ là các hàm đo được không âm. Khi đó*

$$\liminf_{n\to\infty}\int_X f_n d\mu \geq \int_X \liminf_X f_n d\mu.$$

Bài tập. Đặt $g_n(x) = \inf_{k\geq n} f_k(x)$.

a) CM $g_n \leq g_{n+1}$.

b) CM $\int_X g_n d\mu \leq \int_X f_n d\mu$.

c) Sử dụng định lý hội tụ đơn điệu suy ra kết quả.

Mệnh đề. *Cho $f : X \to [0, \infty]$ là hàm đo được, Với $E \in \mathcal{M}$, đặt*

$$\varphi(E) = \int_E f d\mu.$$

Khi đó φ là một độ đo dương trên $\mathcal{M}$. Hơn nữa

$$\int_X g d\varphi = \int_X g f d\mu$$

với mọi hàm đo được không âm $g : X \to [0, \infty]$.

Lưu ý Để chứng minh một số tính chất của tích phân Lebesgue đúng với mọi hàm f chúng ta có thể dùng *kỹ thuật 4D*: 1) CM cho hàm **đặc trưng**, 2) CM cho hàm **đơn đo được**, 3) CM cho hàm **dương đo được**, 4) CM cho hàm **đo được có dấu bất kỳ**.

Bài tập. Lấy $A_i,\ i = 1, 2, \ldots$ là các tập đo được rời nhau trên X.

a) Sử dụng tính chất $\mathbb{I}_{\bigcup_{i=1}^n A_i} = \sum_{i=1}^n \mathbb{I}_{A_i}$, CM $\varphi(\bigcup_{i=1}^n A_i) = \sum_{i=1}^n \varphi(A_i)$.

b) Áp dụng định lý hội tụ đơn điệu suy ra tính chất cộng tính đếm được của φ.

c) CM công thức $\int_X g d\varphi = \int_X g f d\mu$ đúng nếu g là hàm đơn, đo được không âm.

d) Với hàm $g \geq 0$, chọn dãy s_n các hàm đơn đo được thỏa $0 \leq s_1 \leq s_2 \ldots$ và $\lim_{n\to\infty} s_n = g$. Sử dụng định lý hội tụ đơn điệu CM công thức $\int_X g d\varphi = \int_X g f d\mu$.

Định nghĩa. Cho $(X, \mathcal{M})$ là một không gian đo được. Độ đo $\lambda : \mathcal{M} \to [0, \infty]$ gọi là liên tục tuyệt đối so với độ đo $\mu : \mathcal{M} \to [0, \infty]$ nếu với mọi $E \in \mathcal{M}$ và $\mu(E) = 0$ thì $\lambda(E) = 0$. Ta ký hiệu $\lambda \ll \mu$.

Định lý Radon-Nikodym *Cho $(X, \mathcal{M}, \mu$ là một không gian đo. Giả sử μ là σ-hữu hạn, nghĩa là tồn tại $E_i \in \mathcal{M}$ với $\mu(E_i) < \infty$ và $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_i$. Nếu λ là một độ đo dương trên $\mathcal{M}$ thỏa $\lambda \ll \mu$ thì tồn tại một hàm đo được không âm h sao cho*

$$\lambda(E) = \int_E h d\mu$$

với mọi $E \in \mathcal{M}$. Ta nói h là đạo hàm Radon-Nikodym của λ đối với μ và ký hiệu $h = \frac{d\lambda}{d\mu}$ hay $h d\mu = d\lambda$.

4. Tích phân Lebesgue của hàm tổng quát

Định nghĩa. Cho không gian đo được $(X, \mathcal{M}, \mu)$ và cho $f : X \to [-\infty, \infty]$ là đo được. Ta nói f khả tích Lebesgue với độ đo μ nếu

$$\int_X |f(x)| d\mu(x) < \infty.$$

Ta ký hiệu tập các hàm khả tích Lebesgue là $L^1(X, \mathcal{M}, \mu)$ hay vắn tắt $L^1(\mu)$.

Hệ quả. *Cho f, g đo được trong $(X, \mathcal{M}, \mu)$. Nếu g khả tích và $|f(x)| \le g(x)$ với mọi $x \in X$ thì f khả tích.*

Bài tập. Chứng minh tính chất này.

Định nghĩa. Nếu $f \in L^1(\mu)$, ta định nghĩa

$$\int_E f d\mu = \int_E f^+ d\mu - \int_E f^- d\mu$$

với mọi $E \in \mathcal{M}$. Trong đó $f^+ := \max\{f, 0\}$, $f^- = \max\{-f, 0\}$.

Bài tập. Chứng minh các đẳng thức
a) $f(x) = f^+(x) - f^-(x)$, $|f(x)| = f^+(x) + f^-(x)$.
b) $(-f(x))^+ = f^-(x)$, $(-f(x))^- = f^+(x)$.
c) Nếu $c > 0$ thì $(cf(x))^+ = cf^+(x)$, $(cf(x))^- = cf^-(x)$.
d) Nếu $c < 0$ thì $(cf(x))^+ = -cf^-(x)$, $(cf(x))^- = -cf^+(x)$.

Định lý. *Cho $f, g \in L^1(\mu)$. Khi đó*
a) $\alpha f + \beta g \in L^1(\mu)$ và

$$\int_X (\alpha f + \beta g) d\mu = \alpha \int_X + \beta \int_X g d\mu.$$

b) nếu $f \le g$ thì $\int_X f d\mu \le \int_X g d\mu$.
c) $\left|\int_X f d\mu\right| \le \int_X |f| d\mu$.

Bài tập. i) Đặt $h = f + g$. CM $h^+ + f^- + g^- = h^- + f^+ + g^+$.
ii) CM $\int_X (f + g) d\mu = \int_X f d\mu + \int_X g d\mu$.
iii) Cho $c \in \mathbb{R}$. CM $\int_X cf d\mu = c \int_X f d\mu$.

iv) CM b), c).

Mệnh đề. *a) Nếu f đo được, $g \in L^1(\mu)$ và $|f| \leq g$ thì $f \in L^1(\mu)$.*
b) Nếu $f, g \in L^1(\mu)$ và $f \leq g$ thì $\int_X f d\mu \leq \int_X g d\mu$.
c) Nếu $f \in L^1(\mu)$ thì $|f| \in L^1(\mu)$ và $\left|\int_X f d\mu\right| \leq \int_X |f| d\mu$.

Bài tập. Chứng minh mệnh đề trên.

Định lý hội tụ bị chặn của Lebesgue. *Cho $g, (f_n)$ là đo được trên $(X, \mathcal{M}, \mu)$ sao cho*
a) $|f_n(x)| \leq g(x)$ với mọi $x \in X$, $n = 1, 2, ...$
b) g khả tích,
c) $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ tồn tại với mọi $x \in X$.
Khi đó $f \in L^1(\mu)$ và

$$\lim_{n\to\infty} \int_X f_n d\mu = \int_X \lim_{n\to\infty} f_n d\mu.$$

Bài tập. Chứng minh định lý hội tụ bị chặn theo các câu sau
i) Đặt $F_n(x) = 2g(x) - |f_n(x) - f(x)|$. CM $F_n(x) \geq 0$ với mọi $x \in X$.
ii) Tìm $\liminf_n F_n(x)$.
iii) Cho dãy số thực (α_n) và $c \in \mathbb{R}$. CM

$$\liminf_{n\to\infty}(c + \alpha_n) = c + \liminf_{n\to\infty} \alpha_n, \ \liminf_{n\to\infty}(-\alpha_n) = -\limsup_{n\to\infty} \alpha_n.$$

iv) Dùng iii) để biến đổi $\liminf_n \int_X F_n(x) d\mu(x)$.
v) CM $\lim_{n\to\infty} \int_X |f_n(x) - f(x)| d\mu(x) = 0$ rồi suy ra định lý.

5. Tập có độ đo không

Mệnh đề. *Cho không gian đo $(X, \mathcal{M}, \mu)$.*
a) Nếu $A, B \in \mathcal{M}$, $A \subset B$ và $\mu(B) = 0$ thì $\mu(A) = 0$.
b) Nếu $A_n \in \mathcal{M}$ và $\mu(A_n) = 0$, $n = 1, 2, ...$, thì $\mu\left(\bigcup_{n=1}^\infty A_n\right) = 0$.

Định nghĩa. Cho $(X, \mathcal{M}, \mu)$. Ta nói độ đo μ là *đầy đủ* nếu với mọi $A \in \mathcal{M}$, $\mu(A) = 0$ và cho $B \subset A$ thì $B \in \mathcal{M}$. Trong trường hợp này, σ-đại số $\mathcal{M}$ cũng gọi là *đầy đủ*.

