Phần thứ nhất

LÝ THUYẾT VÀ CÁC PHƯƠNG PHÁP TÍNH TẤM ĐÀN HỒI

Chương 1

LÝ THUYẾT TÍNH TOÁN TẤM

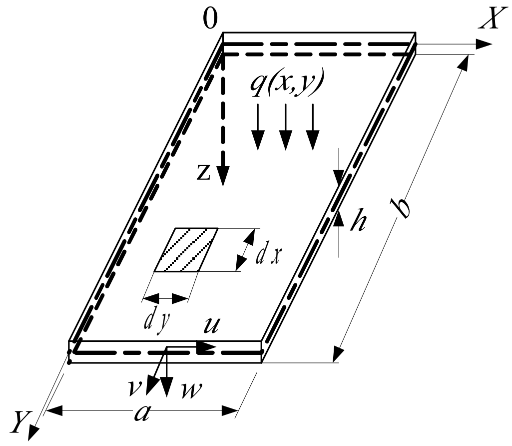
Tấm là vật thể hình khối được giới hạn bằng hai mặt phẳng, có chiều cao h (chiều dày) rất nhỏ so với hai kích thước còn lại h<<a,b, hình 1-1.

Mặt phẳng trung bình là mặt phẳng cách đều mặt trên và mặt dưới của tấm.

Tấm chịu uốn được phân loại thành tấm mỏngvà tấm dầy.

Tấm được gọi là tấm mỏng khi [12,17]:

$$\frac{h}{l_{\min}} \le \frac{1}{10} \text{ và } \frac{w_{\max}}{h} \le \frac{1}{5} \div \frac{1}{10}$$



Hình 1-1.

($w_{\max}$ là chuyển vị pháp lớn nhất). Tấm được gọi là tấm dày khi: $\frac{h}{l_{\min}} > \frac{1}{10}$.

Tấm mỏng được tính theo giả thiết Kirchhoff , bỏ qua biến dạng cắt trong mặt phẳng pháp tuyến; còn tấm dày được tính có kể đến biến dạng cắt trong mặt phẳng pháp tuyến theo giả thiết Mindlin.

1.1. TÍNH TẤM MỎNG CHỊU UỐN

1.1.1. Các giả thiết tính toán

Tính toán tấm mỏng dựa trên 03 giả thiết Kirchhoff:

1. Bỏ qua ứng suất pháp vuông góc với mặt phẳng tấm, $\sigma_z = 0$.

2. Khi tấm chịu uốn, chuyển vị thẳng trên mặt phẳng trung bình bằng không, $u(x,y,0) = v(x,y,0) = 0$.

3. Phần tử thẳng m-n vuông góc với mặt phẳng trung bình trước biến dạng thì sau biến dạng vẫn thẳng, vẫn vuông góc với mặt phẳng trung bình và không

thay đổi độ dài. Từ đó rút ra: $\varepsilon_z = \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0$.

Từ các giả thiết của Kirchhoff, chuyển vị $u(x,y,z)$, $v(x,y,z)$, biến dạng, ứng suất, nội lực được xác định qua chuyển vị $w(x,y)$ và bài toán 03 chiều trở thành bài toán 02 chiều.

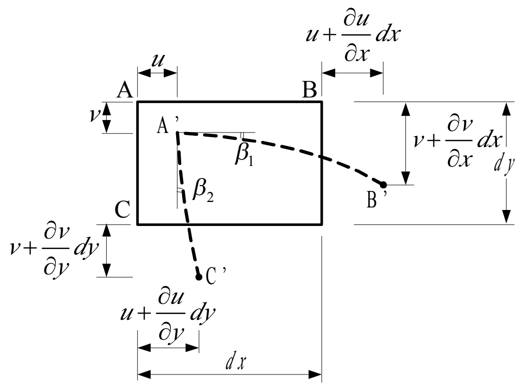
1.1.2. Các phương trình cơ bản

Nói chung, bài toán cơ học được giải trên cơ sở 3 nhóm phương trình cơ bản: hình học, vật lý, cân bằng kết hợp với điều kiện biên.

