Chương 11
BỔ TRỢ

Trong chương này, trình bày một số kiến thức bổ trợ cho việc tính toán kết cấu bằng phương pháp số gồm các nội dung:

1. Tóm tắt nội dung và trình tự giải bài toán kết cấu bằng phương pháp phần tử hữu hạn;

2. Các phương pháp giải bài toán động tuyến tính: phương pháp phân tích theo dạng dao động riêng; Phương pháp tích phân trực tiếp: phương pháp sai phân trung tâm và phương pháp Newmark (gia tốc trung bình không đổi và gia tốc tuyến tính);

3. Phương pháp Newton-Raphson giải bài toán tĩnh phi tuyến và phương pháp Newton-Raphson kết hợp với phương pháp Newmark giải bài toán động phi tuyến;

4. Hệ tọa độ tự nhiên và tích phân số.

11.1. PHƯƠNG PHÁP PHẦN TỬ HỮU HẠN

11.1.1. Các phương trình và công thức cơ bản

Phương trình cân bằng tĩnh của hệ có dạng:

$$[K]\{q\} = \{R\} \tag{11.1}$$

Phương trình cân bằng động của hệ có dạng:

$$[M]\{\ddot{q}(t)\} + [C]\{\dot{q}(t)\} + [K]\{q(t)\} = \{R(t)\} \tag{11.2}$$

trong đó:

$[K]$, $[M]$, $[C]$ - ma trận độ cứng, ma trận khối lượng và ma trận cản của hệ.

$\{q\}$ - véc tơ chuyển vị nút của hệ (bài toán tĩnh).

$\{q(t)\}$, $\{\dot{q}(t)\}$, $\{\ddot{q}(t)\}$ - véc tơ chuyển vị nút, vận tốc và gia tốc của hệ (bài toán động).

$\{R\}$ - véc tơ lực nút qui đổi của hệ gây ra do các nguyên nhân tác dụng trong phần tử (bài toán tĩnh).

$\{R(t)\}$ - véc tơ lực nút qui đổi của hệ gây ra do các nguyên nhân tác dụng trong phần tử (bài toán động).

Ma trận độ cứng $[K]$, ma trận khối lượng $[M]$ của hệ được xác định từ các ma trận độ cứng $\left[K'\right]_e$ và ma trận khối lượng $\left[M'\right]_e$ của phần tử trong hệ tọa độ chung bằng phương pháp số mã.

Ma trận độ cứng $\left[K'\right]_e$ và ma trận khối lượng $\left[M'\right]_e$ của phần tử trong hệ tọa độ chung được xác định qua ma trận độ cứng $\left[K\right]_e$ và ma trận khối lượng $\left[M\right]_e$ của phần tử trong hệ tọa độ địa phương bằng công thức:

$$\left[K'\right]_e = \left[T\right]_e^T \left[K\right]_e \left[T\right]_e \quad (11.3)$$

$$\left[M'\right]_e = \left[T\right]_e^T \left[M\right]_e \left[T\right]_e \quad (11.4)$$

với ma trận $\left[T\right]_e$ là ma trận chuyển tọa độ gồm các ma trận cosin chỉ phương giữa hệ tọa độ địa phương và hệ tọa độ chung. Ma trận $\left[T\right]_e$ có hình dạng, kích thước phụ thuộc kiểu của phần tử (hình dạng: thanh, tam giác, tứ giác,...và sơ đồ chuyển vị nút) có dạng tổng quát:

$$\left[T\right]_e = \begin{bmatrix} [L] & & . & [0] \\ & [L] & . & \\ . & . & . & . \\ [0] & & . & [L] \end{bmatrix} \quad (11.5)$$

trong đó $\left[L\right]$ là ma trận cô sin chỉ phương giữa các trục tọa độ của hệ tọa độ địa phương của phần tử và hệ tọa độ chung có dạng:

$$\left[L\right] = \begin{bmatrix} l_{xx'} & m_{xy'} & n_{xz'} \\ l_{yx'} & m_{yy'} & n_{yz'} \\ l_{zx'} & m_{zy'} & n_{zz'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} cos\left(x,x'\right) & cos\left(x,y'\right) & cos\left(x,z'\right) \\ cos\left(y,x'\right) & cos\left(y,y'\right) & cos\left(y,z'\right) \\ cos\left(z,x'\right) & cos\left(z,y'\right) & cos\left(z,z'\right) \end{bmatrix} \quad (11.6)$$

với:

$l_{xx'}$, $m_{xy'}$, $n_{xz'}$ - côsin chỉ phương trục x so với các trục x', y', z’;

$l_{yx'}$, $m_{yy'}$, $n_{yz'}$ - côsin chỉ phương trục y so với các trục x', y', z’;

$l_{zx'}$, $m_{zy'}$, $n_{zz'}$ - côsin chỉ phương trục z so với các trục x', y', z’.