Mệnh đề. *Cho $(X, \mathcal{M}, \mu)$. Gọi $\mathcal{M}^*$ là họ các tập $E \subset X$ sao cho tồn tại các tập $A, B \in \mathcal{M}$ sao cho $A \subset E \subset B$ và $\mu(B \setminus A) = 0$. Khi đó đặt*

$\mu^*(E) = \mu(A)$. Ta được $\mathcal{M}^*$ là một σ-đại số đầy đủ trên X và μ^* là một độ đo đầy đủ trên $\mathcal{M}^*$.

Bài tập. Chứng minh mệnh đề trên theo các bước sau

i) Giả sử $A \subset E \subset B$ và $\mu(B \setminus A) = 0$, $A_1 \subset E \subset B_1$ và $\mu(B_1 \setminus A_1) = 0$ với $A, A_1, B, B_1 \in \mathcal{M}$. CM $\mu(A) = \mu(A_1)$. Từ đó suy ra định nghĩa của μ^* hoàn toàn xác định.

ii) CM $\mathcal{M}^*$ là một σ-đại số.

iii) CM μ^* là một độ đo.

iv) CM tính đầy đủ của $(X, \mathcal{M}^*, \mu^*)$.

Định nghĩa. Cho tập $(X, \mathcal{M}, \mu)$, cho $E \in \mathcal{M}$ thỏa $\mu(E^c) = 0$. Hàm $f : E \to \mathbb{R}^k$ gọi là *đo được hầu hết trên X* nếu $f^{-1}(V) \cap E \in \mathcal{M}$ với mọi V mở trong $\mathbb{R}^k$.

Định nghĩa. Trên $(X, \mathcal{M}, \mu)$, xét hàm mệnh đề $P(x)$, $x \in X$. Ta nói P đúng hầu hết trên $E \in \mathcal{M}$ nếu tồn tại một tập hợp $A \in \mathcal{M}$, $\mu(A) = 0$ sao cho $P(x)$ đúng trên $E \setminus A$. Ta viết P đúng hầu hết khắp nơi (hkn hay a.e.) trên E. Nếu μ là độ đo xác suất, ta còn nói P đúng hầu chắc chắn (hcc hay a.s.) trên E .

Bài tập. Cho $(X, \mathcal{M}, \mu)$. Cho $f, g, f_n, g_n : X \to \mathbb{R}$.

i) Nếu $f_1 = g_1$, $f_2 = g_2$ hkn thì $f_1 \pm f_2 = g_1 \pm g_2$, $f_1 f_2 = g_1 g_2$ hkn.

ii) Nếu $f_n = g_n$ hkn với mọi $n = 1, 2, ...$ và nếu $\lim_{n\to\infty} f_n = f$ hkn, $\lim_{n\to\infty} g_n = g$ thì $f = g$ hkn.

iii) Nếu tồn tại $M > 0$ sao cho $|f(x)| \leq M$ hkn thì ta nói f bị chặn hkn. CMR nếu f, g bị chặn hkn thì $f \pm g, fg$ bị chặn hkn.

iv) Nếu f bị chặn hkn. Đặt $\|f\|_\infty = \inf\{M : |f(x)| \leq M \ hkn\}$. CM $|f(x)| \leq \|f\|_\infty$ hkn.

v) Nếu f, g bị chặn hkn thì $\|f + g\|_\infty \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$.

Mệnh đề. *Trên $(X, \mathcal{M}, \mu)$ cho $E \in \mathcal{M}$.*

a) Nếu $f, g : X \to [0, \infty]$ đo được và $f = g$ h.h. thì $\int_E f d\mu = \int_E g d\mu$.

b) Nếu $f, g : X \to [-\infty, \infty]$, f khả tích và $f = g$ h.h. thì g khả tích và $\int_E f d\mu = \int_E g d\mu$.

c) Nếu $f : X \to [0, \infty]$ đo được và $\int_E f d\mu = 0$ thì f=0 h.h. trên E.

d) Cho f khả tích. Nếu $\int_E f d\mu = 0$ với mọi $E \in \mathcal{M}$ thì $f = 0$ h.h.

e) Cho f khả tích. Nếu

$$\left|\int_X f d\mu\right| = \int_X |f| d\mu$$

thì $|f| = f$ *hay* $|f| = -f$ *h.h. trên X.*

Bài tập Chứng minh mệnh đề trên

i) CM a) bằng cách CM $\int_X f(x)d\mu = \int_{A^c} f(x)d\mu$.

ii) Theo giả thiết, tồn tại $A \in \mathcal{M}$, $\mu(A) = 0$, sao cho $f(x) = g(x)$ với mọi $x \in A^c$. CM $\int_X f^+(x)d\mu = \int_{A^c} f(x)d\mu$. Từ đó suy ra đpcm.

iii) CM c). Đặt $E_n = \{x \in X : f(x) \geq \frac{1}{n}\}$, $E = \{x \in X : f(x) > 0\}$. CM $\mu(E_n) = 0$ và $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$. Từ đó suy ra c).

iv) CM d). Đặt $E = \{x \in X : f(x) > 0\}$. CM $\int_X f^+(x)d\mu = \int_E f(x)d\mu$. Từ đó suy ra $f^+ = 0$ hkn. CM $f^- = 0$ hkn. Từ đó suy ra $f = 0$ hkn.

Định lý. *Các định lý hội tụ đơn điệu, bổ đề Fatou, định lý hội tụ bị chặn vẫn đúng nếu các tính chất được thay bằng tính chất h.h.*

Định lý. *Giả sử* (f_n) *là một dãy hàm đo được xác định h.h. trên X sao cho*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_X |f_n| d\mu < \infty.$$

Khi đó chuỗi

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$$

hội tụ với h.h. x *và* f *khả tích. Ngoài ra*

$$\int_X \sum_{n=1}^{\infty} f_n d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_X f_n d\mu$$

Định nghĩa Cho đoạn (a, b) và cho $x_0 = a < x_1 < ... < x_n = b$. Tập $\mathcal{P} = \{x_0, ..., x_n\}$ gọi là một phân hoạch của $(a, b]$. Cho hàm $f : (a, b) \to \mathbb{R}$. Đặt $m_n = \inf_{(x_{n-1}, x_n)} f(x)$, $M_n = \sup_{(x_{n-1}, x_n)} f(x)$

$$m_i = \inf_{(x_{i-1}, x_i]} f(x), M_i = \sup_{(x_{i-1}, x_i]} f(x), i = 1, ..., n-1.$$

Tổng

$$L(\mathcal{P},f)=\sum_{i=1}^{n} m_i(x_i-x_{i-1}),\ U(\mathcal{P},f)=\sum_{i=1}^{n} M_i(x_i-x_{i-1})$$

gọi lần lượt là *tổng dưới* và *tổng trên* của f theo phân hoạch $\mathcal{P}$. Hàm số f gọi là *khả tích Riemann* trên khoảng (a,b) nếu

$$\sup_{\mathcal{P}} L(\mathcal{P},f)=\inf_{\mathcal{Q}} U(\mathcal{Q},f).$$

Định lý. *Hàm f khả tích Riemann trên (a,b) thì f cũng khả tích Lebesgue trên (a,b) và*

$$\int_a^b f(x)dx=\int_{(a,b)} f(x)dm(x).$$

Bài tập Dùng các câu gợi ý, CM mệnh đề trên cho trường hợp f là hàm đo được Lebesgue trên $(a,b]$ và $f\geq 0$. Nhắc lại, độ đo Lebesgue m trên $\mathbb{R}$ thỏa $m((\alpha,\beta))=\beta-\alpha$ với $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$, $\alpha<\beta$. Ngoài ra $m(\{\alpha\})=0$.

i) Với mọi phân hoạch $\mathcal{P}: x_0=a<x_1<...<x_n=b$, đặt

$$m_i=\inf_{x_{i-1}<x\leq x_i} f(x), M_i=\sup_{x_{i-1}<x\leq x_i} f(x).$$

$$s_{\mathcal{P}}(x)=\sum_{i=1}^{n} m_i\mathbb{I}_{(x_{i-1},x_i]}(x), S_{\mathcal{P}}(x)=\sum_{i=1}^{n} M_i\mathbb{I}_{(x_{i-1},x_i]}(x)$$

CM

$$\int_{(a,b)} s_{\mathcal{P}}(x)dm(x)=L(\mathcal{P},f), \int_{(a,b)} S_{\mathcal{P}}(x)dm(x)=U(\mathcal{P},f)$$

ii) Cho $\mathcal{P},\mathcal{Q}$ là hai phân hoạch của khoảng $(a,b]$. CM $s_{\mathcal{P}}\leq f\leq S_{\mathcal{Q}}$.

iii) Suy ra $L(\mathcal{P},f)\leq\int_{(a,b]} f(x)dm(x)\leq U(\mathcal{Q},f)$ và ta có đpcm.