- Nhóm phương trình hình học biểu thị quan hệ giữa biến dạng và chuyển vị.
- Nhóm phương trình vật lý biểu thị quan hệ giữa biến dạng và ứng suất.
- Nhóm phương trình cân bằng biểu thị điều kiện cân bằng (tĩnh, động) của phân tố hoặc toàn hệ.

1. Phương trình hình học

Xét tấm mỏng có chiều dày h=const, vật liệu đàn hồi tuyến tính. Tách từ tấm một phân tố VCB có các cạnh dx, dy, hình 1-2.



Hình 1-2. *Biến dạng của phân tố tấm*

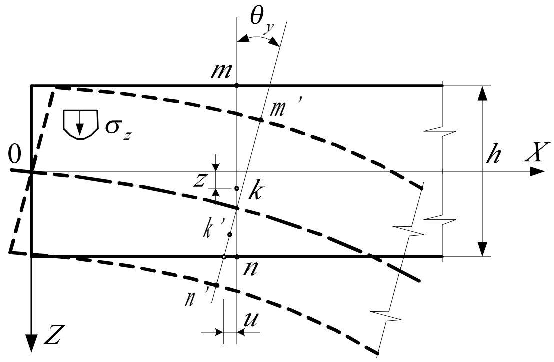
Theo lý thuyết đàn hồi và giả thiết 3, $\varepsilon_z = \dfrac{\partial w(x,y,z)}{\partial z} = 0$ nên theo chiều dầy tấm:

$$w(x,y,z) = w(x,y) = const \qquad (1.1)$$

Từ giả thiết 2 và 3, chuyển vị $u(x,y,z)$, $v(x,y,z)$ tại điểm K bất kỳ cách mặt trung bình khoảng cách z được biểu diễn qua chuyển vị $w(x,y)$, hình 1-3, có dạng:

$$u(x,y,z) = -z.\frac{\partial w(x,y)}{\partial x} = -z\theta_y \qquad (1.2)$$

$$v(x,y,z) = -z.\frac{\partial w(x,y)}{\partial y} = -z\theta_x \qquad (1.3)$$



Hình 1-3. *Xác định chuyển vị ngang qua chuyển vị pháp tuyến*

Từ lý thuyết đàn hồi, các thành phần biến dạng của tấm được xác định theo công thức:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u(x,y,z)}{\partial x} = -z.\frac{\partial^2 w(x,y)}{\partial x^2} = zk_x \qquad (1.4)$$

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v(x,y,z)}{\partial y} = -z.\frac{\partial^2 w(x,y)}{\partial y^2} = zk_y \qquad (1.5)$$

$$\gamma_{xy} = \beta_1 + \beta_2 = \frac{\partial u(x,y,z)}{\partial y} + \frac{\partial v(x,y,z)}{\partial x} = -2z.\frac{\partial w^2(x,y)}{\partial x \partial y} = zk_{xy} \qquad (1.6)$$

trong đó, k_x, k_y và k_{xy} là độ cong uốn và độ cong xoắn.

$$k_x = -\frac{\partial^2 w(x,y)}{\partial x^2};\ k_y = -\frac{\partial^2 w(x,y)}{\partial y^2};\ k_{xy} = -2\frac{\partial^2 w(x,y)}{\partial x \partial y} \qquad (1.7)$$

2. Phương trình vật lý

Các thành phần ứng suất của tấm được xác định theo lý thuyết đàn hồi với các thành phần biến dạng xác định theo (1.4 ÷ 1.6), hình 1-4:

$$\sigma_x = \frac{E}{1-\mu^2}\left(\varepsilon_x + \mu\varepsilon_y\right) = -\frac{E.z}{1-\mu^2}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) \qquad (1.8)$$

$$\sigma_y = \frac{E}{1-\mu^2}\left(\varepsilon_y + \mu\varepsilon_x\right) = -\frac{E.z}{1-\mu^2}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \mu\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right) \qquad (1.9)$$

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = G\gamma_{xy} = -\frac{Ez}{(1+\mu)}\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \qquad (1.10)$$

trong đó:

E - mô đun đàn hồi của vật liệu;

