Chương 3
TÍNH TẤM BẰNG PHƯƠNG PHÁP PHẦN TỬ HỮU HẠN

Phương pháp phần tử hữu hạn (PP PTHH) là phương pháp số với việc rời rạc hóa kết cấu thực thành một số hữu hạn các phần tử có kích thước hữu hạn liên kết với nhau tại các điểm nút. PP PTHH mô hình chuyển vị, ẩn số cần tìm là chuyển vị nút. Nội lực của phần tử được xác định qua chuyển vị nút.

Trong chương này trình bày PP PTHH giải bài toán tấm chịu uốn với các kiểu phần tử:

- Phần tử tấm không tương thích tam giác 03 nút, 09 chuyển vị nút.
- Phần tử tấm không tương thích chữ nhật 04 nút, 12 chuyển vị nút.
- Phần tử tấm đồng tham số tứ giác 04 nút, 12 chuyển vị nút.
- Phần tử tấm chữ nhật 04 nút, 16 chuyển vị nút trên nền biến dạng đàn hồi cục bộ 02 hệ số.

3.1. PHẦN TỬ TẤM KHÔNG TƯƠNG THÍCH KIỂU TAM GIÁC 03 NÚT

Xét phần tử tấm mỏng không tương thích kiểu tam giác 03 nút theo giả thiết Kirchhoff, hình 3-1. Tại mỗi nút có 03 thành phần chuyển vị, ví dụ tại nút i ($i = 1 \div 3$): chuyển vị pháp tuyến w_i và các chuyển vị xoay quanh trục x và y $\theta_{xi} = \left(\dfrac{\partial w}{\partial y}\right)_i$, $\theta_{yi} = \left(-\dfrac{\partial w}{\partial x}\right)_i$ nên véc tơ chuyển vị nút $\{q\}_e$ và véc tơ lực nút qui đổi $\{R\}_e$ của phần tử trong hệ tọa độ địa phương có dạng:

$$\{q\}_e = \left\{ w_1 \quad \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)_1 \quad \left(-\frac{\partial w}{\partial x}\right)_1 \quad w_2 \quad \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)_2 \quad \left(-\frac{\partial w}{\partial x}\right)_2 \quad w_3 \quad \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)_3 \quad \left(-\frac{\partial w}{\partial x}\right)_3 \right\}^T$$

$$\{q\}_e = \{q_1 \quad q_2 \quad q_3 \quad q_4 \quad q_5 \quad q_6 \quad q_7 \quad q_8 \quad q_9\}^T \qquad (3.1)$$

$$\{R\}_e = \{R_1 \quad R_2 \quad R_3 \quad R_4 \quad R_5 \quad R_6 \quad R_7 \quad R_8 \quad R_9\}^T \qquad (3.2)$$

3.1.1. Ma trận độ cứng $[K]_e$

Theo lý thuyết Kirchhoff khi tính tấm, đại lượng cần tìm là hàm chuyển vị $\{U\}_e = w(x,y)$. Do phần tử tấm kiểu tam giác 03 nút có 09 bậc tự do (chuyển vị nút) nên để đảm bảo tính đẳng hướng hình học, hàm chuyển vị được chọn theo tam giác Pascal có dạng:

$$w(x,y) = \alpha_1 + \alpha_2.x + \alpha_3 y + \alpha_4 x^2 + \alpha_5 xy + \alpha_6 y^2 + \alpha_7 x^3 + \alpha_8\left(x^2 y + xy^2\right) + \alpha_9 y^3 \qquad (3.3)$$

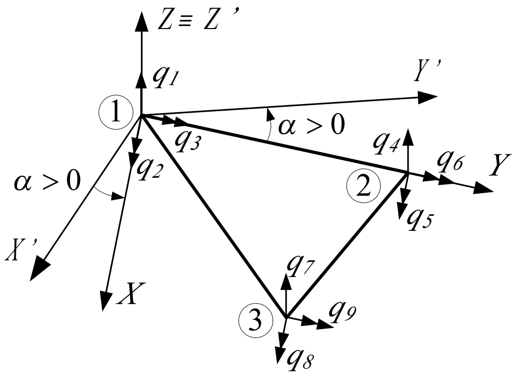
dưới dạng ma trận:

$$\{U\}_e = w(x,y) = \left[P(x,y)\right]\{\alpha\} \tag{3.4}$$

trong đó:

$$\left[P(x,y)\right] = \left[1 \quad x \quad y \quad x^2 \quad xy \quad y^2 \quad x^3 \quad \left(x^2y + xy^2\right) \quad y^3\right] \tag{3.5}$$

$$\{\alpha\} = \{\alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \alpha_3 \quad \alpha_4 \quad \alpha_5 \quad \alpha_6 \quad \alpha_7 \quad \alpha_8 \quad \alpha_9\}^T \tag{3.6}$$



Hình 3-1. *Phần tử tấm không tương thích kiểu tam giác 03 nút*

Để xác định ma trận hàm dạng $[B]_e$ cần biểu diễn $\{\alpha\}$ qua $\{q\}_e$. Ký hiệu x_i, y_i là tọa độ tại nút $i = 1 \div 3$. Các tham số α_j với $j = 1 \div 9$ được xác định từ điều kiện biên chuyển vị tại các nút của phần tử:

$$q_1 = w_1 = w(0,0) = \alpha_1; \quad q_2 = \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)_1 = \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)_{(0,0)} = \alpha_3;$$

$$q_3 = \left(-\frac{\partial w}{\partial x}\right)_1 = \left(-\frac{\partial w}{\partial x}\right)_{(0,0)} = -\alpha_2; \, q_4 = w_2 = w(0, y_2) = \alpha_1 + \alpha_3 y_2 + \alpha_6 y_2^2 + \alpha_9 y_2^3;$$

$$q_5 = \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)_2 = \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)_{(0,y_2)} = \alpha_3 + \alpha_6 2y_2 + \alpha_9 3y_2^2;$$

$$q_6 = \left(-\frac{\partial w}{\partial x}\right)_2 = \left(-\frac{\partial w}{\partial x}\right)_{(0,y_2)} = -\alpha_2 - \alpha_5 y_2 - \alpha_8 y_2^2$$

$$q_7 = w(x_3, y_3) = \alpha_1 + \alpha_2 x_3 + \alpha_3 y_3 + \alpha_4 x_3^2 + \alpha_5 x_3 y_3 + \alpha_6 y_3^2 + \alpha_7 x_3^3 + \alpha_8 (x_3^2 y_3 + x_3 y_3^2) + \alpha_9 y_3^3$$

$$q_8 = \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)_{(x_3,y_3)} = \alpha_3 + \alpha_5 x_3 + \alpha_6 2y_3 + \alpha_8 (x_3^2 + 2x_3 y_3) + \alpha_9 3y_3^2;$$

$$q_9 = \left(-\frac{\partial w}{\partial x}\right)_{(x_3,y_3)} = -\alpha_2 - \alpha_4 2x_3 - \alpha_5 y_3 - \alpha_7 3x_3^2 - \alpha_8 (2x_3 y_3 + y_3^2)$$

dưới dạng ma trận:

$$\{q\}_e = [A]\{\alpha\} \tag{3.7}$$

trong đó ma trận $[A]$ là ma trận hằng số có dạng:

$$[A]=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & y_2 & 0 & 0 & y_2^2 & 0 & 0 & y_2^3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2y_2 & 0 & 0 & 3y_2^2 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -y_2 & 0 & 0 & -y_2^2 & 0 \\ 1 & x_3 & y_3 & x_3^2 & x_3y_3 & y_3^2 & x_3^3 & x_3^2y_3+x_3y_3^2 & y_3^3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & x_3 & 2y_3 & 0 & x_3^2+2x_3y_3 & 3y_3^2 \\ 0 & -1 & 0 & -2x_3 & -y_3 & 0 & -3x_3^2 & -(2x_3y_3+y_3^2) & 0 \end{bmatrix} \tag{3.8}$$

Hàm chuyển vị $w(x,y)$ biểu diễn qua chuyển vị nút có dạng tổng quát:

$$\{U\}_e = \mathrm{w}(x,y) = [B]_e\{\mathrm{q}\}_e \tag{3.9}$$

Từ (3.9), chú ý đến (3.7) và (3.4):

$$\{U\}_e = w(x,y) = [B]_e\{q\}_e = [B]_e[A]\{\alpha\} = [P(x,y)]\{\alpha\}$$

rút ra ma trận hàm dạng $[B]_e$

$$[B]_e = [P(x,y)][A]^{-1} \tag{3.10}$$

Từ (3.7) và (3.4), hàm chuyển vị có dạng khác:

$$\{U\}_e = w(x,y) = [P(x,y)][A]^{-1}\{\mathrm{q}\}_e \tag{3.11}$$

Ma trận biến dạng-chuyển vị $[D]_e$ được xác định từ công thức tổng quát:

$$\{\varepsilon\}_e = [D]_e\{q\}_e.$$

Theo lý thuyết Kirchhoff, từ (1.4) $\div$ (1.6), véc tơ biến dạng:

$$\{\varepsilon\} = \{\varepsilon_x \quad \varepsilon_y \quad \gamma_{xy}\}^T = \left\{-z\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad -z\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \quad -2z\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\right\}^T \tag{3.12}$$

Từ (3.11):

$$\{\varepsilon\} = -z\left\{\begin{matrix} \dfrac{\partial^2[P(x,y)]}{\partial x^2} \\ \dfrac{\partial^2[P(x,y)]}{\partial y^2} \\ 2\dfrac{\partial^2[P(x,y)]}{\partial x\partial y} \end{matrix}\right\}[A]^{-1}\{q\}_e = -z.[\bar{D}]_e[A]^{-1}\{q\}_e = [D]_e\{q\}_e \tag{3.13}$$

rút ra, ma trận biến dạng - chuyển vị $[D]_e$:

$$\left[D\right]_e = -z.\left[\bar{D}\right]_e\left[A\right]^{-1} \tag{3.14}$$

trong đó:

$$\left[\bar{D}\right]_e = \begin{Bmatrix} \dfrac{\partial^2\left[P(x,y)\right]}{\partial x^2} \\ \dfrac{\partial^2\left[P(x,y)\right]}{\partial y^2} \\ 2\dfrac{\partial^2\left[P(x,y)\right]}{\partial x\partial y} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 6x & 2y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 2x & 6y \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 4x+4y & 0 \end{bmatrix} \tag{3.15}$$

Ma trận độ cứng $\left[K\right]_e$ của phần tử trong hệ tọa độ địa phương được xác định theo công thức tổng quát:

$$\left[K\right]_e = \int_V \left[D\right]_e^T\left[E_0\right]_e\left[D\right]_e dV$$

với $\left[E_o\right]_e$ là ma trận đàn hồi của phần tử trong trạng thái ứng suất phẳng:

$$\left[E_0\right]_e = \frac{E}{2\left(1-\mu^2\right)}\begin{bmatrix} 2 & 2\mu & 0 \\ 2\mu & 2 & 0 \\ 0 & 0 & \left(1-\mu\right) \end{bmatrix} \tag{3.16}$$