Phương pháp chứng minh hàm f khả tích Riemann

Hàm f khả tích Riemann trên $\mathbb{R}$ khi và chỉ khi các điều sau thỏa:

a) Tồn tại khoảng (a,b) bị chặn sao cho $f(x)=0$ với mọi $x\notin(a,b)$.

b) Tồn tại số M sao cho $|f(x)|\leq M$ với mọi $x\in(a,b)$.

c) Hàm f liên tục trên $(a,b)\setminus A$ với $A\subset R$ là tập có $m(A)=0$.

Lưu ý. Tập A hữu hạn hay A đếm được ($A=\{x_1,x_2,...\}$) có độ đo 0 trên $\mathbb{R}$.

Phương pháp chứng minh hàm f khả tích Lebesgue bằng tích phân Riemann

Hàm f khả tích Riemann thì f khả tích Lebesgue và

$$(\mathcal{R})\ \int_a^b f(x)dx = (\mathcal{L})\ \int_a^b f(x)dm(x)$$

BÀI TẬP

Khảo sát tính khả tích Lebesgue của f trên khoảng được cho

1. $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ trên $(0, 1)$
2. $f(x) = \sqrt{x}$ trên khoảng $(0, 2)$

Phương pháp chứng minh một hàm f không khả tích Lebesgue trên (a,b)

Cách 1: CMR $|f| \geq g \geq 0$ và g không khả tích Lebesgue trên (a, b).
Cách 2: Tìm hàm f_n thỏa $0 \leq f_n \leq |f|$ và $\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n dx \to \infty$.
Cách 3: Chứng minh hàm f không khả tích trên khoảng $(c, d) \subset (a, b)$.

Ghi nhớ. *Hàm $f(x) = \frac{1}{x^\alpha}$ không khả tích trên $(0, b)$ ($b > 0$) nếu $\alpha \geq 1$. Hàm $f(x) = \frac{1}{x^\beta}$ không khả tích trên (b, ∞) nếu $\beta \leq 1$.*

BÀI TẬP

Khảo sát tính khả tích Lebesgue của f trên khoảng được cho

1. $f(x) = 1$ trên khoảng $(0, \infty)$
2. $f(x) = x$ trên khoảng $(0, \infty)$
3. $f(x) = \frac{1}{x^\alpha}$ ($\alpha < 1$) trên $(1, \infty)$
4. $f(x) = \frac{1}{x}$ trên $(1, \infty)$
5. $f(x) = \frac{e^{-x}}{x^\alpha}$ ($\alpha < 1$) trên $(0, \infty)$
6. $f(x) = \frac{1}{x^\beta}$ ($\beta > 1$) trên $(0, 1)$
7. $f(x) = \frac{1}{x}$ trên $(0, 1)$
8. $f(x) = \frac{e^{-x}}{x^\beta}$ ($\beta > 1$) trên $(0, \infty)$
9. $f(x) = \frac{\cos x}{x\sqrt{x}}$ trên $(0, \infty)$

10. $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ trên $(0, \infty)$

Phương pháp chứng minh hàm f khả tích bằng tích phân Riemann suy rộng

Cách 1 (trực tiếp): Sử dụng định lý hội tụ đơn điệu ta có thể CMR nếu
a) hàm $f \geq 0$
b) hàm f khả tích Riemann trên mọi khoảng bị chặn $[c, d] \subset (a, b)$
c)

$$\lim_{c \to a^+, d \to b^-} \int_c^d f(x)dx < \infty$$

Thì hàm f khả tích Lebesgue trên (a, b) và

$$\int_a^b f(x)dm(x) = \int_a^b f(x)dx$$

Ghi nhớ. *Hàm*

$$f(x) = \begin{cases} \frac{A}{x^\alpha} & (0 < x < 1) \\ \frac{B}{x^\beta} & (x \geq 1) \end{cases}$$

khả tích Lebesgue khi và chỉ khi $\alpha < 1 < \beta$.

Cách 2 (gián tiếp): Hàm f khả tích nếu
a) f đo được Lebesgue,
b)$|f| \leq g$ và
c) g khả tích Lebesgue (chứng minh bằng cách dùng cách 1).

Cách 3 (chia nhỏ): Chia khoảng $(a, b) = A \cup B$ sau đó chứng minh f khả tích trên A và trên B.

BÀI TẬP

Khảo sát sự khả tích của

1. $f(x) = e^{-x}x^{\alpha-1}$ trên $(0, \infty)$. HD: ta có BĐT $e^x \geq \frac{x^k}{k!}$ khi $x > 0$.
2. $f(x) = \frac{\sin x}{x^{3/2}}$ trên $(0, 1)$.
3. $f(x) = e^{-|x|} \sin x$ trên R
4. $f(x) = e^{-kx^2}$ $(k > 0)$ trên R

Phương pháp chứng minh tích phân phụ thuộc liên tục vào tham số

Mệnh đề *Cho hàm số* $f : I \times (a, b)$. *Giả sử*

a) với mỗi $\lambda \in (a, b)$ *hàm* $x \mapsto f(x, \lambda)$ *đo được theo* x

b) tồn tại $\lim_{\lambda\to\lambda_0} f(x, \lambda) = h(x)$

c) tồn tại hàm g *khả tích trên* I *và khoảng* $[a_0, b_0] \subset (a, b)$ *sao cho* $\lambda_0 \in [a_0, b_0]$ *sao cho* $|f(x, \lambda)| \le g(x)$ *với mọi* $x \in I$ *và* $\lambda \in [a_0, b_0]$.

Đặt $H(\lambda) = \int_I f(x, \lambda)dx$. *Khi đó ta có*

$$\lim_{\lambda\to\lambda_0} \int_I f(x, \lambda)dx = \int_I \lim_{\lambda\to\lambda_0} f(x, \lambda)dx = \int_I h(x)dx.$$

Nếu $\lim_{\lambda\to\lambda_0} f(x, \lambda) = f(x, \lambda_0)$ *với mọi* $x \in I$ *thì* $\lim_{\lambda\to\lambda_0} H(\lambda) = H(\lambda_0)$, *nghĩa là* F *liên tục tại* λ_0.

BÀI TẬP

1. CM mệnh đề trên theo các bước sau

   i) Cho dãy $t_n \to t_0$. Đặt $F_n(x) = f(x, t_n)$. Sử dụng định lý hội tụ bị chặn CM
   $$\lim_{n\to\infty} \int_I F_n(x)dx = \int_I \lim_{n\to\infty} F_n(x)dx.$$

   ii) Suy ra kết quả cần CM.

2. Chứng minh các hàm sau liên tục

   (a) $F(\lambda) = \int_0^1 \sin(\lambda f(s))ds$ với f là hàm đo được trên (0,1).

   (b) $F(\lambda) = \int_0^1 \sin(\lambda s)f(s)ds$ với f là hàm khả tích trên (0,1).

   (c) $F(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} \cos(\lambda s)f(s)ds$ với f là hàm khả tích trên R.

   (d) $F(\lambda) = \int_0^1 \frac{\sin \lambda s}{\sqrt{s}}ds$

   (e) $\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty t^{\alpha-1}e^{-t}dt$, $\alpha > 0$. HD: Xét hàm $f(t, \alpha) = t^{\alpha-1}e^{-t}dt$. Giả sử $\alpha_1 \ge \alpha \ge \alpha_0 > 0$, CM $|f(t, \alpha)| \le g(t)$ với $g(t) = t^{\alpha_0-1}$ $(0 < t \le 1)$ và $g(t) = t^{\alpha_1-1}e^{-t}$ nếu $t > 1$.