μ - hệ số Poisson;

G - mô đun trượt của vật liệu: $\qquad G = \dfrac{E}{2(1+\mu)} \qquad (1.11)$

Trong tính toán kết cấu công trình thường xác định nội lực thay cho xác định ứng suất. Nội lực kết cấu tấm bao gồm: mô men uốn M_x, M_y, mô men xoắn M_{xy}, lực cắt Q_x, Q_y. Nội lực phân bố trên một đơn vị chiều dài, được xác định qua ứng suất bằng các công thức, hình 1-5:

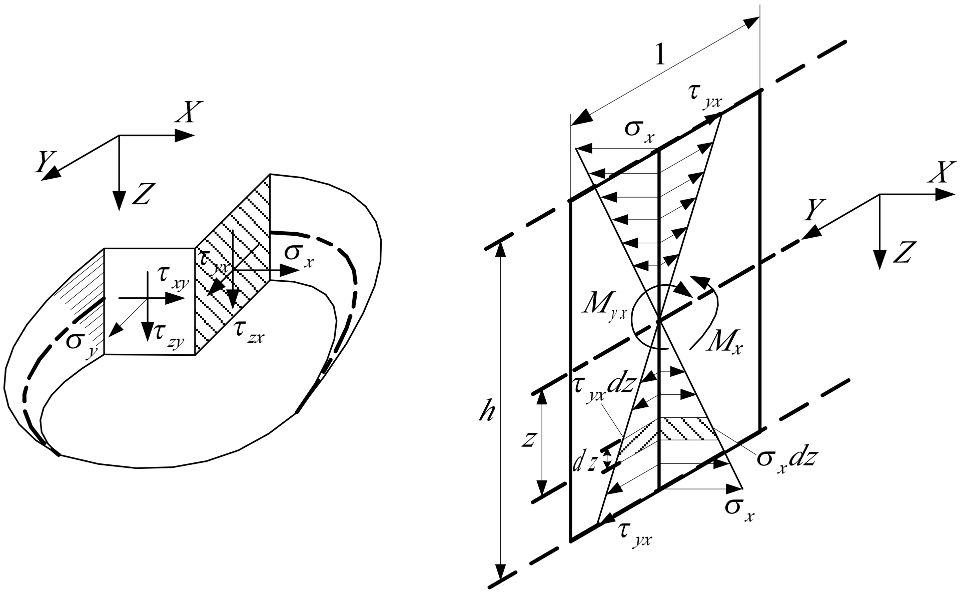
$$M_x = \int_{-h/2}^{h/2} z.\sigma_x dz = -D_p\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) \qquad (1.12)$$

$$M_y = \int_{-h/2}^{h/2} z.\sigma_y dz = -D_p\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \mu\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right) \qquad (1.13)$$

$$M_{xy} = M_{yx} = \int_{-h/2}^{h/2} z.\tau_{xy} dz = -D_p(1-\mu)\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \qquad (1.14)$$

trong đó, D_p là độ cứng trụ:

$$D_p = \frac{E.h^3}{12\left(1-\mu^2\right)} \quad (h \text{ là chiều dày tấm}) \tag{1.15}$$



Hình 1-4 và 1-5. *Các thành phần ứng suất và mô men của tấm*

Biểu diễn mô men uốn và mô men xoắn $(1.12 \div 1.14)$ dưới dạng ma trận qua độ cong uốn và độ cong xoắn:

$$\{M\} = \left[C_f\right]\{k_c\} \tag{1.16}$$

trong đó:

$$\{M\} = \left\{M_x \quad M_y \quad M_{xy}\right\}^T \tag{1.17}$$

$$\{k_c\} = \left\{k_x \quad k_y \quad k_{xy}\right\}^T \tag{1.18}$$

$$\left[C_f\right] = \frac{Eh^3}{12\left(1-\mu^2\right)}\begin{bmatrix} 1 & \mu & 0 \\ \mu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\mu}{2} \end{bmatrix} = D_p\begin{bmatrix} 1 & \mu & 0 \\ \mu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\mu}{2} \end{bmatrix} \tag{1.19}$$