Thay (3.14) vào công thức xác định $\left[K\right]_e$:

$$\left[K\right]_e = \int_{-h/2}^{h/2} z^2 dz \int_S \left(\left[A\right]^{-1}\right)^T\left[\bar{D}\right]_e^T\left[E_o\right]_e\left[\bar{D}\right]_e\left[A\right]^{-1} dS$$

Vì $\left[A\right]$ là ma trận hằng số nên đưa ra ngoài dấu tích phân

$$\left[K\right]_e = \frac{h^3}{12}\left(\left[A\right]^{-1}\right)^T\left(\int_S\left[\bar{D}\right]_e^T\left[E_o\right]_e\left[\bar{D}\right]_e dS\right)\left[A\right]^{-1}$$

hay dưới dạng ngắn gọn:

$$\left[K\right]_e = \left(\left[A\right]^{-1}\right)^T\left[TG\right]\left[A\right]^{-1} \tag{3.17}$$

trong đó: $$\left[TG\right] = \int_S\left[\bar{D}\right]_e^T\left[E\right]_t\left[\bar{D}\right]_e dS \tag{3.18}$$

Với ma trận $\left[E\right]_t$ là ma trận các hệ số đàn hồi của tấm chịu uốn.

$$\left[E\right]_t = \left[C_f\right] = D_p\begin{bmatrix} 1 & \mu & 0 \\ \mu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{1-\mu}{2} \end{bmatrix} \tag{3.19}$$

D_p là độ cứng trụ xác định theo (1.15).

3.1.2. Ma trận khối lượng $[M]_e$

Ma trận khối lượng $[M]_e$ của phần tử trong hệ tọa độ địa phương được xác định bằng công thức tổng quát:

$$[M]_e = \int_V \rho [B]_e^T [B]_e dV = \int_{-h/2}^{h/2} dz \int_S [B]_e^T \rho [B]_e dxdy = h\int_S \rho [B]_e^T [B]_e dxdy \quad (3.20)$$

trong đó

ρ - khối lượng vật liệu phần tử trên một đơn vị thể tích;

$[B]_e$ - ma trận hàm dạng xác định theo (3.10).

3.1.3. Véc tơ lực nút qui đổi $\{R\}_e$

Trong trường hợp phần tử chịu tác dụng của tải trọng phân bố có cường độ p, được qui ước dương nếu cùng chiều với trục OZ của hệ tọa độ địa phương, véc tơ lực nút qui đổi $\{R\}_e$ trong hệ tọa độ địa phương được xác định bằng công thức tổng quát:

$$\{R\}_e = \int_S [B]_e^T p dS \quad (3.21)$$

trong đó

$$\{R\}_e = \{P_{z1} \quad M_{x1} \quad M_{y1} \quad P_{z2} \quad M_{x2} \quad M_{y2} \quad P_{z3} \quad M_{x3} \quad M_{y3}\}^T \quad (3.22)$$

với:

P_{zi} - lực tập trung tại nút i với $i = 1 \div 3$.

M_{xi}, M_{yi} - mô men tập trung quay quanh trục x, trục y tại nút i.

3.1.4. Ma trận chuyển toạ độ $[T]_e$

Đối với phần tử tam giác, thường hệ tọa độ địa phương không trùng với hệ tọa độ chung nên phải chuyển ma trận độ cứng $[K]_e$, ma trận khối lượng $[M]_e$, véc tơ lực nút qui đổi $\{R\}_e$ của phần tử trong hệ tọa độ địa phương sang hệ tọa độ chung qua ma trận chuyển tọa độ $[T]_e$.

$$[T]_e = \begin{bmatrix} [L] & [0] & [0] \\ [0] & [L] & [0] \\ [0] & [0] & [L] \end{bmatrix} \quad (3.23)$$

trong đó, $[L]$ là ma trận cô sin chỉ phương giữa hệ toạ độ chung và hệ toạ độ địa phương. Do trục Oz và O'z' cùng phương, cùng chiều và theo thứ tự sắp xếp chuyển vị tại nút, ma trận cô sin chỉ phương $[L]$ có dạng (3.24). Góc α giữa trục OX (hệ tọa độ địa phương) và trục O'X' (hệ tọa độ chung), được qui ước là dương nếu quay ngược chiều kim đồng hồ, hình 3-1.

$$[L]=\begin{bmatrix} n_{z,z'} & l_{z,x'} & m_{z,y'} \\ n_{x,z'} & l_{x,x'} & m_{x,y'} \\ n_{y,z'} & l_{y,x'} & m_{y,y'} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} cos(z,z') & cos(z,x') & cos(z,y') \\ cos(x,z') & cos(x,x') & cos(x,y') \\ cos(y,z') & cos(y,x') & cos(y,y') \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & cos\alpha & sin\alpha \\ 0 & -sin\alpha & cos\alpha \end{bmatrix} \tag{3.24}$$

3.1.5. Xác định nội lực

Mô men tại điểm bất kỳ trong phần tử xét trong hệ tọa độ địa phương được xác định theo công thức $(1.12 \div 1.14)$. Từ (3.11):

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}=\frac{\partial^2\left[P(x,y)\right]}{\partial x^2}[A]^{-1}\{q\}_e=[P_x][A]^{-1}\{q\}_e \tag{3.25}$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}=\frac{\partial^2\left[P(x,y)\right]}{\partial y^2}[A]^{-1}\{q\}_e=\left[P_y\right][A]^{-1}\{q\}_e \tag{3.26}$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2\left[P(x,y)\right]}{\partial x\partial y}[A]^{-1}\{q\}_e=\left[P_{xy}\right][A]^{-1}\{q\}_e \tag{3.27}$$

trong đó:

$$[P_x]=[0 \quad 0 \quad 0 \quad 2 \quad 0 \quad 0 \quad 6x \quad 2y \quad 0] \tag{3.28}$$

$$\left[P_y\right]=[0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 2 \quad 0 \quad 2x \quad 6y] \tag{3.29}$$

$$\left[P_{xy}\right]=[0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 2x+2y \quad 0] \tag{3.30}$$

Thay vào công thức xác định nội lực theo $(1.12 \div 1.14)$:

$$M_x=-D_p\left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\mu\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right]=D_p\left([P_x]+\mu\left[P_y\right]\right)[A]^{-1}\{q\}_e \tag{3.31}$$

$$M_y=-D_p\left[\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\mu\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right]=D_p\left(\left[P_y\right]+\mu[P_x]\right)[A]^{-1}\{q\}_e \tag{3.32}$$

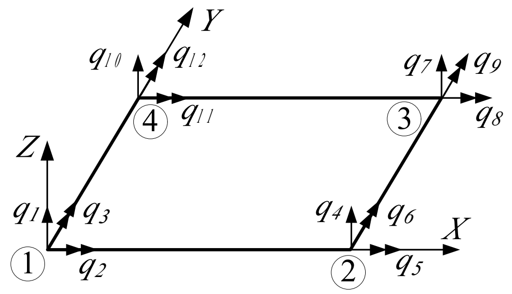
$$M_{xy}=-D_p(1-\mu)\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}=-D_p(1-\mu)\left[P_{xy}\right][A]^{-1}\{q\}_e \tag{3.33}$$

3.2. PHẦN TỬ TẤM KHÔNG TƯƠNG THÍCH KIỂU CHỮ NHẬT 04 NÚT

Xét phần tử tấm mỏng không tương thích kiểu chữ nhật 04 nút theo lý thuyết Kirchhoff, hình 3-2. Tại mỗi nút có 3 thành phần chuyển vị, ví dụ tại nút i ($i=1\div 4$): chuyển vị pháp tuyến w_i và các chuyển vị xoay quanh trục x và y, θ_{xi}, θ_{yi}.

Góc xoay tại điểm bất kỳ trong phần tử quanh trục x và trục y xác định theo công thức:

$$\theta_x = \frac{\partial w}{\partial y} \qquad \theta_y = -\frac{\partial w}{\partial x} \tag{3.34}$$



Hình 3-2. *Phần tử tấm không tương thích kiểu chữ nhật 04 nút*

Véc tơ chuyển vị nút và véc tơ lực nút của phần tử trong hệ tọa độ địa phương:

$$\{q\}_e = \{q_1 \quad q_2 \quad q_3 \quad q_4 \quad q_5 \quad q_6 \quad q_7 \quad q_8 \quad q_9 \quad q_{10} \quad q_{11} \quad q_{12}\}^T \tag{3.35.a}$$

$$\{q\}_e = \{w_1 \quad \theta_{x1} \quad \theta_{y1} \quad w_2 \quad \theta_{x2} \quad \theta_{y2} \quad w_3 \quad \theta_{x3} \quad \theta_{y3} \quad w_4 \quad \theta_{x4} \quad \theta_{y4}\}^T \tag{3.35.b}$$

$$\{R\}_e = \{R_1 \quad R_2 \quad R_3 \quad R_4 \quad R_5 \quad R_6 \quad R_7 \quad R_8 \quad R_9 \quad R_{10} \quad R_{11} \quad R_{12}\}^T \tag{3.36}$$

3.2.1. Ma trận độ cứng $[K]_e$

Hàm chuyển vị của phần tử được xấp xỉ dưới dạng đa thức, theo tam giác Pascal :

$$\{U\}_e = w(x,y) = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 x^2 + \alpha_5 xy + \alpha_6 y^2 + \alpha_7 x^3 + \alpha_8 x^2 y + \alpha_9 xy^2 + \\ + \alpha_{10} y^3 + \alpha_{11} x^3 y + \alpha_{12} xy^3 \tag{3.37}$$

dưới dạng ma trận:

$$\{U\}_e = w(x,y) = [P(x,y)]\{\alpha\} = [B]_e \{q\}_e \tag{3.38.a}$$

trong đó:

$[B]_e$ - ma trận hàm dạng

$$[P(x,y)] = [1 \quad x \quad y \quad x^2 \quad xy \quad y^2 \quad x^3 \quad x^2 y \quad xy^2 \quad y^3 \quad x^3 y \quad xy^3] \tag{3.39}$$

$$\{\alpha\} = \{\alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \alpha_3 \quad \alpha_4 \quad \alpha_5 \quad \alpha_6 \quad \alpha_7 \quad \alpha_8 \quad \alpha_9 \quad \alpha_{10} \quad \alpha_{11} \quad \alpha_{12}\}^T \tag{3.40}$$