Ma trận độ cứng của phần tử trong hệ tọa độ địa phương xác định bằng công thức tổng quát:

$$\left[K\right]_e = \int_V \left[D\right]_e^T \left[E_0\right]_e \left[D\right]_e dV \quad (11.7)$$

trong đó:

$\left[D\right]_e$ - ma trận biến dạng-chuyển vị được rút ra từ quan hệ biến dạng-chuyển vị $\left\{\varepsilon\right\}_e = \left[D\right]_e \left\{q\right\}_e = \left[\partial\right]\left[B\right]_e \left\{q\right\}_e$ có dạng:

$$[D]_e = [\partial][B]_e \tag{11.8}$$

$[\partial]$ - ma trận toán tử vi phân được xác định từ lý thuyết đàn hồi có dạng phụ thuộc vào trạng thái biến dạng - chuyển vị của phần tử.

$[B]_e$ - ma trận hàm dạng trong biểu thức hàm chuyển vị $\{U\}_e = [B]_e\{q\}_e$, biểu diễn chuyển vị của điểm bất kỳ trong phần tử qua chuyển vị nút.

$[E_0]_e$ - ma trận đặc trưng đàn hồi của vật liệu trong quan hệ ứng suất - biến dạng của phần tử $\{\sigma\}_e = [E_0]_e\{\varepsilon\}_e$.

Ma trận khối lượng của phần tử trong hệ tọa độ địa phương xác định bằng công thức tổng quát:

$$[M]_e = \int_V [B]_e^T \rho [B]_e dV \tag{11.9}$$

trong đó, ρ là khối lượng vật liệu của phần tử trên một đơn vị thể tích.

Ma trận cản $[C]$ của hệ được tổ hợp tuyến tính từ ma trận độ cứng $[K]$ và ma trận khối lượng $[M]$ theo công thức:

$$[C] = \alpha[M] + \beta[K] \tag{11.10}$$

trong đó, α, β là hệ số cản Rayleigh. Các hệ số cản α, β liên hệ với tỷ số cản ξ bằng phương trình:

$$\xi = \frac{\alpha + \beta\omega^2}{2\omega} \tag{11.11}$$

với ω là tần số dao động riêng của hệ. Tỉ số cản được xác định bằng công thức:

$$\xi = \frac{\bar{\alpha}}{\omega} \tag{11.12}$$

trong đó $\bar{\alpha}$ xác định từ biểu thức: $\eta = \frac{y_m}{y_{m+1}} = e^{\bar{\alpha}T}$, với y_m, y_{m+1} là biên độ dao động riêng cách nhau chu kỳ T. Do ảnh hưởng của các tần số dao động riêng bậc cao đến giá trị của hệ số cản không đáng kể nên trong tính toán có thể tính hai hệ số α, β từ hai tỷ số cản ξ=const tương ứng với hai tần số dao động riêng thấp nhất.

Véc tơ lực nút qui đổi $\{R\}$ của hệ được xác định từ véc tơ lực nút qui đổi $\{R'\}_e$ của phần tử trong hệ tọa độ chung bằng phương pháp số mã.

