ĐỀ CƯƠNG ÔN TẬP 2019
Độ đo xác suất

0. Xác suất cổ điển

Định nghĩa. (a) *Phép thử ngẫu nhiên* τ là một phép thử mà kết quả của mỗi lần thử không thể biết chắc chắn.

(b) Tập hợp tất cả các kết quả có thể có của mỗi lần thử τ gọi là một *không gian mẫu*, thường được ký hiệu là Ω.

(c) Một tập con $E \subset \Omega$ gồm các kết quả ω được quan tâm thì gọi là một *biến cố*. Tập hợp các biến cố ký hiệu là $\mathcal{M}$ (hay $\mathcal{F}, \mathcal{G}$,...). Khi thực hiện phép thử τ ta nhận được một kết quả ω. Nếu $\omega \in E$ ta nói biến cố E xảy ra. Nếu $\omega \notin E$ ta nói biến cố E không xảy ra.

(d) Cho hai biến cố $A, B \in \mathcal{M}$, ta có

1. Biến cố tổng $A \cup B$: chỉ cho biến cố ít nhất một trong các biến cố A, B xảy ra,
2. Biến cố tích $A \cap B$: chỉ cho biến cố cả hai biến cố A, B đều xảy ra,
3. Biến cố đối $\overline{A}$: chỉ cho biến cố A không xảy ra,
4. Biến cố Ω: biến cố chắc chắn,
5. Biến cố $\emptyset$: biến cố không bao giờ xảy ra.

Định nghĩa. Xác suất của một biến cố $A \in \mathcal{M}$ là một con số $\mathbb{P}(A)$ xác định khả năng xảy ra A. Xác suất của A thỏa các tính chất sau:

1. $\mathbb{P}(A) \geq 0$ với mọi biến cố $A \in \mathcal{M}$,
2. Với $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{M}$ ta có
$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_n),$$
3. $\mathbb{P}(\Omega) = 1$.

Định lý. *(a) Cho* $A \in \mathcal{M}$ *ta có* $0 \leq \mathbb{P}(A) \leq 1$, $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$.

(b) Nếu $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{M}$, $A_i \cap A_j = \emptyset$, $\forall i \neq j$ *ta có*

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{j=1}^{n} A_j\right) = \sum_{j=1}^{n} \mathbb{P}(A_j).$$

Từ đó ta có $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$ *với mọi* $A, B \in \mathcal{M}$.

(c) $\mathbb{P}(\overline{A}) = 1 - \mathbb{P}(A)$.

Định nghĩa. Cho hai biến cố $A, B \in \mathcal{M}$. Ta định nghĩa *xác suất xảy ra của* A *khi biết* B *xảy ra* là

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}.$$

Ta nói A, B là hai biến cố độc lập nếu khả năng xảy ra của biến cố A khi B xảy ra bằng với khả năng xảy ra của biến cố A khi B không xảy ra. Ta có thể suy ra hai *biến cố độc lập* khi và chỉ khi

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B).$$

Định lý (xác suất toàn phần) *Cho một họ các biến cố* $B_1, \ldots, B_n$. *Ta nói họ biến cố này đầy đủ nếu* $B_i \cap B_j = \emptyset$ *khi* $i \neq j$ *và* $\Omega = B_1 \cup \ldots \cup B_n$. *Khi đó với mọi biến cố* A *ta có*

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{j=1}^{n} \mathbb{P}(B_i)\mathbb{P}(A|B_i).$$

Định lý (công thức Bayes) *Với các giả thiết của định lý trên ta có*

$$\mathbb{P}(B_k|A) = \frac{\mathbb{P}(B_k \cap A)}{\mathbb{P}(A)} = \frac{\mathbb{P}(A|B_k)\mathbb{P}(B_k)}{\sum_{j=1}^{n} \mathbb{P}(B_i)\mathbb{P}(A|B_i)}$$

Phép thử Bernoulli. Là phép thử mà trong đó chỉ có hai khả năng: phép thử thành công và phép thử không thành công. Giả sử xác suất thành công của phép thử Bernoulli là p và thực hiện phép thử Bernoulli n lần độc lập, đặt X là số lần thử thành công trong n lần thử. Khi đó

$$\mathbb{P}(X = k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}.$$

BÀI TẬP

Dạng 1. Xác định không gian mẫu
Ta cần xác định phép thử và kết quả của phép thử.

1. Một thí nghiệm bao gồm việc thực hiện 20 quan sát về chất lượng của chip máy tính. Mỗi quan sát được ghi nhận là G hay D. Tìm không gian mẫu S của thí nghiệm này. Có bao nhiêu biến cố sơ cấp trong S. Đặt A_n, $n = 0, \ldots, 20$ là biến cố có đúng n quan sát loại G được thực hiện. Hỏi A_n có bao nhiêu phần tử.

2. Một thí nghiệm bao gồm 10 phép đo $w_1, \ldots, w_10$ trọng lượng của các gói. Tấ cả các gói có trọng lượng từ 10 đến 20 Kg. Tì m không gian mẫu S. Đặt $A = \{(w_1, \ldots, w_10) : w_1 + w_2 = 25\}$, $B = \{(w_1, \ldots, w_10) : w_1 + w_2 \leq 25\}$. Mô tả các biến cố bằng hình vẽ.

3. Xét các chuỗi tín hiệu chiều dài 30 gồm các ký tự nhị phân 0.1. Mô tả không gian mẫu. Cho A_{10} là biến cố mà 10 tín hiệu truyền đầu tiên là 1. Tính số phần tử của A_{10}. Cho B_{10} là biến cố truyền có đúng 10 tín hiệu là 1. Tìm số phần tử của B_{10}.

Dạng 2. Tính xác suất của biến cố
Ta cần xác định 1/phép thử, 2/ định nghĩa của xác suất trên không gian mẫu, 3/ biến cố và 4/ tính xác suất của biến cố.

1. Xét 1 xúc xắc cân bằng. Tung xúc xắc 2 lần. Tính xác suất để tổng số nốt xuất hiên là 10.

2. Một khối tín hiệu 100 bit được truyền đi, xác suất của môt bit bị lỗi là 10^{-3}. Biết khả năng các bit bị lỗi là độc lập nhau. Tính xác suất để khối tín hiệu đó có ít nhất 3 lỗi.

3. Một cây que được bẻ ngẫu nhiên thành 3 khúc. Tính xác suất để 3 khúc đó tạo thành 1 tam giác.

Dạng 3. Tính xác suất có điều kiện

Ta cần dùng công thức $\mathbb{P}(AB) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B|A)$. Nếu A, B độc lập thì $\mathbb{P}(AB) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$.

Ta cũng sử dụng công thức xác suất toàn phần: Cho $B_1, \ldots, B_n$ là một phân hoạch (bộ biến cố đầy đủ) của Ω. Khi đó

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{j=1}^{n} \mathbb{P}(B_j)\mathbb{P}(A|B_j).$$

1. Một máy dùng để kiểm tra tình trạng lỗi của 1 món hàng (G là biến cố tốt, D là biến cố lỗi). Gọi A là biến cố món hàng được xem là tốt sau khi kiểm tra. Cho $\mathbb{P}(A|G) = 0,95$, $\mathbb{P}(A|D) = 0.1$, $\mathbb{P}(G) = 0.99$. Tìm xác suất của D khi biết A.

2. Hai nhà sản xuất X,Y cung cấp tấm gốm để sản xuất vi mạch. Tỉ lệ tấm gốm hỏng của nhà sản xuất X là 0.1. Tỉ lệ tấm gốm hỏng của nhà sản xuất Y là 0.05. Một lô hàng tấm gốm được gửi đến, kiểm tra trực tiếp 20 tấm thì thấy có 3 tấm bị hỏng. Dự đoán xem lô hàng này có thể của nhà sản xuất X hay Y?

3. Một phép thử T vi khuẩn E-coli gọi là dương tính sai nếu trong mẫu thử không có E. coli nhưng phép thử khẳng định có E. coli, âm tính sai nếu trong mẫu thử có E. coli nhưng phép thử khẳng định không có E. coli. Giả sử thử 10 000 mẫu thịt đã nhiễm E.coli thì phép thử báo có 9500 mẫu nhiễm; 10 000 mẫu không nhiễm E.coli thì phép thử báo có 9900 mẫu không nhiễm.

   (a) Độ nhạy (sentivity) của phép thử T là tỉ lệ dương tính đúng, độ đặc hiệu (specificity) của phép thử T là tỉ lệ âm tính sai. Tìm độ nhạy và độ đặc hiêu của phép thử E.coli.

   (b) Cho một số mẫu thịt biết có tỉ lệ nhiễm E. coli thực sự là 4.5%. Hỏi nếu chỉ dùng phép thử T ta có thể khẳng dịnh bao nhiêu % thịt thực sự bị nhiễm.

4. Một câu lạc bộ sách phân loại thành viên thành 3 loại: đọc nhiều, đọc vừa và đọc ít và tách các thông báo gửi cho ba nhóm khác nhau. Theo thống kê, có 20% thành viên là loại đọc nhiều; 30% đọc vừa và 50%

đọc ít. Một thành viên chỉ được phân loại vào các nhóm sau 18 tháng gia nhập câu lạc bộ, tuy nhiên số liệu mua sách của 3 tháng đầu được dùng để phân loại. Bảng sau cho biết tỉ lệ phần trăm sách mà các thành viên đã được phân loại mua trong các tháng 0,1,2 và từ 3 tháng trở lên

Thời gian	*Nhóm (%)*		
0	5	15	60
1	10	30	20
2	30	40	15
3^+	55	15	5

Nếu một thành viên chưa mua sách trong 3 tháng đầu thì khả năng thành viên này nằm trong nhóm đọc ít là bao nhiêu?

5. Một công ty cho vay tài chính có tỉ lệ khách hàng không hoàn thành trả nợ là 1%. Công ty kiểm tra về tín dụng của các khách hàng. Với khách hàng không hoàn thành trả nơ công ty phát hiện 30% có rủi ro tín dụng thấp, 40% rủi ro vừa, 30% rủi ro cao. Với khách hàng hoàn thành trả nơ công ty phát hiện 10% có rủi ro tín dụng thấp, 40% rủi ro vừa, 50% rủi ro cao. Tìm xác suất để một khách hàng rủi ro thấp hoàn thành trả nợ.

Dạng 4. Chứng minh một số công thức
Ta sử dụng tiên đề của độ đo xác suất, công thức $\mathbb{P}(AB) = \mathbb{P}(A|B)\mathbb{P}(B)$ và tính độc lập.

1. Cho biến cố A, CM $\mathbb{P}(A^c) = 1 - \mathbb{P}(A)$.
2. Cho biến cố A, B, CM $\mathbb{P}(A^c \cap B) = \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$.
3. Cho biến cố A, B với $\mathbb{P}(A) = 3/4, \mathbb{P}(B) = 1/3$. CM $1/12 \leq \mathbb{P}(A \cap B) \leq 1/3$.
4. Cho A, B là hai biến cố với $\mathbb{P}(B) > 0$. CMR $\mathbb{P}(\overline{A}|B) = 1 - \mathbb{P}(A|B)$.
5. CM $\mathbb{P}(A \cap B \cap C) = \mathbb{P}(A|B \cap C)\mathbb{P}(B|C)\mathbb{P}(C)$.
6. CM $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(AB)$. Từ đó suy ra công thức tương tự cho $\mathbb{P}(A \cup B \cup C)$.

7. CMR nếu A, B độc lập thì các cặp biến cố A^c, B hay A^c, B^c cũng độc lập.

8. Giả sử $A_1, ..., A_n$ là một họ biến cố đầy đủ của S. CM $B = \cup_{j=1}^n B \cap A_j$ với mọi biến cố B. Từ đó suy ra $\mathbb{P}(B) = \sum_{j=1}^n \mathbb{P}(BA_j)$.

9. Cho A, C là hai biến cố và $B_1, \ldots, B_n$ là biến cố xung khắc từng đôi. Chứng tỏ

   (a) $\mathbb{P}\left(\bigcup_{j=1}^n B_j | A\right) = \sum_{j=1}^n \mathbb{P}(B_j|A)$.

   (b) Nếu họ $B_1, \ldots, B_n$ đầy đủ, thì
   $$\mathbb{P}(A|C) = \sum_{j=1}^n \mathbb{P}(B_j|C)\mathbb{P}(A|B_jC).$$

   (c) Nếu $\mathbb{P}(A|B_j) = p$ với mọi j thì $\mathbb{P}\left(A \middle| \bigcup_{j=1}^n B_j\right) = p$.

1. Độ đo

Định nghĩa. Cho $\mathcal{M}$ là một họ các tập con của tập X. Ta nói $\mathcal{M}$ là một σ-đại số nếu $\mathcal{M}$ thỏa

a) $X \in \mathcal{M}$,

b) Nếu $A \in \mathcal{M}$ thì $A^c \in \mathcal{M}$

c) Nếu $A_n \in \mathcal{M}$ $n = 1, 2, ...$ thì $\cup_{n=1}^\infty A_n \in \mathcal{M}$.

Khi đó $(X, \mathcal{M})$ gọi là một không gian đo được và phần tử của $\mathcal{M}$ gọi là các tập đo được.

Hệ quả. *Cho $(X, \mathcal{M})$ là một không gian đo được. Ta có*

a) $\emptyset \in \mathcal{M}$,

b) Nếu $A_n \in \mathcal{M}$ $n = 1, 2, ...$ thì $\cap_{n=1}^\infty A_n \in \mathcal{M}$.

Bài tập. Chứng minh hệ quả bằng cách sử dụng luật De Morgan
$$A \setminus \bigcup_{i \in I} A_i = \bigcap_{i \in I}(A \setminus A_i), A \setminus \bigcap_{i \in I} A_i = \bigcup_{i \in I}(A \setminus A_i).$$

Mệnh đề. *a) Nếu $\mathcal{M}_i$ $(i \in I)$ là một họ các σ-đại số trên X thì $\cap_{i \in I}\mathcal{M}_i$ là một σ-đại số. Cho $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(X)$.*

b) Đặt $\sigma(\mathcal{F}) = \{A: \ A \in \mathcal{M}, \ \forall \mathcal{F} \subset \mathcal{M}\}$. Khi đó, $\sigma(\mathcal{F})$ là σ-đại số nhỏ nhất chứa $\mathcal{F}$, nghĩa là cho σ-đại số $\mathcal{M}$,

$$\mathcal{F} \subset \mathcal{M} \Rightarrow \sigma(\mathcal{F}) \subset \mathcal{M}.$$

Ta nói $\sigma(\mathcal{F})$ là σ-đại số sinh ra bởi $\mathcal{F}$.

Bài tập. a) Chứng minh ba tính chất của σ-đại số. b) CM tính nhỏ nhất của $\sigma(\mathcal{F})$.

Định nghĩa. Cho $I \subset \mathbb{N}$. Cho $\mathcal{F} = \{A_i : i \in I\}$ là các tập đo được thỏa $A_i \neq \emptyset$, $A_i \cap A_j = \emptyset$ nếu $i \neq j$, $i, j \in I$ và $\cup_{i \in I} A_i = X$. Nếu I hữu hạn, ta nói $\mathcal{F}$ là một *phân hoạch hữu hạn* của X. Trong xác suất họ này còn gọi là một bộ biến cố đầy đủ. Nếu I vô hạn, ta nói $\mathcal{F}$ là một *phân hoạch đếm được* của X. Ta nói $\sigma(\mathcal{F})$ là *$\sigma-$đại số của phân hoạch hữu hạn* (hay *phân hoạch đếm được*) $\mathcal{F}$.

Mệnh đề. *Cho $I \subset \mathbb{N}$. Cho $\mathcal{F} = \{A_i : i \in I\}$. Khi đó $\sigma(\mathcal{F})$ bao gồm $\emptyset, X$ và các tập hợp có dạng $\bigcup_{i \in J} A_i$ với $J \subset I$.*

Định nghĩa. Cho τ là họ các tập mở của $\mathbb{R}^n$. Khi đó σ-đại số nhỏ nhất trên $\mathbb{R}^n$ chứa τ gọi là *σ-đại số Borel* và ký hiệu là $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$. Các phần tử của $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ gọi là các *tập Borel*. Các tập Borel thông thường là các tập mở trong $\mathbb{R}^n$, các tập đóng trong $\mathbb{R}^n$, giao đếm được các tập mở, hội đếm được các tập đóng.

Định nghĩa. Cho $(X, \mathcal{M})$ là một không gian đo được. Một ánh xạ $\mu : \mathcal{M} \rightarrow [0, \infty]$ gọi là một độ đo (dương) nếu

a) Tồn tại $A \in \mathcal{M}$ sao cho $\mu(A) < \infty$,

b) Nếu $A_n \in \mathcal{M}$, $n = 1, 2, ...$ và $A_i \cap A_j = \emptyset$ $(i \neq j)$ thì

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n).$$

Khi đó $(X, \mathcal{M}, \mu)$ gọi là một không gian đo. Nếu $\mu(X) = 1$ thì μ gọi là một độ đo xác suất và $(X, \mathcal{M}, \mu)$ gọi là một không gian xác suất.

Mệnh đề. *Với mỗi hàm tăng $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tồn tại một độ đo ký hiệu μ_F, gọi là* *độ đo Stieljes, xác định trên σ-đại số Borel $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ sao cho với mọi $a < b$ ta có*

$$\begin{aligned}\mu_F([a,b]) &= F_+(b) - F_-(a),\\ \mu_F((a,b)) &= F_-(b) - F_+(a),\\ \mu_F([a,b)) &= F_-(b) - F_-(a),\\ \mu_F((a,b]) &= F_+(b) - F_+(a),\end{aligned}$$

trong đó $F_+(x) = \lim_{t\to x^+} F(t)$ và $F_-(x) = \lim_{t\to x^-} F(t)$.

Định nghĩa. Nếu chọn $F(x) = x$ thì μ_F được gọi là độ đo Lebesgue trên $\mathbb{R}$ và ký hiệu là m hay m_1. Với độ đo Lebesgue, ta có $m(\{a\}) = 0,\ m((a,b)) = m([a,b)) = m((a,b]) = m([a,b]) = b - a$ với $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$.

Định lý. *Cho $(X, \mathcal{M}, \mu)$ là một không gian đo. Ta có*

a) $\mu(\emptyset) = 0$,

b) Nếu $A_n \in \mathcal{M}$, $n = 1, 2, ..., m$ và $A_i \cap A_j = \emptyset$ $(i \neq j)$ thì

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{m} A_n\right) = \sum_{n=1}^{m} \mu(A_n).$$

c) Nếu $A, B \in \mathcal{M}$ và $A \subset B$ thì $\mu(A) \leq \mu(B)$.

d) Nếu $A_n \in \mathcal{M}$ và $A_n \subset A_{n+1}$, , $n = 1, 2, ...$ thì

$$\lim_{n\to\infty} \mu(A_n) = \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right)$$

e) Nếu $A_n \in \mathcal{M}$, $A_{n+1} \subset A_n$, và $\mu(A_1) < \infty$, $n = 1, 2, ...$ thì

$$\lim_{n\to\infty} \mu(A_n) = \mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right)$$

f) Nếu $A_n \in \mathcal{M}$, $n = 1, 2, ...$ thì

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n).$$

Bài tập CM tính chất d) theo các bước sau

i) Đặt $B_1 = A_1$, $B_n = A_n \setminus A_{n-1}$, $n = 2, 3, ...$ CM $B_i \cap B_j = \emptyset$ khi $i \neq j$.
ii) CM $A_n = \cup_{i=1}^{n} B_i$.
iii) CM $A = \cup_{i=1}^{\infty} B_i$.
iv) Tính $\mu(A_n)$ và $\mu(A)$ theo $\mu(B_i)$.
v) Suy ra đpcm.

Mệnh đề. *Cho không gian đo* $(X, \mathcal{M}, \mu)$.
a) Nếu $A, B \in \mathcal{M}$, $A \subset B$ *và* $\mu(B) = 0$ *thì* $\mu(A) = 0$.
b) Nếu $A_n \in \mathcal{M}$ *và* $\mu(A_n) = 0$, $n = 1, 2, ...$, *thì* $\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = 0$.

Định nghĩa. Cho $(X, \mathcal{M}, \mu)$. Ta nói độ đo μ là *đầy đủ* nếu với mọi $A \in \mathcal{M}$, $\mu(A) = 0$ và cho $B \subset A$ thì $B \in \mathcal{M}$. Trong trường hợp này, σ-đại số $\mathcal{M}$ cũng gọi là *đầy đủ*.