Để xác định ma trận $[B]_e$ sử dụng điều kiện biên chuyển vị tại các nút của phần tử, tương tự như đối với phần tử tam giác đã xét trong mục 3.1. Khi đó, từ (3.37) và (3.38.a), quan hệ giữa chuyển vị nút $\{q\}_e$ và $\{\alpha\}$ có dạng:

$$\{q\}_e = [A]\{\alpha\} \tag{3.41}$$

Để xác định ma trận $[A]$, cần xác định các đạo hàm riêng của chuyển vị w:

$$\frac{\partial w}{\partial y} = \alpha_3 + \alpha_5 x + \alpha_6 2y + \alpha_8 x^2 + \alpha_9 2xy + \alpha_{10} 3y^2 + \alpha_{11} x^3 + \alpha_{12} 3xy^2 \tag{1}$$

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \alpha_2 + \alpha_4 2x + \alpha_5 y + \alpha_7 3x^2 + \alpha_8 2xy + \alpha_9 y^2 + \alpha_{11} 3x^2 y + \alpha_{12} y^3 \tag{2}$$

Ma trận $[A]$ được xác định từ (3.41) với sử dụng (3.37), (3.34) và các đạo hàm riêng (1), (2) tại tọa độ (x, y) tại các nút. Ma trận $[A]$ có kích thước 12x12, với giá trị x_i, y_i tại nút i ($i = 1 \div 4$) có dạng (3.42) với phần tử tại các nút là liên kết hàn có dạng:

$$\begin{Bmatrix} w_1 \\ \theta_{x1} \\ \theta_{y1} \\ w_2 \\ \theta_{x2} \\ \theta_{y2} \\ w_3 \\ \theta_{x3} \\ \theta_{y3} \\ w_4 \\ \theta_{x4} \\ \theta_{y4} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & x_2 & 0 & x_2^2 & 0 & 0 & x_2^3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & x_2 & 0 & 0 & x_2^2 & 0 & 0 & x_2^3 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -2x_2 & 0 & 0 & -3x_2^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & x_3 & y_3 & x_3^2 & x_3y_3 & y_3^2 & x_3^3 & x_3^2y_3 & x_3y_3^2 & y_3^3 & x_3^3y_3 & x_3y_3^3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & x_3 & 2y_3 & 0 & x_3^2 & 2x_3y_3 & 3y_3^2 & x_3^3 & 3x_3y_3^2 \\ 0 & -1 & 0 & -2x_3 & -y_3 & 0 & -3x_3^2 & -2x_3y_3 & -y_3^2 & 0 & -3x_3^2y_3 & -y_3^3 \\ 1 & 0 & y_4 & 0 & 0 & y_4^2 & 0 & 0 & 0 & y_4^3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2y_4 & 0 & 0 & 0 & 3y_4^2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -y_4 & 0 & 0 & 0 & -y_4^2 & 0 & 0 & -y_4^3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \\ \alpha_5 \\ \alpha_6 \\ \alpha_7 \\ \alpha_8 \\ \alpha_9 \\ \alpha_{10} \\ \alpha_{11} \\ \alpha_{12} \end{Bmatrix} \tag{3.42}$$

Thay (3.41) vào (3.38.a)

$$[B]_e [A]\{\alpha\} = [P(x, y)]\{\alpha\}$$

rút ra

$$[B]_e = [P(x, y)][A]^{-1} \tag{3.43}$$

Chú ý đến (3.38.a), hàm chuyển vị có dạng khác:

$$\{U\}_e = w(x, y) = [B]_e \{q\}_e = [P(x, y)][A]^{-1}\{q\}_e \tag{3.38.b}$$

Quan hệ biến dạng-chuyển vị nút, theo PP PTHH có dạng tổng quát:

$$\{\varepsilon\}_e = [D]_e \{q\}_e \tag{3.44}$$

Từ quan hệ biến dạng - chuyển vị $(1.4) \div (1.6)$ và (3.38.a), (3.41):

$$\{\varepsilon\}_e = -z\begin{bmatrix} \dfrac{\partial^2\left[P(x,y)\right]}{\partial x^2} \\ \dfrac{\partial^2\left[P(x,y)\right]}{\partial y^2} \\ 2\dfrac{\partial^2\left[P(x,y)\right]}{\partial x\partial y} \end{bmatrix}\{\alpha\} = [D]_e[A]\{\alpha\}$$

rút ra,

$$[D]_e = -z\begin{bmatrix} \dfrac{\partial^2\left[P(x,y)\right]}{\partial x^2} \\ \dfrac{\partial^2\left[P(x,y)\right]}{\partial y^2} \\ 2\dfrac{\partial^2\left[P(x,y)\right]}{\partial x\partial y} \end{bmatrix}[A]^{-1} = -z\left[\overline{D}\right]_e \qquad (3.45)$$

$$\left[\overline{D}\right]_e = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial^2\left[P(x,y)\right]}{\partial x^2} \\ \dfrac{\partial^2\left[P(x,y)\right]}{\partial y^2} \\ 2\dfrac{\partial^2\left[P(x,y)\right]}{\partial x\partial y} \end{bmatrix}[A]^{-1} \qquad (3.46)$$

Ma trận độ cứng của phần tử xác định theo công thức tổng quát:

$$[K]_e = \int_V [D]_e^T [E_0]_e [D]_e \, dV$$

trong đó, ma trận $[E_o]_e$ là ma trận đặc trưng đàn hồi của vật liệu trong trạng thái ứng suất phẳng xác định theo (3.16).

Thay (3.45) vào công thức xác định $[K]_e$:

$$[K]_e = \int_{-h/2}^{h/2} z^2 dz \int_S \left[\overline{D}\right]_e^T [E_o]_e \left[\overline{D}\right]_e dxdy = \int_S \left[\overline{D}\right]_e^T [E_t] \left[\overline{D}\right]_e dxdy \qquad (3.47)$$

trong đó $[E_t]$ xác định theo (3.19).

Ma trận độ cứng $[K]_e$ của phần tử có kích thước 12x12, là ma trận đối xứng.

3.2.2. Ma trận khối lượng $[M]_e$

Ma trận khối lượng $[M]_e$ của phần tử trong hệ tọa độ địa phương được xác định theo công thức tổng quát:

$$[M]_e = \int_V [B]_e^T \rho [B]_e dV$$

Khai triển tích phân:

$$[M]_e = \int_{-h/2}^{h/2} dz \int_S [B]_e^T \rho [B]_e dxdy = h\int_S \rho [B]_e^T [B]_e dxdy \tag{3.48}$$

trong đó, $[B]_e$ xác định theo (3.43).

Ma trận khối lượng $[M]_e$ có kích thước 12x12, là ma trận đối xứng.

3.2.3. Véc tơ lực nút qui đổi $\{R\}_e$

Véc tơ lực nút qui đổi $\{R\}_e$ của phần tử trong hệ tọa độ địa phương được xác định bằng công thức tổng quát theo PP PTHH. Với tải trọng phân bố p:

$$\{R\}_e = \int_S [B]_e^T \{p\} dS$$

$$\{R\}_e = \{P_{z1} \quad M_{x1} \quad M_{y1} \quad P_{z2} \quad M_{x2} \quad M_{y2} \quad P_{z3} \quad M_{x3} \quad M_{y3} \quad P_{z4} \quad M_{x4} \quad M_{y4}\}^T \tag{3.49}$$

trong đó:

P_{zi} - lực nút tập trung tại nút i với $i = 1 \div 4$;

M_{xi}, M_{yi} - mô men tập trung quay quanh trục x, trục y tại nút i.

Trong trường hợp phần tử chịu tải trọng phân bố đều có cường độ p, có chiều dương hướng theo chiều trục OZ của hệ tọa độ địa phương, véc tơ lực nút qui đổi $\{R\}_e$ có dạng:

$$\{R\}_e = \frac{qab}{4}\left\{1 \quad \frac{b}{6} \quad -\frac{a}{6} \quad 1 \quad -\frac{b}{6} \quad \frac{a}{6} \quad 1 \quad -\frac{b}{6} \quad \frac{a}{6} \quad 1 \quad \frac{b}{6} \quad -\frac{a}{6}\right\}^T \tag{3.50}$$

Với a, b là chiều dài cạnh của phần tử dọc trục x và trục y.

3.2.4. Xác định nội lực

Mô men tại điểm bất kỳ trong phần tử xét trong hệ tọa độ địa phương được xác định theo công thức ($1.12 \div 1.14$). Tiến hành tương tự như đối với phần tử tam giác, từ (3.38.b):

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 [P(x,y)]}{\partial x^2}[A]^{-1}\{q\}_e = [P_x][A]^{-1}\{q\}_e \tag{3.51}$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 [P(x,y)]}{\partial y^2}[A]^{-1}\{q\}_e = [P_y][A]^{-1}\{q\}_e \tag{3.52}$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 \left[P(x,y) \right]}{\partial x \partial y} \left[A \right]^{-1} \{q\}_e = \left[P_{xy} \right] \left[A \right]^{-1} \{q\}_e \tag{3.53}$$

Thay vào $(1.12 \div 1.14)$

$$M_x = -D_p \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right] = D_p \left(\left[P_x \right] + \mu \left[P_y \right] \right) \left[A \right]^{-1} \{q\}_e \tag{3.54}$$

$$M_y = -D_p \left[\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right] = D_p \left(\left[P_y \right] + \mu \left[P_x \right] \right) \left[A \right]^{-1} \{q\}_e \tag{3.55}$$

$$M_{xy} = -D_p (1-\mu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = -D_p (1-\mu) \left[P_{xy} \right] \left[A \right]^{-1} \{q\}_e \tag{3.56}$$

Phần tử chữ nhật 04 nút với 16 thành phần chuyển vị nút được giới thiệu trong mục 3.4 - Tính tấm trên nền biến dạng đàn hồi cục bộ.