   (f) Cho g khả tích trên R, $\int_{-\infty}^{\infty} g(y)dy = 1$, cho f liên tục và bị chặn trên R. CMR
   $$\lim_{\epsilon\to0} \int_{-\infty}^{\infty} f(x - \epsilon y)g(y)dy = f(x)$$

(g) Cho g khả tích trên R, $\int_{-\infty}^{\infty} g(y)dy = 1$, cho f liên tục và bị chặn trên R. CMR

$$\lim_{\epsilon\to 0} \frac{1}{\epsilon} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)g\left(\frac{x-t}{\epsilon}\right) dt = f(x).$$

3. Tính các giới hạn sau

   (a) $\lim_{n\to\infty} \int_0^\infty \frac{dt}{(1+\frac{t}{n})^n t^{1/n}}$

   (b) $\lim_{n\to\infty} \int_0^n \left(1+\frac{x}{n}\right)^n e^{-2x}dx$

   (c) $\lim_{n\to\infty} \int_0^n \left(1-\frac{x}{n}\right)^n e^{x/2}dx$

Phương pháp tìm đạo hàm của tích phân phụ thuộc tham số
Mệnh đề. *Cho $f : I \times (a, b) \to \mathbb{R}$. Giả sử*

a) với mỗi $\lambda \in (a, b)$ hàm $x \mapsto f(x, \lambda)$ khả tích theo x

b) với mỗi $x \in I$ hàm $\lambda \mapsto f(x, \lambda)$ có đạo hàm theo λ

c) tồn tại hàm g khả tích sao cho $\left|\frac{\partial f(x,\lambda)}{\partial \lambda}\right| \leq g(x)$ với mọi $x \in I$

Đặt $F(\lambda) = \int_I f(x, \lambda)dx$. Khi đó

$$\frac{dF}{d\lambda} = \int_I \frac{\partial f(x,\lambda)}{\partial \lambda} dx.$$

BÀI TẬP

1. CM mệnh đề trên theo các bước

   i) Đặt $F(x, h) = \frac{f(x,\lambda+h)-f(x,\lambda)}{h}$. Sử dụng định lý Lagrange CM

$$|F(x, h)| \leq g(x).$$

   ii) Dùng mệnh đề về giới hạn của tích phân theo tham số để CM mệnh đề trên.

2. Tìm đạo hàm của $F(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\sin tx dx$ với $f(x), g(x) = xf(x)$ là các hàm khả tích trên R.

3. Tìm đạo hàm của $F(t) = \int_0^1 f(x)\sin tx dx$ với $f(x)$ khả tích trên $(0, 1)$.

4. Tìm đạo hàm của $\Gamma(\alpha)$. HD: Chọn α_0, α_1 sao cho $0 < \alpha_0 \leq \alpha \leq \alpha_1$.CM $|t^{\alpha-1}e^{-t}\ln t| \leq g(t)$ với g là một hàm khả tích cần tìm.

Phương pháp lấy tích phân của chuỗi

Mệnh đề. *Nếu*

a) f_n là các hàm đo được không âm trên (a,b) hay

b) nếu f_n là các hàm đo được trên (a,b) thỏa

$$\sum_{n=1}^{\infty}\int_a^b |f_n(x)|dx < \infty$$

thì

$$\int_a^b \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)dx = \sum_{n=1}^{\infty}\int_a^b f_n(x)dx$$

Ghi nhớ. Một số khai triển thông dụng

$$\begin{aligned}
e^x &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}\\
\sin x &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}\\
\cos x &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}\\
\frac{1}{1+x} &= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n \quad (|x|<1)\\
\ln(1+x) &= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}x^n}{n} \quad (|x|<1).
\end{aligned}$$

BÀI TẬP

1. CM mệnh đề trên bằng cách đặt $g(x) = \sum_{k=1}^{\infty}|f_k(x)|$.

2. Viết dưới dạng chuỗi

   (a) $\int_0^1 \frac{e^x-1}{x}dx$

(b) $\int_0^1 \frac{\sin x}{x} dx$

(c) $\int_0^1 \frac{x^{p-1}}{1+x^q} dx$. HD: $\frac{x^{p-1}}{1+x^q} = \sum_{n=0}^{\infty} x^{p-1}(x^{2n} - x^{2n+1})$

6. Biến ngẫu nhiên

Định nghĩa. Trên không gian xác suất $(\Omega, \mathcal{M}, \mathbb{P})$, ánh xạ đo được $X : \Omega \to \mathbb{R}^k$ gọi là biến ngẫu nhiên.

Mệnh đề. *Cho biến ngẫu nhiên X và tập Borel $B \subset \mathbb{R}^k$, ta đặt $\mathbb{P}_X(B) = \mathbb{P}(X \in B)$. Khi đó, $\mathbb{P}_X$ là một độ đo xác suất trên $\mathbb{R}^k$. Hơn nữa, với mọi hàm Borel $g : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ sao cho $g \circ X \in L^1(\mathbb{P})$ thì*

$$\int_{X \in B} g(X(\omega)) d\mathbb{P}(\omega) = \int_B g(x) d\mathbb{P}_X(x).$$

Độ đo $\mathbb{P}_X$ gọi là **phân phối** *của X.*

Bài tập. i) CM $\mathbb{P}_X$ là một độ đo trên $\mathcal{B}(\mathbb{R})$.

ii) CM đẳng thức trong mệnh đề theo kỹ thuật 4D. Trước hết CM với $g = \mathbb{I}_B$ trong đó $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^k)$. Muốn vậy, ta kiểm tra $\mathbb{I}_B(X(\omega)) = \mathbb{I}_{X(\omega) \in B}$.

iii) CM đẳng thức với g là hàm dơn đo được trên $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^k)$.

iv) CM với g là hàm không âm đo được.

v) Sử dụng phân tích $g = g^+ - g^-$ để chứng minh cho trường hợp tổng quát.

Định nghĩa. Hàm $F_X(x) = P(X \leq x)$ gọi là hàm phân phối tích lũy (cdf: cumulative distributrion function) của X. Ta cũng quy ước $dF_X := d\mathbb{P}_X$.

Mệnh đề *Cho biến ngẫu nhiên $X : \Omega \to \mathbb{R}$. Hàm F_X thỏa*

a) $0 \leq F_X(x) \leq 1 \ \forall x \in \mathbb{R}$,

b) F_X *không giảm, nghĩa là* $F_X(x) \leq F_X(y)$ *khi* $x < y$,

c) F_X *liên tục bên phải, nghĩa là* $\lim_{t \to x^+} F_X(t) = F_X(x)$,

d) $\lim_{x \to -\infty} F_X(x) = 0$, $\lim_{x \to +\infty} F_X(x) = 1$

Bài tập. (i) CM a) bằng định nghĩa.

(ii) Sử dụng tính chất tăng của độ đo ($A \subset B$ và đo được thì $\mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B)$) để CM b).

(iii) Sử dụng tính chất đơn điệu $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(A_n) = \mathbb{P}(\cap_{n=1}^{\infty} A_n)$ với mọi A_n đo được, $A_{n+1} \subset A_n$ để CM c).

(iv) Sử dụng tính chất đơn điệu và tính chất $\mathbb{P}(A^c) = 1 - \mathbb{P}(A)$ để CM d).

Định nghĩa. Biến ngẫu nhiên $X : \Omega \to \mathbb{R}^k$ gọi là *biến ngẫu nhiên liên tục* nếu $\mathbb{P}_X \ll m_k$, nghĩa là với mọi tập Borel đo được B trong $\mathbb{R}^k$ thỏa $m_k(B) = 0$ thì $\mathbb{P}_X(B) = 0$.

Mệnh đề *Nếu biến ngẫu nhiên $X : \Omega \to \mathbb{R}^k$ là biến ngẫu nhiên liên tục thì tồn tại hàm khả tích Lebesgue $f_X : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ (gọi là hàm mật độ của X) sao cho $f_X(x) \geq 0$ và với mọi tập Borel $B \in \mathbb{R}^k$ ta có*

$$\mathbb{P}(X \in B) = \int_B f_X(x) dm_k(x).$$

Mệnh đề *Xét biến số ngẫu nhiên liên tục $X : \Omega \to \mathbb{R}$. Khi đó*

a) $f_X(x) \geq 0$ và $\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)dx = 1$,

b) $P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f_X(x)dx$

c) $F'_X(x) = f_X(x)$ tại mọi điểm liên tục x của f_X.

Định nghĩa Biến ngẫu nhiên liên tục $X : \Omega \to \mathbb{R}$ gọi là có *phân phối chuẩn với trung bình μ và độ lệch chuẩn σ*, ký hiệu là $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, nếu

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}.$$

Nếu $\mu = 0, \sigma = 1$ ta nói X có *phân phối Gauss*.

Mệnh đề *Nếu $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ thì ta có $\mathbb{P}(X > \mu + a) = \mathbb{P}(X < \mu - a)$, $\mathbb{P}(X < \mu) = 0,5$. Ngoài ra biến ngẫu nhiên $Z = \frac{X-\mu}{\sigma}$ sẽ có phân phối Gauss.*

Định nghĩa Cho biến ngẫu nhiên $X : \Omega \to \mathbb{R}$ có $X(\Omega) = \{x_j |\ j \in J\}$ với $J \subset \mathbb{N}$. Ta nói X là *biến ngẫu nhiên rời rạc*. Hàm số $f_X(x) = P(X = x)$ gọi là *hàm mật độ* của X.