Mệnh đề. *Cho* $(X, \mathcal{M}, \mu)$. *Gọi* $\mathcal{M}^*$ *là họ các tập* $E \subset X$ *sao cho tồn tại các tập* $A, B \in \mathcal{M}$ *sao cho* $A \subset E \subset B$ *và* $\mu(B \setminus A) = 0$. *Khi đó đặt* $\mu^*(E) = \mu(A)$. *Ta được* $\mathcal{M}^*$ *là một* σ*-đại số đầy đủ trên* X *và* μ^* *là một độ đo đầy đủ trên* $\mathcal{M}^*$.

Bài tập. Chứng minh mệnh đề trên theo các bước sau
i) Giả sử $A \subset E \subset B$ và $\mu(B \setminus A) = 0$, $A_1 \subset E \subset B_1$ và $\mu(B_1 \setminus A_1) = 0$ với $A, A_1, B, B_1 \in \mathcal{M}$. CM $\mu(A) = \mu(A_1)$. Từ đó suy ra định nghĩa của μ^* hoàn toàn xác định.
ii) CM $\mathcal{M}^*$ là một σ-đại số.
iii) CM μ^* là một độ đo.
iv) CM tính đầy đủ của $(X, \mathcal{M}^*, \mu^*)$.

Định nghĩa. Trên $(X, \mathcal{M}, \mu)$, xét hàm mệnh đề $P(x)$, $x \in X$. Ta nói P đúng hầu hết trên $E \in \mathcal{M}$ nếu tồn tại một tập hợp $A \in \mathcal{M}$, $\mu(A) = 0$ sao cho $P(x)$ đúng trên $E \setminus A$. Ta viết P đúng hầu hết khắp nơi (hkn hay a.e.) trên E. Nếu μ là độ đo xác suất, ta còn nói P đúng hầu chắc chắn (hcc hay a.s.) trên E .

BÀI TẬP

Dạng 1. Kiểm tra các điều kiện của σ-đại số, tìm $\sigma(\mathcal{F})$
Khi cho một $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(X)$, ta tìm các phần tử của $\sigma(\mathcal{F})$ bằng cách thực hiện các phép toán tập hợp trên $\mathcal{F}$ để suy ra các tập hợp của $\sigma(\mathcal{F})$.

1. Cho $X = \{a\}$. Hỏi $\mathcal{P}(X)$ là gì? Tương tự với $X = \{a, b\}$, $X = \{a, b, c\}$. Liệt kê các $\sigma-$đại số trên X.

2. Cho $X = \{a, b, c\}$. Đặt $A = \{a\}$, $\mathcal{F} = \{A\}$. Hỏi (i) $\mathcal{F}$ có là $\sigma-$đại số không? (ii) Nếu $\mathcal{M}$ là một σ-đại số trên X và $\mathcal{M} \supset \mathcal{F}$ thì $\mathcal{M}$ chứa các tập con nào? (iii) Tìm tất cả các σ-đại số chứa $\mathcal{F}$, (iv)σ-đại số nhỏ nhất $\sigma(\mathcal{F})$ là gì? (v) Chỉ ra các tập hợp đo được, các tập hợp không đo được theo $\sigma(\mathcal{F})$.

3. Bài tương tự với $X = \{a, b, c\}$ và $\mathcal{F} = \{\{a, b\}\}$, $\mathcal{F} = \{\{a, b\}, \{a\}\}$, $\mathcal{F} = \{\{a, b\}, \{c\}\}$.

4. Bài tương tự với $X = \{a, b, c, d\}$. Đặt $\mathcal{F} = \{\{a, b\}\}$, $\mathcal{F} = \{\{a\}, \{b\}\}$.

5. Cho $\mathcal{M}_i$, $i \in I$, là một họ các σ-đại số trên X. CMR $\bigcap_{i \in I} \mathcal{M}_i$ là một σ-đại số trên X.

6. Cho $X \neq \emptyset$, $\mathcal{M}$ là họ các tập A của X sao cho A hay $X \setminus A$ là quá lắm đếm được.

   (a) CMR $\mathcal{M}$ là một σ-đại số trên X và $\mathcal{M} = \sigma(\{x\}, x \in X)$.

   (b) CMR nếu X quá lắm đếm được thì $\mathcal{M} = \mathcal{P}(X)$.

   (c) CMR nếu X là hội của hai tập vô hạn không đếm được rời nhau thì $\mathcal{M} \neq \mathcal{P}(X)$.

Dạng 2. Tìm σ-đại số sinh ra từ một phân hoạch

Cho $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(X)$, $\mathcal{F} = \{A_i : i \in I\}$ trong đó $I \subset \mathbb{N}$, $A_i \cap A_j = \emptyset$ với $i \neq j$.

1. Nếu $\bigcup_{i \in I} A_i = X$ thì ta tìm các phần tử của $\sigma(\mathcal{F})$ bằng cách thực hiện lấy tất cả các tập hợp có dạng $\bigcup_{i \in J} A_i$ với $J \subset I$ để suy ra các tập hợp của $\sigma(\mathcal{F})$.

2. Nếu $\bigcup_{i \in I} A_i \neq X$ thì ta bổ sung $A_c = X \setminus \bigcup_{i \in I} A_i$. Khi đó $\{A_c, A_i\}$, $i \in I$ là một phân hoạch của X và $\sigma(\mathcal{F})$ gồm các phần tử có dạng $\bigcup_{i \in J} A_i$, $A_c \cup \bigcup_{i \in J} A_i$ với $J \subset I$.

1. Trên $(X, \mathcal{M})$, cho $A \subset X$, tìm $\sigma(\mathcal{F})$ với $\mathcal{F} = \{A\}$.

2. Trên $\mathbb{R}$, tìm $\sigma(\mathcal{F})$ với $\mathcal{F} = \{[0, 1], (2, 4)\}$. Tập hợp $[0, 3]$ có $\sigma(\mathcal{F})$-đo được không?

3. Trên $\mathbb{R}$, tìm $\sigma(\mathcal{F})$ với $\mathcal{F} = \{[0, 3], (2, 5)\}$. Tập hợp $[0, 5)$ có $\sigma(\mathcal{F})$-đo được không?

4. Cho tập X và các tập hợp $A, B \subset X$. Đặt $\mathcal{F} = \{A, B\}$. Tìm $\sigma(\mathcal{F})$ trong hai trường hợp $A \cap B = \emptyset$ và $A \cap B \neq \emptyset$.

Dạng 3. Chứng minh một tập hợp trên $\mathbb{R}$ là tập Borel
Ta sử dụng tính chất: các tập mở trên $\mathbb{R}$ bao gồm các khoảng mở (a, b) và $\cup_{i \in J}(a_i, b_i)$ với $J \subset \mathbb{N}$. Các tập hợp khác dùng phép toán tập hợp để kiểm tra.

1. Cho $a, b \in \mathbb{R}, a < b$. CMR các tập hợp $(a, \infty), [a, \infty), (-\infty, b], (-\infty, b)$, $[a, b), (a, b], [a, b], (a, b)$ là các tập Borel. Tập hợp $\{a\}$ với $a \in \mathbb{R}$ có phải là tập Borel không?

2. Cho $a, b \in \mathbb{R}, a < b$. Cho $\mathcal{F}_0 = \{(a, \infty) : \ a \in \mathbb{R}\}$.

   (a) CMR $\sigma(\mathcal{F}_0) \subset \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

   (b) Cho $\mathcal{M}$ là một σ-đại số trên $\mathbb{R}$ và giả sử $(a, \infty) \in \mathcal{M}$ với mọi $a \in \mathbb{R}$. Sử dụng đẳng thức $[a, \infty) = \bigcap_{n=1}^{\infty} \left(a - \frac{1}{n}, \infty\right)$ CMR $[a, \infty) \in \mathcal{M}$. Suy ra $(-\infty, b), (-\infty, b]$, (a, b), $[a, b), (a, b]$ là các tập hợp trong $\mathcal{M}$. Từ đó suy ra $\sigma(\mathcal{F}_0)$ cũng có tính chất như $\mathcal{M}$.

   (c) Cho tập hợp U mở trong $\mathbb{R}$. Lý thuyết tập hợp cho biết: *tập hợp các khoảng $I := (a, b) \subset U$ (với $a, b \in \mathbb{Q}$) là đếm được*, do đó, ta có thể viết các khoảng này dưới dạng dãy (I_n), $n = 1, 2, ...$ CMR $U = \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$. Từ đó suy ra $U \in \sigma(\mathcal{F}_0)$ với mọi tập mở $U \subset \mathbb{R}$.

   (d) Sử dụng điều trên CMR $\sigma(\mathcal{F}_0) = \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

3. CMR $\sigma(\mathcal{F}_0) = \mathcal{B}(\mathbb{R})$ với $\mathcal{F}_0 = \{[a, \infty) : a \in \mathbb{R}\}$.

4. CMR $\sigma(\mathcal{F}_0) = \mathcal{B}(\mathbb{R})$ với $\mathcal{F}_0 = \{(a, b] : a, b \in \mathbb{R}, a < b\}$.

5. CMR $\sigma(\mathcal{F}_0) = \mathcal{B}(\mathbb{R})$ với $\mathcal{F}_0 = \{[a, b] : a, b \in \mathbb{R}, a < b\}$.

Dạng 4. Các độ đo tổng quát
Ta sử dụng các tiên đề của độ đo để chứng minh.

1. Cho μ_n là một dãy các độ đo trong không gian đo được $(X, \mathcal{M})$ và $\{a_n\}$ là một dãy các số thực không âm. Hỏi $\mu = \sum_{j=1}^{\infty} a_n \mu_n$ có xác định một độ đo dương trên $(X, \mathcal{M})$. Nếu μ_n là các độ đo xác suất và $\sum a_n = 1$ thì μ có độ đo xác suất.

2. Cho $(X, \mathcal{M}, \mu)$ là một không gian đo, $\mu(X) < \infty$, và (A_n) là một dãy các tập con đo được trên không gian đo. Đặt

$$\limsup_n A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k, \ \liminf_n A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k$$

CM

$$\mu(\liminf_n A_n) \leq \liminf_n \mu(A_n), \ \mu(\limsup_n A_n) \geq \limsup_n \mu(A_n).$$

Dạng 4. Các độ đo rời rạc từ σ-đại số sinh ra từ một phân hoạch
Cho $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(X)$, $\mathcal{F} = \{A_i : i \in I\}$ trong đó $I \subset \mathbb{N}$, $A_i \cap A_j = \emptyset$ với $i \neq j$.

1. Nếu $\bigcup_{i \in I} A_i = X$ thì ta xây dựng độ đo trên $\sigma(\mathcal{F})$ bằng cách đặt $\mu(A_i) = p_i \geq 0, \ i \in I$. Khi đó nếu $A = \bigcup_{i \in J} A_i$ với $J \subset I$ thì $\mu(A) = \sum_{i \in J} p_i$.
2. Nếu $\bigcup_{i \in I} A_i \neq X$ thì ta xây dựng độ đo trên $\sigma(\mathcal{F})$ bằng cách đặt $\mu(A_i) = p_i, \ i \in I$, $\mu(A_c) = p_c \geq 0$ với $A_c = X \setminus \bigcup_{i \in I} A_i$. Khi đó nếu $A = \bigcup_{i \in J} A_i$ với $J \subset I$ thì $\mu(A) = \sum_{i \in J} p_i$. $A = A_c \cup \bigcup_{i \in J} A_i$ với $J \subset I$ thì $\mu(A) = p_c + \sum_{i \in J} p_i$.
3. $\mu(X) = \sum_{i \in I} p_i$. Nếu μ là độ đo xác suất thì $\sum_{i \in I} p_i = 1$.

1. Cho $X = \{a, b\}$, μ là một hàm trên các tập con của X. Cho biết $\mu(\{a\}) = 1/4$ và $\mu(X) = 1$. Cho biết giá trị của $\mu(\emptyset)$, $\mu(\{b\})$ để μ là độ đo.

2. Cho $X = \{a, b, c\}$, $\mathcal{F} = \mathcal{P}(X)$. Cho biết μ là một độ đo trên $\mathcal{F}$ và $\mu(\{a, b\}) = x, \mu(\{b, c\}) = y, \mu(\{c, a\}) = z$. Tìm điều kiện của x, y, z và tính $\mu(\{a\}), \mu(\{b\})\mu(\{c\})$ theo x, y, z.

3. Cho $X = \{a, b, c, d\}$, cho μ, ν là độ đo trên $\mathcal{P}(X)$. Cho biết $\mu(\{a\}) = \mu(\{b\}) = \mu(\{c\}) = \mu(\{d\}) = 1/4$ và $\mu(\{b\}) = \mu(\{d\}) = 1/2$. Cho $\mathcal{J} = \{\emptyset, X, \{a, b\}, \{b, c\}, \{c, d\}, \{d, a\}\}$.
   (a) $\mu(A) = \nu(A)$ với $A \in \mathcal{J}$
   (b) CM có $A \in \sigma(\mathcal{J})$ với $\mu(A) = \nu(A)$.

4. Cho tập X và một phân hoạch $\mathcal{F} = \{A_i : i \in I\}$, $I \subset \mathbb{N}$, của X. Cho các số thực $p_i > 0, i \in I$ và $\mu_0 : \mathcal{F} \to \mathbb{R}$ với $\mu_0(A_i) = p_i$. Xây dựng độ đo μ trên $\sigma(\mathcal{F})$ với $\mu(A_i) = \mu_0(A_i)$ với mọi $i \in I$. Khi nào thì độ đo μ là độ đo xác suất.

5. Cho tập X và một phân hoạch $\mathcal{F} = \{A_i : i = 0, 1, \ldots, n\}$. Chứng minh độ đo μ là độ đo xác suất.

   (a) μ thỏa $\mu(A_i) = C_n^i p^i (1-p)^{n-i}$ $(0 < p < 1)$. Độ đo μ gọi là *độ đo nhị thức*. Tính $\mu(A_1 \cup A_2 \cup A_3)$ với $n = 40, p = 0.1$.

   (b) μ thỏa $\mu(A_i) = \frac{C_K^i C_{N-K}^{n-i}}{C_N^n}$ với $n, K < N$. Quy ước $C_n^i = 0$ nếu $i < 0$ hay $i > n$. Độ đo này gọi là độ đo *siêu bội*.

   (c) μ thỏa $\mu(A_i) = \frac{1}{n+1}$. Độ đo này gọi là độ đo *đều rời rạc*.

6. Cho tập X và một phân hoạch đếm được $\mathcal{F} = \{A_i : i = 0, 1, \ldots\}$ của X. Chứng tỏ các độ đo sau là độ đo xác suất

   (a) μ thỏa $\mu(A_i) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^i}{i!}$ $(\lambda > 0)$. Độ đo này gọi là *độ đo Poisson*. Tính $\mu(A_1 \cup A_2 \cup A_3)$ với $\lambda = 2$.

   (b) μ thỏa $\mu(A_i) = p(1-p)^i$ $(p \in (0,1))$. Độ đo này gọi là *độ đo hình học*. Tính $\mu(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4)$ với $p = 0.6$.

   (c) μ thỏa $\mu(A_i) = C_{i+r-1}^{r-1} p^r (1-p)^i$ $(p \in (0,1))$. Độ đo này gọi là *độ đo Pascal* hay *độ đo nhị thức âm*. HD: sử dụng công thức $(1+x)^\alpha = \sum_{i=0}^\infty \begin{pmatrix} \alpha \\ i \end{pmatrix} x^i$ với $|x| < 1$ và

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \end{pmatrix} = 1, \ \begin{pmatrix} \alpha \\ i \end{pmatrix} = \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-i+1)}{i!}, \quad i = 1, 2, \ldots.$$

Dạng 5. Đô đo Lebesgue, Stieljes trên $\mathbb{R}$

Độ đo Lebesgue: $m((a,b)) = m((a,b]) = m([a,b]) = m([a,b) = b - a$ (với $a < b$). Ta cũng có $m(\{a\}) = 0$.

Độ đo Stieljes: Nếu $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ là hàm không giảm thì F xác định độ đo Stieljes μ_F trên $\mathbb{R}$ với $\mu_F(\{a\}) = F_+(a) - F_-(a)$, $\mu_F((a,b)) = F_-(b) - F_+(a)$, $\mu_F((a,b]) = \mu_F((a,b)) + \mu_F(\{b\})$, $\mu_F([a,b)) = \mu_F((a,b)) + \mu_F(\{a\})$, $\mu_F([a,b]) = \mu_F((a,b)) + \mu_F(\{a\}) + \mu_F(\{b\})$, $\mu_F((-\infty,b)) = F_-(b) - \lim_{a\to-\infty} F(a)$, $\mu_F((a,\infty)) = \lim_{b\to\infty} F(b) - F_+(a)$.

1. Cho m là độ đo Lebesgue trên $\mathbb{R}$. Tìm $m([2,3])$, $m((1,5])$, $m(\{4\})$, $m\left[\cup_{n=1}^{\infty}\left(n, n+\frac{1}{2^n}\right)\right]$.

2. Với $A \subset X$, ta định nghĩa hàm $\mathbb{I}_A : X \to \mathbb{R}$ như sau

$$\mathbb{I}_A(x) = \begin{cases} 1 & x \in A, \\ 0, & x \in X \setminus A. \end{cases}$$

Cho $F(x) = \frac{1}{4}\mathbb{I}_{[0,\infty)} + \frac{1}{2}\mathbb{I}_{[1,\infty)} + \frac{1}{4}\mathbb{I}_{[2,\infty)}$. Cho $\mathbb{P}$ xác định bởi $\mathbb{P}((-\infty, x]) = F(x)$. Tìm độ đo của $A = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$, $B = \left(-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$, $C = \left(\frac{2}{3}, \frac{5}{2}\right)$, $D = [0,2)$, $E = (3,\infty)$, $G = [1,2]$, $H = [0,1)$, $K = \{2\}$.

3. Cho $F(x) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2^j}\mathbb{I}_{[\frac{1}{j},\infty)}(x)$. Cho $\mathbb{P}$ xác định bởi $\mathbb{P}((-\infty, x]) = F(x)$. Tìm độ đo của các tập hợp sau $A = [1,\infty)$, $B = [\frac{1}{10},\infty)$, $C = \{0\}$, $D = [0,\frac{1}{2})$, $E = (-\infty, 0)$, $G = (0,\infty)$.

Dạng 6. Các độ đo Radon-Nikodym trên $\mathbb{R}$

Nếu $f(x) \geq 0$ có $\int_{-\infty}^{\infty} f(t)dt < \infty$ thì ta có thể xác định hàm

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt.$$

Khi đó $\mu_F(\{a\}) = 0$, với mọi $a, b \in \mathbb{R}$ ta có

$$\mu_F([a,b]) = \mu_F((a,b]) = \mu_F([a,b)) = \mu_F((a,b)) = \int_a^b f(t)dt.$$

Ta ký hiệu $d\mu_F/dm = f$.
Nếu $f(x) \geq 0$ và $\int_{-\infty}^{\infty} f(t)dt = 1$ thì μ_F là độ đo xác suất và f gọi là hàm mật độ của độ đo này.

1. Dùng máy tính, tìm độ đo $\mu_F([c,d])$ với $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$. Đặt $f(x) = 0$ trên các khoảng không ghi ra. Độ đo đó gọi là

   (a) đều Uniform(a,b): $f(x) = \frac{1}{b-a}$ với $x \in [a,b]$, $a = 0, b = 3$, chọn $c = -1, d = 2$,

   (b) chuẩn $N(\mu, \sigma^2)$: $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$ với $\sigma = 2, \mu = 0$, chọn $c = -2, d = 1$,

(c) mũ $Exp(\beta)$ $(\beta > 0)$: $f(x) = \frac{1}{\beta}e^{-x/\beta}$ $(x > 0)$, $\beta = 1$, chọn $c = -1, d = 4$,

2. Cho biết hàm $\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1}e^t dt$ xác định với $z > 0$ và có các tính chất $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$, $\Gamma(n+1) = n!$, $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$, $\Gamma((2m+1)/2) = 1 \times 3 \times \ldots \times (2m-1)\sqrt{\pi}/2^m$ $(m \in \mathbb{N})$. Dùng máy tính, tìm độ đo $\mu_F((c,d))$ với $F(x) = \int_{-\infty}^x f(t)dt$. Đặt $f(x) = 0$ trên các khoảng không ghi ra. Độ đo đó gọi là

   (a) $Gamma(\alpha,\beta)$ $(\alpha,\beta > 0)$: $f(x) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)}x^{\alpha-1}e^{-\beta x}$ $(x > 0)$, chọn $\alpha = 1, \beta = 1$, chọn $c = -1, d = 3$, cho biết $\Gamma(1) = 1$.