3.2.5. Phần tử có điều kiện biên tự do

Điều kiện biên tự do của tấm có dạng:

- tại biên $x = 0$ và $x = a$:

$$M_x = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0 \,;\; \bar{Q}_x = \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + (2-\mu) \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} = 0 \tag{1.48.a}$$

- tại biên $y = 0$ và $y = b$:

$$M_y = \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \,;\; \bar{Q}_y = \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + (2-\mu) \frac{\partial^3 w}{\partial y \partial x^2} = 0 \tag{1.48.b}$$

Mô men xoắn xác định theo công thức:

$$M_{xy} = M_{yx} = \int_{-h/2}^{h/2} z.\tau_{xy} dz = -D_p (1-\mu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \tag{1.14}$$

Xác định các đạo hàm riêng từ (1), (2):

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = \alpha_5 + \alpha_8 2x + \alpha_9 2y + \alpha_{11} 3x^2 + \alpha_{12} 3y^2 \tag{3}$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = \alpha_6 2 + \alpha_9 2x + \alpha_{10} 6y + \alpha_{12} 6xy \tag{4}$$

$$\frac{\partial^3 w}{\partial y^3} = \alpha_{10} 6 + \alpha_{12} 6x \tag{5}$$

$$\frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} = \alpha_9 2 + \alpha_{12} 6y \tag{6}$$

$$\frac{\partial^3 w}{\partial y \partial x^2} = \alpha_8 2 + \alpha_{11} 6x \tag{7}$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \alpha_4 2 + \alpha_7 6x + \alpha_8 2y + \alpha_{11} 6xy \tag{8}$$

$$\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} = \alpha_7 6 + \alpha_{11} 6y \tag{9}$$

Từ (1.48), (1.14), điều kiện biên tự do biểu diễn qua hệ số α_i, $(i = 1 \div 12)$ có dạng:

$$M_x = \alpha_4 2 + \alpha_6 2\mu + \alpha_7 6x + \alpha_8 2y + \alpha_9 2\mu x + \alpha_{10} 6\mu y + \alpha_{11} 6xy + \alpha_{12} 6\mu xy \tag{10}$$

$$\bar{Q}_x = \alpha_7 6 + \alpha_9 2(2-\mu) + \alpha_{11} 6y + \alpha_{12} 6(2-\mu) y \tag{11}$$

$$M_y = \alpha_4 2\mu + \alpha_6 2 + \alpha_7 6\mu x + \alpha_8 2\mu y + \alpha_9 2x + \alpha_{10} 6y + \alpha_{11} 6\mu xy + \alpha_{12} 6xy \tag{12}$$

$$\bar{Q}_y = \alpha_8 2(2-\mu) + \alpha_{10} 6 + \alpha_{11} 6(2-\mu) x + \alpha_{12} 6x \tag{13}$$

$$M_{xy} = -D_p (1-\mu)\left(\alpha_5 + \alpha_8 2x + \alpha_9 2y + \alpha_{11} 3x^2 + \alpha_{12} 3y^2\right) \tag{14}$$

Xét hai trường hợp:

1. Phần tử có 01 cạnh biên tự do.
2. Phần tử có 02 cạnh biên.

1. Phần tử có 01 cạnh biên tự do

Xét phần tử có 01 cạnh biên tự do, với nút 1 và 2 là nút biên tự do. Từ điều kiện biên tự do, véc tơ chuyển vị nút của phần tử để xác định ma trận $[A]$ có dạng:

$$\{q\} = \left\{\bar{Q}_{y1} \quad M_{y1} \quad \theta_{y1} \quad \bar{Q}_{y2} \quad M_{y2} \quad \theta_{y2} \quad w_3 \quad \theta_{x3} \quad \theta_{y3} \quad w_4 \quad \theta_{x4} \quad \theta_{y4}\right\}^T \tag{3.57}$$

Sử dụng (10) $\div$ (13), ma trận $[A]$ trong quan hệ (3.41) có dạng (3.58):

$$\begin{Bmatrix} \bar{Q}_{y1} \\ M_{y1} \\ \theta_{y1} \\ \bar{Q}_{y2} \\ M_{y2} \\ \theta_{y2} \\ w_3 \\ \theta_{x3} \\ \theta_{y3} \\ w_4 \\ \theta_{x4} \\ \theta_{y4} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2(2-\mu) & 0 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2\mu & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2(2-\mu) & 0 & 6 & 6(2-\mu)x_2 & 6x_2 \\ 0 & 0 & 0 & 2\mu & 0 & 2 & 6\mu x_2 & 0 & 2x_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -2x_2 & 0 & 0 & -3x_2^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & x_3 & y_3 & x_3^2 & x_3 y_3 & y_3^2 & x_3^3 & x_3^2 y_3 & x_3 y_3^2 & y_3^3 & x_3^3 y_3 & x_3 y_3^3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & x_3 & 2y_3 & 0 & x_3^2 & 2x_3 y_3 & 3y_3^2 & x_3^3 & 3x_3 y_3^2 \\ 0 & -1 & 0 & -2x_3 & -y_3 & 0 & -3x_3^2 & -2x_3 y_3 & -y_3^2 & 0 & -3x_3^2 y_3 & -y_3^3 \\ 1 & 0 & y_4 & 0 & 0 & y_4^2 & 0 & 0 & 0 & y_4^3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2y_4 & 0 & 0 & 0 & 3y_4^2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -y_4 & 0 & 0 & 0 & -y_4^2 & 0 & 0 & -y_4^3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \\ \alpha_5 \\ \alpha_6 \\ \alpha_7 \\ \alpha_8 \\ \alpha_9 \\ \alpha_{10} \\ \alpha_{11} \\ \alpha_{12} \end{Bmatrix} \tag{3.58}$$

Khai báo điều kiện biên tương ứng:

$$\{q\} = \{0 \quad 0 \quad \theta_{y1} \quad 0 \quad 0 \quad \theta_{y2} \quad w_3 \quad \theta_{x3} \quad \theta_{y3} \quad w_4 \quad \theta_{x4} \quad \theta_{y4}\}^T \tag{3.59}$$

2. Phần tử có 02 cạnh biên tự do

Xét phần tử có 02 cạnh biên tự do, với nút 1, 2 và 4 là nút biên tự do. Từ điều kiện biên tự do, véc tơ chuyển vị nút của phần tử để xác định ma trận $[A]$ có dạng:

$$\{q\} = \{M_{xy1} \quad M_{y1} \quad M_{x1} \quad \bar{Q}_{y2} \quad M_{y2} \quad \theta_{y2} \quad w_3 \quad \theta_{x3} \quad \theta_{y3} \quad \bar{Q}_{x4} \quad \theta_{x4} \quad M_{x4}\}^T \tag{3.60}$$

Sử dụng (10) $\div$ (14), ma trận $[A]$ trong quan hệ (3.41) có dạng (3.61):

$$\begin{Bmatrix} \dfrac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}_{(1)} \\ M_{y1} \\ M_{x1} \\ \bar{Q}_{y2} \\ M_{y2} \\ \theta_{y2} \\ w_3 \\ \theta_{x3} \\ \theta_{y3} \\ \bar{Q}_{x4} \\ \theta_{x4} \\ M_{x4} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2\mu & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 2\mu & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2(2-\mu) & 0 & 6 & 6(2-\mu)x_2 & 6x_2 \\ 0 & 0 & 0 & 2\mu & 0 & 2 & 6\mu x_2 & 0 & 2x_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -2x_2 & 0 & 0 & -3x_2^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & x_3 & y_3 & x_3^2 & x_3 y_3 & y_3^2 & x_3^3 & x_3^2 y_3 & x_3 y_3^2 & y_3^3 & x_3^3 y_3 & x_3 y_3^3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & x_3 & 2y_3 & 0 & x_3^2 & 2x_3 y_3 & 3y_3^2 & x_3^3 & 3x_3 y_3^2 \\ 0 & -1 & 0 & -2x_3 & -y_3 & 0 & -3x_3^2 & -2x_3 y_3 & -y_3^2 & 0 & -3x_3^2 y_3 & -y_3^3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & 0 & 2(2-\mu) & 0 & 6y_4 & 6(2-\mu)y_4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2y_4 & 0 & 0 & 0 & 3y_4^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 2\mu & 0 & 2y_4 & 0 & 6\mu y_4 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \\ \alpha_5 \\ \alpha_6 \\ \alpha_7 \\ \alpha_8 \\ \alpha_9 \\ \alpha_{10} \\ \alpha_{11} \\ \alpha_{12} \end{Bmatrix} \tag{3.61}$$

Khai báo điều kiện biên tương ứng:

$$\{q\} = \{0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad \theta_{y2} \quad w_3 \quad \theta_{x3} \quad \theta_{y3} \quad 0 \quad \theta_{x4} \quad 0\}^T \tag{3.62}$$

Thay ma trận $[A]$ vào (3.43) xác định được ma trận $[B]_e$, ma trận độ cứng $[K]_e$, ma trận khối lượng $[M]_e$ và véc tơ lực nút qui đổi $\{R\}_e$ của phần tử có nút biên tự do.

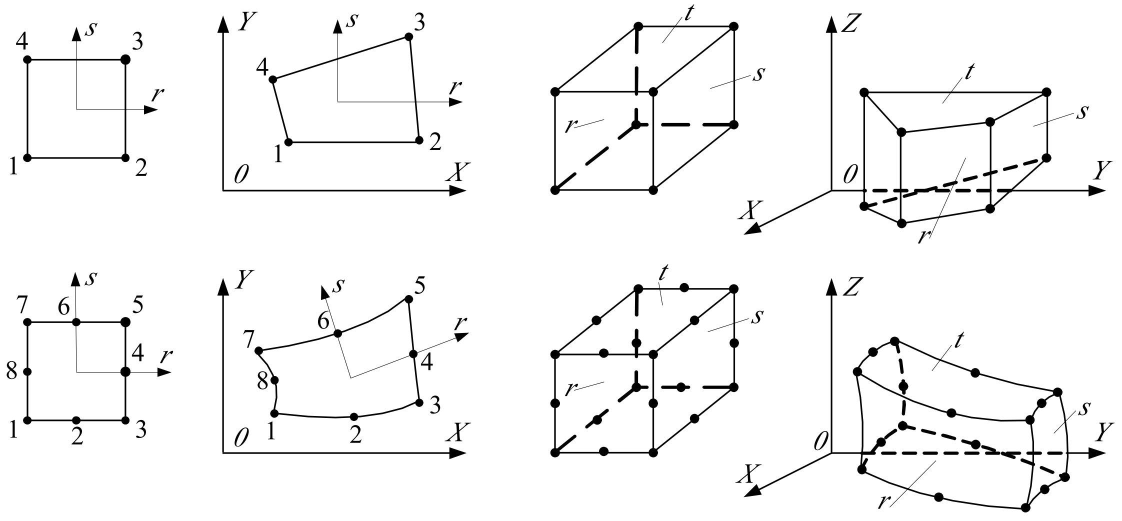
3.3. PHẦN TỬ ĐỒNG THAM SỐ KIỂU TỨ GIÁC 4 NÚT

Các phần tử đơn giản như kiểu tam giác, chữ nhật không đáp ứng được các yêu cầu của bài toán trong trường hợp khi rời rạc hóa kết cấu, phần tử không có dạng tam giác, chữ nhật. Điều đó dẫn đến sự phát triển các phần tử có hình dạng bất kỳ - gọi là phần tử đồng tham số. Những phần tử này được dùng rộng rãi trong các bài toán 2 chiều, 3 chiều, bài toán tính tấm, vỏ, kết cấu có biên cong.

Phần tử đồng tham số được khảo sát trong hệ tọa độ tự nhiên.

Đặc điểm của phần tử đồng tham số là dùng chung hàm nội suy N_i với $(i=1\div 4)$ khi xác định tọa độ của điểm bất kỳ trong phần tử qua tọa độ của các nút cũng như khi xác định chuyển vị tại điểm bất kỳ trong phần tử qua chuyển vị nút.

Thí dụ một số phần tử đồng tham số cho trên hình 3-3.