Véc tơ lực nút qui đổi $\{R'\}_e$ của phần tử trong hệ tọa độ chung được xác định qua véc tơ lực nút qui đổi $\{R\}_e$ của phần tử trong hệ tọa độ địa phương:

$$\{R'\}_e = [T]_e^T \{R\}_e \quad (11.13)$$

Trong trường hợp tải trọng động có qui luật thay đổi theo thời gian $f(t)$:

$$\{R'(t)\}_e = [T]_e^T \{R\}_e f(t) \quad (11.14)$$

Véc tơ lực nút qui đổi $\{R\}_e$ của phần tử được xác định theo công thức tổng quát:

$$\{R\}_e = \{R_V\}_e + \{R_S\}_e + \{R_{\varepsilon^o}\}_e \quad (11.15)$$

trong đó:

$$\{R_V\}_e = \int_V [B]_e^T \{p_V\} dV \quad (11.16)$$

$$\{R_S\}_e = \int_S [B]_e^T \{p_S\} dS \quad (11.17)$$

$$\{R_{\varepsilon^o}\}_e = \int_V [D]_e^T [E_o]_e \{\varepsilon^o\}_e dV \quad (11.18)$$

với:

V, S - thể tích và diện tích của phần tử;

$\{p_V\} = \{p_{Vx} \quad p_{Vy} \quad p_{Vz}\}^T$ - lực phân bố theo thể tích;

$\{p_S\} = \{p_{Sx} \quad p_{Sy}\}^T$ - lực phân bố theo diện tích;

$\{\varepsilon^0\}_e = \{\varepsilon_x^0 \quad \varepsilon_y^0 \quad \varepsilon_z^0 \quad \gamma_{xy}^0 \quad \gamma_{zy}^0 \quad \gamma_{xz}^0\}^T$ - biến dạng cưỡng bức ban đầu trong phần tử;

Các công thức (11.16) ÷(11.18) là các công thức xác định véc tơ lực nút qui đổi $\{R\}_e$ do tải trọng và biến dạng cưỡng bức ban đầu tác dụng trong phần tử.

Phương pháp số mã là phương pháp sắp xếp các phần tử của $[K']_e$, $\{R'\}_e$ vào vị trí tương ứng trong $[K]$ và $\{R\}$ qua số mã phần tử tương ứng với số mã chung của hệ (tương tự cho ma trận khối lượng).

Qui ước mỗi chuyển vị nút (lực nút) được đặt tên bởi 2 số mã tương ứng:

- Số mã phần tử (SMPT) là số mã từ 1 đến f (f là tổng số chuyển vị nút của phần tử). Đó là chỉ số của chuyển vị nút sắp xếp trong $\{q\}_e$. Các phần tử cùng kiểu có số mã phần tử giống nhau.

- Số mã chung (SMC) là số mã từ 1 đến n (n là số chuyển vị nút của hệ xét trong hệ toạ độ chung). Đó là chỉ số chuyển vị nút trong $\{q\}$.

Dựa vào ý nghĩa của các phần tử trong $\left[K\right]$ và $\left\{R\right\}$ có thể xác định các phần tử của $\left[K\right]$ và $\left\{R\right\}$ theo công thức:

$$K_{J,K} = \sum_i K'^{(i)}_{(J,K)} \qquad R_J = \sum_i R'^{(i)}_{(J)} \tag{11.19}$$

trong đó:

- lấy tổng cho các phần tử thứ i;
- J, K lấy theo mã số chung. Các phần tử $K'^{(i)}_{(JK)}$, $R'^{(i)}_{(J)}$ của ma trận độ cứng $\left[K'\right]_i$, véc tơ lực nút qui đổi $\left\{R'\right\}_i$ của phần tử thứ i lấy theo số mã phần tử tương ứng với số mã chung của phần tử thứ i.

Nếu số mã chung J không thuộc nút có các phần tử đồng qui:

$$K_{j,k} = K'^{(i)}_{(j,k)} \qquad R_j = R'^{(i)}_{(j)} \tag{11.20}$$

11.1.2. Trình tự giải bài toán kết cấu bằng PP PTHH

1. Lựa chọn kiểu phần tử thích hợp theo yêu cầu và đặc điểm của bài toán.

2. Rời rạc hóa kết cấu. Kết cấu thực được rời rạc hóa thành một số hữu hạn các phần tử có kích thước hữu hạn liên kết với nhau tại các điểm nút.