   (b) $\chi^2(p)$ $(p > 0)$: $f(x) = \frac{1}{2^{p/2}\Gamma(p/2)}x^{-1+p/2}e^{-x/2}$ $(x > 0)$, chọn $p = 1$, chọn $c = 1, d = 3$.

   (c) $Beta(\alpha,\beta)$ $(\alpha,\beta > 0)$: $f(x) = \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}$ $(0 < x < 1)$, chọn $\alpha = 1, \beta = 2$, chọn $c = -1, d = 2$.

   (d) Student $St(n)$ $(n \in \mathbb{N})$: $f(x) = \frac{\Gamma((n+1)/2)}{\sqrt{n\pi}\Gamma(n/2)}\left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{-(n+1)/2}$, $x \in \mathbb{R}$ chọn $n = 1$, chọn $c = -1, d = 2$.

   (e) Fisher-Snedecor $F(p,n)$: $f(x) = \frac{(p/n)^{p/2}\Gamma((p+n)/2)}{\Gamma(p/2)\Gamma(n/2)}\frac{x^{p/2-1}}{(1+px/n)^{(p+n)/2}}$ $x > 0$, chọn $p = 2, n = 3$ và $c = 1, d = 4$.

Dạng 7. Tính chất đúng hầu hết khắp nơi

Cho $(X,\mathcal{M},\mu)$, cho một hàm mệnh đề $P(x)$, $x \in X$. Ta nói $P(x)$ đúng hầu hết khắp nơi theo độ đo μ nếu tồn tại tập $A \in \mathcal{M}$, $\mu(A) = 0$ sao cho $P(x)$ đúng với mọi $x \in X \setminus A$.
Để giải các bài toán ta sử dụng tính chất: nếu $B \subset A$ và $\mu(A) = 0$ thì $\mu(B) = 0$ và $\mu(\cup_{i\in I}A_i) = 0$ nếu $\mu(A_i) = 0$ với mọi $i \in I$, $I \subset \mathbb{N}$.

Cho $(X,\mathcal{M},\mu)$. Cho $f, g, h, f_n, g_n : X \to \mathbb{R}$.

1. Trên $\mathbb{R}$ với độ đo Lebesgue, chứng minh rằng mọi tập con hữu hạn, mọi tập con đếm được của $\mathbb{R}$ đều có độ đo Lebesgue là 0.

2. Cho hàm $f(x) = 1/\sin x$ với $x \neq k\pi$, $f(k\pi) = 1$ với $(k \in \mathbb{Z})$, $g(x) = 1/\sin x$ với $x \neq k\pi$, $g(k\pi) = 0$ với $(k \in \mathbb{Z})$. Chứng minh $f = g$ hầu khắp nơi theo độ đo Lebesgue.

3. Cho hàm $f(x) = 1/|\cos x|$ với $\cos x \neq 0$, $f(x) = 1$ với $\cos x \neq 0$, $g(x) = 2/|\cos x|$ với $\cos x \neq 0$, $g(x) = -3$ với $\cos x = 0$. Chứng minh $0 \leq f \leq g$ hầu khắp nơi theo độ đo Lebesgue.

4. Nếu $f_1 = g_1$, $f_2 = g_2$ hkn thì $f_1 \pm f_2 = g_1 \pm g_2$, $f_1 f_2 = g_1 g_2$ hkn.

5. Chứng minh rằng nếu $f = g$ hkn và $g = h$ hkn thì $f = h$ hkn.

6. Nếu $f_n = g_n$ hkn với mọi $n = 1, 2, \ldots$ và nếu $\lim_{n\to\infty} f_n = f$ hkn, $\lim_{n\to\infty} g_n = g$ thì $f = g$ hkn.

7. Nếu tồn tại $M > 0$ sao cho $|f(x)| \leq M$ hkn thì ta nói f bị chặn hkn. CMR nếu f, g bị chặn hkn thì $f \pm g, fg$ bị chặn hkn.

8. Nếu f bị chặn hkn. Đặt $\|f\|_\infty = \inf\{M : |f(x)| \leq M\ hkn\}$. CM $|f(x)| \leq \|f\|_\infty$ hkn.

9. Nếu f, g bị chặn hkn thì $\|f + g\|_\infty \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$.

2. Hàm đo được

Định nghĩa. Cho ánh xạ $f : X \to Y$, $B \subset Y$. Ta định nghĩa *ảnh ngược của tập B qua ánh xạ f* là $f^{-1}(B) = \{\omega \in X : f(\omega) \in B\}$. Tập hợp này cũng được ký hiệu là $(f \in B)$.

Mệnh đề. *Cho B_i, $i \in I$, B, C là các tập con của Y và cho ánh xạ $f : X \to Y$. Khi đó $(f \in Y) = X$ và*

$$\begin{aligned}
\left(f \in \bigcup_{i\in I} B_i\right) &= \bigcup_{i\in I}(f \in B_i),\\
\left(f \in \bigcap_{i\in I} B_i\right) &= \bigcap_{i\in I}(f \in B_i),\\
(f \in B \setminus C) &= (f \in B) \setminus (f \in C).
\end{aligned}$$

Mệnh đề. *Cho $(X, \mathcal{M})$ là một không gian đo được và $f : X \to Y$. Khi đó tập*

$$\mathcal{N}_f = \{W \subset Y : f^{-1}(W) \in \mathcal{M}\}$$

là một σ-đại số trên Y. Ngoài ra, cho họ các tập con $\mathcal{F}_0 \subset \mathcal{P}(X)$. Khi đó, nếu $\mathcal{F}_0 \subset \mathcal{N}_f$ thì $\sigma(\mathcal{F}_0) \subset \mathcal{N}_f$. Nghĩa là ''$f^{-1}(B) \in \mathcal{M}$ với mọi $B \in \mathcal{F}_0$)'' $\Longrightarrow$ ''$f^{-1}(B) \in \mathcal{M}$ với mọi $B \in \sigma(\mathcal{F}_0)$''.

Định nghĩa. Cho $(X, \mathcal{M})$, $(Y, \mathcal{N})$ là hai không gian đo được. Ánh xạ $f : X \to Y$ gọi là *đo được* nếu $f^{-1}(W) \in \mathcal{M}$ với mọi $W \in \mathcal{N}$. Nếu $(X, \mathcal{M}) = (\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$, $(Y, \mathcal{N}) = (\mathbb{R}^k, \mathcal{B}(\mathbb{R}^k))$ thì f được gọi là *Borel đo được* hay gọi vắn tắt là *hàm Borel*.

Định lý. *Cho $(X, \mathcal{M}), (\mathbb{R}^k, \mathcal{B}(\mathbb{R}^k))$ là không gian đo được. Ánh xạ $f : X \to \mathbb{R}^k$ là đo được nếu và chỉ nếu $f^{-1}(U) \in \mathcal{M}$ với mọi U là tập mở trong R^n.*

Bài tập CM Định lý theo các bước sau:

i) Đặt $\mathcal{N}_f = \{W \subset \mathbb{R}^k : f^{-1}(W) \in \mathcal{M}\}$. CM $\mathcal{N}_f$ là một σ-đại số trong $\mathbb{R}^k$.

ii) CM $\mathcal{B}(\mathbb{R}^k) \subset \mathcal{N}_f$.

Hệ quả. *Mọi ánh xạ liên tục $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ đều là một hàm Borel đo được.*

Bài tập. Sử dụng tính chất ảnh ngược liên tục của một tập mở là một tập mở và tính chất nếu $\mathcal{F} \subset \ \sigma-$đại số $\mathcal{M}$ thì $\sigma(\mathcal{F}) \subset \mathcal{M}$ để chứng minh mệnh đề.

Mệnh đề *a) Nếu X,Y,Z là các không gian đo được và $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ là đo được thì $g \circ f$ là đo được.*

b) Nếu X là không gian đo được, $f : X \to \mathbb{R}^n$ đo được và $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ đo được Borel thì $g \circ f$ là đo được.

Bài tập. a) Chứng minh tính chất $(g \circ f)^{-1}(A) = f^{-1}(g^{-1}(A))$ với $A \subset Z$.

b) CM mệnh đề.

Mệnh đề. *Hàm $f : X \to [-\infty, \infty]$ đo được nếu và chỉ nếu một trong các điều sau là đúng với mọi $a \in \mathbb{R}$*

a) $(f \geq a) := f^{-1}([a, \infty])$ đo được.
b) $(f > a) := f^{-1}((a, \infty])$ đo được.
c) $(f \leq a) := f^{-1}([-\infty, a])$ đo được.
d) $(f < a) := f^{-1}([-\infty, a))$ đo được.

e) $(f \in (a,b)) := f^{-1}((a,b))$ *đo được với mọi* $a < b$ *và* $f^{-1}(\infty)$ *đo được.*

Bài tập. Cm mệnh đề trên theo các bước sau

i) CM $(f > a) = \cup_{n=1}^{\infty} \left(f \geq a + \frac{1}{n}\right)$. Từ đó CM a) $\Rightarrow$ b).

ii) CM b) $\Rightarrow$ c).

iii) CM $(f < a) = \cup_{n=1}^{\infty} \left(f \leq a - \frac{1}{n}\right)$. Từ đó CM c) $\Rightarrow$ d).

iv) CM $(f \in [a,b)) = (f < b) \setminus (f < a)$. Từ đó CM $(f \in [a,b))$ đo được. CM $a + \delta_n < b$ với $\delta_n = \frac{b-a}{2n}$ và $(f \in (a,b)) = \cup_{n=1}^{\infty}(f \in [a+\delta_n, b)$. Từ đó CM d) $\Rightarrow$ e).

v) Sử dụng tính chất: mọi tập mở V trong $\mathbb{R}$ đều có thể viết dưới dạng $V = \cup_{n=1}^{\infty}(a_n, b_n)$, $a_n < b_n$, CM e) $\Rightarrow$ f).

Mệnh đề. *Cho* $u, v : X \to \mathbb{R}$ *là các hàm số đo được và* $\Phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *liên tục thì* $h : X \to \mathbb{R}$ *với* $h(x) = \Phi(u(x), v(x))$ *là một ánh xạ đo được.*

Mệnh đề. *Cho dãy hàm* $f_n : X \to [-\infty, \infty]$ *đo được thì* $\sup f_n$, $\inf f_n$, $\limsup f_n$, $\liminf f_n$ *là đo được.*

Bài tập. Đặt $g(x) = \sup_n f_n(x)$, $h(x) = \inf_n f_n(x)$. CM

$$(g > a) = \cup_{n=1}^{\infty}(f_n > a), (h < a) = \cup_{n=1}^{\infty}(f_n < a).$$

Từ đó CM mệnh đề.

Định nghĩa Cho H là một tập hợp, $A \subset H$. Khi đó ta định nghĩa

$$\mathbb{I}_A(x) = \begin{cases} 1 & (x \in A) \\ 0 & (x \in H \setminus A) \end{cases}$$

Hàm này còn được ký hiệu là χ_A.

Mệnh đề *Cho X là không gian đo được,* $A \subset X$*. Khi đó* $\mathbb{I}_A$ *đo được khi và chỉ khi A đo được.*

Bài tập. CM mệnh đề trên bằng cách tìm $\mathbb{I}_A^{-1}(V)$ với V mở. Xét các trường hợp a) $1 \in V, 0 \notin V$; b) $1 \notin V, 0 \in V$; c) $1 \in V, 0 \in V$; d) $1 \notin V, 0 \notin V$.

Định nghĩa Cho X là không gian đo được. Cho $s : X \to \mathbb{R}$. Hàm s gọi là *hàm đơn* nếu $s(X)$ chỉ có hữu hạn giá trị.

Mệnh đề. *Cho hàm* $s : X \to \mathbb{R}$ *có* $s(X) = \{\alpha_1, ..., \alpha_n\}$ *với* $\alpha_i \neq \alpha_j$ *với* $i \neq j$*. Đặt* $A_i = s^{-1}(\alpha_i)$*, ta có*

a) $A_i \cap A_j = \emptyset$ *với* $i \neq j$ *và* $\bigcup_{i=1}^n A_i = X$.
b) $s = \sum_{i=1}^n \alpha_i \mathbb{I}_{A_i}$,
c) với mọi $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *ta có* $g(s(x)) = \sum_{i=1}^n g(\alpha_i)\mathbb{I}_{A_i}$
d) hàm s *đo được khi và chỉ khi* A_i *đo được với mọi* $i = 1, 2, ...$

Bài tập. Chứng minh mệnh đề trên.

Định lý. *Với mọi hàm đo được* $f : X \to [0, \infty]$ *tồn tại các hàm đơn đo được không âm* s_n *trên* X *sao cho*
a) $0 \leq s_1 \leq s_2 \leq ... \leq f$,
b) $s_n(x) \to f(x)$ *khi* $n \to \infty$ *với mọi* $x \in X$.

Bài tập. i) Ký hiệu $[\alpha]$ là số nguyên lớn nhất không vượt quá $\alpha \in \mathbb{R}$. CM $\alpha - 1 \leq [\alpha] \leq \alpha$ và nếu $\alpha \leq \beta$ thì $[\alpha] \leq [\beta]$.
ii) Đặt $\varphi_n(t) = \frac{[2^n t]}{2^n}$ $(0 \leq t \leq n)$ và $\varphi_n(t) = n$ với $t > n$. CM $t - 2^{-n} \leq \varphi_n(t) \leq t$ với mọi $0 \leq t \leq n$. Từ đó suy ra $\lim_{n\to\infty} \varphi_n(t) = t$.
iii) CM $\varphi_n(t) \leq \varphi_{n+1}(t)$.
iv) CM

$$\varphi_n(t) = \sum_{k=0}^{n2^n-1} \frac{k}{2^n} \mathbb{I}_{\left[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}\right)}(t) + n\mathbb{I}_{[n,\infty)}(t).$$

v) Đặt $s_n(x) = \varphi_n(f(x))$. CM (s_n) thỏa định lý.

BÀI TẬP

Dạng 1. Tìm ảnh ngược của một hàm số
Ta sử dụng các tính chất

$$\begin{aligned} x \in (f \in A) = f^{-1}(A) &\Leftrightarrow f(x) \in A, \\ x \in (f > a) = f^{-1}((a, +\infty)) &\Leftrightarrow f(x) > a, \\ x \in (a < f < b) = f^{-1}((a, b)) &\Leftrightarrow a < f(x) < b. \end{aligned}$$

Cho $s(X) = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$, $(s = \alpha_i) = A_i = \{x \in X : s(x) = \alpha_i\}$. Với mọi tập $B \subset \mathbb{R}$, đặt $J = \{i \in I : \alpha_i \in B\}$ ta có

$$(s \in B) = s^{-1}(B) = \bigcup_{i \in J} A_i.$$

1. Cho $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$. Tìm $f^{-1}((a,b))=(a<f<b)$, $f^{-1}([a,\infty))=(f\geq a)$, $f^{-1}((-\infty,b])=(f\leq b)$ với $f(x)$ và a,b lần lượt là

   (a) $3x-1,\ -4,2$.

   (b) $x^2,\ -4,9$.

   (c) $e^x,\ -4,-3$

2. Cho $\mathbb{P}$ là độ đo Lebesgue trên $[0,1]$. Đặt

$$f(x)=\begin{cases} 1 & 0\leq x<1/4,\\ 2x^2 & 1/4\leq x<3/4,\\ x^2 & 3/4\leq x\leq 1.\end{cases}$$

   Tính $\mathbb{P}(f\in A)$ với $A=[0,1],[1/2,1]$.

3. Cho hàm $s:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ với $s(x)=-\mathbb{I}_{(0,2]}(x)+3\mathbb{I}_{[3,6)}(x)$. a) Tìm $s(\mathbb{R})$, b) vẽ đồ thị hàm số, c) Tính $s^{-1}(E)$ với $E=(-\infty,4)$, $E=[2,5)$, $E=[1,3]$.

4. Bài tương tự với $s=2\mathbb{I}_{(-3,1]}-3\mathbb{I}_{[2,4]}$. $E=(-\infty,3)$, $E=[-2,2]$, $E=[1,\infty]$.

5. Bài tương tự với $s=-3\mathbb{I}_{(-3,0]}+4\mathbb{I}_{[-1,4]}$. $E=(-\infty,3)$, $E=[-2,2]$, $E=[1,3]$.

6. Bài tương tự với $s=\mathbb{I}_{(-3,4]}+4\mathbb{I}_{[-1,2]}$. $E=(-2,3)$, $E=[-2,2]$, $E=[1,3]$.

Dạng 2. Tìm dạng hàm đơn

Cho A_i, $i=1,\ldots,n$ là một phân hoạch của không gian $(X,\mathcal{M})$. Ta có

$$s(x)=\alpha_i\forall x\in A_i, i\in I=\{1,\ldots,n\}\Leftrightarrow s(x)=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\mathbb{I}_{A_i}(x).$$

1. Cho các tập đo được A_0,A_1,A_2,A_3,A_4 là một phân hoạch hữu hạn của X. Đặt hàm $s:X\to\mathbb{R}$ với $s(x)=k$ nếu $x\in A_k$, $k=0,1,2,3,4$.

   (a) Viết s dưới dạng tổng các hàm dạng $c_j\mathbb{I}_{A_j}$.

   (b) Viết các tập hợp sau theo A_k, $k=0,\ldots,4$: $(s=2)$, $(s\leq 2)$, $(s>2)$, $(1\leq s\leq 4)$.

(c) Từ đó tìm độ đo $\mathbb{P}(s = 2), \mathbb{P}(s \leq 2), \mathbb{P}(s > 2), \mathbb{P}(1 \leq s \leq 4)$ nếu độ đo $\mathbb{P}$ là độ đo nhị thức ($p = 0.2$), độ đo đều hữu hạn? Trong các trường hợp đó, tính $\mathbb{P}(s > 1|s \leq 3)$.

2. Cho các tập đo được $A_0, \ldots, A_n$, $n \geq 5$, là một phân hoạch hữu hạn của X. Đặt hàm $s : X \to \mathbb{R}$ với $s(x) = k$ nếu $x \in A_k$.

   (a) Viết s dưới dạng tổng của các hàm dạng $c_j\mathbb{I}_{A_j}$.

   (b) Tìm $\mu(0 \leq s \leq 3)$, $\mu(s = 5)$, $\mu(0 \leq s \leq 4|s \geq 3)$ nếu μ là độ đo nhị thức, độ đo đều hữu hạn?

3. Cho các tập đo được $A_0, A_1, \ldots$, là một phân hoạch đếm được của X. Đặt $s(x) = k$ nếu $x \in A_k$.

   (a) Viết s dưới dạng tổng của các hàm dạng $c_j\mathbb{I}_{A_j}$.

   (b) Tìm $\mathbb{P}(s \leq 3), \mathbb{P}(2 \leq s \leq 5), \mathbb{P}(s \geq 4), \mathbb{P}(1 \leq s \leq 5|s \geq 3)$ nếu $\mathbb{P}$ là độ đo Poisson, độ đo hình học, độ đo Pascal.

Dạng 3. Chứng minh một ánh xạ đo được
Sử dụng tính chất (D):
Hàm $f : X \to [-\infty, \infty]$ đo được khi và chỉ khi $(f > a) = f^{-1}((a, \infty])$ là một tập Borel với mọi a.
Ta cũng có thể sử dụng các tập hợp $(f < a)$, $(a < f < b)$ với $a, b \in \mathbb{R}, a < b$, để chứng minh.

1. CMR hàm $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2x$ là đo được Borel trên $\mathbb{R}$. Có cách chứng minh nào khác không?

2. Bài tương tự với $f(x)$ là $2x + 1$, e^x, $-3x$, $x^3 + 1$.

3. Cho $f(x) = x^2$. Hỏi f có đo được Borel hay không? hãy kiểm tra trực tiếp bằng cách sử dụng tính chất (E): Hàm $f : X \to [-\infty, \infty]$ đo được khi và chỉ khi $(f \leq a)$ đo được với mọi $a \in \mathbb{R}$.

4. Bài tập tương tự với

   (a) $f(x) = x^{-2}$ $(x \neq 0)$ và $f(0) = +\infty$.

   (b) $f(x) = x^{-4}$ $(x \neq 0)$ và $f(0) = -\infty$.

   (c) $f(x) = x^{-1}$ $(x \neq 0)$ và $f(0) = 1$.

(d) $f(x) = e^{-|x|}$.

(e) $f(x) = e^{x^2}$.

(f) $f(x) = \ln x$ nếu $x > 0$ và $f(x) = 0$ nếu $x \leq 0$.