Hình 3-3. *Phần tử đồng tham số*

3.3.1. Ma trận hàm dạng $[B]_e$

Phần tử tấm đồng tham số tứ giác 4 nút là phần tử mà chuyển vị và hình học của một điểm bất kỳ trong phần tử được biểu diễn qua cùng hàm nội suy N_i với $i=1\div 4$.

Trong hệ tọa độ địa phương, vị trí của điểm bất kỳ trong phần tử được xác định qua hàm nội suy N_i và tọa độ x_i, y_i trong hệ tọa độ chung tại các nút $i=1\div 4$, hình 3-4.

$$x=\sum_{i=1}^{4} N_i x_i \;;\; y=\sum_{i=1}^{4} N_i y_i \tag{3.63}$$

Tại điểm bất kỳ trong phần tử có 03 thành phần chuyển vị là: chuyển vị pháp w và chuyển vị θ_x xoay quanh trục X và chuyển vị θ_y xoay quanh trục Y cũng được xác định qua hàm nội suy N_i và các chuyển vị thẳng w_i, chuyển vị xoay θ_{xi}, θ_{yi} tại các nút $i=1\div 4$:

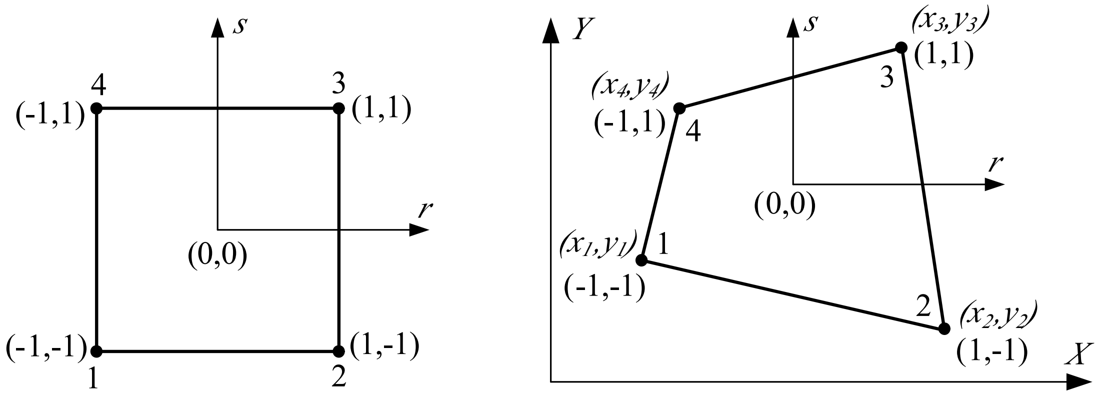
$$w=\sum_{i=1}^{4} N_i w_i \quad \theta_x=\sum_{i=1}^{4} N_i\theta_{xi} \quad \theta_y=\sum_{i=1}^{4} N_i\theta_{yi} \tag{3.64}$$

Hàm nội suy N_i, $i=1\div 4$ có dạng:

$$N_i = \frac{1}{4}(1 + r.r_i)(1 + s.s_i) \qquad (3.65)$$

trong đó:

r_i, s_i là tọa độ tự nhiên tại nút i. Tại các nút $i = 1 \div 4$ có tọa độ tự nhiên: nút 1: (-1,-1); nút 2: (1,-1); nút 3: (1,1); nút 4: (-1,1).



Hình 3-4. *Phần tử tứ giác 4 nút đồng tham số*

Từ (3.65) với giá trị r_i, s_i tại các nút $i = 1 \div 4$, hàm nội suy N_i có dạng:

$$N_1 = \frac{(1-r)(1-s)}{4};\ N_2 = \frac{(1+r)(1-s)}{4};\ N_3 = \frac{(1+r)(1+s)}{4};\ N_4 = \frac{(1-r)(1+s)}{4} \qquad (3.66)$$

Hàm chuyển vị có dạng tổng quát:

$$\{U\}_e = [B]_e \{q\}_e \qquad (3.67)$$

trong đó

$$\{U\}_e = \{w \quad \theta_x \quad \theta_y\}^T \qquad (3.68)$$

$\{q\}_e$ - véc tơ chuyển vị nút của phần tử.

$$\{q\}_e = \{w_1 \quad \theta_{x1} \quad \theta_{y1} \quad w_2 \quad \theta_{x2} \quad \theta_{y2} \quad w_3 \quad \theta_{x3} \quad \theta_{y3} \quad w_4 \quad \theta_{x4} \quad \theta_{y4}\}^T \qquad (3.69)$$

$[B]_e$ - ma trận hàm dạng xác định từ (3.64) có chú ý đến (3.67) có dạng:

$$[B]_e = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & N_3 & 0 & 0 & N_4 & 0 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & N_3 & 0 & 0 & N_4 & 0 \\ 0 & 0 & N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & N_3 & 0 & 0 & N_4 \end{bmatrix} \qquad (3.70)$$

3.3.2. Ma trận biến dạng-chuyển vị $[D]_e$

Ma trận biến dạng-chuyển vị $[D]_e$ được xác định từ công thức tổng quát theo PP PTHH: $\{\varepsilon\}_p = [D]_e \{q\}_e$. Với phần tử tấm, theo (1.45):

$$\{\varepsilon\}_p = \{k_x \quad k_y \quad k_{xy} \quad \phi_y \quad \phi_x\}^T$$

Từ các biểu thức:

$$\phi_y = \theta_y + \frac{\partial w}{\partial x} \tag{1.29}$$

$$\phi_x = -\theta_x + \frac{\partial w}{\partial y} \tag{1.30}$$

$$k_x = \frac{\partial \theta_y}{\partial x};\ k_y = -\frac{\partial \theta_x}{\partial y};\ k_{xy} = \frac{\partial \theta_y}{\partial y} - \frac{\partial \theta_x}{\partial x} \tag{1.40}$$

chú ý đến (3.65), các thành phần của $\{\varepsilon\}_p$ được xác định theo công thức:

$$\phi_y = \sum_{i=1}^{4} w_i \frac{\partial N_i}{\partial x} + \sum_{i=1}^{4} \theta_{yi} N_i \tag{3.71.a}$$

$$\phi_x = \sum_{i=1}^{4} w_i \frac{\partial N_i}{\partial y} - \sum_{i=1}^{4} \theta_{xi} N_i \tag{3.71.b}$$

$$k_x = \sum_{i=1}^{4} \theta_{yi} \frac{\partial N_i}{\partial x};\ k_y = \sum_{i=1}^{4} -\theta_{xi} \frac{\partial N_i}{\partial y};\ k_{xy} = \sum_{i=1}^{4} \theta_{yi} \frac{\partial N_i}{\partial y} - \sum_{i=1}^{4} \theta_{xi} \frac{\partial N_i}{\partial x} \tag{3.71.c}$$

Do xét trong hệ tọa độ tự nhiên nên cần thiết lập quan hệ đạo hàm của một đại lượng nào đó đối với các biến (r,s) trong hệ tọa độ tự nhiên và đạo hàm của đại lượng đó đối với biến (x,y) trong hệ tọa độ Descartes. Theo nguyên tắc tính đạo hàm riêng:

$$\frac{\partial}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r}$$

$$\frac{\partial}{\partial s} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s}$$

dưới dạng ma trận (3.72), trong đó $[J]_{2x2}$ gọi là ma trận Jacobian.

$$\begin{Bmatrix} \dfrac{\partial}{\partial r} \\ \dfrac{\partial}{\partial s} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial r} & \dfrac{\partial y}{\partial r} \\ \dfrac{\partial x}{\partial s} & \dfrac{\partial y}{\partial s} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x} \\ \dfrac{\partial}{\partial y} \end{Bmatrix} = [J] \begin{Bmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x} \\ \dfrac{\partial}{\partial y} \end{Bmatrix} \tag{3.72}$$

Từ (3.72), quan hệ giữa đạo hàm riêng của hàm nội suy N_i theo biến (x,y) trong hệ tọa độ Descartes và đạo hàm riêng của hàm nội suy N_i theo biến (r,s) trong hệ tọa độ tự nhiên có dạng:

$$\begin{Bmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x} \\ \dfrac{\partial}{\partial y} \end{Bmatrix} = [J]^{-1} \begin{Bmatrix} \dfrac{\partial}{\partial r} \\ \dfrac{\partial}{\partial s} \end{Bmatrix} \tag{3.73}$$

Từ (3.63) và (3.72), ma trận Jacobian $[J]$ có dạng:

$$[J]=\begin{bmatrix}\frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial r}\\ \frac{\partial x}{\partial s} & \frac{\partial y}{\partial s}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{\partial N_1}{\partial r} & \frac{\partial N_2}{\partial r} & \frac{\partial N_3}{\partial r} & \frac{\partial N_4}{\partial r}\\ \frac{\partial N_1}{\partial s} & \frac{\partial N_2}{\partial s} & \frac{\partial N_3}{\partial s} & \frac{\partial N_4}{\partial s}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1 & y_1\\ x_2 & y_2\\ x_3 & y_3\\ x_4 & y_4\end{bmatrix} \tag{3.74}$$

Chú ý đến (3.66),

$$[J]=\begin{bmatrix}-\frac{(1-s)}{4} & \frac{(1-s)}{4} & \frac{(1+s)}{4} & -\frac{(1+s)}{4}\\ -\frac{(1-r)}{4} & -\frac{(1+r)}{4} & \frac{(1+r)}{4} & \frac{(1-r)}{4}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1 & y_1\\ x_2 & y_2\\ x_3 & y_3\\ x_4 & y_4\end{bmatrix} \tag{3.75}$$

Ma trận nghịch đảo $[J]^{-1}$ có dạng:

$$[J]^{-1}=\begin{bmatrix}J^*_{11} & J^*_{12}\\ J^*_{21} & J^*_{22}\end{bmatrix} \tag{3.76}$$

Từ (3.71), véc tơ $\{\varepsilon\}_p$ được xác định qua w_i, chuyển vị xoay θ_{xi}, θ_{yi} tại các nút $i=1\div 4$:

$$\{\varepsilon\}_p=\{k_x \quad k_y \quad k_{xy} \quad \phi_y \quad \phi_x\}^T=[D]_e\{q\}_e \tag{3.77}$$

trong đó:

$$[D]_e=\left[[D_1]_{5x3} \quad [D_2]_{5x3} \quad [D_3]_{5x3} \quad [D_4]_{5x3}\right]_{5x12} \tag{3.78}$$