3. Xác định ma trận độ cứng $\left[K\right]_e$, ma trận khối lượng $\left[M\right]_e$, véc tơ lực nút qui đổi $\left\{R\right\}_e$ của các phần tử trong hệ tọa độ địa phương và của hệ $\left[K'\right]_e$, $\left[M'\right]_e$, $\left\{R'\right\}_e$ trong hệ tọa độ chung $\left[K'\right]_e$:

$$\left[K'\right]_e = \left[T\right]_e^T \left[K\right]_e \left[T\right]_e \quad \left[M'\right]_e = \left[T\right]_e^T \left[M\right]_e \left[T\right]_e \quad \left\{R'\right\}_e = \left[T\right]_e^T \left\{R\right\}_e$$

4. Ghép nối các phần tử, thiết lập ma trận độ cứng $\left[K\right]$, ma trận khối lượng $\left[M\right]$, véc tơ lực nút qui đổi $\left\{R\right\}$ của hệ từ $\left[K'\right]_e$, $\left[M'\right]_e$, $\left\{R'\right\}_e$ bằng phương pháp số mã.

5. Xác định hệ số cản α, β và thiết lập ma trận cản $\left[C\right]$ theo (11.10).

6. Thiết lập phương trình cân bằng (11.1) hoặc (11.2) của hệ có xét đến điều kiện biên.

7. Xác định tần số dao động riêng và véc tơ riêng.

8. Giải phương trình (11.1) hoặc (11.2), xác định véc tơ gia tốc $\left\{\ddot{q}\right\}$, vận tốc $\left\{\dot{q}\right\}$ và chuyển vị nút $\left\{q\right\}$ của hệ.

9. Xác định véc tơ gia tốc $\left\{\ddot{q}'\right\}_e$, vận tốc $\left\{\dot{q}'\right\}_e$ và chuyển vị nút $\left\{q'\right\}_e$ của phần tử trong hệ tọa độ chung từ véc tơ gia tốc $\left\{\ddot{q}\right\}$, vận tốc $\left\{\dot{q}\right\}$ và chuyển vị nút

$\{q\}$ của hệ.

10. Xác định véc tơ gia tốc $\{\ddot{q}\}_e$, véc tơ vận tốc $\{\dot{q}\}_e$ và véc tơ chuyển vị nút $\{q\}_e$ của phần tử trong hệ tọa độ địa phương từ véc tơ gia tốc $\{\ddot{q}'\}_e$, vận tốc $\{\dot{q}'\}_e$ và chuyển vị nút $\{q'\}_e$ của phần tử trong hệ tọa độ chung, thí dụ với véc tơ chuyển vị nút: $\{q\}_e = [T]_e \{q'\}_e$. Tương tự cho véc tơ gia tốc $\{\ddot{q}\}_e$, véc tơ vận tốc $\{\dot{q}\}_e$.

11. Xác định ứng suất hoặc nội lực của phần tử.

11.2. CÁC PHƯƠNG PHÁP GIẢI BÀI TOÁN TUYẾN TÍNH

Phương trình cân bằng động (11.2) là hệ phương trình vi phân tuyến tính bậc hai. Về nguyên tắc, có thể sử dụng các thủ tục chuẩn để giải các phương trình vi phân tuyến tính hệ số hằng. Song, các thủ tục này không có hiệu quả khi cấp của ma trận lớn. Do vậy, khi giải hệ phương trình cân bằng động của PP PTHH thường sử dụng phương pháp số. Các phương pháp số chia thành hai nhóm:

1. Phương pháp phân tích theo các dạng dao động riêng (*Modal*).

2. Phương pháp tích phân trực tiếp (*Direct Integration*): giới thiệu phương pháp sai phân trung tâm và phương pháp Newmark.

A. Phương pháp phân tích theo dạng dao động riêng

Phương trình cân bằng động theo PP PTHH có dạng tổng quát (11.2). Khi giải hệ phương trình (11.2) bằng phương pháp phân tích theo các dạng riêng, chuyển vị nút $\{q(t)\}$ được biểu diễn dưới dạng:

$$\{q(t)\} = [\phi]\{X(t)\} \qquad (11.21)$$

trong đó:

$\{X(t)\}$ - véc tơ phụ thuộc thời gian có kích thước nx1 - gọi là chuyển vị khái quát;

$[\phi]$ - ma trận vuông kích thước n x n.