3. Tích phân Lebesgue của hàm đơn không âm

Định nghĩa. Cho không gian đo $(X, \mathcal{M}, \mu)$, $E \in \mathcal{M}$. Cho hàm đơn đo được $s : X \to \mathbb{R}$, $s(X) = \{\alpha_1, ..., \alpha_n\}$ với $\alpha_i \geq 0$ $(i = 1, ..., n)$. Ta định nghĩa

$$\int_E s(x) d\mu(x) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mu(A_i \cap E)$$

trong đó $A_i = (s = \alpha_i) := s^{-1}(\alpha_i)$.

Mệnh đề. *Cho s,t là hai hàm đơn đo được không âm trên $(X, \mathcal{M}, \mu)$, $E \in \mathcal{M}$. Ta có*

a) Hàm $\phi : \mathcal{M} \to [0, \infty)$ xác định bởi

$$\phi(E) = \int_E s d\mu$$

là một độ đo dương trên $\mathcal{M}$.

b) $\int_E s(x) d\mu(x) = \int_X s(x) \mathbb{I}_E(x) d\mu(x)$.

c) $\int_E s(x) d\mu(x) = \alpha \mu(E)$ nếu $s(x) = \alpha$ với mọi $x \in E$.

d) $\int_E (s + t) d\mu = \int_E s d\mu + \int_E t d\mu$.

e) $\int_E \gamma s(x) d\mu(x) = \gamma \int_E s(x) d\mu(x)$ với mọi $\gamma \in \mathbb{R}$.

f) Nếu $0 \leq s(x) \leq t(x)$ với mọi $x \in E$ thì $\int_E (t - s) d\mu = \int_E t d\mu - \int_E s d\mu$ và $\int_E s(x) d\mu(x) \leq \int_E t(x) d\mu(x)$. Từ đó

$$\int_E t(x) d\mu(x) = \sup_{0 \leq s \text{ đơn } \leq t} \int_E s(x) d\mu(x).$$

Bài tập. a) Giả sử $s = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mathbb{I}_{A_i}$ với $s(X) = \{\alpha_1, ..., \alpha_n\}$ và $A_i = s^{-1}(\alpha_i)$. Viết biểu thức của $\phi(E)$. Từ đó CM các tính chất của độ đo.

b) Sử dụng định nghĩa và công thức $\mathbb{I}_A(x) \mathbb{I}_E(x) = \mathbb{I}_{A \cap E}(x)$.

d) Giả sử thêm $t = \sum_{i=1}^{k} \beta_i \mathbb{I}_{B_j}$ với $t(X) = \{\beta_1, ..., \beta_k\}$ và $B_j = t^{-1}(\beta_j)$. CM Đặt $\phi(E) = \int_E (s+t)d\mu, \phi_1(E) = \int_E sd\mu, \phi_2(E) = \int_E td\mu$. CM $(s+t)(x) = \alpha_i + \beta_j$ khi $x \in A_i \cap B_j$, $i = \overline{1,n}, j = \overline{1,k}$. Từ đó suy ra

$$\phi(E \cap A_i \cap B_j) = \phi_1(E \cap A_i \cap B_j) + \phi_2(E \cap A_i \cap B_j).$$

Kiểm tra $\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{k} \phi(E \cap A_i \cap B_j) = \phi(E)$. Từ đó suy ra mệnh đề.

e) Áp dụng d) và định nghĩa.

f) Ta có $t - s$ là hàm đơn không âm. Vậy $\int_E (t-s)d\mu \geq 0$. Suy ra kết quả.

BÀI TẬP

Dạng 1. Tính tích phân Lebesgue của hàm đơn

Cho không gian đo $(X, \mathcal{M}, \mu)$. Cho hàm đơn s có $s(X) = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_k\}$. Nếu $E = \cup_{i \in J}(s = \alpha_i)$, $J \cup \{1, \ldots, k\}$ thì

$$\int_E s(x)d\mu = \sum_{i \in J} \alpha_i \mu(s = \alpha_i).$$

Tương tự tích phân Lebesgue của s trên tập hợp $(s \in K)$, $K \subset \mathbb{R}$ là

$$\int_{s \in K} s(x)d\mu = \sum_{\alpha_i \in K} \alpha_i \mu(s = \alpha_i).$$

Đặc biệt $\int_E d\mu(x) = \mu(E)$, $\int_E \mathbb{I}_B(x)d\mu(x) = \mu(B \cap E)$ với $E, B \in \mathcal{M}$.

1. Cho hàm $s(x) = 2\mathbb{I}_{(0,2]} + 3\mathbb{I}_{[3,6)}$. a) Tìm $s(\mathbb{R})$, b) vẽ đồ thị hàm số, c) Tính $\int_E s(x)dm(x)$ với $E = (1,4)$, $E = [2,5)$, $E = [1,3]$, d) Cho biết ý nghĩa hình học của tích phân này.

2. Bài tương tự với $s = 2\mathbb{I}_{(-3,1]} + 4\mathbb{I}_{[2,4]}$. $E = (-2,3)$, $E = [-2,2]$, $E = [1,3]$.

3. Bài tương tự với $s = \mathbb{I}_{(-3,0]} + 4\mathbb{I}_{[-1,4]}$. $E = (-2,3)$, $E = [-2,2]$, $E = [1,3]$.

4. Bài tương tự với $s = \mathbb{I}_{(-3,4]} + 4\mathbb{I}_{[-1,2]}$. $E = (-2,3)$, $E = [-2,2]$, $E = [1,3]$.

5. Cho các tập đo được $A_0, A_1, A_2, A_3, A_4, A_5$ là một phân hoạch hữu hạn của X và một độ đo μ. Đặt hàm $s : X \to \mathbb{R}$ với $s(x) = k^2$ nếu $x \in A_k$, $k = 0, 1, 2, 3, 4$.

(a) Viết s dưới dạng tổng các hàm dạng $c_j\mathbb{I}_{A_j}$.

(b) Viết các tập hợp sau theo A_k, $k = 0, \ldots, 5$: $(s = 2)$, $(s \leq 2)$, $(s > 2)$, $(2 \leq s \leq 5)$.

(c) Từ đó tính $\int_{(s=2)} s(x)d\mu$, $\int_{(s\leq 2)} s(x)d\mu$, $\int_{(s>2)} s(x)d\mu$, $\int_{(1\leq s\leq 4)} s(x)d\mu$ nếu độ đo μ là độ đo nhị thức $(p = 0.2)$, độ đo đều hữu hạn.

(d) Tính $\mathbb{E}s$ nếu độ đo μ là độ đo nhị thức $(p = 0.2)$, độ đo đều hữu hạn.

6. Cho các tập đo được $A_0, \ldots, A_n$, $n \geq 5$, là một phân hoạch hữu hạn của X. Đặt hàm $s : X \to \mathbb{R}$ với $s(x) = k^2$ nếu $x \in A_k$.

   (a) Viết s dưới dạng tổng của các hàm dạng $c_j\mathbb{I}_{A_j}$.

   (b) Tìm $\mu(0 \leq s \leq 3)$, $\mu(s = 16)$, $\mu(0 \leq s \leq 4|s \geq 3)$ nếu μ là độ đo nhị thức $(p = 0.3)$, độ đo đều hữu hạn?

   (c) Tính $\int_{(s=4)} s(x)d\mu$, $\int_{(s\leq 2)} s(x)d\mu$, $\int_{(s>4)} s(x)d\mu$, $\int_{(1\leq s\leq 4)} s(x)d\mu$ nếu độ đo μ là độ đo nhị thức $(p = 0.2)$, độ đo đều hữu hạn.

7. Cho các tập đo được $A_0, A_1, \ldots,$ là một phân hoạch đếm được của X. Đặt $s(x) = k$ nếu $x \in A_k$.

   (a) Viết s dưới dạng tổng của các hàm dạng $c_j\mathbb{I}_{A_j}$.

   (b) Tìm $\mathbb{P}(s \leq 3), \mathbb{P}(2 \leq s \leq 5), \mathbb{P}(s \geq 4), \mathbb{P}(1 \leq s \leq 5|s \geq 3)$ nếu $\mathbb{P}$ là độ đo Poisson, độ đo hình học, độ đo Pascal.

   (c) Tính $\mathbb{E}s$.

Dạng 2. Tính tích phân Lebesgue của hàm đơn bằng tính chất
Cho không gian đo $(X, \mathcal{M}, \mu)$. Cho hàm đơn $s \geq 0$ có $s(x) = \sum_{j=1}^{m} \beta_j\mathbb{I}_{B_j}(x)$, $\beta_j \in \mathbb{R}$. Ta có

$$\int_E s(x)d\mu = \sum_{j=1}^{m} \beta_j \int_E \mathbb{I}_{B_j}(x)d\mu(x).$$

Đặc biệt $\int_E d\mu(x) = \mu(E)$, $\int_E \mathbb{I}_B(x)d\mu(x) = \mu(B \cap E)$ với $E, B \in \mathcal{M}$.

1. Cho hàm $s(x) = 2\mathbb{I}_{(0,5]} + 3\mathbb{I}_{[3,6)} - \mathbb{I}_{(1,4)}$. a) Tìm $s(\mathbb{R})$, b) vẽ đồ thị hàm số, c) Tính $\int_E s(x)dm(x)$ với $E = (1, 4)$, $E = [-1, 3]$, $E = [2, 3]$, d) Cho biết ý nghĩa hình học của tích phân này.

2. Bài tương tự với $s = 2\mathbb{I}_{(-3,3]} + 4\mathbb{I}_{[2,4]} - \mathbb{I}_{[1,3]}$. $E = (-2,3)$, $E = [-2,2]$, $E = [1,3]$.

3. Bài tương tự với $s = -2\mathbb{I}_{(-3,0]} + 4\mathbb{I}_{[-1,4]} + 3\mathbb{I}_{[-4,3]}$.$E = (-2,3)$, $E = [-2,2]$, $E = [1,3]$.

4. Bài tương tự với $s = 5\mathbb{I}_{(-3,6]} - 4\mathbb{I}_{[-1,2]} - \mathbb{I}_{[-1,4]}$.$E = (-2,3)$, $E = [-2,2]$, $E = [1,3]$.

4. Định nghĩa Tích phân Lebesgue của hàm đo được không âm

Định nghĩa Nếu $f : X \to \mathbb{R}$ đo được, $f(x) \geq 0$ với mọi $x \in X$, ta định nghĩa

$$\int_E f(x)d\mu(x) = \sup_{0\leq s \text{ đơn } \leq f} \int_E s(x)d\mu(x)$$

trong đó s là các hàm đơn đo được. Nếu $\int_E f(x)d\mu(x) < \infty$ ta nói f là *hàm khả tích Lebesgue*. Nếu μ là một độ đo xác suất, ta cũng ký hiệu

$$\mathbb{E}f = \int_X f(x)d\mu(x).$$

Mệnh đề. *Cho không gian đo $(X, \mathcal{M}, \mu)$, $A, B, E \in \mathcal{M}$, $f, g : X \to \mathbb{R}$ là các hàm đo được.*

a) nếu $0 \leq f \leq g$ thì $\int_E f d\mu \leq \int_E g d\mu$.

b) nếu $f \geq 0$ và $0 \leq c < \infty$ thì $\int_E cf d\mu = c\int_E f d\mu$.

c) nếu $f \geq 0$ thì $\int_E f d\mu = \int_X f\mathbb{I}_E d\mu$.

Bài tập. Chứng minh mệnh đề theo các hướng dẫn sau

a) Lấy s đơn, đo được và $0 \leq s \leq f$. CM $\int_E s(x)d\mu \leq \int_E g(x)d\mu$. Từ đó suy ra đpcm.

b) Lấy $s \geq 0$ đơn, đo được. CM $c\int_E s(x)d\mu = \int_E cs(x)d\mu$. Suy ra: nếu $0 \leq s \leq f$ thì $c\int_E s(x)d\mu \leq \int_E cf(x)d\mu$. Từ đó CM $c\int_E f(x)d\mu \leq \int_E cf(x)d\mu$ và suy ra $\int_E cf(x)d\mu \leq c\int_E f(x)d\mu$ với mọi $c \geq 0$.

c) Lấy $s \geq 0$ đơn, đo được. CM $\int_E s(x)d\mu = \int_X s(x)\mathbb{I}_E(x)d\mu$. Từ đó suy ra nếu $0 \leq s \leq f$ thì $\int_E s(x)d\mu \leq \int_X f(x)\mathbb{I}_E(x)d\mu$. Mặt khác, nếu s'

đơn và $0 \le s' \le f\mathbb{I}_E$ thì $0 \le s' \le f$ và $s'(x) = s'(x)\mathbb{I}_E(x)$ và $\int_X s'(x)d\mu = \int_E s'(x)d\mu \le \int_E f(x)d\mu$. Từ đó suy ra đpcm.

Hệ quả. *Cho không gian đo $(X, \mathcal{M}, \mu)$, $A, B, E \in \mathcal{M}$, $f, g : X \to \mathbb{R}$ là các hàm đo được.*

a) nếu $A \subset B$ và $f \ge 0$ thì $\int_A f d\mu \le \int_B f d\mu$.
b) nếu $f(x) = c \ge 0$ với mọi $x \in E$ thì $\int_E f(x)d\mu = c\mu(E)$.
c) nếu $\mu(E) = 0$, $f \ge 0$ thì $\int_E f d\mu = 0$

Mệnh đề. *Cho $f : X \to \mathbb{R}$ và $f \ge 0$ hkn. Nếu $\int_X f(x)d\mu(x) = 0$ thì $f = 0$ hkn.*

Bài tập. Chứng minh mệnh đề theo các hướng dẫn sau
a) Sử dụng $\mathbb{I}_A(x) \le \mathbb{I}_B(x)$ nếu $A \subset B$, từ đó suy ra $f(x)\mathbb{I}_A(x) \le f(x)\mathbb{I}_B(x)$.
b) Sử dụng tính chất $f(x)\mathbb{I}_E(x) = c\mathbb{I}_E(x)$ nếu $f(x) = c$ với mọi $x \in E$.
c) Lấy s đơn, đo được và $0 \le s \le f$. CM $\int_E s(x)d\mu = 0$. Suy ra f).

Định nghĩa Cho đoạn (a, b) và cho $x_0 = a < x_1 < ... < x_n = b$. Tập $\mathcal{P} = \{x_0, ..., x_n\}$ gọi là một phân hoạch của $(a, b]$. Cho hàm $f : (a, b) \to \mathbb{R}$. Đặt $m_n = \inf_{(x_{n-1}, x_n)} f(x), M_n = \sup_{(x_{n-1}, x_n)} f(x)$

$$m_i = \inf_{(x_{i-1}, x_i]} f(x), M_i = \sup_{(x_{i-1}, x_i]} f(x), i = 1, ..., n-1.$$

Tổng

$$L(\mathcal{P}, f) = \sum_{i=1}^{n} m_i(x_i - x_{i-1}),\ U(\mathcal{P}, f) = \sum_{i=1}^{n} M_i(x_i - x_{i-1})$$

gọi lần lượt là *tổng dưới* và *tổng trên* của f theo phân hoạch $\mathcal{P}$. Hàm số f gọi là *khả tích Riemann* trên khoảng (a, b) nếu

$$\sup_{\mathcal{P}} L(\mathcal{P}, f) = \inf_{\mathcal{Q}} U(\mathcal{Q}, f).$$

Định lý. *Cho hàm $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ đo được Borel. Hàm f khả tích Riemann trên (a, b) và $f(x) \ge 0$ với mọi $x \in (a, b)$ thì f cũng khả tích Lebesgue trên (a, b) và*

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{(a,b)} f(x)dm(x).$$

Bài tập Dùng các câu gợi ý, CM mệnh đề trên cho trường hợp f là hàm đo được Lebesgue trên $(a, b]$ và $f \geq 0$. Nhắc lại, độ đo Lebesgue m trên $\mathbb{R}$ thỏa $m((\alpha, \beta)) = \beta - \alpha$ với $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\alpha < \beta$. Ngoài ra $m(\{\alpha\}) = 0$.

i) Với mọi phân hoạch $\mathcal{P} : x_0 = a < x_1 < ... < x_n = b$, đặt

$$m_i = \inf_{x_{i-1} < x \leq x_i} f(x), M_i = \sup_{x_{i-1} < x \leq x_i} f(x).$$

$$s_{\mathcal{P}}(x) = \sum_{i=1}^{n} m_i \mathbb{I}_{(x_{i-1}, x_i]}(x), S_{\mathcal{P}}(x) = \sum_{i=1}^{n} M_i \mathbb{I}_{(x_{i-1}, x_i]}(x)$$

CM

$$\int_{(a,b)} s_{\mathcal{P}}(x) dm(x) = L(\mathcal{P}, f), \int_{(a,b)} S_{\mathcal{P}}(x) dm(x) = U(\mathcal{P}, f)$$

ii) Cho $\mathcal{P}, \mathcal{Q}$ là hai phân hoạch của khoảng $(a, b]$. CM $s_{\mathcal{P}} \leq f \leq S_{\mathcal{Q}}$.

iii) Suy ra $L(\mathcal{P}, f) \leq \int_{(a,b]} f(x) dm(x) \leq U(\mathcal{Q}, f)$ và ta có đpcm.

có độ đo 0 trên $\mathbb{R}$.

BÀI TẬP

Dạng 1. Tính tích phân Lebesgue của hàm khả tích Riemann

Muốn tính tích phân Lebesgue của hàm $f : (a, b) \to \mathbb{R}$, $f \geq 0$ và f khả tích Riemann trên (a, b) ta có thể sử dụng tính chất: *Hàm đo được $f \geq 0$ khả tích Riemann trên (a,b) thì khả tích Lebesgue trên (a, b) và*

$$\int_{(a,b)} f(x) dm = \int_a^b f(x) dx.$$

Phương pháp chứng minh hàm f khả tích Riemann Hàm f khả tích Riemann trên $\mathbb{R}$ khi và chỉ khi các điều sau thỏa:

a) Tồn tại khoảng (a, b) bị chặn sao cho $f(x) = 0$ với mọi $x \notin (a, b)$.

b) Tồn tại số M sao cho $|f(x)| \leq M$ với mọi $x \in (a, b)$.

c) Hàm f liên tục trên $(a, b) \setminus A$ với $A \subset R$ là tập có $m(A) = 0$.

Lưu ý. Tập A hữu hạn hay A đếm được ($A = \{x_1, x_2, ...\}$) thì có độ đo Lebesgue bằng 0.

1. Khảo sát tính khả tích Lebesgue của f trên khoảng được cho

   (a) $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ trên $(0, 1)$,

   (b) $f(x) = \sqrt{x}$ trên khoảng $(0, 2)$. Tính $\int_{(0.2)} \sqrt{x} dm(x)$,

(c) $f(x) = x^{\alpha}$, $\alpha \geq 0$ trên khoảng $(0,3)$. Tính $\int_{(0.3)} x^{\alpha} dm(x)$.

Dạng 2. Tính tích phân Lebesgue của hàm mật độ
Ta nói một hàm $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ là hàm mật độ nếu $f(x) \geq 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$ và $\int_{\mathbb{R}} f(x) dm(x) = 1$.

1. Tìm C để các hàm sau là các hàm mật độ

   (a) $f(x) = C\mathbb{I}_{(a,b)}(x)$, với $b > a$,

   (b) $f(x) = C(1 - x^2)\mathbb{I}_{(-1,1)}(x)$,

   (c) $f(x) = C(2 - |x|)\mathbb{I}_{(-2,2)}(x)$.

Dạng 3. Độ đo Radon-Nikodym
Cho không gian $(X, \mathcal{M})$ và hai độ đo $\mu, \nu : \mathcal{M} \to [0, \infty]$. Ta nói độ đo μ có đạo hàm theo độ đo ν là hàm đo được $h : X \to \mathbb{R}$ nếu $h \geq 0$ và

$$\mu(A) = \int_A h(x) d\nu(x) \qquad \text{với mọi } A \in \mathcal{M}.$$

Khi đó ta viết $\frac{d\mu}{d\nu} = h$. Lý thuyết chứng tỏ rằng với mọi $E \in \mathcal{M}$ ta có

$$\int_E g(x) d\mu(x) = \int_E g(x) h(x) d\nu(x).$$

Áp dụng: Cho hàm $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) \geq 0$, khả tích theo độ đo Lebesgue. Cho hàm φ xác định trên $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ với

$$\varphi(A) = \int_A f(x) dx \qquad A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}).$$

Khi đó

$$\int_E g(x) d\varphi(x) = \int_E g(x) h(x) dm(x).$$

1. Cho $U(x) = x$ và $W(x) = x^2$.

   (a) Ta nói φ là độ đo đều trên khoảng (a,b), $a < b$, nếu $f(x) = \mathbb{I}_{(a,b)}(x)/(b-a)$. CM φ là độ đo xác xuất. Tính $\mathbb{E}(U)$, $\mathbb{E}(W)$.