Ma trận $[D_i]$, $i=1\div 4$ xác định theo công thức (3.79):

$$[D_i]=\begin{bmatrix}0 & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial x}\\ 0 & -\frac{\partial N_i}{\partial y} & 0\\ 0 & -\frac{\partial N_i}{\partial x} & \frac{\partial N_i}{\partial y}\\ \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 & N_i\\ \frac{\partial N_i}{\partial y} & -N_i & 0\end{bmatrix} \text{ với } i=1\div 4 \tag{3.79}$$

tương ứng với chuyển vị tại nút i:

$$\{q_i\}=\{w_i \quad \theta_{xi} \quad \theta_{yi}\}^T \tag{3.80}$$

Từ (3.78) và (3.79), ma trận $[D]_e$ có dạng:

$$[D]_e = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{\partial N_1}{\partial x} & | & 0 & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial x} & | & 0 & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial x} & | & 0 & 0 & \frac{\partial N_4}{\partial x} \\ 0 & -\frac{\partial N_1}{\partial y} & 0 & | & 0 & -\frac{\partial N_2}{\partial y} & 0 & | & 0 & -\frac{\partial N_3}{\partial x} & 0 & | & 0 & -\frac{\partial N_4}{\partial y} & 0 \\ 0 & -\frac{\partial N_1}{\partial x} & \frac{\partial N_1}{\partial y} & | & 0 & -\frac{\partial N_2}{\partial x} & \frac{\partial N_2}{\partial y} & | & 0 & -\frac{\partial N_3}{\partial x} & \frac{\partial N_3}{\partial y} & | & 0 & -\frac{\partial N_4}{\partial x} & \frac{\partial N_4}{\partial y} \\ \frac{\partial N_1}{\partial x} & 0 & N_1 & | & \frac{\partial N_2}{\partial x} & 0 & N_2 & | & \frac{\partial N_3}{\partial x} & 0 & N_3 & | & \frac{\partial N_4}{\partial x} & 0 & N_4 \\ \frac{\partial N_1}{\partial y} & -N_1 & 0 & | & \frac{\partial N_2}{\partial y} & -N_2 & 0 & | & \frac{\partial N_3}{\partial y} & -N_3 & 0 & | & \frac{\partial N_4}{\partial y} & -N_4 & 0 \end{bmatrix} \tag{3.81}$$

Véc tơ nội lực: $\{\sigma\}_p = \{M_x \quad M_y \quad M_{xy} \quad Q_x \quad Q_y\}^T$ (1.42)

$$\{\sigma\}_p = [C]_p \{\varepsilon\}_p = [C]_p [D]_e \{q\}_e = [CB]_e \{q\}_e \tag{3.82}$$

Sử dụng $[C]_p$ từ (1.43) và $[D_i]$ từ (3.79) thì:

$$[CB]_{5x12} = [C]_p [D]_e = \left[[CB_1]_{5x3} \quad [CB_2]_{5x3} \quad [CB_3]_{5x3} \quad [CB_4]_{5x3} \right] \tag{3.83}$$

với $i = 1, 2, 3, 4$.

Nếu tách $[CB_i]_{5x3}$ ra tương ứng với biến dạng uốn và cắt:

$$[CB_i] = [CB_i]_u + [CB_i]_S \tag{3.84}$$

$$[CB_i] = \frac{Eh}{12(1+\mu)} \left[\begin{bmatrix} 0 & \frac{-\mu h^2}{1-\mu}\left(\frac{\partial N_i}{\partial y}\right) & \frac{h^2}{1-\mu}\left(\frac{\partial N_i}{\partial x}\right) \\ 0 & \frac{-h^2}{1-\mu}\left(\frac{\partial N_i}{\partial y}\right) & \frac{\mu h^2}{1-\mu}\left(\frac{\partial N_i}{\partial x}\right) \\ 0 & \frac{-h^2}{2}\left(\frac{\partial N_i}{\partial x}\right) & \frac{h^2}{2}\left(\frac{\partial N_i}{\partial y}\right) \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + 6\alpha \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 & N_i \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} & -N_i & 0 \end{bmatrix} \right] \tag{3.85}$$

Khi tính nội lực, giá trị mô men được tính với ma trận $[CB_i]_u$ với 2x2 điểm Gauss, còn giá trị lực cắt được tính với ma trận $[CB_i]_S$ với 1x1 điểm Gauss.

3.3.3. Ma trận độ cứng $[K]_e$

Ma trận độ cứng $[K]_e$ của phần tử trong hệ tọa độ địa phương được xác định bằng công thức:

$$[K]_e = \iint\limits_S [D]_e^T [C]_p [D]_e dxdy \tag{3.86}$$

tính trong hệ tọa độ tự nhiên:

$$[K]_e = \int_{-1}^{+1}\int_{-1}^{+1} [D]_e^T [C]_p [D]_e |J| drds = \int_{-1}^{+1}\int_{-1}^{+1} \left[\bar{k}\right] |J| drds \tag{3.87}$$

trong đó $[C]_p$ xác định theo (1.43) và $[D_i]$ xác định theo (3.79).

Ma trận $\left[\bar{k}\right]$ có thể biểu diễn dưới dạng tổng do biến dạng uốn và biến dạng cắt:

$$\left[\bar{k}\right] = [D]_e^T [C]_p [D]_e = \left[\bar{k}\right]_u + \left[\bar{k}\right]_s \tag{3.88}$$

trong đó:

$$\left[\bar{k}\right] = \begin{bmatrix} \left[\bar{k}_{11}\right]_u + \left[\bar{k}_{11}\right]_S & \left[\bar{k}_{12}\right]_u + \left[\bar{k}_{12}\right]_S & \left[\bar{k}_{13}\right]_u + \left[\bar{k}_{13}\right]_S & \left[\bar{k}_{14}\right]_u + \left[\bar{k}_{14}\right]_S \\ \left[\bar{k}_{21}\right]_u + \left[\bar{k}_{21}\right]_S & \left[\bar{k}_{22}\right]_u + \left[\bar{k}_{22}\right]_S & \left[\bar{k}_{23}\right]_u + \left[\bar{k}_{23}\right]_S & \left[\bar{k}_{24}\right]_u + \left[\bar{k}_{24}\right]_S \\ \left[\bar{k}_{31}\right]_u + \left[\bar{k}_{31}\right]_S & \left[\bar{k}_{32}\right]_u + \left[\bar{k}_{32}\right]_S & \left[\bar{k}_{33}\right]_u + \left[\bar{k}_{33}\right]_S & \left[\bar{k}_{34}\right]_u + \left[\bar{k}_{34}\right]_S \\ \left[\bar{k}_{41}\right]_u + \left[\bar{k}_{41}\right]_S & \left[\bar{k}_{42}\right]_u + \left[\bar{k}_{42}\right]_S & \left[\bar{k}_{43}\right]_u + \left[\bar{k}_{43}\right]_S & \left[\bar{k}_{44}\right]_u + \left[\bar{k}_{44}\right]_S \end{bmatrix}_{12x12} \tag{3.89}$$

Ma trận $\left[\bar{k}_{kj}\right]_{3x3} = \left[\bar{k}_{ij}\right]_u + \left[\bar{k}_{ij}\right]_S$ được xác định bằng công thức (3.90).

$$\left[\bar{k}_{kj}\right] = \frac{Eh}{12(1+\mu)} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{h^2}{1-\mu}\left(\frac{\partial N_i}{\partial y}\frac{\partial N_j}{\partial y}\right) + \frac{h^2}{2}\left(\frac{\partial N_i}{\partial x}\frac{\partial N_j}{\partial x}\right) & -\frac{\mu h^2}{1-\mu}\left(\frac{\partial N_i}{\partial y}\frac{\partial N_j}{\partial x}\right) - \frac{h^2}{2}\left(\frac{\partial N_i}{\partial x}\frac{\partial N_j}{\partial y}\right) \\ 0 & -\frac{\mu h^2}{1-\nu}\left(\frac{\partial N_i}{\partial x}\frac{\partial N_j}{\partial y}\right) - \frac{h^2}{2}\left(\frac{\partial N_i}{\partial y}\frac{\partial N_j}{\partial x}\right) & \frac{h^2}{1-\nu}\left(\frac{\partial N_i}{\partial x}\frac{\partial N_j}{\partial x}\right) + \frac{h^2}{2}\left(\frac{\partial N_i}{\partial y}\frac{\partial N_j}{\partial y}\right) \end{bmatrix} +$$

$$+ \frac{Eh\alpha}{2(1+\mu)} \begin{bmatrix} \left(\frac{\partial N_i}{\partial x}\frac{\partial N_j}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial N_i}{\partial y}\frac{\partial N_j}{\partial y}\right) & -\frac{\partial N_i}{\partial y} N_j & \frac{\partial N_i}{\partial x} N_j \\ -N_i \frac{\partial N_j}{\partial y} & N_i N_j & 0 \\ N_i \frac{\partial N_j}{\partial x} & 0 & N_i N_j \end{bmatrix}$$

(3.90)

Khi tính ma trận độ cứng $[K]_e$ theo (3.87), (3.89) và (3.90) thì với $\left[\bar{k}_{ij}\right]_u$ tích phân với 2x2 điểm Gauss, còn với $\left[\bar{k}_{ij}\right]_S$ tích phân với 1x1 điểm Gauss.

3.3.4. Véc tơ lực nút qui đổi $\{R\}_e$ của phần tử.

Véc tơ lực nút qui đổi của phần tử:

$$\{R\}_e = \{F_{z1} \quad M_{x1} \quad M_{y1} \quad F_{z2} \quad M_{x2} \quad M_{y2} \quad F_{z3} \quad M_{x3} \quad M_{y3} \quad F_{z4} \quad M_{x4} \quad M_{y4}\}^T$$

$$\{R\}_e = \{\{R_1\} \quad \{R_2\} \quad \{R_3\} \quad \{R_4\}\}^T \tag{3.91}$$

Véc tơ lực nút qui đổi $\{R_i\}$ của phần tử tại nút i $(i = 1 \div 4)$ do tải trọng phân bố đều q được xác định theo công thức:

$$\{R_i\} = \begin{Bmatrix} F_{zi} \\ M_{xi} \\ M_{yi} \end{Bmatrix} = \int_{-1}^{+1}\int_{-1}^{+1} N_i \begin{Bmatrix} q \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} |J|\, drds \tag{3.92}$$

3.3.5. Ma trận khối lượng $[M]_e$ của phần tử

Ký hiệu:

$$\left[F(r,s)\right] = \rho [B]_e^T [B]_e \tag{3.93}$$

trong đó

ρ - khối lượng riêng của vật liệu;

$[B]_e$ - Ma trận hàm dạng xác định theo (3.71).

Ma trận khối lượng $[M]_e$ của phần tử được tính bằng tích phân số với 2x2 điểm Gauss:

$$[M]_e = \int_{-1}^{+1}\int_{-1}^{+1} \left[F(r,s)\right] \det|J| drds = \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2} \alpha_i \alpha_j \left[F(r,s)\right] \det|J| \tag{3.94}$$

3.4. TÍNH TẤM TRÊN NỀN ĐÀN HỒI BIẾN DẠNG CỤC BỘ

Kết cấu tấm trên nền đàn hồi thường được tính với mô hình nền biến dạng đàn hồi cục bộ Winkler. Trong mục này, giới thiệu tính tấm trên nền biến dạng đàn hồi cục bộ hai hệ số với phần tử tấm tương thích chữ nhật 4 nút có 16 bậc tự do (chuyển vị nút).