11.2.1. Xác định ma trận $[\phi]$

Ma trận $[\phi]$ được chọn là ma trận mà các cột của nó là các véc tơ riêng $\{\varphi_k\}$ đã chuẩn hoá tương ứng với tần số dao động riêng ω_k - là nghiệm của phương trình

dao động tự do không xét lực cản:

$$[M]\{\ddot{q}(t)\} + [K]\{q(t)\} = \{0\} \qquad (11.22)$$

Khi dao động tự do, tất cả các điểm của hệ dao động điều hoà nên:

$$\{q(t)\} = \{\varphi\} sin(\omega t + \lambda) \qquad (11.23)$$

trong đó:

$\{\varphi\}$ - véc tơ kích thước n x1;

ω - tần số dao động riêng;

λ - độ lệch pha ban đầu.

Thay (11.23) vào (11.22), nhận được:

$$[K]\{\varphi\} = \omega^2 [M]\{\varphi\} \qquad (11.24)$$

Phương trình (11.24) là phương trình điển hình của bài toán trị riêng. Giải (11.24) xác định được n cặp trị riêng và véc tơ riêng: $\omega_1^2, \{\varphi_1\}$; $\omega_2^2, \{\varphi_2\}$;... $\omega_k^2, \{\varphi_k\}$ ... $\omega_n^2, \{\varphi_n\}$.

Theo lý thuyết dao động, các véc tơ riêng có tính chất trực giao:

$$\{\varphi_k\}^T [M]\{\varphi_j\} = 1 \quad \text{khi} \quad i = j \qquad (11.25.a)$$

$$\{\varphi_k\}^T [M]\{\varphi_j\} = 0 \quad \text{khi} \quad i \neq j \qquad (11.25.b)$$

Ma trận $[\phi]$ có dạng:

$$[\phi] = \left[\{\varphi_1\} \quad \{\varphi_2\} \quad ...\{\varphi_k\}... \quad \{\varphi_n\}\right] \qquad (11.26)$$

Với $\{\varphi_k\}$ là véc tơ riêng thứ k đã chuẩn hoá tương ứng với tần số dao động riêng ω_k (k=1, 2,..n). Véc tơ riêng chuẩn hoá được xác định bằng công thức:

$$\{\varphi_k\}_{ch} = \frac{\{\varphi_k\}}{a_k} \qquad (11.27)$$

trong đó:

$\{\varphi_k\}$ - véc tơ riêng chưa chuẩn hoá nhận được từ giải phương trình (11.24).

a_k - hệ số xác định từ phương trình:

$$a_k^2 = \{\varphi_k\}^T [M]\{\varphi_k\} \qquad (11.28)$$

Ký hiệu:

$$[\Omega] = \begin{bmatrix} \omega_1^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \omega_2^2 & 0 & 0 \\ . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & \omega_n^2 \end{bmatrix} \qquad (11.29)$$

Thay n nghiệm trị riêng và véc tơ riêng vào (11.24), ta có:

$$[K][\phi] = [M][\phi][\Omega] \qquad (11.30)$$

Nhân hai vế với $[\phi]^T$:

$$[\phi]^T[K][\phi]=[\phi]^T[M][\phi][\Omega] \tag{11.31}$$

Theo tính chất trực giao của các dạng riêng:

$$[\phi]^T[M][\phi]=[I] \quad ([I] \text{ là ma trận đơn vị}) \tag{11.32}$$

Chú ý đến (11.32), từ (11.31) rút ra:

$$[\phi]^T[K][\phi]=[\Omega] \tag{11.33}$$

11.2.2. Phương trình xác định chuyển vị khái quát $\{X(t)\}$

Thay (11.21) vào (11.2) và nhân trái với $[\phi]^T$ ta có:

$$[\phi]^T[M][\phi]\{\ddot{X}(t)\}+[\phi]^T[C][\phi]\{\dot{X}(t)\}+[\phi]^T[K][\phi]\{X(t)\}=[\phi]^T\{R(t)\}$$

Chú ý đến (11.32) và (11.33), hệ phương trình vi phân biểu diễn chuyển vị khái quát có dạng:

$$\{\ddot{X}(t)\}+[\phi]^T[C][\phi]\{\dot{X}(t)\}+[\Omega]\{X(t)\}=[\phi]^T\{R(t)\} \tag{11.34}$$