Mệnh đề *Cho X là biến ngẫu nhiên rời rạc lấy các giá trị $x_i,\ i \in I$. Khi đó $p_i := f_X(x_i) \geq 0$ và $\sum_{i\in I} p_i = 1$.*

Phương pháp tìm hàm mật độ của biến ngẫu nhiên liên tục bằng định nghĩa

Cho X có hàm mật độ f_X. Ta tìm hàm mật độ của $Y = h(X)$.
Bước 1: với mỗi $y \in R$ ta tìm tập $A_y = \{x : h(x) \leq y\}$
Bước 2: Tìm $F_{h(X)}(y) = P(h(X) \leq y) = \int_{A_y} f_X(x)dx$
Bước 3: Tìm $F'_{h(X)} = f_{h(X)}$

BÀI TẬP

1. Cho $X : \Omega \to \mathbb{R}$ là biến ngẫu nhiên. CMR $\mathbb{P}(X = x) = F(x) - F(x^-)$.

2. Cho biến ngẫu nhiên liên tục X có hàm mật độ f_X. Tìm f_{cX+d} theo f_X.

3. Cho $X \sim N(\mu, \sigma^2)$.

   (a) Chứng tỏ $cX + d \sim N(c\mu + d, c^2\sigma^2)$,

   (b) Chứng tỏ $\frac{X-\mu}{\sigma} \sim N(0, 1)$,

   (c) Cho $X \sim N(3, 4)$, tính $\mathbb{P}(1 < X < 3)$,

   (d) Cho $X \sim N(1, 9)$, tính a, b để $\mathbb{P}(X < a) = 0,506$, $\mathbb{P}(X > b) = 0,198$.

   (e) Cho $X \sim N(20,4; 3,5^2)$. Tìm $\mathbb{P}(X < 18,1)$, $\mathbb{P}(X > 17,9)$, $\mathbb{P}(X < 18,1 | X > 17,9)$. Tìm t để $\mathbb{P}(X < t) = 0,444$.

   (f) Cho $X \sim N(5, \sigma^2)$. Cho $\mathbb{P}(X < 3) = 0,3$. Tìm $\mathbb{P}(X \geq 7)$, $\mathbb{P}(X < 7)$, $\mathbb{P}(3 \leq X < 7)$.

   (g) Cho $Y \sim N(12, \sigma^2)$ và $\mathbb{P}(10 \leq Y < 14) = 0,6$. Tìm $\mathbb{P}(Y \geq 14)$, $\mathbb{P}(Y < 10)$, $\mathbb{P}(12 \leq Y < 14)$, $\mathbb{P}(Y < 14 | Y > 12)$.

   (h) Cho $X \sim N(-5, \sigma^2)$. Cho $\mathbb{P}(X < -3) = 0,8$. Tìm $\mathbb{P}(X < 7)$, $\mathbb{P}(-7 < X < -5)$.

4. Cho biến ngẫu nhiên liên tục X có hàm mật độ f_X. Tìm hàm mật độ của $Y = e^X$ với

   (a) $f_X(x) = e^{-x}$ với $x \geq 0$, $f_X(x) = 0$ với $x < 0$.

   (b) $X \sim N(0, 1)$.

   (c) $X \sim N(\mu, \sigma^2)$.

5. Cho biến ngẫu nhiên liên tục X có hàm mật độ f_X.

(a) Tìm f_{X^2} theo f_X,

(b) Tìm f_{X^2} nếu $X \sim N(0,1)$,

(c) Cho $X \sim Uniform(-1,3)$. Tìm f_{X^2}

6. Cho X có hàm xác suất tích lũy F_X.

   (a) CM $P(X = x) = F_X(x) - F_X(x^-)$

   (b) Tìm F_{X^+} với $X^+ = \max\{X, 0\}$.

7. Một máy đóng gói bột mì đóng các bao có trọng lượng tuân theo phân phối chuẩn có trung bình là 150 kg và độ lệch chuẩn là 0,5 kg. Chọn ngẫu nhiên một bao, tìm xác suất để bao đó có trọng lượng a) $<$ 149 kg; b) $>$ 151,5 kg; c) nằm giữa 149 kg và 151 kg.

8. Một nhà nông chở 850 bắp cải đi bán. Giả sử trọng lượng bắp cải là một biến ngẫu nhiên có phân phối chuẩn với trung bình 1,1 kg và độ lệch chuẩn 150 g. Nếu nhà nông này lấy ngẫu nhiên một bắp cải thì xác suất để nó có trọng lượng nằm giữa 1,2 kg đến 1,3 kg là bao nhiêu. Ước lượng xem có bao nhiêu bắp cải có trọng lượng $>$ 1,4 kg?

9. Điểm số trong một kỳ thi tuân theo phân phối chuẩn có trung bình μ và độ lệch chuẩn σ. Giả sử thang điểm là 100. Nếu 10% thí sinh đạt trên 80 điểm và 20% thí sinh thấp hơn 45 điểm. Tìm μ, σ.

10. Khối lượng một gói rau bán tại một siêu thị rau sạch là biến ngẫu nhiên có phân phối chuẩn với trung bình 550 g và độ lệch chuẩn 20 g.

   (a) Chọn ngẫu nhiên một gói rau. Tìm xác suất để gói rau đó có trọng lượng trong khoảng 500 g đến 600 g.

   (b) Trong một ngày có 1200 gói rau được bán. Tìm số rau mà trọng lượng của nó $>$ 540 g.

   (c) Tại một siêu thị gần đó, 15% gói rau được bán có trọng lượng ít nhất 600 g và không nhiều hơn 10% rau được bán có trọng lượng $<$ 540 g. Giả sử trọng lượng rau M của các gói rau của siêu thị này tuân theo phân phối chuẩn. Tìm trung bình và độ lệch chuẩn của M.

7. Véc-tơ ngẫu nhiên

Định nghĩa. Cho biến ngẫu nhiên $V = (X_1, ..., X_k)$. Hàm $F_V(x_1, ..., x_k) = P(X_1 \leq x_1, ..., X_k \leq x_k)$ gọi là hàm xác suất tích lũy của V.

Mệnh đề *Ta có*

a) $0 \leq F_V(x_1, ..., x_k) \leq 1$ *với mọi* $(x_1, ..., x_k) \in \mathbb{R}^k$,

$$\lim_{x_i \to -\infty, \forall i} F_V(x_1, ..., x_k) = 0, \quad \lim_{x_i \to +\infty, \forall i} F_V(x_1, ..., x_k) = 1.$$

b) Nếu X_i *là các biến ngẫu nhiên rời rạc, đặt* $f_V(x_1, ..., x_k) = P(X_1 = x_1, ..., X_k = x_k)$, $(x_1, ..., x_k) \in J$ *thì* $\sum_{(x_1, ..., x_k) \in J} f_V(x_1, ..., x_k) = 1$ *và*

$$F_V(x_1, ..., x_k) = \sum_{s_1 \leq x_1, ..., s_k \leq x_k} f_V(s_1, ..., s_k)$$

c) Nếu X_i *là các biến ngẫu nhiên liên tục thì hàm mật độ* $f_V(x_1, ..., x_k) \geq 0$, $\int_{\mathbb{R}^k} f_V dm_k = 1$,

$$F_V(x_1, ..., x_k) = \int_{-\infty}^{x_1} ... \int_{-\infty}^{x_k} f_V(s_1, ..., s_k) ds_1 ... ds_k$$

và $f_V = \frac{\partial^k f_V}{\partial x_1 ... \partial x_k}$

Định nghĩa. Các biến số ngẫu nhiên $X_i : \Omega \to \mathbb{R}$, $i = 1, ..., n$, gọi là *độc lập* nếu với mọi tập Borel đo được $B_i \subset \mathbb{R}$, $i = 1, ..., n$ họ các biến cố $(X \in B_i)$, $i = 1, ..., n$ là độc lập.

Mệnh đề *Cho các biến ngẫu nhiên* $(X_i)_{i=1,...,n}$ *độc lập và* $g_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *là các hàm Borel thì* $g_1(X_1), ..., g_n(X_n)$ *độc lập.*

Mệnh đề *Họ các biến ngẫu nhiên* $(X_i)_{i=1,...,n}$ *là độc lập khi với mọi họ các số nguyên* $1 \leq i_1 < ... < i_k \leq n$ *ta có.*

$$F_{X_{i_1} ... X_{i_k}}(x_{i_1}, ..., x_{i_k}) = F_{X_{i_1}}(x_{i_1}) ... F_{X_{i_k}}(x_{i_k})$$

Trong đó $F_{X_{i_1} ... X_{i_k}}$ *là hàm xác suất tích lũy đồng thời của họ* $X_{i_1}, ..., X_{i_k}$ *và* F_{X_i} *là hàm xác suất tích lũy của* X_i.