Lực cắt Q_x, Q_y là hợp lực của ứng suất τ_{zx}, τ_{zy} được xác định từ điều kiện cân bằng. Các thành phần nội lực của tấm được biểu diễn trên hình 1-6. Khi biết nội lực có thể xác định các thành phần ứng suất theo các công thức sau:

$$\sigma_{x,max} = \pm\frac{6M_x}{h^2};\sigma_{y,max} = \pm\frac{6M_y}{h^2};\ \tau_{xy,max} = \pm\frac{6M_{xy}}{h^2};\ \tau_{zx,max} = \frac{3Q_x}{2h};\ \tau_{zy,max} = \frac{3Q_y}{2h}$$

(Với giả thiết ứng suất tiếp τ_{zx}, τ_{zy} phân bố theo qui luật parabon theo chiều dày tấm).

3. Phương trình cân bằng

Xét cân bằng của phân tố tấm dưới tác dụng của các thành phần nội lực và ngoại lực phân bố $q(x,y)$, hình 1-6.

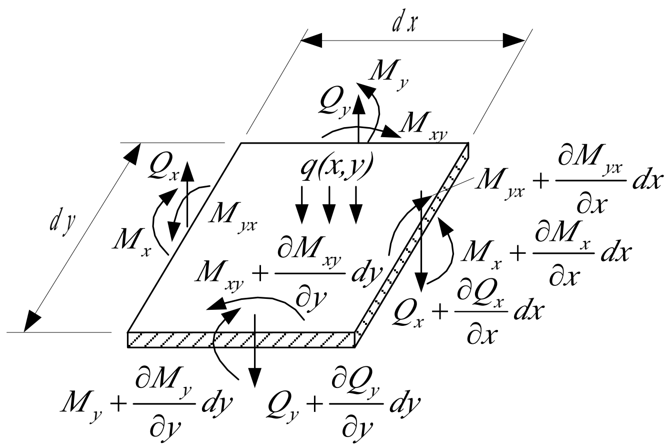
Chiếu các lực lên trục OZ và giản ước cho $dxdy$:

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x}+\frac{\partial Q_y}{\partial y}+q(x,y)=0 \tag{1.20}$$

Lấy tổng mô men đối với trục x, y và bỏ qua các đại lượng VCB bậc cao, giản ước cho $dxdy$:

$$-\frac{\partial M_x}{\partial x}-\frac{\partial M_{xy}}{\partial y}+Q_x=0 \tag{1.21}$$

$$-\frac{\partial M_y}{\partial y}-\frac{\partial M_{xy}}{\partial x}+Q_y=0 \tag{1.22}$$



Hình 1-6. *Các thành phần nội lực của tấm*

Từ $(1.21 \div 1.22)$ và kết hợp với mô men uốn và mô men xoắn biểu diễn qua chuyển vị $w(x,y)$ theo $(1.12 \div 1.14)$, lực cắt Q_x, Q_y được xác định bằng công thức:

$$Q_x=-D_p\frac{\partial}{\partial x}\nabla^2 w(x,y); \tag{1.23}$$

$$Q_y=-D_p\frac{\partial}{\partial y}\nabla^2 w(x,y) \tag{1.24}$$

với ∇^2 là toán tử Laplat:

$$\nabla^2=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2} \tag{1.25}$$

Thay (1.23), (1.24) vào (1.20) và chú ý đến $(1.12 \div 1.14)$, phương trình cân bằng của tấm có dạng:

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} = \frac{q(x,y)}{D_p} \quad (1.26)$$