(b) Ta nói φ là độ đo tam giác trên $(-1,1)$ nếu $f(x)=(1-|x|)\mathbb{I}_{(-1,1)}(x)$. CM φ là độ đo xác xuất. Tính $\mathbb{E}(U)$, $\mathbb{E}(W)$.

4. Tính chất của tích phân Lebesgue của hàm không âm

Định lý hội tụ đơn điệu. *Cho không gian đo $(X,\mathcal{M},\mu)$, $E\in\mathcal{M}$. Cho (f_n) là dãy các hàm đo được trên X sao cho*

a) $0\le f_n(x)\le f_{n+1}(x)$ với mọi $n\ge n_0$

b) $f_n(x)\to f(x)$ khi $n\to\infty$ với mọi $x\in X$

Khi đó f là hàm đo được không âm và

$$\lim_{n\to\infty}\int_E f_n d\mu=\int_E \lim_{n\to\infty} f_n d\mu=\int_E f d\mu$$

ho

Bài tập. Chứng minh định lý hội tụ đơn điệu theo các câu sau:

a) CM $L=\lim_{n\to\infty}\int_E f_n d\mu$ tồn tại và $L\le\int_E f d\mu$.

b) Cho $c\in(0,1)$, s là hàm đơn đo được thỏa $0\le s\le f$. Đặt $A_n=\{x\in X:\ f_n(x)\ge cs(x)\}$. CM $A_n\subset A_{n+1}$ và $X=\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n$.

c) CM $c\int_{E\cap A_n} s d\mu\le\int_E f_n d\mu$.

d) CM $\lim_{n\to\infty}\int_{E\cap A_n} s d\mu=\int_E s d\mu$.

e) suy ra $\int_E s d\mu\le L$. Từ đó $\int_E f d\mu\le L$.

Mệnh đề. *Cho $f_n,g,h:X\to[0,\infty]$ là các hàm đo được không âm trên $(X,\mathcal{M},\mu)$. Ta có*

$$\int_X (g+h)d\mu=\int_X g d\mu+\int_X h d\mu$$

và

$$\int_X \sum_{n=1}^{\infty} f_n d\mu=\sum_{n=1}^{\infty}\int_X f_n d\mu.$$

Bài tập. Chọn hai dãy hàm đơn đo được s_n,t_n thỏa $0\le s_1\le s_2\le\ldots$, $0\le t_1\le t_2\le\ldots$ và $\lim_{n\to\infty}s_n=g$, $\lim_{n\to\infty}t_n=h$. Dùng định lý hội tụ đơn điệu để CM mệnh đề.

Mệnh đề. *Cho* $f, g : X \to [0, \infty]$ *đo được và* $f = g$ *hkn thì*

$$\int_X f(x)d\mu(x) = \int_X g(x)d\mu(x).$$

Định nghĩa. Cho $f : (a, b) \to \mathbb{R}$, ta nói f có *tích phân Riemann suy rộng trên* (a, b) *tại* b nếu

1. f khả tích Riemann trên mọi đoạn (a, d) với $a < d < b$,
2. một trong các trường hợp sau xảy ra: 1/ $b = +\infty$, 2/ có một dãy $x_n \in (a, b)$ thỏa $x_n \to b^-$ và $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \infty$,

Khi đó nếu ta có giới hạn $\lim_{d\to b^-} \int_a^d f(x)dx$ thì ta đặt

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{d\to b^-} \int_a^d f(x)dx$$

và nói tích phân $\int_a^b f(x)dx$ *hội tụ*. Nếu giới hạn này không tồn tại ta nói tích phân $\int_a^b f(x)dx$ *không hội tu (hay phân kỳ)*.

Định nghĩa. Ta nói f có *tích phân Riemann suy rộng trên* (a, b) *tại* a nếu

1. f khả tích Riemann trên mọi đoạn (c, b) với $a < c < b$,
2. một trong các trường hợp sau xẩy ra: 1/ $a = -\infty$, 2/ có một dãy $x_n \in (a, b)$ thỏa $x_n \to a^+$ và $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \infty$.

Khi đó nếu ta có giới hạn $\lim_{c\to a^+} \int_c^b f(x)dx$ thì ta đặt

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{c\to a^+} \int_c^b f(x)dx$$

và nói tích phân $\int_a^b f(x)dx$ *hội tụ*. Nếu giới hạn này không tồn tại ta nói tích phân $\int_a^b f(x)dx$ *không hội tu (hay phân kỳ)*.

Định nghĩa. Ta nói f có *tích phân Riemann suy rộng trên* (a, b) *tại* a *và* b nếu với mọi $\alpha \in (a, b)$ tích phân $\int_a^\alpha f(x)dx$ suy rộng tại a và tích phân $\int_\alpha^b f(x)dx$ suy rộng tại b. Khi đó ta định nghĩa

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^\alpha f(x)dx + \int_\alpha^b f(x)dx.$$

Nếu một trong hai tích phân suy rộng (tại a hay tại b) không hội tụ ta nói tích phân $\int_a^b f(x)dx$ *không hội tụ (hay phân kỳ).*

Định lý (tích phân Lebesgue và tích phân Riemann suy rộng) *Giả sử*

a) hàm $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ đo được Borel thỏa $f(x) \geq 0$ với mọi $x \in (a,b)$,

b) hàm f khả tích Riemann trên mọi khoảng bị chặn $[c,d] \subset (a,b)$

c)

$$\lim_{c \to a^+, d \to b^-} \int_c^d f(x)dx < \infty$$

Khi đó hàm f khả tích Lebesgue trên (a,b) và

$$\int_{(a,b)} f(x)dm(x) = \int_a^b f(x)dx$$

Mệnh đề. *Cho $f : X \to [0,\infty]$ là hàm đo được, Với $E \in \mathcal{M}$, đặt*

$$\varphi(E) = \int_E f d\mu.$$

Khi đó φ là một độ đo dương trên $\mathcal{M}$. Hơn nữa

$$\int_E g d\varphi = \int_E g f d\mu$$

với mọi hàm đo được không âm $g : X \to [0,\infty]$.

Lưu ý Để chứng minh một số tính chất của tích phân Lebesgue đúng với mọi hàm f chúng ta có thể dùng *kỹ thuật 4D*: 1) CM cho hàm **đặc trưng**, 2) CM cho hàm **đơn đo được**, 3) CM cho hàm **dương đo được**, 4) CM cho hàm **đo được có dấu bất kỳ**.

Bài tập. Lấy $A_i,\ i = 1, 2, \ldots$ là các tập đo được rời nhau trên X.

a) Sử dụng tính chất $\mathbb{I}_{\bigcup_{i=1}^n A_i} = \sum_{i=1}^n \mathbb{I}_{A_i}$, CM $\varphi(\bigcup_{i=1}^n A_i) = \sum_{i=1}^n \varphi(A_i)$.

b) Áp dụng định lý hội tụ đơn điệu suy ra tính chất cộng tính đếm được của φ.

c) CM công thức $\int_X g d\varphi = \int_X g f d\mu$ đúng nếu g là hàm đơn, đo được không âm.

d) Với hàm $g \geq 0$, chọn dãy s_n các hàm đơn đo được thỏa $0 \leq s_1 \leq s_2 \ldots$ và $\lim_{n\to\infty} s_n = g$. Sử dụng định lý hội tụ đơn điệu CM công thức $\int_X g d\varphi = \int_X g f d\mu$.

Định nghĩa. Cho $(X, \mathcal{M})$ là một không gian đo được. Độ đo $\lambda : \mathcal{M} \to [0, \infty]$ gọi là liên tục tuyệt đối so với độ đo $\mu : \mathcal{M} \to [0, \infty]$ nếu với mọi $E \in \mathcal{M}$ và $\mu(E) = 0$ thì $\lambda(E) = 0$. Ta ký hiệu $\lambda \ll \mu$.

Định lý Radon-Nikodym *Cho $(X, \mathcal{M}, \mu)$ là một không gian đo. Giả sử μ là σ-hữu hạn, nghĩa là tồn tại $E_i \in \mathcal{M}$ với $\mu(E_i) < \infty$ và $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_i$. Nếu λ là một độ đo dương trên $\mathcal{M}$ thỏa $\lambda \ll \mu$ thì tồn tại một hàm đo được không âm h sao cho*

$$\lambda(E) = \int_E h d\mu$$

với mọi $E \in \mathcal{M}$. Ta nói h là đạo hàm Radon-Nikodym của λ đối với μ và ký hiệu $h = \frac{d\lambda}{d\mu}$ hay $hd\mu = d\lambda$.

BÀI TẬP

Dạng 1. Tính giá trị hàm Gamma
Hàm Gamma $\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty t^{\alpha-1} e^{-t} dt$ xác định nếu $\alpha > 0$, không xác định nếu $\alpha \leq 0$ và $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ với $x > 0$, $\Gamma(n+1) = n!$, $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$.
Hàm Beta $B(p, q) = \int_0^1 t^{p-1}(1-t)^{q-1}$ xác định nếu và chỉ nếu $p, q > 0$. Ngoài ra $B(p, q) = \Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)/\Gamma(\alpha+\beta)$.

1. Chứng minh $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ với $x > 0$, $\Gamma(n+1) = n!$, $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$.
2. Tính $\Gamma(3/2)$, $\Gamma(5/2)$, $\Gamma(7/2)$, $\Gamma\left(\frac{2k+1}{2}\right)$ với $k \in \mathbb{N}$.

Dạng 2. Tính tích phân suy rộng
Tích phân suy rộng tại b: $\int_a^b f(x)dx = \lim_{t\to b^-} \int_a^t f(x)dx$.
Tích phân suy rộng tại a: $\int_a^b f(x)dx = \lim_{t\to a^+} \int_t^b f(x)dx$.
Tích phân suy rộng tại a, b: $\int_a^b f(x)dx = \lim_{t\to b^-, s\to a^+} \int_s^t f(x)dx$.

1. Tìm C để các hàm sau là các hàm mật độ
   (a) $f(x) = \frac{C}{2} e^{-k|x|}$, với $k > 0$,
   (b) $f(x) = Ce^{-kx}\mathbb{I}_{(0,\infty)}(x)$
   (c) $f(x) = \frac{C}{(x^2+k^2)}$, với $k > 0$,

(d) $f(x) = Ck(kx)^{a-1}e^{-kx}\mathbb{I}_{(0,\infty)}(x)$, với $k > 0, a > 0$.

(e) $f(x) = C\left(\frac{b}{x}\right)^{a+1}\mathbb{I}_{(b,\infty)}(x)$ với $a, b > 0$.

(f) $f(x) = C\lambda^a x^{a-1}e^{-(\lambda x)^a}\mathbb{I}_{(0,\infty)}(x)$ với $a, \lambda > 0$.

(g) $f(x) = Ce^{-kx^2}\mathbb{I}_{(0,\infty)}(x)$ với $k > 0$.

(h) $f(x) = \frac{C\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}}$ với $n \in \mathbb{N}$,

(i) $f(x) = \frac{C\Gamma\left(\frac{n+m}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)}\frac{x^{m/2-1}}{\left(1+\frac{mx}{n}\right)^{(m+n)/2}}\mathbb{I}_{(0,\infty)}(x)$ với $m, n \in \mathbb{N}$.

Dạng 3. Độ đo Radon-Nikodym

Cho không gian $(X, \mathcal{M})$ và hai độ đo $\mu, \nu : \mathcal{M} \to [0, \infty]$. Ta nhắc lại là đạo hàm độ đo μ theo độ đo ν là hàm đo được $h : X \to \mathbb{R}$ nếu $h \geq 0$ và

$$\mu(A) = \int_A h(x)d\nu(x) \qquad \text{với mọi } A \in \mathcal{M}.$$

Lý thuyết chứng tỏ rằng với mọi $E \in \mathcal{M}$ ta có

$$\int_E g(x)d\mu(x) = \int_E g(x)h(x)d\nu(x).$$

Áp dụng: Cho hàm $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) \geq 0$, khả tích theo độ đo Lebesgue. Cho hàm φ xác định trên $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ với

$$\varphi(A) = \int_A f(x)dx \qquad A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}).$$

Khi đó

$$\int_E g(x)d\varphi(x) = \int_E g(x)h(x)dm(x).$$

1. Cho $U(x) = x$ và $W(x) = x^2$.

   (a) Ta nói φ là độ đo Gauss nếu $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$. CM φ là độ đo xác xuất. Tính $\mathbb{E}(U)$, $\mathbb{E}(W)$.

(b) Ta nói φ là độ đo chuẩn nếu $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$. CM φ là độ đo xác xuất. Tính $\mathbb{E}(U)$, $\mathbb{E}(W)$.

(c) Ta nói φ là độ đo mũ trên $(-1, 1)$ nếu $f(x) = e^{-x}\mathbb{I}_{(0,\infty)}(x)$. CM φ là độ đo xác xuất. Tính $\mathbb{E}(U)$, $\mathbb{E}(W)$.

Dạng 4. Phương pháp chứng minh một hàm $f \geq 0$ không khả tích Lebesgue trên (a,b)

Cách 1: Chứng tỏ tích phân suy rộng $\int_a^b f(x)dx = \infty$.

Cách 2: CMR $f \geq g \geq 0$ và g không khả tích Lebesgue trên (a, b).

Cách 3: Tìm hàm f_n thỏa $0 \leq f_n \leq f$ và $\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n dx \to \infty$.

Cách 4: Chứng minh hàm f không khả tích trên khoảng $(c, d) \subset (a, b)$.

Ghi nhớ. *Hàm $f(x) = \frac{1}{x^\alpha}$ không khả tích trên $(0, b)$ ($b > 0$) nếu $\alpha \geq 1$. Hàm $f(x) = \frac{1}{x^\beta}$ không khả tích trên (b, ∞) nếu $\beta \leq 1$.*

1. Khảo sát tính khả tích Lebesgue của f trên khoảng được cho

(a) $f(x) = 1$ trên khoảng $(0, \infty)$

(b) $f(x) = x$ trên khoảng $(0, \infty)$

(c) $f(x) = \frac{1}{x^\alpha}$ $(\alpha < 1)$ trên $(1, \infty)$

(d) $f(x) = \frac{1}{x}$ trên $(1, \infty)$

(e) $f(x) = \frac{e^{-x}}{x^\alpha}$ $(\alpha < 1)$ trên $(0, \infty)$

(f) $f(x) = \frac{1}{x^\beta}$ $(\beta > 1)$ trên $(0, 1)$

(g) $f(x) = \frac{1}{x}$ trên $(0, 1)$

(h) $f(x) = \frac{e^{-x}}{x^\beta}$ $(\beta > 1)$ trên $(0, \infty)$

(i) $f(x) = \frac{|\cos x|}{x\sqrt{x}}$ trên $(0, \infty)$

(j) $f(x) = \frac{|\sin x|}{x}$ trên $(0, \infty)$.

Dạng 5. Phương pháp chứng minh một hàm $f \geq 0$ khả tích Lebesgue trên (a,b)
Cách 1: chứng minh trực tiếp bằng cách tính tích phân Riemann hay Riemann suy rộng
Cách 2 (gián tiếp): Hàm f khả tích nếu
a) f đo được Lebesgue,
b)$|f| \leq g$ và
c) g khả tích Lebesgue (chứng minh bằng cách dùng cách 1).
Cách 3 (chia nhỏ): Chia khoảng $(a,b) = A \cup B$ sau đó chứng minh f khả tích trên A và trên B.
Ghi nhớ. *Hàm $f(x) = \frac{1}{x^\alpha}$ khả tích trên $(0,b)$ ($b > 0$) nếu $\alpha < 1$. Hàm $f(x) = \frac{1}{x^\beta}$ khả tích trên (b,∞) nếu $\beta > 1$.*

1. Khảo sát tính khả tích Lebesgue của
   (a) $f(x) = e^{-x}x^{\alpha-1}$ trên $(0,\infty)$. HD: ta có BĐT $e^x \geq \frac{x^k}{k!}$ khi $x > 0$.
   (b) $f(x) = e^{-|x|}|\sin x|$ trên R
   (c) $f(x) = e^{-kx^2}$ $(k > 0)$ trên R
2. Khảo sát tính khả tích Lebesgue của
   (a) $f(x) = x^{p-1}(1-x)^{q-1}$, $0 < x < 1$,
   (b) $f(x) = \frac{\sin x}{x^{3/2}}$ trên $(0,1)$.

5. Tích phân Lebesgue của hàm tổng quát

Bổ đề Fatou. *Cho $f_n : X \to [0,\infty]$ là các hàm đo được không âm. Khi đó*

$$\liminf_{n\to\infty} \int_X f_n d\mu \geq \int_X \liminf_X f_n d\mu.$$

Bài tập. Đặt $g_n(x) = \inf_{k\geq n} f_k(x)$.
a) CM $g_n \leq g_{n+1}$.
b) CM $\int_X g_n d\mu \leq \int_X f_n d\mu$.
c) Sử dụng định lý hội tụ đơn điệu suy ra kết quả.

Định nghĩa. Cho không gian đo được $(X, \mathcal{M}, \mu)$ và cho $f : X \to [-\infty, \infty]$ là đo được. Ta nói f khả tích Lebesgue với độ đo μ nếu

$$\int_X |f(x)| d\mu(x) < \infty.$$

Ta ký hiệu tập các hàm khả tích Lebesgue là $L^1(X, \mathcal{M}, \mu)$ hay vắn tắt $L^1(\mu)$.

Hệ quả. *Cho f, g đo được trong $(X, \mathcal{M}, \mu)$. Nếu g khả tích và $|f(x)| \leq g(x)$ với mọi $x \in X$ thì f khả tích.*

Bài tập. Chứng minh tính chất này.

Định nghĩa. Nếu $f \in L^1(\mu)$, ta định nghĩa

$$\int_E f d\mu = \int_E f^+ d\mu - \int_E f^- d\mu$$

với mọi $E \in \mathcal{M}$. Trong đó $f^+ := \max\{f, 0\},\ f^- = \max\{-f, 0\}$.

Bài tập. Chứng minh các đẳng thức

a) $f(x) = f^+(x) - f^-(x)$, $|f(x)| = f^+(x) + f^-(x)$.

b) $(-f(x))^+ = f^-(x)$, $(-f(x))^- = f^+(x)$.

c) Nếu $c > 0$ thì $(cf(x))^+ = cf^+(x)$, $(cf(x))^- = cf^-(x)$.

d) Nếu $c < 0$ thì $(cf(x))^+ = -cf^-(x)$, $(cf(x))^- = -cf^+(x)$.

Định lý. *Cho $f, g \in L^1(\mu)$. Khi đó*

a) $\alpha f + \beta g \in L^1(\mu)$ và

$$\int_X (\alpha f + \beta g) d\mu = \alpha \int_X + \beta \int_X g d\mu.$$

b) nếu $f \leq g$ thì $\int_X f d\mu \leq \int_X g d\mu$.

c) $\left|\int_X f d\mu\right| \leq \int_X |f| d\mu$.

Bài tập. i) Đặt $h = f + g$. CM $h^+ + f^- + g^- = h^- + f^+ + g^+$.

ii) CM $\int_X (f+g) d\mu = \int_X f d\mu + \int_X g d\mu$.

iii) Cho $c \in \mathbb{R}$. CM $\int_X cf d\mu = c \int_X f d\mu$.

iv) CM b), c).

Mệnh đề. *a) Nếu f đo được, $g \in L^1(\mu)$ và $|f| \leq g$ thì $f \in L^1(\mu)$.*

b) Nếu $f, g \in L^1(\mu)$ và $f \leq g$ thì $\int_X f d\mu \leq \int_X g d\mu$.

c) Nếu $f \in L^1(\mu)$ thì $|f| \in L^1(\mu)$ và $\left|\int_X f d\mu\right| \leq \int_X |f| d\mu$.

Bài tập. Chứng minh mệnh đề trên.

Định lý hội tụ bị chặn của Lebesgue. *Cho $g, (f_n)$ là đo được trên $(X, \mathcal{M}, \mu)$ sao cho* *a)* $|f_n(x)| \le g(x)$ *với mọi* $x \in X$, $n = 1, 2, ...$

b) g *khả tích,*

c) $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ *tồn tại với mọi* $x \in X$.