Mệnh đề. *Cho* $(X_i)_{i=1,...,n}$ *là các biến ngẫu nhiên rời rạc độc lập. với mọi họ các số nguyên* $1 \leq i_1 < ... < i_k \leq n$ *ta có*

$$f_{X_{i_1} ... X_{i_k}}(x_{i_1}, ..., x_{i_k}) = f_{X_{i_1}}(x_{i_1}) ... f_{X_{i_k}}(x_{i_k})$$

với $f_{X_{i_1}...X_{i_k}}(x_{i_1},...,x_{i_k}) = P(X_{i_1} = x_{i_1},...,X_{i_k} = x_{i_k})$.

Mệnh đề *Cho* $X, Y : \Omega \to \mathbb{R}$ *là hai biến ngẫu nhiên độc lập và liên tục, khi đó*

a) $f_{X+Y}(z) = f_X * f_Y(z) := \int_{-\infty}^{\infty} f_X(z-y)f_Y(y)dy$

b) $f_{X/Y}(z) = \int_0^{\infty} y f_X(zy)f_Y(y)dy$

Mệnh đề*Ta có*

a) nếu $X \sim N(0,1)$ *thì* $X^2 \sim \chi^2(1)$

b) nếu $X \sim N(0,1)$ *và* $Y \sim \chi^2(m)$ *độc lập thì* $Z = \frac{X}{Y/\sqrt{m}}$ *có phân phối Student với tham số n*

c) nếu $X \sim \chi^2(n)$, $Y \sim \chi^2(m)$ *độc lập thì* $X + Y \sim \chi^2(m+n)$

d) nếu $X \sim \chi^2(n)$, $Y \sim \chi^2(m)$ *độc lập thì* $Z = \frac{X/n}{Y/m}$ *có phân phối Fisher-Snedecor với tham số* (m,n).

Mệnh đề *Cho* $X \sim N(\mu_X, \sigma_X^2)$, $Y \sim N(\mu_Y, \sigma_Y^2)$ *độc lập. Cho* $X_1, ..., X_n$ *độc lập và có cùng phân phối* $N(\mu, \sigma)$. *Khi đó*

a) $cX + d \sim N(c\mu_X + d, c^2\sigma_X^2)$

b) $(X - \mu_X)/\sigma_X \sim N(0,1)$

c) $X + Y \sim N(\mu_X + \mu_Y, \sigma_X^2 + \sigma_Y^2)$

d) $\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \sim N(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$

e) $\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu)^2 \sim \chi^2(n)$.

Phương pháp tìm hàm mật độ của $Z = r(X,Y)$

Bước 1 Tìm tập hợp $B_z = \{(x,y) : r(x,y) \le z\}$

Bước 2 Tính $F_Z = P(Z \le z) = \int_{B_z} f_{X,Y}(x,y)dxdy$

Bước 3 Tính $f_Z = F_Z'$

BÀI TẬP

1. Tìm hàm mật độ của

   (a) $Z = X \pm Y$ với X, Y độc lập và có phân phối đều trên khoảng $(0,1)$. Nhắc lại, Biến ngẫu nhiên X có phân phối đều trên đoạn (a,b)(ký hiệu $X \sim Uniform(a,b)$) nếu $f_X(x) = \frac{1}{b-a}$ nếu $x \in (a,b)$, $f_X(x) = 0$ nếu $x \notin (a,b)$.

   (b) $Z = X/Y$ với X, Y độc lập và có phân phối đều trên khoảng $(0,1)$.

(c) $Z = \max\{X_1, ..., X_n\}$ biết $X_1, ..., X_n$ độc lập và có cùng phân phối f_X. HD: $\max\{x_1, ..., x_n\} \le z$ nghĩa là $x_1 \le z, ..., x_n \le z$.

(d) $Z = \min\{X_1, ..., X_n\}$ biết $X_1, ..., X_n$ độc lập và có cùng phân phối f_X.

8. Các tham số đặc trưng

Định nghĩa. Cho $(\Omega, \mathcal{M}, \mathbb{P})$ là không gian xác suất và X, Y là biến ngẫu nhiên trên Ω. Nếu $X \in L^1(\mathbb{P})$ ta định nghĩa

a) Kỳ vọng (expectation, hay trung bình) của X: $\mu_X = \mathbb{E}X := \int_\Omega X(\omega) d\mathbb{P}(\omega)$

b) Phương sai (variance) của X: $varX := \mathbb{E}(X - \mu_X)^2$

c) Mômen thứ n của X: $\mathbb{E}(X^n)$

d) Hàm sinh mômen (moment generating function) của X: $M_X(t) = \mathbb{E}(e^{tX})$.

e) Hiệp phương sai (covariance) của X, Y: $cov(X, Y) = \mathbb{E}(X - \mu_X)(Y - \mu_Y)$.

Định lý. (Quy tắc Lazy Statistician) *Cho $X : \Omega \to \mathbb{R}^k$ là biến ngẫu nhiên có hàm mật độ f_X và $g : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ là một hàm Borel.*

a) Nếu X là biến ngẫu nhiên rời rạc, $X(\Omega) = \{x_1, x_2, ...\}$ thì

$$\mathbb{E}(g(X)) = \sum_i g(x_i)\mathbb{P}(X = x_i) = \sum_i g(x_i) f_X(x_i).$$

b) Nếu X là biến ngẫu nhiên liên tục và $g(X) \ge 0$ hay $g(X) \in L^1(\mathbb{P})$ thì

$$\mathbb{E}(g(X)) = \int_{\mathbb{R}^k} g(x) f_X(x) dx.$$

Bài tập. Dùng kỹ thuật 4D chứng minh định lý cho trường hợp biến ngẫu nhiên liên tục theo các bước sau:
(i) Xét trường hợp $g(x) = \mathbb{I}_B(x)$ với $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^k)$. CM $g(X(\omega)) = \mathbb{I}_{X \in B}(\omega)$. Từ đó suy ra đẳng thức.
(ii) Cm cho trường hợp g là hàm đơn.
(iii) Cm cho trường hợp $g \ge 0$.

(iv) Cm cho trường hợp tổng quát bằng cách dùng phân tích $g = g^+ - g^-$.

Mệnh đề (về EX). *Cho X, Y là hai biến ngẫu nhiên xác định trên cùng không gian xác suất. Ta có*

a) nếu X, Y có cùng phân phối và $g(X) \in L^1(\mathbb{P})$ thì $g(Y) \in L^1(\mathbb{P})$ và $\mathbb{E}(g(X)) = \mathbb{E}(g(Y))$.

b) $\mathbb{E}(c) = c$ với mọi $c \in \mathbb{R}$.

c) nếu $X, Y \in L^1(\mathbb{P})$ thì $\alpha X + \beta Y \in L^1(\mathbb{P})$ và $\mathbb{E}(\alpha X + \beta Y) = \alpha \mathbb{E}X + \beta \mathbb{E}Y$.

d) Nếu $X \leq Y$ hầu chắc chắn thì $\mathbb{E}X \leq \mathbb{E}Y$.

e) nếu $X \geq 0$ hầu chắc chắn và $\mathbb{E}X = 0$ thì $X = 0$ hầu chắc chắn.

f) nếu $X \in L^1(\mathbb{P})$ thì $|X| \in L^1(\mathbb{P})$ và $|\mathbb{E}(X)| \leq \mathbb{E}(|X|)$.

g) nếu $X_1, ..., X_n : \Omega \to \mathbb{R}$ là các biến ngẫu nhiên độc lập và $g_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ là các hàm Borel sao cho $g_i(X_i) \in L^1(\mathbb{P})$ thì

$$E(g_1(X_1)...g_n(X_n)) = E(g_1(X_1))...E(g_n(X_n)).$$

Bài tập. Chứng minh định lý trên.
(i) Cm $\mathbb{E}(g(X)) = \mathbb{E}g(Y)$ bằng kỹ thuật 4D.
(ii) Cm b) , c), d), f) bằng các tính chất của tích phân.
(iii) Cm e) bằng cách xét các tập hợp $E_n = \{X \geq \frac{1}{n}\} = \{\omega \in \Omega : \ X(\omega) \geq \frac{1}{n}\}$. CMR $\mathbb{P}(E_n) = 0$ và $\{X > 0\} = \cup_{n=1}^{\infty} E_n$. Từ đó suy ra $\mathbb{P}(X > 0) = 0$.