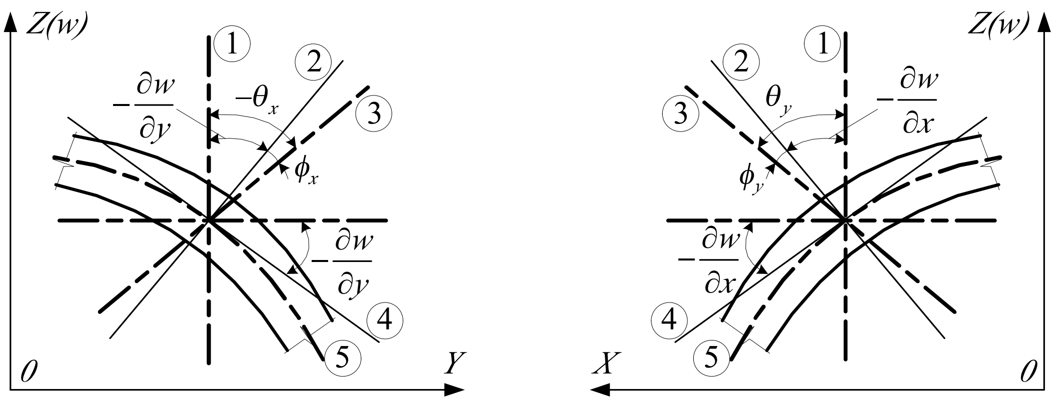
Phương trình này gọi là phương trình Sophi-Giecman.

1.2. TÍNH TẤM CHỊU UỐN THEO GIẢ THIẾT MINDLIN

1.2.1. Góc xoay có kể đến biến dạng cắt

Khi tính tấm chịu uốn theo lý thuyết Kirchhoff đã bỏ qua biến dạng cắt, $\gamma_{zx} = \gamma_{zy} = 0$. Khi tính tấm dầy hoặc tấm nhiều lớp, cần phải kể đến biến dạng cắt này.

Giả thiết của Mindlin khác với giả thiết Kirchhoff là phần tử thẳng m-n vuông góc với mặt phẳng trung bình trước biến dạng thì sau biến dạng không nhất thiết phải vuông góc với mặt phẳng trung bình và góc xoay θ_x, θ_y được bổ sung một lượng bằng góc xoay của pháp tuyến quanh các trục x và y là ϕ_x và ϕ_y do lực cắt gây ra, hình 1-7.



Hình 1-7. *Góc xoay pháp tuyến*

1- Đường thẳng đứng; 2. Đường pháp tuyến sau biến dạng

3. Đường thẳng nghiêng kể đến biến dạng cắt

4. Tiếp tuyến với mặt trung bình; 5. Mặt trung bình

$$\theta_y = -\frac{\partial w}{\partial x} + \phi_y \quad (1.27)$$

$$-\theta_x = -\frac{\partial w}{\partial y} + \phi_x \quad (1.28)$$

Từ $(1.27 \div 1.28)$, góc xoay của các pháp tuyến:

$$\phi_y = \theta_y + \frac{\partial w}{\partial x} \quad (1.29)$$

$$\phi_x = -\theta_x + \frac{\partial w}{\partial y} \tag{1.30}$$

1.2.2. Biểu thức nội lực

Ứng suất tiếp τ_{zx} và τ_{zy} gây ra do biến dạng cắt ϕ_x, ϕ_y đối với tấm đẳng hướng xác định bằng công thức:

$$\begin{Bmatrix} \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{Bmatrix} = \frac{E}{2(1+\mu)} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \phi_y \\ \phi_x \end{Bmatrix} \tag{1.31}$$

Lực cắt Q_x, Q_y được xác định bằng công thức:

$$Q_x = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xz} dz \qquad Q_y = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{yz} dz \tag{1.32}$$

dưới dạng ma trận:

$$\begin{Bmatrix} Q_x \\ Q_y \end{Bmatrix} = \frac{Eh\alpha}{2(1+\mu)} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \phi_y \\ \phi_x \end{Bmatrix} \tag{1.33}$$

hay

$$\{Q\} = [C_s]\{\phi\} \tag{1.34}$$

trong đó:

$$\{Q\} = \{Q_x \quad Q_y\}^T \tag{1.35}$$

$$\{\phi\} = \{\phi_y \quad \phi_x\}^T \tag{1.36}$$

$$[C_s] = \frac{Eh\alpha}{2(1+\mu)} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{1.37}$$

Với α là hệ số hiệu chỉnh biểu thị sự chống vênh của mặt cắt ngang, thường α lấy bằng 5/6 nhưng cũng có thể lấy từ giá trị 2/3 đối với mặt cắt không có khả năng chống vênh đến giá trị 1 đối với mặt cắt hoàn toàn có khả năng chống vênh.