Khi đó $f \in L^1(\mu)$ *và*

$$\lim_{n\to\infty} \int_X f_n d\mu = \int_X \lim_{n\to\infty} f_n d\mu.$$

Bài tập. Chứng minh định lý hội tụ bị chặn theo các câu sau

i) Đặt $F_n(x) = 2g(x) - |f_n(x) - f(x)|$. CM $F_n(x) \ge 0$ với mọi $x \in X$.

ii) Tìm $\liminf_n F_n(x)$.

iii) Cho dãy số thực (α_n) và $c \in \mathbb{R}$. CM

$$\liminf_{n\to\infty}(c + \alpha_n) = c + \liminf_{n\to\infty} \alpha_n, \ \liminf_{n\to\infty}(-\alpha_n) = -\limsup_{n\to\infty} \alpha_n.$$

iv) Dùng iii) để biến đổi $\liminf_n \int_X F_n(x) d\mu(x)$.

v) CM $\lim_{n\to\infty} \int_X |f_n(x) - f(x)| d\mu(x) = 0$ rồi suy ra định lý.

BÀI TẬP

Dạng 1. Phương pháp chứng minh tích phân phụ thuộc liên tục vào tham số

Mệnh đề Cho hàm số $f : I \times (a, b)$. Giả sử

a) với mỗi $\lambda \in (a, b)$ hàm $x \mapsto f(x, \lambda)$ đo được theo x

b) tồn tại $\lim_{\lambda\to\lambda_0} f(x, \lambda) = h(x)$

c) tồn tại hàm g khả tích trên I và khoảng $[a_0, b_0] \subset (a, b)$ sao cho $\lambda_0 \in [a_0, b_0]$ sao cho $|f(x, \lambda)| \le g(x)$ với mọi $x \in I$ và $\lambda \in [a_0, b_0]$.

Đặt $H(\lambda) = \int_I f(x, \lambda) dx$. Khi đó ta có

$$\lim_{\lambda\to\lambda_0} \int_I f(x, \lambda) dx = \int_I \lim_{\lambda\to\lambda_0} f(x, \lambda) dx = \int_I h(x) dx.$$

Nếu $\lim_{\lambda\to\lambda_0} f(x, \lambda) = f(x, \lambda_0)$ với mọi $x \in I$ thì $\lim_{\lambda\to\lambda_0} H(\lambda) = H(\lambda_0)$, nghĩa là F liên tục tại λ_0.

1. CM mệnh đề trên theo các bước sau

i) Cho dãy $t_n \to t_0$. Đặt $F_n(x) = f(x, t_n)$. Sử dụng định lý hội tụ bị chặn CM

$$\lim_{n\to\infty} \int_I F_n(x)dx = \int_I \lim_{n\to\infty} F_n(x)dx.$$

ii) Suy ra kết quả cần CM.

2. Chứng minh các hàm sau liên tục

   (a) $F(\lambda) = \int_0^1 \sin(\lambda f(s))ds$ với f là hàm đo được trên (0,1).

   (b) $F(\lambda) = \int_0^1 \sin(\lambda s)f(s)ds$ với f là hàm khả tích trên (0,1).

   (c) $F(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} \cos(\lambda s)f(s)ds$ với f là hàm khả tích trên R.

   (d) $F(\lambda) = \int_0^1 \frac{\sin \lambda s}{\sqrt{s}}ds$

   (e) $\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty t^{\alpha-1}e^{-t}dt$, $\alpha > 0$. HD: Xét hàm $f(t,\alpha) = t^{\alpha-1}e^{-t}$. Giả sử $\alpha_1 \geq \alpha \geq \alpha_0 > 0$, CM $|f(t,\alpha)| \leq g(t)$ với $g(t) = t^{\alpha_0-1}$ $(0 < t \leq 1)$ và $g(t) = t^{\alpha_1-1}e^{-t}$ nếu $t > 1$.

   (f) Cho g khả tích trên R, $\int_{-\infty}^{\infty} g(y)dy = 1$, cho f liên tục và bị chặn trên R. CMR

   $$\lim_{\epsilon\to 0} \int_{-\infty}^{\infty} f(x - \epsilon y)g(y)dy = f(x)$$

   (g) Cho g khả tích trên R, $\int_{-\infty}^{\infty} g(y)dy = 1$, cho f liên tục và bị chặn trên R. CMR

   $$\lim_{\epsilon\to 0} \frac{1}{\epsilon} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)g\left(\frac{x-t}{\epsilon}\right)dt = f(x).$$

3. Tính các giới hạn sau

   (a) $\lim_{n\to\infty} \int_0^\infty \frac{dt}{(1+\frac{t}{n})^n t^{1/n}}$

   (b) $\lim_{n\to\infty} \int_0^n \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n e^{-2x}dx$

   (c) $\lim_{n\to\infty} \int_0^n \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n e^{x/2}dx$

Dạng 2. Phương pháp tìm đạo hàm của tích phân phụ thuộc tham số
Mệnh đề. Cho $f : I \times (a,b) \to \mathbb{R}$. Giả sử
a) với mỗi $\lambda \in (a,b)$ hàm $x \mapsto f(x,\lambda)$ khả tích theo x
b) với mỗi $x \in I$ hàm $\lambda \mapsto f(x,\lambda)$ có đạo hàm theo λ
c) tồn tại hàm g khả tích sao cho $\left|\frac{\partial f(x,\lambda)}{\partial \lambda}\right| \le g(x)$ với mọi $x \in I$.
Đặt $F(\lambda) = \int_I f(x,\lambda)dx$. Khi đó

$$\frac{dF}{d\lambda} = \int_I \frac{\partial f(x,\lambda)}{\partial \lambda}dx.$$

1. CM mệnh đề trên theo các bước

   i) Đặt $F(x,h) = \frac{f(x,\lambda+h)-f(x,\lambda)}{h}$. Sử dụng định lý Lagrange CM
   $$|F(x,h)| \le g(x).$$
   ii) Dùng mệnh đề về giới hạn của tích phân theo tham số để CM mệnh đề trên.

2. Tìm đạo hàm của $F(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\sin tx dx$ với $f(x), g(x) = xf(x)$ là các hàm khả tích trên R.

3. Tìm đạo hàm của $F(t) = \int_0^1 f(x)\sin tx dx$ với $f(x)$ khả tích trên $(0,1)$.

4. Tìm đạo hàm của $\Gamma(\alpha)$. HD: Chọn α_0, α_1 sao cho $0 < \alpha_0 \le \alpha \le \alpha_1$.CM $|t^{\alpha-1}e^{-t}\ln t| \le g(t)$ với g là một hàm khả tích cần tìm.

Dạng 3. Phương pháp lấy tích phân của chuỗi
Mệnh đề. Nếu
a) f_n là các hàm đo được không âm trên (a,b) hay
b) nếu f_n là các hàm đo được trên (a,b) thỏa

$$\sum_{n=1}^{\infty}\int_a^b |f_n(x)|dx < \infty$$

thì

$$\int_a^b \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)dx = \sum_{n=1}^{\infty}\int_a^b f_n(x)dx$$

Ghi nhớ. Một số khai triển thông dụng

$$\begin{aligned}
e^x &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}\\
\sin x &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}\\
\cos x &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}\\
\frac{1}{1+x} &= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n \qquad (|x|<1)\\
\ln(1+x) &= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}x^n}{n} \qquad (|x|<1).
\end{aligned}$$

1. CM mệnh đề trên bằng cách đặt $g(x) = \sum_{k=1}^{\infty}|f_k(x)|$.
2. Viết dưới dạng chuỗi
   (a) $\int_0^1 \frac{e^x-1}{x}dx$

(b) $\int_0^1 \frac{\sin x}{x} dx$

(c) $\int_0^1 \frac{x^{p-1}}{1+x^q} dx$. HD: $\frac{x^{p-1}}{1+x^q} = \sum_{n=0}^{\infty} x^{p-1}(x^{2n} - x^{2n+1})$

6. Biến ngẫu nhiên

Định nghĩa. Trên không gian xác suất $(\Omega, \mathcal{M}, \mathbb{P})$, ánh xạ đo được $X : \Omega \to \mathbb{R}^k$ gọi là biến ngẫu nhiên.

Mệnh đề. *Cho biến ngẫu nhiên X và tập Borel $B \subset \mathbb{R}^k$, ta đặt $\mathbb{P}_X(B) = \mathbb{P}(X \in B)$. Khi đó, $\mathbb{P}_X$ là một độ đo xác suất trên $\mathbb{R}^k$. Hơn nữa, với mọi hàm Borel $g : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ sao cho $g \circ X \in L^1(\mathbb{P})$ thì*

$$\int_{X \in B} g(X(\omega)) d\mathbb{P}(\omega) = \int_B g(x) d\mathbb{P}_X(x).$$

Độ đo $\mathbb{P}_X$ gọi là **phân phối** *của X.*

Bài tập. i) CM $\mathbb{P}_X$ là một độ đo trên $\mathcal{B}(\mathbb{R})$.

ii) CM đẳng thức trong mệnh đề theo kỹ thuật 4D. Trước hết CM với $g = \mathbb{I}_B$ trong đó $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^k)$. Muốn vậy, ta kiểm tra $\mathbb{I}_B(X(\omega)) = \mathbb{I}_{X(\omega) \in B}$.

iii) CM đẳng thức với g là hàm dơn đo được trên $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^k)$.

iv) CM với g là hàm không âm đo được.

v) Sử dụng phân tích $g = g^+ - g^-$ để chứng minh cho trường hợp tổng quát.

Định nghĩa Cho biến ngẫu nhiên $X : \Omega \to \mathbb{R}$ có $X(\Omega) = \{x_j | \ j \in J\}$ với $J \subset \mathbb{N}$. Ta nói X là *biến ngẫu nhiên rời rạc*. Hàm số $f_X(x) = P(X = x)$ gọi là *hàm mật độ* của X.

Mệnh đề *Cho X là biến ngẫu nhiên rời rạc lấy các giá trị $x_i, \ i \in I$. Khi đó $p_i := f_X(x_i) \geq 0$ và $\sum_{i \in I} p_i = 1$.*

Định nghĩa. Biến ngẫu nhiên $X : \Omega \to \mathbb{R}$ gọi là *biến ngẫu nhiên liên tục* nếu $\mathbb{P}_X \ll m_k$, nghĩa là với mọi tập Borel đo được B trong $\mathbb{R}$ thỏa $m_k(B) = 0$ thì $\mathbb{P}_X(B) = 0$.

Mệnh đề *Nếu biến ngẫu nhiên $X : \Omega \to \mathbb{R}$ là biến ngẫu nhiên liên tục thì tồn tại hàm khả tích Lebesgue $f_X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (gọi là hàm mật độ của X) sao cho*

$f_X(x) \geq 0$ và với mọi tập Borel $B \in \mathbb{R}$ ta có

$$\mathbb{P}(X \in B) = \int_B f_X(x)dm(x).$$

Định nghĩa. Hàm $F_X(x) = \mathbb{P}(X \leq x)$ gọi là hàm phân phối tích lũy (cdf: cumulative distributrion function) của X. Ta cũng quy ước $dF_X := d\mathbb{P}_X$.

Mệnh đề *Cho biến ngẫu nhiên $X : \Omega \to \mathbb{R}$. Hàm F_X thỏa*

a) $0 \leq F_X(x) \leq 1 \; \forall x \in \mathbb{R}$,

b) F_X không giảm, nghĩa là $F_X(x) \leq F_X(y)$ khi $x < y$,

c) F_X liên tục bên phải, nghĩa là $\lim_{t\to x^+} F_X(t) = F_X(x)$,

d) $\lim_{x\to-\infty} F_X(x) = 0$, $\lim_{x\to+\infty} F_X(x) = 1$

Bài tập. (i) CM a) bằng định nghĩa.

(ii) Sử dụng tính chất tăng của độ đo ($A \subset B$ và đo được thì $\mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B)$) để CM b).

(iii) Sử dụng tính chất đơn điệu $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(A_n) = \mathbb{P}(\cap_{n=1}^{\infty} A_n)$ với mọi A_n đo được, $A_{n+1} \subset A_n$ để CM c).

(iv) Sử dụng tính chất đơn điệu và tính chất $\mathbb{P}(A^c) = 1 - \mathbb{P}(A)$ để CM d).

Mệnh đề *Xét biến số ngẫu nhiên liên tục $X : \Omega \to \mathbb{R}$. Khi đó*

a) $f_X(x) \geq 0$ và $\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)dx = 1$,

b) $P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f_X(x)dx$

c) $F'_X(x) = f_X(x)$ tại mọi điểm liên tục x của f_X.

Định nghĩa Biến ngẫu nhiên liên tục $X : \Omega \to \mathbb{R}$ gọi là có *phân phối chuẩn với trung bình μ và độ lệch chuẩn σ*, ký hiệu là $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, nếu

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}.$$

Nếu $\mu = 0, \sigma = 1$ ta nói X có *phân phối Gauss.*

Mệnh đề *Nếu $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ thì ta có $\mathbb{P}(X > \mu + a) = \mathbb{P}(X < \mu - a)$, $\mathbb{P}(X < \mu) = 0,5$. Ngoài ra biến ngẫu nhiên $Z = \frac{X-\mu}{\sigma}$ sẽ có phân phối Gauss.*

BÀI TẬP

Dạng 1. Tìm xác suất $\mathbb{P}(a < X < b)$ nếu X rời rạc
Cho X có hàm mật độ $f_X(x_i) = \mathbb{P}(X = x_i)$, $i = 1, \ldots, n$, khi đó với các biến ngẫu nhiên liên tục ta có

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(a < X < b) &= \sum_{a<x_i<b} \mathbb{P}(X = x_i), \\
\mathbb{P}(X < b) &= \sum_{x_i<b} \mathbb{P}(X = x_i), \\
\mathbb{P}(X > a) &= \sum_{x_i>a} \mathbb{P}(X = x_i).
\end{aligned}$$

1. Số vết bẩn trên các tấm gốm là 1 biến ngẫu nhiên có pdf là $p(k) = e^{-5}\frac{5^k}{k!}$. Tìm xác suất có a) ít nhất 1 vết bẩn trên tấm gốm. b) nhiều nhất 7 vết bẩn trên tấm gốm.

Dạng 2. Tìm xác suất $\mathbb{P}(a < X < b)$ nếu biết hàm mật độ
Cho X có hàm mật độ $f_X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, khi đó với các biến ngẫu nhiên liên tục ta có

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(a < X < b) &= \int_a^b f_X(x)dx = F_X(b) - F_X(a), \\
\mathbb{P}(X < b) &= \int_{-\infty}^b f_X(x)dx = F_X(b), \\
\mathbb{P}(X > a) &= \int_a^{+\infty} f_X(x)dx = 1 - F_X(a).
\end{aligned}$$

Lưu ý là với biến ngẫu nhiên X liên tục ta có $\mathbb{P}(X = \{a\}) = 0$. Do đó

$$\mathbb{P}(a < X < b) = \mathbb{P}(a < X \leq b) = \mathbb{P}(a \leq X < b) = \mathbb{P}(a \leq X \leq b).$$

1. Tìm $\mathbb{P}(-c < X < c)$ với $c = 1, c = 2$ và tìm số x_α thỏa $\mathbb{P}(X \geq x_\alpha) = \alpha$ với $\alpha = 0.05$, $\alpha = 0.1$. Cho biết X là biến ngẫu nhiên có hàm mật độ $f_X(x)$ ($f_X(x) = 0$ tại các giá trị x không chỉ ra).

   (a) chuẩn $N(\mu, \sigma^2)$: $f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$ với $\sigma = 2, \mu = 0$,

(b) $\chi^2(p)$ $(p>0)$: $f_X(x) = \frac{1}{2^{p/2}\Gamma(p/2)} x^{-1+p/2} e^{-x/2}$ $(x>0)$, $p=1$,

(c) Student $St(n)$ $(n \in \mathbb{N})$: $f(x) = \frac{\Gamma((n+1)/2)}{\sqrt{n\pi}\Gamma(n/2)} \left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{-(n+1)/2}$, $x \in \mathbb{R}$ chọn $n=1$,

(d) Fisher-Snedecor $F(m,n)$: $f(x) = \frac{(m/n)^{m/2}\Gamma((m+n)/2)}{\Gamma(m/2)\Gamma(n/2)} \frac{x^{m/2-1}}{(1+mx/n)^{(m+n)/2}}$ $x>0$, chọn $m=2, n=3$.

2. Tìm $\mathbb{P}(-c < X < c)$ với $c=1, c=2$ và tìm số x_α thỏa $\mathbb{P}(X \geq x_\alpha) = \alpha$ với $\alpha = 0.05$, $\alpha = 0.1$. Cho biết X là biến ngẫu nhiên có hàm mật độ $f_X(x)$ ($f_X(x) = 0$ tại các giá trị x không chỉ ra).

(a) đều Uniform(a,b): $f_X(x) = \frac{1}{b-a}$ với $x \in [a,b]$, $a=0, b=3$,

(b) mũ $Exp(\beta)$ $(\beta > 0)$: $f_X(x) = \frac{1}{\beta} e^{-x/\beta}$ $(x>0)$, $\beta = 1$.

(c) $Gamma(\alpha,\beta)$ $(\alpha,\beta > 0)$: $f_X(x) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\beta x}$ $(x>0)$, $\alpha = 1, \beta = 1$,

(d) $Beta(\alpha,\beta)$ $(\alpha,\beta>0)$: $f_X(x) = \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}$ $(0<x<1)$, $\alpha = 1, \beta = 2$.

Dạng 3. Tìm xác suất $\mathbb{P}(a < X < b)$ với $X \sim N(\mu,\sigma^2)$

Cho $X \sim N(\mu,\sigma^2)$ có hàm mật độ $f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2}$. Đặt $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-t^2/2} dt$. Khi đó ta có

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(a < X < b) &= \mathbb{P}\left(\frac{a-\mu}{\sigma} < \frac{X-\mu}{\sigma} < \frac{b-\mu}{\sigma}\right) \\
&= \Phi\left(\frac{b-\mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right), \\
\mathbb{P}(X < b) &= \mathbb{P}\left(\frac{X-\mu}{\sigma} < \frac{b-\mu}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{b-\mu}{\sigma}\right), \\
\mathbb{P}(X > a) &= 1 - \mathbb{P}(X \leq a) = 1 - \Phi\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right).
\end{aligned}$$

1. Cho $X \sim N(\mu,\sigma^2)$.

(a) Chứng tỏ $cX + d \sim N(c\mu + d, c^2\sigma^2)$,

(b) Chứng tỏ $\frac{X-\mu}{\sigma} \sim N(0,1)$,

(c) Cho $X \sim N(3, 4)$, tính $\mathbb{P}(1 < X < 3)$,

(d) Cho $X \sim N(1, 9)$, tính a, b để $\mathbb{P}(X < a) = 0,506$, $\mathbb{P}(X > b) = 0,198$.

(e) Cho $X \sim N(20,4; 3,5^2)$. Tìm $\mathbb{P}(X < 18,1)$, $\mathbb{P}(X > 17,9)$, $\mathbb{P}(X < 18,1|X > 17,9)$. Tìm t để $\mathbb{P}(X < t) = 0,444$.

(f) Cho $X \sim N(5, \sigma^2)$. Cho $\mathbb{P}(X < 3) = 0,3$. Tìm $\mathbb{P}(X \geq 7)$, $\mathbb{P}(X < 7)$, $\mathbb{P}(3 \leq X < 7)$.

(g) Cho $Y \sim N(12, \sigma^2)$ và $\mathbb{P}(10 \leq Y < 14) = 0,6$. Tìm $\mathbb{P}(Y \geq 14)$, $\mathbb{P}(Y < 10)$, $\mathbb{P}(12 \leq Y < 14)$, $\mathbb{P}(Y < 14|Y > 12)$.

(h) Cho $X \sim N(-5, \sigma^2)$. Cho $\mathbb{P}(X < -3) = 0,8$. Tìm $\mathbb{P}(X < 7)$, $\mathbb{P}(-7 < X < -5)$.

2. Một máy đóng gói bột mì đóng các bao có trọng lượng tuân theo phân phối chuẩn có trung bình là 150 kg và độ lệch chuẩn là 0,5 kg. Chọn ngẫu nhiên một bao, tìm xác suất để bao đó có trọng lượng a) $<$ 149 kg; b) $>$ 151,5 kg; c) nằm giữa 149 kg và 151 kg.

3. Một nhà nông chở 850 bắp cải đi bán. Giả sử trọng lượng bắp cải là một biến ngẫu nhiên có phân phối chuẩn với trung bình 1,1 kg và độ lệch chuẩn 150 g. Nếu nhà nông này lấy ngẫu nhiên một bắp cải thì xác suất để nó có trọng lượng nằm giữa 1,2 kg đến 1,3 kg là bao nhiêu. Ước lượng xem có bao nhiêu bắp cải có trọng lượng $>$ 1,4 kg?

4. Điểm số trong một kỳ thi tuân theo phân phối chuẩn có trung bình μ và độ lệch chuẩn σ. Giả sử thang điểm là 100. Nếu 10% thí sinh đạt trên 80 điểm và 20% thí sinh thấp hơn 45 điểm. Tìm μ, σ.