Mệnh đề (về varX và cov(X,Y)). *Cho $X, Y \in L^2(P)$, $\alpha \in R$. Ta có $X \in L^1(P)$ và*

a) $var(X + \alpha) = var(X)$, $var(\alpha X) = \alpha^2 var(X)$, $var(\alpha) = 0$

b) $var(X) = E(X^2) - (E(X))^2$

c) $cov(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$, nếu X, Y độc lập thì $cov(X, Y) = 0$

d) $var(\alpha X + \beta Y) = \alpha^2 var X + \beta^2 var(Y) + 2\alpha\beta cov(X, Y)$

e) (công thức Biennayme) nếu $X_1, ..., X_n : \Omega \to R$ là các biến ngẫu nhiên độc lập và $X_i \in L^2(P)$ thì

$$var\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} var X_i$$

Mệnh đề (về hàm sinh moment). *Cho biến ngẫu nhiên $X, Y, X_i : \Omega \to \mathbb{R}$ có $e^{tX}, e^{tY}, e^{tX_i} \in L^1(\mathbb{P})$, $i = 1, ..., n$ trong một khoảng mở (của biến t) chứa 0. Cho $X_1, ..., X_n$ độc lập .*

a) $M_X^{(n)}(0) = \mathbb{E}(X^n)$.

b) nếu $M_X(t) = M_Y(t)$ *trong một khoảng mở chứa 0 thì* X, Y *có cùng hàm mật độ xác suất.*

c) $M_{X_1+...+X_n}(t) = M_{X_1}(t)...M_{X_n}(t)$

Phương pháp tính $\mathbb{E}X$, $varX$, hàm moment

Cách 1. Dùng quy tắc Lazy Statistician:

$\mathbb{E}X = \sum_i x\mathbb{P}(X = x_i)$ *hay* $\mathbb{E}X = \int_{\mathbb{R}} x f_X(x)dx$,

$\mathbb{E}X^2 = \sum_i x_i^2\mathbb{P}(X = x_i)$ *hay* $EX^2 = \int_{\mathbb{R}} x^2 f_X(x)dx$ *và công thức* $varX = EX^2 - (EX)^2$.

$M_X(t) = \sum_i e^{tx_i}\mathbb{P}(X = x_i)$ *hay* $M_X(t) = \int_R e^{tx} f_X(x)dx$

Cách 2. Dùng công thức $EX = M'_X(0)$, $EX^2 = M"_X(0)$.

Phương pháp tìm phân phối của $X + Y$ bằng hàm sinh moment

Bước 1: Ta tìm $M_X(t), M_Y(t)$

Bước 2: Tìm M_{X+Y} *bằng cách sử dụng* $M_{X+Y}(t) = M_X(t)M_Y(t)$ *với* X, Y *độc lập*

Bước 3: Từ M_{X+Y} *xác định phân phối có hàm sinh moment này.*

BÀI TẬP

1. Tìm kỳ vọng, phương sai của các biến ngẫu nhiên rời rạc có phân phối
   (a) Bernoulli(p): $X : \Omega \to \{0, 1\}$ với $f_X(1) = P(X = 1) = p$, $f_X(0) = P(X = 0) = 1 - p$.
   (b) nhị thức Binomial(n,p): $f_X(k) = P(X = k) = C_n^k p^k(1 - p)^{n-k}$ với $k = 0, 1, ..., n$.
   (c) hình học Geom(p): $f_X(k) = P(X = k) = p(1 - p)^{k-1}, k = 1, 2, ...$ $(0 < p < 1)$
   (d) Poisson(λ): $f_X(k) = P(X = k) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$

2. Tìm kỳ vọng, phương sai của các biến ngẫu nhiên liên tục có phân phối ($f_X(x) = 0$ tại các giá trị x không chỉ ra)
   (a) đều Uniform(a,b): $f_X(x) = \frac{1}{b-a}$ với $x \in [a, b]$.
   (b) chuẩn $N(\mu, \sigma^2)$: $f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$
   (c) mũ $Exp(\beta)$ $(\beta > 0)$: $f_X(x) = \frac{1}{\beta}e^{-x/\beta}$ $(x > 0)$.

(d) $Gamma(\alpha, \beta)$ $(\alpha, \beta > 0)$: $f_X(x) = \frac{1}{\beta^\alpha \Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-x/\beta}$ $(x > 0)$.

(e) $\chi^2(p)$ $(p > 0)$: $f_X(x) = \frac{1}{2^{p/2}\Gamma(p/2)} x^{-1+p/2} e^{-x/2}$ $(x > 0)$.

(f) $Beta(\alpha, \beta)$ $(\alpha, \beta > 0)$: $f_X(x) = \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}$ $(0 < x < 1)$

3. Tìm hàm sinh moment của các biến ngẫu nhiên sau

    (a) $Binomial(n, p)$

    (b) $Poisson(\lambda)$

    (c) Chuẩn $N(\mu, \sigma^2)$

    (d) $Gamma(\alpha, \beta)$

4. Cho X, Y độc lập. CMR

    (a) nếu $X \sim Binomial(n, p)$, $Y \sim Binomial(m, p)$ thì $X + Y \sim Binomial(n + m, p)$

    (b) nếu $X \sim Poisson(\lambda)$, $Y \sim Poisson(\mu)$ thì $X + Y \sim Poisson(\lambda + \mu)$

    (c) nếu $X \sim \Gamma(a, \beta)$, $Y \sim \Gamma(b, \beta)$ thì $X + Y \sim \Gamma(a + b, \beta)$

    (d) nếu $X \sim N(\mu_X, \sigma_X^2)$, $Y \sim N(\mu_Y, \sigma_Y^2)$ thì $X + Y \sim N(\mu_X + \mu_Y, \sigma_X^2 + \sigma_Y^2)$

9. Các định lý giới hạn

Định nghĩa Cho $X, X_n : \Omega \to \mathbb{R}$ là dãy các biến số ngẫu nhiên trên $(\Omega, \mathcal{M}, \mathbb{P})$. Ta nói

a) X_n hội tụ theo xác suất tới X, ký hiệu $X_n \xrightarrow{p} X$ nếu với mỗi $\epsilon > 0$ ta có

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(|X_n - X| > \epsilon) = 0.$$

b) X_n hội tụ theo phân bố, ký hiệu $X_n \rightsquigarrow X$ nếu $\lim_{n\to\infty} F_{X_n}(t) = F_X(t)$

c) X_n hội tụ hầu chắc chắn, ký hiệu $X_n \xrightarrow{h.c.c} X$ nếu $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(X_n \to X) = 1$

Mệnh đề *Các khẳng định sau là đúng*

a) $X_n \xrightarrow{p} X$ *thì* $X_n \rightsquigarrow X$
b) $X_n \xrightarrow{h.c.c} X$ *thì* $X_n \xrightarrow{p} X$

Mệnh đề

a) (Bất đẳng thức Markov) Nếu X *là một biến ngẫu nhiên không âm thì với mọi* $a, p > 0$ *ta có*

$$\mathbb{P}(X > a) \leq \frac{\mathbb{E}(X^p)}{a^p}$$

b) (Bất đẳng thức Chebyshev) Cho X *là biến ngẫu nhiên có trung bình* μ *và phương sai* σ^2*. Với mọi* $k > 0$ *ta có*

$$\mathbb{P}(|X - \mu| > k) \leq \frac{\sigma^2}{k^2}.$$

Định lý (dạng yếu của luật số lớn) *Cho* $X_1, X_2, ...$ *là một dãy các biến ngẫu nhiên độc lập có cùng trung bình* $\mathbb{E}(X_i) = \mu$ *và phương sai* $var(X_i) = \sigma^2$*. Khi đó*

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \xrightarrow{p} \mu.$$

Định lý (dạng mạnh của luật số lớn) *Cho* $X_1, X_2, ...$ *là một dãy các biến ngẫu nhiên độc lập có cùng phân phối với trung bình* $\mathbb{E}(X_i) = \mu$ *. Khi đó*

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \xrightarrow{h.c.c.} \mu.$$

Mệnh đề *Cho* $Z_1, Z_2, ...$ *là một dãy các biến ngẫu nhiên với hàm phân phối tích lũy* F_{Z_n} *và hàm sinh moment* M_{Z_n}*. Cho biến số ngẫu nhiên* Z *có hàm phân phối tích lũy* F_Z *và hàm sinh* M_Z*. Nếu* $M_{Z_n}(t) \to M_Z(t)$ *với mọi* t *thì* $F_{Z_n}(z) \to F_Z(z)$ *tại mọi* $z \in R$ *mà* F_Z *liên tục.*

Định lý giới hạn trung tâm *Cho* $X_1, X_2, ...$ *là một dãy các biến ngẫu nhiên độc lập có cùng phân phối với trung bình* $E(X_i) = \mu$ *và phương sai* $var(X_i) = \sigma^2$*. Đặt* $S_n = \sum_{i=1}^{n}$*. Ta có hàm phân phối xác suất của*

$$\frac{S_n - \mathbb{E}(S_n)}{\sqrt{var(S_n)}} = \frac{(X_1 + ... + X_n) - n\mu}{\sigma\sqrt{n}}$$

có thể xấp xỉ bằng phân phối Gauss khi $n \to \infty$, nghĩa là, với mọi $a \in \mathbb{R}$,

$$\mathbb{P}\left(\frac{(X_1 + ... + X_n) - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \leq a\right) \to \Phi(a) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{a} e^{-t^2/2} dt.$$