3.4.1. Phương trình cân bằng của phần tử tấm trên nền đàn hồi 2 hệ số

Dưới đây sẽ trình bày cách thiết lập phương trình cân bằng của phần tử từ nguyên lý giá trị dừng của thế năng toàn phần.

Thế năng toàn phần Π của tấm chịu uốn bằng tổng thế năng biến dạng U của nội lực và thế năng ngoại lực khi hệ chuyển từ trạng thái ban đầu không biến dạng sang trạng thái biến dạng.

Thế năng toàn phần của hệ có dạng:

$$\Pi = U - \iint q.w.dxdy \qquad (1.50)$$

Năng lượng biến dạng bao gồm:

* Năng lượng biến dạng gây ra do nội lực U_{nl}:

$$U_{nl} = \frac{1}{2}\iint_V \{\varepsilon\}^T \{\sigma\}\, dV = \frac{1}{2}\iint_S \{k_c\}^T \{M\}\, dS = \frac{1}{2}\iint_S \{k_c\}^T [C]_f \{k_c\}\, dS \qquad (3.95)$$

Từ quan hệ tổng quát giữa biến dạng và chuyển vị nút: $\{\varepsilon\}_e = [D]_e \{q\}_e$, biểu thức (3.95) có dạng:

$$U_{nl} = \frac{1}{2}\iint_S \{k_c\}^T [C]_f \{k_c\}\, dS = \frac{1}{2}\iint_S \{q\}_e^T [D]_e^T [C]_f [D]_e \{q\}_e\, dS \qquad (3.96.a)$$

hay

$$U_{nl} = \frac{1}{2}\{q\}_e^T \left(\iint_S [D]_e^T [C]_f [D]_e\, dS \right) \{q\}_e \qquad (3.96.b)$$

* Năng lượng biến dạng gây ra do lực quán tính U_{qt}:

$$U_{qt} = \frac{1}{2}\rho h \iint_S \{U\}_e^T \{P_{qt}\}\, dS = \frac{1}{2}\rho h \iint_S \{q\}_e^T [B]_e^T [B]_e \{\ddot{q}\}_e\, dS \qquad (3.97.a)$$

hay $$U_{qt} = \frac{1}{2}\{q\}_e^T \left(\rho h \iint_S [B]_e^T [B]_e\, dS \right) \{\ddot{q}\}_e \qquad (3.97.b)$$

* Năng lượng biến dạng gây ra do phản lực nền U_{nen}:

$$U_{nen} = \frac{1}{2}\iint_S \{U\}_e^T \{P_{nen}\}\, dS$$

Từ quan hệ tổng quát của hàm chuyển vị: $\{U\}_e = [B]_e \{q\}_e$ và phản lực của nền 02 hệ số $P_{nen} = k_1 w - k_2 \nabla^2 w$

$$U_{nen} = \frac{1}{2}k_1 \iint_S \{q\}_e^T [B]_e^T [B]_e \{q\}_e\, dS - \frac{1}{2}k_2 \iint_S \{q\}_e^T [B]_e^T \left(\nabla^2 [B]_e\right) \{q\}_e\, dS \qquad (3.98.a)$$

hay

$$U_{nen} = \frac{1}{2}\{q\}_e^T \left(k_1 \iint_S [B]_e^T [B]_e\, dS - \frac{1}{2}k_2 \iint_S [B]_e^T \left(\nabla^2 [B]_e\right) dS \right) \{q\}_e \qquad (3.98.b)$$

Thế năng ngoại lực U_{ngl} :

$$U_{ngl} = -\iint_S \{U\}_e^T q(x,y)\, dS = -\iint_S \{q\}_e^T [B]_e^T q(x,y)\, dS = -\{q\}_e^T \left(\iint_S [B]_e^T q(x,y)\, dS \right)$$

(3.99)

Thế năng toàn phần là tổng của các thế năng: $\Pi = U_{nl} + U_{qt} + U_{nen} + U_{ngl}$

Theo nguyên lý giá trị dừng của thế năng toàn phần, để hệ cân bằng thì biến phân cấp 1 của thế năng toàn phần $\delta\Pi = 0$

$$\{\delta q\}_e^T\left(\rho h\iint_S [B]_e^T [B]_e\, dS\right)\{\ddot{q}\}_e + \{\delta q\}_e^T\left(\iint_S [D]_e^T [C]_f [D]_e\, dS\right)\{q\}_e +$$

$$+\{\delta q\}_e^T\left(k_1\iint_S [B]_e^T [B]_e\, dS - \frac{1}{2}k_2\iint_S [B]_e^T\left(\nabla^2 [B]_e\right) dS\right)\{q\}_e -$$

$$-\{\delta q\}_e^T\left(\iint_S [B]_e^T q(x,y)\, dS\right) = 0 \qquad (3.100)$$

Biến phân $\{\delta q\}_e$ là bất kỳ, nên suy ra:

$$\left(\rho h\iint_S [B]_e^T [B]_e\, dS\right)\{\ddot{q}\}_e + \left(\iint_S [D]_e^T [C]_f [D]_e\, dS\right)\{q\}_e +$$

$$+\left(k_1\iint_S [B]_e^T [B]_e\, dS - \frac{1}{2}k_2\iint_S [B]_e^T\left(\nabla^2 [B]_e\right) dS\right)\{q\}_e - \left(\iint_S [B]_e^T q(x,y)\, dS\right) = 0$$

(3.101)

Ký hiệu:

$[M]_e$ - ma trận khối lượng của phần tử

$$[M]_e = \rho h\iint_S [B]_e^T [B]_e\, dS \qquad (3.102)$$

$[K]_e$ - ma trận độ cứng của phần tử

$$[K]_e = \iint_S [D]_e^T [C]_f [D]_e\, dS \qquad (3.103)$$

$[K_{nen}]_e$ - ma trận độ cứng của nền đàn hồi 2 hệ số

$$[K_{nen}]_e = \left(k_1\iint_S [B]_e^T [B]_e\, dS - \frac{1}{2}k_2\iint_S [B]_e^T\left(\nabla^2 [B]_e\right) dS\right) \qquad (3.104)$$

$\{R\}_e$ - véc tơ lực nút qui đổi của phần tử

$$\{R\}_e = \iint_S [B]_e^T q(x,y)\, dS \qquad (3.105)$$

Phương trình cân bằng của phần tử có dạng tổng quát:

$$[M]_e\{\ddot{q}\}_e + [K]_e\{q\}_e + [K_{nen}]_e\{q\}_e = \{R\}_e$$

Nếu đặt:

$$[KN]_e = [K]_e + [K_{nen}]_e \qquad (3.106)$$

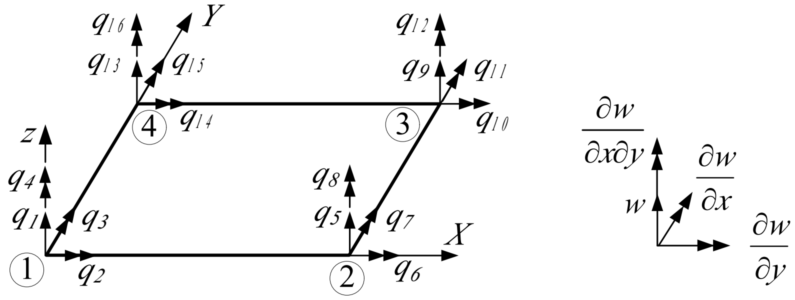
thì phương trình cân bằng tĩnh của tấm trên nền đàn hồi 2 hệ số có dạng:

$$[M]_e\{\ddot{q}\}_e+[KN]_e\{q\}_e=\{R\}_e \tag{3.107}$$

Dưới đây dẫn ra các công thức cơ bản theo PP PTHH cho phần tử tấm chữ nhật 16 bậc tự do (chuyển vị nút) với hàm chuyển vị được xấp xỉ bằng một đa thức theo tam giác Pascal.

3.4.2. Hàm chuyển vị và hàm dạng

Xét phần tử tấm tương thích chữ nhật 4 nút trên nền biến dạng đàn hồi cục bộ hai hệ số với 16 chuyển vị nút, hình 3-5.



Hình 3-5. *Phần tử chữ nhật 04 nút 16 bậc tự do*

Tại mỗi nút thứ $i,(i=1\div4)$ có 4 thành phần chuyển vị nút, [2]:

$$w_i,\ \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)_i,\ \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_i,\ \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\right)_i$$

Véc tơ chuyển vị nút của phần tử:

$$\{q\}_e=\left\{w_1\quad \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)_1\quad \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_1\quad \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\right)_1\quad \cdots\quad \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_4\quad \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\right)_4\right\}^T_{16x1} \tag{3.108.a}$$

hay $\{q\}_e=\{q_1\quad q_2\quad q_3\quad q_4\quad \cdots\quad q_{14}\quad q_{15}\quad q_{16}\}^T$ (3.108.b)

Tương tự, véc tơ lực nút qui đổi của phần tử:

$$\{R\}_e=\{R_1\quad R_2\quad R_3\quad R_4\quad \cdots\quad R_{14}\quad R_{15}\quad R_{16}\}^T \tag{3.109}$$

Hàm chuyển vị $\{U\}_e$ của phần tử chữ nhật 04 nút 16 bậc tự do được xấp xỉ dưới dạng đa thức đầy đủ theo tam giác Pascal có dạng:

$$\begin{aligned}\{U\}_e=w(x,y)&=\alpha_1+\alpha_2x+\alpha_3y+\alpha_4x^2+\alpha_5xy+\alpha_6y^2+\alpha_7x^3+\alpha_8x^2y+\alpha_9xy^2+\\&+\alpha_{10}y^3+\alpha_{11}x^3y+\alpha_{12}xy^3+\alpha_{13}x^2y^2+\alpha_{14}x^3y^2+\alpha_{15}x^2y^3+\alpha_{16}x^3y^3\end{aligned} \tag{3.110}$$

dưới dạng ma trận: $\{U\}_e=w(x,y)=[P(x,y)]\{\alpha\}$ (3.111)

trong đó:

$$[P(x,y)]=[1\quad x\quad y\quad x^2\quad xy\quad y^2\quad x^3\quad x^2y\quad xy^2\quad y^3\quad x^3y\quad xy^3\quad x^2y^2\quad x^3y^2\quad x^2y^3\quad x^3y^3]$$

(3.112).

$$\{\alpha\} = \{\alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \alpha_3 \quad ... \quad \alpha_{15} \quad \alpha_{16}\}^T \tag{3.113}$$

Các tham số α_j với $j = 1 \div 16$ được xác định từ điều kiện chuyển vị tại các nút của phần tử, ví dụ tại nút có tọa độ (x, y) có dạng (3.114), trang 70.