5. Khối lượng một gói rau bán tại một siêu thị rau sạch là biến ngẫu nhiên có phân phối chuẩn với trung bình 550 g và độ lệch chuẩn 20 g.

(a) Chọn ngẫu nhiên một gói rau. Tìm xác suất để gói rau đó có trọng lượng trong khoảng 500 g đến 600 g.

(b) Trong một ngày có 1200 gói rau được bán. Tìm số rau mà trọng lượng của nó $>$ 540 g.

(c) Tại một siêu thị gần đó, 15% gói rau được bán có trọng lượng ít nhất 600 g và không nhiều hơn 10% rau được bán có trọng lượng $<$ 540 g. Giả sử trọng lượng rau M của các gói rau của siêu thị này tuân theo phân phối chuẩn. Tìm trung bình và độ lệch chuẩn của M.

Dạng 4. Phương pháp tìm hàm mật độ của biến ngẫu nhiên liên tục $h(X)$ bằng hàm phân phối tích lũy
Cho X có hàm mật độ $f_X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, cho $f_X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ là hàm đo được Borel. Ta tìm hàm mật độ của $Y = h(X)$ như sau
Bước 1: với mỗi $y \in R$ ta tìm tập $A_y = \{x : h(x) \leq y\}$,
Bước 2: Tìm $F_{Y)}(y) = P(h(X) \leq y) = \int_{A_y} f_X(x)dx$,
Bước 3: Tìm $F'_{h(X)} = f_{h(X)}$.

1. Cho biến ngẫu nhiên liên tục X có hàm mật độ f_X. Tìm f_{cX+d} theo f_X. Áp dụng: Tìm hàm mật độ của $Y = 2X$, $Z = -3X$ biết X là biến ngẫu nhiên có hàm mật độ $f_X(x)$ ($f_X(x) = 0$ tại các giá trị x không chỉ ra)
   (a) đều Uniform(a,b): $f_X(x) = \frac{1}{b-a}$ với $x \in [a, b]$.
   (b) chuẩn $N(\mu, \sigma^2)$: $f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$
   (c) mũ $Exp(\beta)$ ($\beta > 0$): $f_X(x) = \frac{1}{\beta} e^{-x/\beta}$ ($x > 0$).
   (d) $Gamma(\alpha, \beta)$ ($\alpha, \beta > 0$): $f_X(x) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\beta x}$ ($x > 0$).
   (e) $\chi^2(p)$ ($p > 0$): $f_X(x) = \frac{1}{2^{p/2}\Gamma(p/2)} x^{-1+p/2} e^{-x/2}$ ($x > 0$).
   (f) $Beta(\alpha, \beta)$ ($\alpha, \beta > 0$): $f_X(x) = \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}$ ($0 < x < 1$)
2. Cho biến ngẫu nhiên liên tục X có hàm mật độ f_X. Tìm hàm mật độ của $Y = e^X$ với
   (a) $f_X(x) = e^{-x}$ với $x \geq 0$, $f_X(x) = 0$ với $x < 0$.
   (b) $X \sim N(0, 1)$.
   (c) $X \sim N(\mu, \sigma^2)$.
3. Cho biến ngẫu nhiên liên tục X có hàm mật độ f_X.
   (a) Tìm f_{X^2} theo f_X,
   (b) Tìm f_{X^2} nếu $X \sim N(0, 1)$,
   (c) Cho $X \sim Uniform(-1, 3)$. Tìm f_{X^2}

4. Cho X có hàm xác suất tích lũy F_X. Tìm F_{X^+} với $X^+ = \max\{X, 0\}$.

7. Các tham số đặc trưng

Định nghĩa. Cho $(\Omega, \mathcal{M}, \mathbb{P})$ là không gian xác suất và X, Y là biến ngẫu nhiên trên Ω. Nếu $X \in L^1(\mathbb{P})$ ta định nghĩa

a) Kỳ vọng (expectation, hay trung bình) của X: $\mu_X = \mathbb{E}X := \int_\Omega X(\omega) d\mathbb{P}(\omega)$

b) Phương sai (variance) của X: $varX := \mathbb{E}(X - \mu_X)^2$

c) Môment thứ n của X: $\mathbb{E}(X^n)$

d) Hàm sinh môment (moment generating function) của X: $M_X(t) = \mathbb{E}(e^{tX})$.

e) Hiệp phương sai (covariance) của X, Y: $cov(X, Y) = \mathbb{E}(X - \mu_X)(Y - \mu_Y)$.

Định lý. (Quy tắc Lazy Statistician) *Cho $X : \Omega \to \mathbb{R}^k$ là biến ngẫu nhiên có hàm mật độ f_X và $g : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ là một hàm Borel.*

a) Nếu X là biến ngẫu nhiên rời rạc, $X(\Omega) = \{x_1, x_2, ...\}$ thì

$$\mathbb{E}(g(X)) = \sum_i g(x_i)\mathbb{P}(X = x_i) = \sum_i g(x_i) f_X(x_i).$$

b) Nếu X là biến ngẫu nhiên liên tục và $g(X) \geq 0$ hay $g(X) \in L^1(\mathbb{P})$ thì

$$\mathbb{E}(g(X)) = \int_{\mathbb{R}^k} g(x) f_X(x) dx.$$

Bài tập. Dùng kỹ thuật 4D chứng minh định lý cho trường hợp biến ngẫu nhiên liên tục theo các bước sau:
(i) Xét trường hợp $g(x) = \mathbb{I}_B(x)$ với $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^k)$. CM $g(X(\omega)) = \mathbb{I}_{X \in B}(\omega)$. Từ đó suy ra đẳng thức.
(ii) Cm cho trường hợp g là hàm đơn.
(iii) Cm cho trường hợp $g \geq 0$.
(iv) Cm cho trường hợp tổng quát bằng cách dùng phân tích $g = g^+ - g^-$.

Mệnh đề (về EX). *Cho X, Y là hai biến ngẫu nhiên xác định trên cùng không gian xác suất. Ta có* *a) nếu X, Y có cùng phân phối và $g(X) \in L^1(\mathbb{P})$ thì $g(Y) \in L^1(\mathbb{P})$ và $\mathbb{E}(g(X)) = \mathbb{E}(g(Y))$.*

b) $\mathbb{E}(c) = c$ với mọi $c \in \mathbb{R}$.

c) nếu $X, Y \in L^1(\mathbb{P})$ thì $\alpha X + \beta Y \in L^1(\mathbb{P})$ và $\mathbb{E}(\alpha X + \beta Y) = \alpha \mathbb{E}X + \beta \mathbb{E}Y$.

d) Nếu $X \le Y$ hầu chắc chắn thì $\mathbb{E}X \le \mathbb{E}Y$.

e) nếu $X \ge 0$ hầu chắc chắn và $\mathbb{E}X = 0$ thì $X = 0$ hầu chắc chắn.

f) nếu $X \in L^1(\mathbb{P})$ thì $|X| \in L^1(\mathbb{P})$ và $|\mathbb{E}(X)| \le \mathbb{E}(|X|)$.

Bài tập. Chứng minh định lý trên.
(i) Cm $\mathbb{E}(g(X)) = \mathbb{E}g(Y)$ bằng kỹ thuật 4D.
(ii) Cm b) , c), d), f) bằng các tính chất của tích phân.
(iii) Cm e) bằng cách xét các tập hợp $E_n = \{X \ge \frac{1}{n}\} = \{\omega \in \Omega : \ X(\omega) \ge \frac{1}{n}\}$. CMR $\mathbb{P}(E_n) = 0$ và $\{X > 0\} = \cup_{n=1}^{\infty} E_n$. Từ đó suy ra $\mathbb{P}(X > 0) = 0$.

Mệnh đề (về varX và cov(X,Y)). *Cho $X, Y \in L^2(P)$, $\alpha \in R$. Ta có $X \in L^1(P)$ và*

a) $var(X + \alpha) = var(X)$, $var(\alpha X) = \alpha^2 var(X)$, $var(\alpha) = 0$

b) $var(X) = E(X^2) - (E(X))^2$

c) $cov(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$,

d) $var(\alpha X + \beta Y) = \alpha^2 varX + \beta^2 var(Y) + 2\alpha\beta cov(X, Y)$

Mệnh đề (về hàm sinh moment). *Cho biến ngẫu nhiên $X, Y : \Omega \to \mathbb{R}$ có $e^{tX}, e^{tY} \in L^1(\mathbb{P})$, trong một khoảng mở (của biến t) chứa 0. .*

a) $M_X^{(n)}(0) = \mathbb{E}(X^n)$.

b) nếu $M_X(t) = M_Y(t)$ trong một khoảng mở chứa 0 thì X, Y có cùng hàm mật độ xác suất.

Phương pháp tính $\mathbb{E}X$, $varX$, hàm moment

Cách 1. Dùng quy tắc Lazy Statistician:

$\mathbb{E}X = \sum_i x\mathbb{P}(X = x_i)$ *hay* $\mathbb{E}X = \int_{\mathbb{R}} x f_X(x)dx$,

$\mathbb{E}X^2 = \sum_i x_i^2 \mathbb{P}(X = x_i)$ *hay* $EX^2 = \int_{\mathbb{R}} x^2 f_X(x)dx$ *và công thức* $varX = EX^2 - (EX)^2$.

$M_X(t) = \sum_i e^{tx_i}\mathbb{P}(X = x_i)$ *hay* $M_X(t) = \int_R e^{tx} f_X(x)dx$

Cách 2. Dùng công thức $EX = M'_X(0)$, $EX^2 = M"_X(0)$.

BÀI TẬP

Dạng 1. Tìm hàm sinh mô men của biến ngẫu nhiên
Cho $X(\Omega) = \{x_1, \dots, x_n\}$, $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, Y là biến ngẫu nhiên liên tục có hàm mật độ f_Y

$$\begin{aligned} M_X(t) &= \mathbb{E}(e^{tX}) = \sum_{j=1}^{n} e^{x_i t}\mathbb{P}(X = x_i), \\ M_Y(t) &= \mathbb{E}(e^{tY}) = \int_{\mathbb{R}} e^{ty} f_Y(y)dy \end{aligned}$$

1. Tìm hàm sinh moment của các biến ngẫu nhiên sau
   (a) Bernoulli(p): $X : \Omega \to \{0, 1\}$ với $f_X(1) = P(X = 1) = p$, $f_X(0) = P(X = 0) = 1 - p$.
   (b) nhị thức Binomial(n,p): $f_X(k) = P(X = k) = C_n^k p^k (1 - p)^{n-k}$ với $k = 0, 1, ..., n$.
   (c) Poisson(λ): $f_X(k) = P(X = k) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$
   (d) Chuẩn $N(\mu, \sigma^2)$
   (e) $Gamma(\alpha, \beta)$ ($\alpha, \beta > 0$): $f_X(x) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\beta x}$ $(x > 0)$.

2. Cho biết $M_X(t)$, tìm phân phối của X nếu
   (a) $M_X(t) = e^{t^2}$,
   (b) $M_X(t) = e^{-2t+t^2/2}$,
   (c) $M_X(t) = e^t/3 + 2/3$,
   (d) $M_X(t) = (3e^t/4 + 1/4)^{40}$.

Dạng 2. Tìm kỳ vọng, phương sai biến ngẫu nhiên rời rạc
Cho $X(\Omega) = \{x_1, \ldots, x_n\}$, $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, có thể dùng công thức $\mathbb{E}(X^n) = \frac{d^n M_X}{dt^n}\Big|_{t=0}$ hay dùng công thức Lazy-Statistics

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X) &= \sum_{j=1}^{n} x_i \mathbb{P}(X = x_i), \\ \mathbb{E}(X^2) &= \sum_{j=1}^{n} x_i^2 \mathbb{P}(X = x_i), \\ Var(X) &= \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2. \end{aligned}$$

1. Cho biết $M_X(t)$, tìm kỳ vọng, phương sai của biến ngẫu nhiên X nếu
   (a) $M_X(t) = e^t/3 + 2/3$,
   (b) $M_X(t) = (3e^t/4 + 1/4)^{40}$.
2. Tìm kỳ vọng, phương sai của các biến ngẫu nhiên rời rạc có phân phối
   (a) Bernoulli(p): $X : \Omega \to \{0, 1\}$ với $f_X(1) = P(X = 1) = p$, $f_X(0) = P(X = 0) = 1 - p$.
   (b) nhị thức Binomial(n,p): $f_X(k) = P(X = k) = C_n^k p^k (1 - p)^{n-k}$ với $k = 0, 1, ..., n$.
   (c) hình học Geom(p): $f_X(k) = P(X = k) = p(1 - p)^{k-1}, k = 1, 2, ...$ $(0 < p < 1)$
   (d) Poisson(λ): $f_X(k) = P(X = k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$

Dạng 3. Tìm kỳ vọng, phương sai biến ngẫu nhiên liên tục
Cho X, có hàm mật độ f_X, có thể dùng công thức $\mathbb{E}(X^n) = \frac{d^n M_X}{dt^n}\Big|_{t=0}$ hay dùng định nghĩa

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X) &= \int_{\mathbb{R}} x f_X(x) dx, \\
\mathbb{E}(X^2) &= \int_{\mathbb{R}} x^2 f_X(x) dx,, \\
Var(X) &= \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2.
\end{aligned}$$

1. Cho biết $M_X(t)$, tìm kỳ vọng, phương sai của biến ngẫu nhiên X nếu
   (a) $M_X(t) = e^{t^2}$,
   (b) $M_X(t) = e^{-2t+t^2/2}$,
2. Tìm kỳ vọng, phương sai của các biến ngẫu nhiên liên tục có phân phối ($f_X(x) = 0$ tại các giá trị x không chỉ ra)
   (a) đều Uniform(a,b): $f_X(x) = \frac{1}{b-a}$ với $x \in [a, b]$.
   (b) chuẩn $N(\mu, \sigma^2)$: $f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$
   (c) mũ $Exp(\beta)$ ($\beta > 0$): $f_X(x) = \frac{1}{\beta} e^{-x/\beta}$ ($x > 0$).
   (d) $Gamma(\alpha, \beta)$ ($\alpha, \beta > 0$): $f_X(x) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\beta x}$ ($x > 0$).
   (e) $\chi^2(p)$ ($p > 0$): $f_X(x) = \frac{1}{2^{p/2}\Gamma(p/2)} x^{-1+p/2} e^{-x/2}$ ($x > 0$).
   (f) $Beta(\alpha, \beta)$ ($\alpha, \beta > 0$): $f_X(x) = \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}$ ($0 < x < 1$)

8. Tính độc lập

Định nghĩa. Cho $(\Omega, \mathcal{M}, \mathbb{P})$. Cho $X_i : \Omega \to \mathbb{R}^{n_i}$, $i = 1, \dots, p$, là các biến ngẫu nhiên. Ta nói X_i, $i = 1, \dots, p$, *độc lập* nếu các biến cố $(X_i \in B_i)$, $i = 1, \dots, p$, là biến cố độc lập với mọi $B_i \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^{n_i})$.

Định lý. *Cho $X_i : \Omega \to \mathbb{R}^{n_i}$, $i = 1, \dots, p$, là các biến ngẫu nhiên và $g_i : \mathbb{R}^{n_i} \to \mathbb{R}^{n'_i}$ là các hàm đo được Borel. Khi đó $g_i \circ X_i$ là các biến ngẫu nhiên độc lập.*

Mệnh đề *Cho các biến ngẫu nhiên $(X_i)_{i=1,...,n}$ độc lập và $g_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ là các hàm Borel thì $g_1 \circ X_1, ..., g_n \circ X_n$ độc lập. Hơn nữa, nếu $g_i(X_i) \in L^1(\mathbb{P})$ với mọi $i = 1, ..., n$ thì*

$$\mathbb{E}(g_1(X_1)...g_n(X_n)) = \mathbb{E}(g_1(X_1))...\mathbb{E}(g_n(X_n)).$$

Mệnh đề . *Cho biến ngẫu nhiên $X, Y, X_i : \Omega \to \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, n$ độc lập.*

a) (về hàm sinh moment) Giả sử $e^{tX_i} \in L^1(\mathbb{P})$, $i = 1, ..., n$ trong một khoảng mở (của biến t) chứa 0. Khi đó $M_{X_1+...+X_n}(t) = M_{X_1}(t)...M_{X_n}(t)$,

b) $cov(X, Y) = 0$,

b) (Công thức Biennayme) Nếu giả thiết thêm $X_i \in L^2(P)$ thì

$$var\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} varX_i.$$

BÀI TẬP

Dạng 1. Tìm phân phối của $T(X_1, \dots, X_n)$ với $X_1, \dots, X_n$ độc lập bằng hàm xác suất tích lũy
Bước 1: Biến đổi $F_T(z) = \mathbb{P}(T \leq z)$ thành $F_T(z) = \Psi(F_{X_1}(z), \dots, F_{X_n}(z))$,
Bước 2: Tìm $F'_T(z)$.

1. Tìm hàm mật độ của

   (a) $Z = \max\{X_1, ..., X_n\}$ biết $X_1, ..., X_n$ độc lập và có cùng phân phối f_X. HD: $\max\{x_1, ..., x_n\} \leq z$ nghĩa là $x_1 \leq z, ..., x_n \leq z$.

   (b) $Z = \min\{X_1, ..., X_n\}$ biết $X_1, ..., X_n$ độc lập và có cùng phân phối f_X.

Dạng 2. Tìm phân phối của $X + Y$ với X, Y độc lập bằng hàm sinh moment
Bước 1: Ta tìm $M_X(t), M_Y(t)$,
Bước 2: Tìm M_{X+Y} b bằng cách sử dụng $M_{X+Y}(t) = M_X(t)M_Y(t)$ với X, Y độc lập,
Bước 3: Từ M_{X+Y} xác định phân phối có hàm sinh moment này.

1. Cho X, Y độc lập. CMR

   (a) nếu $X \sim Binomial(n, p)$, $Y \sim Binomial(m, p)$ thì $X + Y \sim Binomial(n + m, p)$

   (b) nếu $X \sim Poisson(\lambda)$, $Y \sim Poisson(\mu)$ thì $X + Y \sim Poisson(\lambda + \mu)$

   (c) nếu $X \sim \Gamma(a, \beta)$, $Y \sim \Gamma(b, \beta)$ thì $X + Y \sim \Gamma(a + b, \beta)$

   (d) nếu $X \sim N(\mu_X, \sigma_X^2)$, $Y \sim N(\mu_Y, \sigma_Y^2)$ thì $X + Y \sim N(\mu_X + \mu_Y, \sigma_X^2 + \sigma_Y^2)$

9. Véc-tơ ngẫu nhiên

Định nghĩa. Biến ngẫu nhiên $X : \Omega \to \mathbb{R}^k$ gọi là *biến ngẫu nhiên liên tục* nếu $\mathbb{P}_X \ll m_k$, nghĩa là với mọi tập Borel đo được B trong $\mathbb{R}^k$ thỏa $m_k(B) = 0$ thì $\mathbb{P}_X(B) = 0$.

Mệnh đề *Nếu biến ngẫu nhiên $X : \Omega \to \mathbb{R}^k$ là biến ngẫu nhiên liên tục thì tồn tại hàm khả tích Lebesgue $f_X : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ (gọi là hàm mật độ của X) sao cho $f_X(x) \geq 0$ và với mọi tập Borel $B \in \mathbb{R}^k$ ta có*

$$\mathbb{P}(X \in B) = \int_B f_X(x) dm_k(x).$$

Định nghĩa. Cho biến ngẫu nhiên $V = (X_1, ..., X_k)$. Hàm $F_V(x_1, ..., x_k) = P(X_1 \leq x_1, ..., X_k \leq x_k)$ gọi là hàm xác suất tích lũy của V.