Nội lực mô men uốn M_x, M_y, mô men xoắn M_{xy} và lực cắt Q_x, Q_y được xác định dưới dạng tổ hợp (1.38).

$$\begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \\ -- \\ Q_x \\ Q_y \end{Bmatrix} = \left[\begin{array}{c|c} \dfrac{Eh^3}{12(1-\mu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \mu & 0 \\ \mu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1-\mu)/2 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \hline \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} & \dfrac{Eh}{2(1+\mu)} \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha \end{bmatrix} \end{array} \right] \begin{Bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \\ -- \\ \phi_y \\ \phi_x \end{Bmatrix} \tag{1.38}$$

hay: $$\begin{Bmatrix} \{M\} \\ \{Q\} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [C_f] & [0] \\ [0] & [C_s] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{k_c\} \\ \{\phi\} \end{Bmatrix} \tag{1.39}$$

trong đó ϕ_x, ϕ_y xác định theo $(1.29 \div 1.30)$ và k_x, k_y, k_{xy} xác định theo công thức:

$$k_x = \frac{\partial \theta_y}{\partial x} \qquad k_y = -\frac{\partial \theta_x}{\partial y} \qquad k_{xy} = \frac{\partial \theta_y}{\partial y} - \frac{\partial \theta_x}{\partial x} \tag{1.40}$$

với θ_y, θ_x xác định theo (1.27), (1.28).

Có thể biểu diễn $(1.38 \div 1.39)$ tương tự như quan hệ ứng suất - biến dạng:

$$\{\sigma\}_p = [C]_p \{\varepsilon\}_p \tag{1.41}$$

trong đó:

$$\{\sigma\}_p = \{M_x \quad M_y \quad M_{xy} \quad Q_x \quad Q_y\}^T \tag{1.42}$$

$$[C]_p = \begin{bmatrix} [C_f] & [0] \\ [0] & [C]_s \end{bmatrix} \tag{1.43}$$

$$\{\varepsilon\}_p = \{k_x \quad k_y \quad k_{xy} \quad \phi_y \quad \phi_x\}^T \tag{1.44}$$

Biểu diễn $\{\varepsilon\}_p$ qua w, θ_x, θ_y

$$\{\varepsilon\}_p = \left\{ \frac{\partial \theta_y}{\partial x} \quad -\frac{\partial \theta_x}{\partial y} \quad \frac{\partial \theta_y}{\partial y} - \frac{\partial \theta_x}{\partial x} \quad \theta_y + \frac{\partial w}{\partial x} \quad -\theta_x + \frac{\partial w}{\partial y} \right\}^T \tag{1.45}$$

1.3. ĐIỀU KIỆN BIÊN

1.3.1. Biên ngàm cứng

Điều kiện biên là chuyển vị và góc xoay bằng không.

- tại x=0 và x=a

$$w = 0 \text{ và } \frac{\partial w}{\partial x} = 0 \tag{1.46.a}$$

- tại y=0 và y=b

$$w = 0 \text{ và } \frac{\partial w}{\partial y} = 0 \tag{1.46.b}$$

1.3.2. Biên tựa khớp

Điều kiện biên là chuyển vị và mô men uốn bằng không.

- tại x=0 và x=a:

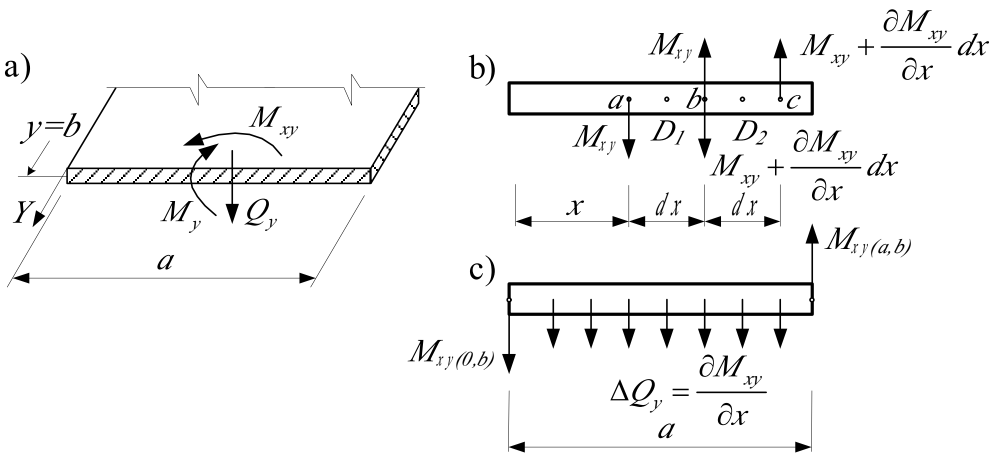
$$w = 0 \text{ và } M_x = -D_p\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \tag{1.47.a}$$

- tại y=0 và y=b :

$$w=0 \text{ và } M_y = -D_p\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \mu\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right) = \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0 \qquad (1.47.b)$$

1.3.3. Biên tự do

Thí dụ tại y=b là biên tự do, hình 1-8, nên mô men uốn M_y, mô men xoắn M_{xy}, lực cắt Q_y bằng không: $\left(M_y\right)_{y=b} = \left(M_{xy}\right)_{y=b} = \left(Q_y\right)_{y=b} = 0$



Hình 1-8. *Điều kiện biên tự do*

Song, phương trình vi phân mặt uốn của tấm (1.26) là phương trình vi phân cấp 4 nên chỉ cần 02 điều kiện biên trên mỗi cạnh là đủ xác định nghiệm. Kirchhoff đã gộp hai điều kiện biên M_{xy} và Q_y thành một điều kiện.

Trên biên tự do y=b lấy 03 điểm a, b, c với khoảng cách bằng dx. Tại D1 mô men xoắn là M_{xy}, tại D2 mô men xoắn là $M_{xy} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x}dx$ (D1 và D2 là điểm giữa của các đoạn ab và ac). Các mô men này có thể biểu diễn dưới dạng ngẫu lực với các lực tập trung ngược chiều nhau. Giá trị của các lực tập trung tại đầu các đoạn ab và bc là $T_1 = M_{xy}$ và $T_2 = M_{xy} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x}dx$.

Chiếu các lực tập trung tại điểm b lên phương OZ: $\Delta Q_y = T_2 - T_1 = \frac{\partial M_{xy}}{\partial x}dx$, vì ΔQ_y là lực tập trung nên sau khi chia cho dx được lực phân bố $\Delta Q_y = \frac{\partial M_{xy}}{\partial x}$.

Như vậy, điều kiện biên khi kết hợp Q_y và M_{xy}, (tương tự kết hợp Q_x và M_{xy}) có dạng:

- tại biên $x=0$ và $x=a$:

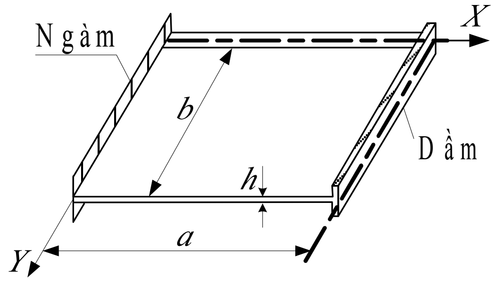
$$M_x = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0 \,;\; \bar{Q}_x = \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + (2-\mu)\frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} = 0 \qquad (1.48.a)$$

- tại biên $y=0$ và $y=b$:

$$M_y = \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \,;\; \bar{Q}_y = \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + (2-\mu)\frac{\partial^3 w}{\partial y \partial x^2} = 0 \qquad (1.48.b)$$

1.3.4. Biên tựa đàn hồi

Ví dụ dầm tại x=a đóng vai trò là biên tựa đàn hồi, hình 1-9. Điều kiện biên tương thích giữa dầm và tấm có dạng:



Hình 1-9. *Biên tựa đàn hồi*

1. Điều kiện biên thứ nhất

Độ võng của dầm bằng độ võng của tấm.