Định lý Moivre-Laplace *Xét dãy phép thử Bernoulli với xác suất thành công là p. Gọi X là số lần thành công trong n phép thử. Khi đó, với mọi $a \in \mathbb{R}$, ta có*

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\frac{X - np}{\sqrt{np(1-p)}} < a\right) \to \Phi(a)$$

Định lý giới hạn Poisson *Xét dãy phép thử Bernoulli với xác suất thành công là p. Gọi X là số lần thành công trong n phép thử. Khi đó nếu $p \to 0$ và $np \to \lambda$ $(0 < \lambda < \infty)$ thì với mọi $k = 0, 1, 2, ...$ ta có*

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(X = k) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}.$$

Phương pháp áp dụng luật số lớn

Bước 1: Kiểm tra tính độc lập và cùng phân phối của các biến ngẫu nhiên $Y_1, Y_2, ...$ Ta sử dụng tính chất:

-Nếu $X \sim Y$ thì $g(X) \sim g(Y)$ và $\mathbb{E}(g(X)) = \mathbb{E}(g(Y))$.

-Nếu X độc lập với Y thì $g(X)$ độc lập với $h(Y)$.

Bước 2: Tính $\mu = \mathbb{E}(Y_1)$

Bước 3: Áp dụng tính chất

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} Y_j = \mu \quad h.c.c.$$

Phương pháp áp dụng định lý giới hạn trung tâm

Cho dãy biến ngẫu nhiên độc lập $X_1, ..., X_n$ có cùng trung bình và phương sai. Tìm xác suất $\mathbb{P}(a < S_n < b)$ với $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$.

Bước 1: Tìm $\mu = \mathbb{E}X_i$ và $\sigma^2 = varX_i$

Bước 2: Chuẩn hóa

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(a < S_n < b) &= \mathbb{P}\left(\frac{a - n\mu}{\sqrt{n\sigma^2}} < \frac{S_n - n\mu}{\sqrt{n\sigma^2}} < \frac{b - n\mu}{\sqrt{n\sigma^2}}\right) \\ &\simeq \Phi\left(\frac{b - n\mu}{\sqrt{n\sigma^2}}\right) - \Phi\left(\frac{a - n\mu}{\sqrt{n\sigma^2}}\right) \end{aligned}$$

Lưu ý. Nếu ta gặp tích $Y_1...Y_n$, $Y_i > 0$ ta có thể dùng công thức

$$\mathbb{P}(a < Y_1...Y_n < b) = \mathbb{P}(\ln a < \sum_{j=1}^{n} \ln Y_j < \ln b)$$

rồi áp dụng định lý giới hạn trung tâm.

Phương pháp tìm xác suất của biến ngẫu nhiên Bernoulli

Xét thí nghiệm có xác suất thành công là p, xác suất thất bại là $1-p$. Lặp lại thí nghiệm này n lần độc lập. Ký hiệu X_i là biến ngẫu nhiên xác định bởi: $X_i = 1$ nếu thí nghiệm thành công, $X_i = 0$ nếu thí nghiệm thất bại. Đặt $S_n = X_1 + ... + X_n$ thì S_n là số lần thí nghiệm thành công trong n lần thí nghiệm. Ta có $S_n \sim Bernoulli(n,p)$, $E(S_n) = np$, $var(S_n) = np(1-p)$. Theo định lý giới hạn trung tâm

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(a < S_n < b) &= \mathbb{P}\left(\frac{a-np}{\sqrt{np(1-p)}} < \frac{S_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} < \frac{b-np}{\sqrt{np(1-p)}}\right) \\
&\simeq \Phi\left(\frac{b-np}{\sqrt{np(1-p)}}\right) - \Phi\left(\frac{a-np}{\sqrt{np(1-p)}}\right) \\
\mathbb{P}(S_n < b) &= \mathbb{P}\left(\frac{S_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} < \frac{b-np}{\sqrt{np(1-p)}}\right) \\
&\simeq \Phi\left(\frac{b-np}{\sqrt{np(1-p)}}\right) \\
\mathbb{P}(S_n = k) &= \mathbb{P}(k - \frac{1}{2} < S_n < k + \frac{1}{2}) \\
&\simeq \Phi\left(\frac{k+\frac{1}{2}-np}{\sqrt{np(1-p)}}\right) - \Phi\left(\frac{k-\frac{1}{2}-np}{\sqrt{np(1-p)}}\right)
\end{aligned}$$

Nếu $S_n \sim Bernoulli(n,p)$ với $\lambda = np$ nhỏ thì ta có thể dùng xấp xỉ Poisson(λ). Khi đó $\mathbb{P}(S_n = k) \simeq \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}$

BÀI TẬP

1. Cho Y_i, $i = 1, 2, ...$ là i.i.d. và có $Y_i \sim Binomial(1, p)$. CM $X_n = \sum_{i=1}^{n} Y_i \sim Binomial(n, p)$ và $\lim_{n\to\infty} \frac{X_n}{n} = p$ hầu chắc chắn.

2. Cho X_j, $j = 1, 2, ...$ là i.i.d. với $\mathbb{E}(|X_j|) < \infty$. Đặt $Y_j = e^{X_j}$. CM $(Y_1...Y_n)^{1/n}$ hội tụ tới một hằng số hầu chắc chắn.

3. Cho biến ngẫu nhiên X_j, $j = 1, 2, ...$ là i.i.d. Giả sử $\mathbb{E}(|X_j|^k) < \infty$. CM
$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} X_j^k = \mathbb{E}(X_1^k) \quad h.c.c.$$

4. Cho X_j, $j = 1, 2, ...$ là i.i.d. và $X_j \sim N(1, 3)$. CM
$$\lim_{n\to\infty} \frac{X_1 + ... + X_n}{X_1^2 + ... + X_n^2} = \frac{1}{4} \quad h.c.c.$$

5. (Phương pháp Monte-Carlo) Cho hàm số $g : (a, b) \to \mathbb{R}$ và g khả tích Riemann trên (a, b). Cho dãy X_j các biến ngẫu nhiên i.i.d. có $X_j \sim Uniform(a, b)$. CM
$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} g(X_j(\omega)) = \frac{1}{b-a} \int_a^b g(x)dx \quad h.c.c.$$

6. Một công ty định giá bảo hiểm lốc xoáy sử dụng các giả thiết sau: a) Mỗi năm có nhiều nhất 1 cơn lốc xoáy, b) Xác suất của mỗi cơn lốc xoáy là 0.05, c) số lốc xoáy hàng năm là độc lập với nhau. Tính xác suất để có ít hơn 3 cơn lốc xoáy trong 20 năm.

7. Một công ty lập ra quỹ có trị giá 120 triệu đồng để thưởng cho những nhân viên có thành tích cao trong năm. Mỗi người sẽ được thưởng C triệu đồng. Công ty có 20 nhân viên và xác suất đạt thành tích cao của mỗi nhân viên là 0.02. Xác định số C để xác suất quỹ bị hết vốn thấp hơn 0.01.

8. Một kỳ thi trắc nghiệm có 40 câu, mỗi câu có 5 đáp án. Một sinh viên cảm thấy khả năng làm mỗi câu đúng là 0.5. Tìm xác suất để sinh viên này giải đúng được ít nhất 25 câu.

9. Lãi suất tính theo năm của tiền đầu tư là các biến ngẫu nhiên độc lập r_i $(i = 1, ..., n)$ với $r_i = 0.06$ với xác suất 0.3; $r_i = 0.08$ với xác suất 0.4;$r_i = 0.10$ với xác suất 0.3. Tìm kỳ vọng và phương sai của $\ln(1 + r_i)$. Khi đầu tư 1$ thì số tiền tích lũy được sau n năm sẽ là $AV_n = (1 + r_1)...(1 + r_n)$ $. Sử dụng định lý giới hạn trung tâm để tìm xác suất tiền tích lũy được cuối năm thứ 20 là nhỏ hơn 5$.

10. Lãi suất tính theo năm của tiền đầu tư là các biến ngẫu nhiên độc lập r_i $(i = 1, ..., n)$ với $r_i = 0.08;\ 0.12$ với xác suất lần lượt là 0.4; 0.6. Tìm kỳ vọng và phương sai của $\ln(1 + r_i)$. Đầu tư 10 000$ bây giờ. Tìm xác suất để số tiền tích lũy được cuối năm thứ 40 tối thiểu là 400 000 $.