Mệnh đề *Ta có*

a) $0 \leq F_V(x_1, ..., x_k) \leq 1$ *với mọi* $(x_1, ..., x_k) \in \mathbb{R}^k$,

$$\lim_{x_i \to -\infty, \forall i} F_V(x_1, ..., x_k) = 0, \quad \lim_{x_i \to +\infty, \forall i} F_V(x_1, ..., x_k) = 1.$$

b) Nếu X_i là các biến ngẫu nhiên rời rạc, đặt $f_V(x_1, ..., x_k) = P(X_1 = x_1, ..., X_k = x_k)$, $(x_1, ..., x_k) \in J$ thì $\sum_{(x_1, ..., x_k) \in J} f_V(x_1, ..., x_k) = 1$ và

$$F_V(x_1, ..., x_k) = \sum_{s_1 \leq x_1, ..., s_k \leq x_k} f_V(s_1, ..., s_k)$$

c) Nếu X_i là các biến ngẫu nhiên liên tục thì hàm mật độ $f_V(x_1,...,x_k) \geq 0$, $\int_{\mathbb{R}^k} f_V dm_k = 1$,

$$F_V(x_1,...,x_k) = \int_{-\infty}^{x_1} ... \int_{-\infty}^{x_k} f_V(s_1,...,s_k)ds_1...ds_k$$

và $f_V = \frac{\partial^k f_V}{\partial x_1 ... \partial x_k}$

Mệnh đề *Họ các biến ngẫu nhiên $(X_i)_{i=1,...,n}$ là độc lập khi với mọi họ các số nguyên $1 \leq i_1 < ... < i_k \leq n$ ta có.*

$$F_{X_{i_1}...X_{i_k}}(x_{i_1},...,x_{i_k}) = F_{X_{i_1}}(x_{i_1})...F_{X_{i_k}}(x_{i_k})$$

Trong đó $F_{X_{i_1}...X_{i_k}}$ là hàm xác suất tích lũy đồng thời của họ $X_{i_1},...,X_{i_k}$ và F_{X_i} là hàm xác suất tích lũy của X_i.

Mệnh đề. *Cho $(X_i)_{i=1,...,n}$ là các biến ngẫu nhiên rời rạc độc lập. với mọi họ các số nguyên $1 \leq i_1 < ... < i_k \leq n$ ta có*

$$f_{X_{i_1}...X_{i_k}}(x_{i_1},...,x_{i_k}) = f_{X_{i_1}}(x_{i_1})...f_{X_{i_k}}(x_{i_k})$$

với $f_{X_{i_1}...X_{i_k}}(x_{i_1},...,x_{i_k}) = P(X_{i_1} = x_{i_1},...,X_{i_k} = x_{i_k})$.

Mệnh đề *Cho $X, Y : \Omega \to \mathbb{R}$ là hai biến ngẫu nhiên độc lập và liên tục, khi đó*

a) $f_{X+Y}(z) = f_X * f_Y(z) := \int_{-\infty}^{\infty} f_X(z-y)f_Y(y)dy$

b) $f_{X/Y}(z) = \int_0^{\infty} y f_X(zy) f_Y(y)dy$

Mệnh đề *Ta có*

a) nếu $X \sim N(0,1)$ thì $X^2 \sim \chi^2(1)$

b) nếu $X \sim N(0,1)$ và $Y \sim \chi^2(m)$ độc lập thì $Z = \frac{X}{Y/\sqrt{m}}$ có phân phối Student với tham số n

c) nếu $X \sim \chi^2(n)$, $Y \sim \chi^2(m)$ độc lập thì $X + Y \sim \chi^2(m+n)$

d) nếu $X \sim \chi^2(n)$, $Y \sim \chi^2(m)$ độc lập thì $Z = \frac{X/n}{Y/m}$ có phân phối Fisher-Snedecor với tham số n, m).

Mệnh đề *Cho $X \sim N(\mu_X, \sigma_X^2)$, $Y \sim N(\mu_Y, \sigma_Y^2)$ độc lập. Cho $X_1,...,X_n$ độc lập và có cùng phân phối $N(\mu, \sigma)$. Khi đó*

a) $cX + d \sim N(c\mu_X + d, c^2\sigma_X^2)$

b) $(X - \mu_X)/\sigma_X \sim N(0,1)$

c) $X+Y \sim N(\mu_X+\mu_Y, \sigma_X^2+\sigma_Y^2)$
d) $\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^n (X_i-\mu)^2 \sim \chi^2(n)$.
Định nghĩa Các biến ngẫu nhiên $X_1, \ldots, X_n$ gọi là một *mẫu ngẫu nhiên cỡ* n của tổng thể $f(x)$ nếu $X_1, \ldots, X_n$ độc lập và có cùng hàm mật độ $f(x)$.

Định nghĩa *Trung bình mẫu* của mẫu ngẫu nhiên $X_1, \ldots, X_n$ xác định bởi

$$\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i$$

Phương sai mẫu của mẫu ngẫu nhiên $X_1, \ldots, X_n$ xác định bởi

$$S_X^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^n (X_i - \overline{X})^2.$$

Mệnh đề. *Cho $X_1, \ldots, X_n$ gọi là một mẫu ngẫu nhiên có phân phối $N(\mu_X, \sigma_X^2)$. Khi đó*

1. *$\overline{X}$ và S^2 độc lập,*
2. *$\overline{X} \sim N(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$,*
3. *$(n-1)S^2/\sigma^2 \sim \chi^2(n-1)$,*
4. *$(\overline{X}-\mu_X)/(S_X/\sqrt{n}) \sim St(n-1)$,*
5. *Cho thêm $Y_1, \ldots, Y_m$ gọi là một mẫu ngẫu nhiên có phân phối $N(\mu_Y, \sigma_Y^2)$. Khi đó*
$$\frac{S_X^2/\sigma_X^2}{S_Y^2/\sigma_Y^2} \sim F(n-1, m-1).$$

Phương pháp tìm hàm mật độ của $Z = r(X, Y)$
Bước 1 Tìm tập hợp $B_z = \{(x,y) : r(x,y) \le z\}$
Bước 2 Tính $F_Z = P(Z \le z) = \int_{B_z} f_{X,Y}(x,y)dxdy$
Bước 3 Tính $f_Z = F_Z'$

BÀI TẬP

1. Tìm hàm mật độ của

(a) $Z = X \pm Y$ với X, Y độc lập và có phân phối đều trên khoảng $(0,1)$. Nhắc lại, Biến ngẫu nhiên X có phân phối đều trên đoạn (a,b)(ký hiệu $X \sim Uniform(a,b)$) nếu $f_X(x) = \frac{1}{b-a}$ nếu $x \in (a,b)$, $f_X(x) = 0$ nếu $x \notin (a,b)$.

(b) $Z = X/Y$ với X, Y độc lập và có phân phối đều trên khoảng $(0,1)$.

10. Các định lý giới hạn

Định nghĩa Cho $X, X_n : \Omega \to \mathbb{R}$ là dãy các biến số ngẫu nhiên trên $(\Omega, \mathcal{M}, \mathbb{P})$. Ta nói

a) X_n hội tụ theo xác suất tới X, ký hiệu $X_n \xrightarrow{p} X$ nếu với mỗi $\epsilon > 0$ ta có

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(|X_n - X| > \epsilon) = 0.$$

b) X_n hội tụ theo phân bố, ký hiệu $X_n \rightsquigarrow X$ nếu $\lim_{n\to\infty} F_{X_n}(t) = F_X(t)$

c) X_n hội tụ hầu chắc chắn, ký hiệu $X_n \overset{h.c.c}{\to} X$ nếu $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(X_n \to X) = 1$

Mệnh đề *Các khẳng định sau là đúng*

a) $X_n \xrightarrow{p} X$ *thì* $X_n \rightsquigarrow X$

b) $X_n \overset{h.c.c}{\to} X$ *thì* $X_n \xrightarrow{p} X$

Mệnh đề

a) (Bất đẳng thức Markov) Nếu X là một biến ngẫu nhiên không âm thì với mọi $a, p > 0$ ta có

$$\mathbb{P}(X > a) \le \frac{\mathbb{E}(X^p)}{a^p}$$

b) (Bất đẳng thức Chebyshev) Cho X là biến ngẫu nhiên có trung bình μ và phương sai σ^2. Với mọi $k > 0$ ta có

$$\mathbb{P}(|X - \mu| > k) \le \frac{\sigma^2}{k^2}.$$

Định lý (dạng yếu của luật số lớn) *Cho $X_1, X_2, ...$ là một dãy các biến ngẫu nhiên độc lập có cùng trung bình $\mathbb{E}(X_i) = \mu$ và phương sai $var(X_i) = \sigma^2$.*

Khi đó

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \xrightarrow{p} \mu.$$

Định lý (dạng mạnh của luật số lớn) *Cho* $X_1, X_2, ...$ *là một dãy các biến ngẫu nhiên độc lập có cùng phân phối với trung bình* $\mathbb{E}(X_i) = \mu$ *. Khi đó*

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \overset{h.c.c.}{\rightarrow} \mu.$$

Mệnh đề *Cho* $Z_1, Z_2, ...$ *là một dãy các biến ngẫu nhiên với hàm phân phối tích lũy* F_{Z_n} *và hàm sinh moment* M_{Z_n}*. Cho biến số ngẫu nhiên* Z *có hàm phân phối tích lũy* F_Z *và hàm sinh* M_Z*. Nếu* $M_{Z_n}(t) \rightarrow M_Z(t)$ *với mọi* t *thì* $F_{Z_n}(z) \rightarrow F_Z(z)$ *tại mọi* $z \in R$ *mà* F_Z *liên tục.*

Định lý giới hạn trung tâm *Cho* $X_1, X_2, ...$ *là một dãy các biến ngẫu nhiên độc lập có cùng phân phối với trung bình* $E(X_i) = \mu$ *và phương sai* $var(X_i) = \sigma^2$*. Đặt* $S_n = \sum_{i=1}^{n}$*. Ta có hàm phân phối xác suất của*

$$\frac{S_n - \mathbb{E}(S_n)}{\sqrt{var(S_n)}} = \frac{(X_1 + ... + X_n) - n\mu}{\sigma\sqrt{n}}$$

có thể xấp xỉ bằng phân phối Gauss khi $n \rightarrow \infty$*, nghĩa là, với mọi* $a \in \mathbb{R}$*,*

$$\mathbb{P}\left(\frac{(X_1 + ... + X_n) - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \leq a\right) \rightarrow \Phi(a) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{a} e^{-t^2/2}dt.$$

Định lý Moivre-Laplace *Xét dãy phép thử Bernoulli với xác suất thành công là p. Gọi* X *là số lần thành công trong n phép thử. Khi đó, với mọi* $a \in \mathbb{R}$*, ta có*

$$\lim_{n\rightarrow\infty} P\left(\frac{X - np}{\sqrt{np(1-p)}} < a\right) \rightarrow \Phi(a)$$

Định lý giới hạn Poisson *Xét dãy phép thử Bernoulli với xác suất thành công là p. Gọi* X *là số lần thành công trong n phép thử. Khi đó nếu* $p \rightarrow 0$ *và* $np \rightarrow \lambda$ *(*$0 < \lambda < \infty$*) thì với mọi* $k = 0, 1, 2, ...$ *ta có*

$$\lim_{n\rightarrow\infty} \mathbb{P}(X = k) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}.$$

Phương pháp áp dụng luật số lớn

Bước 1: Kiểm tra tính độc lập và cùng phân phối của các biến ngẫu nhiên $Y_1, Y_2, ...$ Ta sử dụng tính chất:

-Nếu $X \sim Y$ thì $g(X) \sim g(Y)$ và $\mathbb{E}(g(X)) = \mathbb{E}(g(Y))$.

-Nếu X độc lập với Y thì $g(X)$ độc lập với $h(Y)$.

Bước 2: Tính $\mu = \mathbb{E}(Y_1)$

Bước 3: Áp dụng tính chất

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} Y_j = \mu \quad h.c.c.$$

Phương pháp áp dụng định lý giới hạn trung tâm

Cho dãy biến ngẫu nhiên độc lập $X_1, ..., X_n$ có cùng trung bình và phương sai. Tìm xác suất $\mathbb{P}(a < S_n < b)$ với $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$.

Bước 1: Tìm $\mu = \mathbb{E}X_i$ và $\sigma^2 = varX_i$

Bước 2: Chuẩn hóa

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(a < S_n < b) &= \mathbb{P}\left(\frac{a - n\mu}{\sqrt{n\sigma^2}} < \frac{S_n - n\mu}{\sqrt{n\sigma^2}} < \frac{b - n\mu}{\sqrt{n\sigma^2}}\right) \\ &\simeq \Phi\left(\frac{b - n\mu}{\sqrt{n\sigma^2}}\right) - \Phi\left(\frac{a - n\mu}{\sqrt{n\sigma^2}}\right) \end{aligned}$$

Lưu ý. Nếu ta gặp tích $Y_1...Y_n$, $Y_i > 0$ ta có thể dùng công thức

$$\mathbb{P}(a < Y_1...Y_n < b) = \mathbb{P}(\ln a < \sum_{j=1}^{n} \ln Y_j < \ln b)$$

rồi áp dụng định lý giới hạn trung tâm.

Phương pháp tìm xác suất của biến ngẫu nhiên Bernoulli

Xét thí nghiệm có xác suất thành công là p, xác suất thất bại là $1 - p$. Lặp lại thí nghiệm này n lần độc lập. Ký hiệu X_i là biến ngẫu nhiên xác định bởi: $X_i = 1$ nếu thí nghiệm thành công, $X_i = 0$ nếu thí nghiệm thất bại. Đặt $S_n = X_1 + ... + X_n$ thì S_n là số lần thí nghiệm thành công trong n lần thí nghiệm. Ta có $S_n \sim Bernoulli(n,p)$, $E(S_n) = np$, $var(S_n) = np(1-p)$. Theo định lý giới hạn trung tâm

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(a < S_n < b) &= \mathbb{P}\left(\frac{a-np}{\sqrt{np(1-p)}} < \frac{S_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} < \frac{b-np}{\sqrt{np(1-p)}}\right) \\
&\simeq \Phi\left(\frac{b-np}{\sqrt{np(1-p)}}\right) - \Phi\left(\frac{a-np}{\sqrt{np(1-p)}}\right) \\
\mathbb{P}(S_n < b) &= \mathbb{P}\left(\frac{S_n-np}{\sqrt{np(1-p)}} < \frac{b-np}{\sqrt{np(1-p)}}\right) \\
&\simeq \Phi\left(\frac{b-np}{\sqrt{np(1-p)}}\right) \\
\mathbb{P}(S_n = k) &= \mathbb{P}(k - \frac{1}{2} < S_n < k + \frac{1}{2}) \\
&\simeq \Phi\left(\frac{k+\frac{1}{2}-np}{\sqrt{np(1-p)}}\right) - \Phi\left(\frac{k-\frac{1}{2}-np}{\sqrt{np(1-p)}}\right)
\end{aligned}$$

Nếu $S_n \sim Bernoulli(n,p)$ với $\lambda = np$ nhỏ thì ta có thể dùng xấp xỉ Poisson(λ). Khi đó $\mathbb{P}(S_n = k) \simeq \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}$

BÀI TẬP

1. Cho Y_i, $i = 1, 2, ...$ là i.i.d. và có $Y_i \sim Binomial(1,p)$. CM $X_n = \sum_{i=1}^n Y_i \sim Binomial(n,p)$ và $\lim_{n\to\infty} \frac{X_n}{n} = p$ hầu chắc chắn.

2. Cho X_j, $j = 1, 2, ...$ là i.i.d. với $\mathbb{E}(|X_j|) < \infty$. Đặt $Y_j = e^{X_j}$. CM $(Y_1...Y_n)^{1/n}$ hội tụ tới một hằng số hầu chắc chắn.

3. Cho biến ngẫu nhiên X_j, $j = 1, 2, ...$ là i.i.d. Giả sử $\mathbb{E}(|X_j|^k) < \infty$. CM
$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{j=1}^n X_j^k = \mathbb{E}(X_1^k) \quad h.c.c.$$

4. Cho X_j, $j = 1, 2, ...$ là i.i.d. và $X_j \sim N(1,3)$. CM
$$\lim_{n\to\infty} \frac{X_1 + ... + X_n}{X_1^2 + ... + X_n^2} = \frac{1}{4} \quad h.c.c.$$

5. (Phương pháp Monte-Carlo) Cho hàm số $g : (a, b) \to \mathbb{R}$ và g khả tích Riemann trên (a, b). Cho dãy X_j các biến ngẫu nhiên i.i.d. có $X_j \sim Uniform(a, b)$. CM

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} g(X_j(\omega)) = \frac{1}{b-a} \int_a^b g(x)dx \quad h.c.c.$$

6. Cho biến ngẫu nhiên X chưa biết phân phối và cho các quan trắc $X_1, \dots, X_n$ là các biến ngẫu nhiên độc lập, có cùng phân phối với X. Từ $X_1, \dots, X_n$ hãy tìm các xấp xỉ (còn gọi là *ước lượng*) của các tham số với giả sử

   (a) $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ với μ, σ chưa biết. Tìm xấp xỉ $\hat{\mu}, \hat{\sigma}$ (của μ, σ).

   (b) $X \sim Poisson(\lambda)$ với λ chưa biết. Tìm $\hat{\lambda}$.

   (c) $X \sim Uniform(a, b)$ với a, b chưa biết. Tìm $\hat{a}, \hat{b}$.

   (d) $X \sim Binomial(k, p)$ với k, p chưa biết. Tìm $\hat{k}, \hat{p}$.

   (e) $X \sim Gamma(a, \lambda)$ với a, λ chưa biết. Tìm $\hat{a}, \hat{\lambda}$

   (f) $X \sim Exp(\beta)$ với β chưa biết. Tìm $\hat{\beta}$.

   Trong các bài tập trên, hãy dùng phần mềm R để phát sinh một bộ dữ liệu $X_1, \dots, X_n$ có phân phối đã cho và ước lượng tham số theo các bước mô tả như sau:

   (a) Chọn phân phối và chọn tham số (ví dụ như $\mu = 0, \sigma = 1$),

   (b) Phát sinh bộ dữ liệu $X_1, \dots, X_n$ có phân phối đã chọn (ví dụ $N(0, 1)$),

   (c) Tính ước lượng các tham số từ bộ $X_1, \dots, X_n$ (ví dụ tính $\hat{\mu}, \hat{\sigma}$),

   (d) So sánh kết quả từ công thức ước lượng với tham số chọn lúc ban đầu (ví dụ: so sánh $\hat{\mu}, \hat{\sigma}$ với $0, 1$).

7. Cho biến ngẫu nhiên liên tục X có các quan trắc $X_1, \dots, X_n$ độc lập cùng phân phối với X. Cho $a \in \mathbb{R}, h > 0$.

   (a) Từ các quan trắc hãy tìm ước lượng cho $\mathbb{P}(a < X \le a + h)$. HD: $\mathbb{P}(a < X \le b) = \mathbb{E}(\mathbb{I}_{a<X\le b})$

(b) Chứng minh rằng nếu hàm mật độ f_X liên tục tại a thì $f_X(a) = \lim_{h\to 0^+} \frac{1}{h}\mathbb{P}(a < X \leq a+h)$. Từ đó suy ra một ước lượng cho $f_X(a)$.

(c) phát sinh các bộ dữ liệu trên máy tính cầm tay và dự đoán xem phân phối mà máy cài đặt là gì?

8. Một công ty định giá bảo hiểm lốc xoáy sử dụng các giả thiết sau: a) Mỗi năm có nhiều nhất 1 cơn lốc xoáy, b) Xác suất của mỗi cơn lốc xoáy là 0.05, c) số lốc xoáy hàng năm là độc lập với nhau. Tính xác suất để có ít hơn 3 cơn lốc xoáy trong 20 năm.

9. Một công ty lập ra quỹ có trị giá 120 triệu đồng để thưởng cho những nhân viên có thành tích cao trong năm. Mỗi người sẽ được thưởng C triệu đồng. Công ty có 20 nhân viên và xác suất đạt thành tích cao của mỗi nhân viên là 0.02. Xác định số C để xác suất quỹ bị hết vốn thấp hơn 0.01.

10. Một kỳ thi trắc nghiệm có 40 câu, mỗi câu có 5 đáp án. Một sinh viên cảm thấy khả năng làm mỗi câu đúng là 0.5. Tìm xác suất để sinh viên này giải đúng được ít nhất 25 câu.

11. Lãi suất tính theo năm của tiền đầu tư là các biến ngẫu nhiên độc lập r_i $(i = 1, ..., n)$ với $r_i = 0.06$ với xác suất 0.3; $r_i = 0.08$ với xác suất 0.4;$r_i = 0.10$ với xác suất 0.3. Tìm kỳ vọng và phương sai của $\ln(1 + r_i)$. Khi đầu tư 1$ thì số tiền tích lũy được sau n năm sẽ là $AV_n = (1 + r_1)...(1 + r_n)$ $. Sử dụng định lý giới hạn trung tâm để tìm xác suất tiền tích lũy được cuối năm thứ 20 là nhỏ hơn 5$.

12. Lãi suất tính theo năm của tiền đầu tư là các biến ngẫu nhiên độc lập r_i $(i = 1, ..., n)$ với $r_i = 0.08;\ 0.12$ với xác suất lần lượt là 0.4; 0.6. Tìm kỳ vọng và phương sai của $\ln(1 + r_i)$. Đầu tư 10 000$ bây giờ. Tìm xác suất để số tiền tích lũy được cuối năm thứ 40 tối thiểu là 400 000 $.