Độ võng của dầm gây ra do tải trọng phân bố là lực cắt tương đương $\bar{Q}_x$ của tấm. Do vậy:

$$EJ\frac{\partial^4 w}{\partial y^4}\bigg|_{x=a} = D_p\left[\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + (2-\mu)\frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2}\right]_{x=a} \qquad (1.49.a)$$

2. Điều kiện biên thứ hai

Mô men xoắn của dầm bằng mô men uốn M_x của tấm.

$$-GJ_p\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\right)_{x=a} = D_p\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)_{x=a} \qquad (1.49.b)$$

Nếu dầm không chịu xoắn:

$$M_x = D_p\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)_{x=a} = 0 \qquad (1.49.c)$$

1.4. THẾ NĂNG TOÀN PHẦN CỦA TẤM CHỊU UỐN

Thế năng toàn phần Π của tấm chịu uốn bằng tổng thế năng biến dạng của nội lực U và thế năng ngoại lực khi hệ chuyển từ trạng thái ban đầu không biến dạng sang trạng thái biến dạng.

$$\Pi = U - \iint q.w.dxdy \qquad (1.50)$$

Thế năng của ngoại lực được đo bằng công của ngoại lực. Công của ngoại lực luôn âm (có xu hướng ngăn cản biến dạng, đưa hệ về trạng thái cân bằng)

bằng tích của ngoại lực với chuyển vị của các điểm đặt lực tương ứng.

Thế năng biến dạng của nội lực U được đo bằng công của nội lực. Công nội lực luôn luôn dương, bằng nửa tích của nội lực (ứng suất) trên chuyển vị (biến dạng) tương ứng.

Khi kể đến biến dạng trượt:

$$U = U_b + U_s \tag{1.51}$$

trong đó:

U_b - năng lượng do biến dạng uốn.

U_s - năng lượng do biến dạng cắt.

Năng lượng U_s của tấm đẳng hướng do biến dạng cắt được xác định bằng công thức [12]:

$$U_s = \frac{Eh^3}{24\left(1-\mu^2\right)} \frac{6\alpha\left(1-\mu\right)}{h^2} \iint\limits_S \left[\left(\frac{\partial w}{\partial x} + \theta_y \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \theta_x \right)^2 \right] dxdy \tag{1.52}$$

Năng lượng biến dạng chịu uốn của tấm đẳng hướng được xác định bằng công thức [12]:

$$U_b = \frac{Eh^3}{24\left(1-\mu^2\right)} \iint\limits_S \left\{ \left(\frac{\partial \theta_x}{\partial x} \right)^2 + 2\mu \left(\frac{\partial \theta_x}{\partial x} \right)\left(\frac{\partial \theta_y}{\partial y} \right) + \left(\frac{\partial \theta_y}{\partial y} \right)^2 + \frac{\left(1-\mu\right)}{2} \left(\frac{\partial \theta_x}{\partial y} + \frac{\partial \theta_y}{\partial x} \right)^2 \right\} dxdy \tag{1.53}$$

Nếu biểu diễn năng lượng biến dạng qua nội lực:

$$U = \frac{1}{2} \iint\limits_S \left(\left\{ M \right\}^T \left\{ k_c \right\} + \left\{ Q \right\}^T \left\{ \phi \right\} \right) dxdy \tag{1.54.a}$$

thay (1.38) vào (1.54.a):

$$U = \frac{1}{2} \iint\limits_S \left(\left\{ k_c \right\}^T \left[C_f \right] \left\{ k_c \right\} + \left\{ \phi \right\}^T \left[C_s \right] \left\{ \phi \right\} \right) dxdy \tag{1.54.b}$$

Theo [17], thế năng toàn phần của tấm chỉ xét đến biến dạng uốn:

$$\Pi = \int_0^a \int_0^b \left\{ \frac{D_p}{2} \left\langle \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 - 2\left(1-\mu\right) \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] \right\rangle - q\left(x,y\right) w\left(x,y\right) \right\} dxdy \tag{1.55}$$