Khai triển (3.114) cho các nút i, $(i = 1 \div 4)$ dưới dạng ma trận:

$$\{q\}_e = [A]\{\alpha\} \tag{3.115}$$

Từ (3.115), rút ra: $\{\alpha\} = [A]^{-1}\{q\}_e$ (3.116)

thay (3.116) vào (3.111):

$$\{U\}_e = w(x, y) = [B]_e\{q\}_e = [P(x, y)]\{\alpha\} = [P(x, y)][A]^{-1}\{q\}_e \tag{3.117}$$

rút ra ma trận hàm dạng:

$$[B]_e = [P(x, y)][A]^{-1} \tag{3.118}$$

3.4.3. Ma trận biến dạng - chuyển vị

Ma trận biến dạng - chuyển vị được xác định từ công thức tổng quát của PP PTHH: $\{\varepsilon\}_e = [D]_e\{q\}_e$. Theo $(1.4) \div (1.7)$:

Từ (3.111):

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = z\begin{Bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{Bmatrix} = z\begin{Bmatrix} -\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ -\dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ -2\dfrac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix} = -z\begin{bmatrix} \dfrac{\partial^2 [P(x, y)]}{\partial x^2} \\ \dfrac{\partial^2 [P(x, y)]}{\partial y^2} \\ \dfrac{\partial^2 [P(x, y)]}{\partial x \partial y} \end{bmatrix}[A]^{-1}\{q\}_e \tag{3.119}$$

So sánh với công thức xác định $\{\varepsilon\}_e = [D]_e\{q\}_e$, rút ra:

$$[D]_e = -z\begin{bmatrix} \dfrac{\partial^2 [P(x, y)]}{\partial x^2} \\ \dfrac{\partial^2 [P(x, y)]}{\partial y^2} \\ 2\dfrac{\partial^2 [P(x, y)]}{\partial x \partial y} \end{bmatrix}[A]^{-1} = -z[PD][A]^{-1} \tag{3.120}$$

trong đó, ma trận $[PD]$ có dạng (3.121), trang 70.

3.4.4. Ma trận độ cứng của phần tử tấm và của nền

Ma trận độ cứng phần tử tấm được xác định bằng công thức:

$$\left[K\right]_e = \iint\limits_S \left[D\right]_e^T \left[C\right]_f \left[D\right]_e dS \tag{3.122}$$

trong đó:

$\left[D\right]_e$ xác định theo (3.120);

$\left[C_f\right]$ xác định theo công thức (1.19).

Ma trận độ cứng của nền đàn hồi 2 hệ số xác định theo (3.104)

$$\left[K_{nen}\right]_e = \left(k_1 \iint\limits_S \left[B\right]_e^T \left[B\right]_e dS - \frac{1}{2} k_2 \iint\limits_S \left[B\right]_e^T \left(\nabla^2 \left[B\right]_e\right) dS \right) \tag{3.123}$$

trong đó, $\left[B\right]_e$ là ma trận hàm dạng xác định theo (3.118): $\left[B\right]_e = \left[P(x,y)\right]\left[A\right]^{-1}$

Ma trận $\left(\nabla^2 \left[B\right]_e\right)$ là ma trận nhận được bằng cách lấy đạo hàm theo toán tử Laplat (1.24) cho ma trận hàm dạng $\left[B\right]_e$. Chú ý đến (3.118), với $\left[A\right]^{-1}$ là ma trận hằng số, nhận được:

$$\left(\nabla^2 \left[B\right]_e\right) = \left(\nabla^2 \left[P(x,y)\right]\right)\left[A\right]^{-1} \tag{3.124}$$

$\nabla^2 \left[P(x,y)\right]$ xác định theo (3.125), trang 70.

3.4.5. Ma trận khối lượng của phần tử tấm

Ma trận khối lượng của phần tử được xác định bằng công thức (3.102):

$$\left[M\right]_e = \rho h \iint\limits_S \left[B\right]_e^T \left[B\right]_e dS \tag{3.126}$$

trong đó:

ρ - khối lượng trên một đơn vị thể tích của tấm;

h - chiều dày của tấm

$\left[B\right]_e$ - ma trận hàm dạng xác định theo (3.118).

3.4.6. Véc tơ lực nút qui đổi do tải phân bố tác dụng trong phần tử tấm

Véc tơ lực nút qui đổi được xác định bằng công thức (3.106) :

$$\left\{R\right\}_e = \iint\limits_S \left[B\right]_e^T q(x,y) dS \tag{3.127}$$

3.4.7. Xác định nội lực trong phần tử tấm

Nội lực mô men tại điểm bất kỳ có tọa độ (x,y) trong phần tử tấm được xác định theo công thức (1.16)

$$\left\{M\right\} = \left[C_f\right]\left\{k_c\right\} \tag{1.16}$$

trong đó:

$$\{M\} = \{M_x \quad M_y \quad M_{xy}\}^T \tag{1.17}$$

$\{k_c\} = \{k_x \quad k_y \quad k_{xy}\}^T$ xác định theo công thức:

$$\{k_c\} = \begin{Bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ -\dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ -2\dfrac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix} = -[PD][A]^{-1}\{q\}_e \tag{3.128}$$

Ma trận $[PD]$ xác định theo (3.121).

Ma trận $[C]_f$ xác định theo (1.19).

Lực cắt Q_x, Q_y do biến dạng uốn tấm được xác định bằng công thức (1.23):

$$Q_x = -D_p \frac{\partial}{\partial x}\nabla^2 W = -D_p \frac{\partial}{\partial x}\left(\nabla^2\left[P(x,y)\right]\right)[A]^{-1}\{q\}_e \tag{3.129}$$

$$Q_y = -D_p \frac{\partial}{\partial y}\nabla^2 W = -D_p \frac{\partial}{\partial y}\left(\nabla^2\left[P(x,y)\right]\right)[A]^{-1}\{q\}_e \tag{3.130}$$

Ma trận $\left(\nabla^2\left[P_{(x,y)}\right]\right)$ xác định theo (3.125).

Ký hiệu:

$$[Q_x P] = \frac{\partial}{\partial x}\left(\nabla^2\left[P(x,y)\right]\right) \tag{3.131}$$

$$[Q_y P] = \frac{\partial}{\partial y}\left(\nabla^2\left[P(x,y)\right]\right) \tag{3.132}$$

Lực cắt Q_x, Q_y theo (3.129), (3.130) có dạng:

$$Q_x = -D_p[Q_x P][A]^{-1}\{q\}_e; \tag{3.133}$$

$$Q_y = -D_p[Q_y P][A]^{-1}\{q\}_e \tag{3.134}$$

Với ma trận $[Q_x P]$, $[Q_y P]$ xác định theo (3.131) và (3.132), trang 70.

3.4.8. Tính các tích phân số bằng phép cầu phương Gauss

Để tính các tích phân bằng tích phân số theo phép cầu phương Gauss cần đổi biến x, y trong hệ tọa độ Descartes về biến r, s trong hệ tọa độ tự nhiên.

Xét phần tử chữ nhật có kích thước $2a$, $2b$, tọa độ tại tâm (gốc hệ tọa độ tự nhiên) là (x_c, y_c). Dùng phép đổi biến :

$$r = \frac{x - x_c}{a} \qquad s = \frac{y - y_c}{b} \qquad dxdy = a.bdrds \tag{3.135}$$

Ví dụ xét tích phân xác định ma trận độ cứng của phần tử tấm

$$\left[K\right]_e = \iint_S \left[D\right]_e^T \left[C_f\right]\left[D\right]_e dS$$

Ký hiệu:

$$\left[F\left(r,s\right)\right] = \left[D\right]_e^T \left[C_f\right]\left[D\right]_e \tag{3.136}$$

$$\left[K\right]_i = a.b\int_{-1}^{+1}\int_{-1}^{+1}\left[F\left(r,s\right)\right]drds = a.b\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2}\alpha_i\alpha_j\left[F\left(r_i,s_j\right)\right] \tag{3.137}$$

$$\begin{Bmatrix} w \\ \dfrac{\partial w}{\partial x} \\ \dfrac{\partial w}{\partial y} \\ \dfrac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x & y & x^2 & xy & y^2 & x^3 & x^2 y & xy^2 & y^3 & x^3 y & xy^3 & x^2 y^2 & x^3 y^2 & x^2 y^3 & x^3 y^3 \\ 0 & 1 & 0 & 2x & y & 0 & 3x^2 & 2xy & y^2 & 0 & 3x^2 y & y^3 & 2xy^2 & 3x^2 y^2 & 2xy^3 & 3x^2 y^3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & x & 2y & 0 & x^2 & 2xy & 3y^2 & x^3 & 3xy^2 & 2x^2 y & 2x^3 y & 3x^2 y^2 & 3x^3 y^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2x & 2y & 0 & 3x^2 & 3y^2 & 4xy & 6x^2 y & 6xy^2 & 9x^2 y^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ . \\ \alpha_{16} \end{Bmatrix} \tag{3.114}$$

$$\left[PD\right] = \begin{Bmatrix} -\dfrac{\partial^2\left[P(x,y)\right]}{\partial x^2} \\ -\dfrac{\partial^2\left[P(x,y)\right]}{\partial y^2} \\ -2\dfrac{\partial^2\left[P(x,y)\right]}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix} = -\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 6x & 2y & 0 & 0 & 6xy & 0 & 2y^2 & 6xy^2 & 2y^3 & 6xy^3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 2x & 6y & 0 & 6xy & 2x^2 & 2x^3 & 6x^2 y & 6x^3 y \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 4x & 4y & 0 & 6x^2 & 6y^2 & 8xy & 12x^2 y & 12xy^2 & 18x^2 y^2 \end{bmatrix} \tag{3.121}$$

$$\left(\nabla^2\left[P(x,y)\right]\right) = \left[0 \quad 0 \quad 0 \quad 2 \quad 0 \quad 2 \quad 6x \quad 2y \quad 2x \quad 6y \quad 6xy \quad 6xy \quad 2\left(x^2+y^2\right) \quad \left(6xy^2+2x^3\right) \quad \left(2y^3+6x^2 y\right) \quad \left(6xy^3+6x^3 y\right)\right] \tag{3.125}$$

$$\left[Q_x P\right] = \frac{\partial}{\partial x}\left(\nabla^2\left[P(x,y)\right]\right) = \left[0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 6 \quad 0 \quad 2 \quad 0 \quad 6y \quad 6y \quad 4x \quad 6\left(x^2+y^2\right) \quad 12xy \quad \left(6y^3+18x^2 y\right)\right] \tag{3.131}$$

$$\left[Q_y P\right] = \frac{\partial}{\partial y}\left(\nabla^2\left[P(x,y)\right]\right) = \left[0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 2 \quad 0 \quad 6 \quad 6x \quad 6x \quad 4y \quad 12xy \quad \left(6y^2+12x^2\right) \quad \left(18xy^2+6x^3\right)\right] \tag{3.132}$$