Các điều kiện ban đầu của chuyển vị khái quát $\{X_o\}$ và $\{\dot{X}_o\}$ được xác định từ véc tơ chuyển vị ban đầu $\{q\}$, tốc độ chuyển vị ban đầu $\{\dot{q}_0\}$ tại thời điểm ban đầu $t=0$. Nhân phải hai vế của (11.21) với $[\phi]^T[M]$ tại thời điểm $t=0$, ta có:

$$[\phi]^T[M]\{q_0\}=[\phi]^T[M][\phi]\{X_0\}.$$

Chú ý đến (11.32), rút ra:

$$\{X_0\}=[\phi]^T[M]\{q_0\} \tag{11.35}$$

Tương tự:

$$\{\dot{X}_0\}=[\phi]^T[M]\{\dot{q}_0\} \tag{11.36}$$

1. Trường hợp không xét lực cản

Khi không xét lực cản, (11.34) có dạng:

$$\{\ddot{X}(t)\}+[\Omega]\{X(t)\}=[\phi]^T\{R(t)\} \tag{11.37}$$

Xét nghiệm thứ k, từ (11.37) phương trình xác định $X_k(t)$ có dạng:

$$\ddot{X}_k(t)+\omega_k^2X_k(t)=r_k(t) \quad \text{Với k=1....n} \tag{11.38}$$

trong đó:

$$r_k(t)=\{\varphi_k\}^T\{R(t)\} \tag{11.39}$$

Phương trình (11.38) có dạng tương tự như phương trình biểu diễn dao động của hệ một bậc tự do nên nghiệm có dạng:

$$X_k(t) = A_k sin\omega_k t + B_k cos\omega_k t + \frac{1}{\omega_k}\int_0^t r_k(u)\, sin\omega_k(t-u)\, du \qquad (11.40)$$

trong đó:

- Hai thành phần đầu là nghiệm của phương trình vi phân thuần nhất (dao động tự do), còn thành phần thứ ba là nghiệm riêng của phương trình vi phân không thuần nhất.

- Hằng số tích phân A_k, B_k xác định từ điều kiện ban đầu theo (11.35) và (11.36).

Phương trình (11.40) có dạng khác:

$$X_k(t) = A_k^* sin(\omega_k t + \lambda_k) + \frac{1}{\omega_k}\int_0^t r_k(u)\, sin\omega_k(t-u)\, du \qquad (11.41)$$

Với:

$$A_k^* = \sqrt{A_k^2 + B_k^2} \text{ và } \lambda_k = arctg\frac{A_k}{B_k} \qquad (11.42)$$

Khi tải trọng động tác dụng lên hệ có cùng qui luật $f(t)$ theo thời gian, từ (11.39):

$$r_k(t) = \{\varphi_k\}^T \{R\} f(t) \qquad (11.43)$$

Với $\{R\}$ là véc tơ tải qui nút khi $f(t) = 1$. Thay (11.43) vào (11.41):

$$X_k(t) = A_k^* sin(\omega_k t + \lambda_k) + \{\varphi_k\}^T \{R\}\frac{1}{\omega_k}\int_0^t f(u)\, sin\omega_k(t-u)\, du \qquad (11.44)$$

hay: $$X_k(t) = A_k^* sin(\omega_k t + \lambda_k) + \{\varphi_k\}^T \{R\}\frac{1}{\omega_k^2} K_k(t) \qquad (11.45)$$

với: $$K_k(t) = \omega_k\int_0^t f(u)\, sin\omega_k(t-u)\, du \qquad (11.46)$$

Xét với tải trọng điều hoà $f(t) = sinrt$, từ (11.46):

$$K_k(t) = \omega_k\int_0^t sinru.sin\omega_k(t-u)\, du = \frac{\omega_k^2}{\omega_k^2 - r^2}\left(sinrt - \frac{r}{\omega_k} sin\omega_k t\right) \qquad (11.47)$$

Với tích phân:

$$\int_0^t sinru.sin\omega_k(t-u) du = \frac{\omega_k}{\omega_k^2 - r^2}\left(sinrt - \frac{r}{\omega_k} sin\omega_k t\right)$$

Thay (11.47) vào (11.45):

$$X_k(t) = A_k^* sin(\omega_k t + \lambda_k) + \{\phi_k\}^T \{R\}\frac{1}{\omega_k^2 - r^2}(sinrt - \frac{r}{\omega_k} sin\omega_k t) \qquad (11.48)$$

Giả sử trước khi chịu tải trọng, hệ ở trạng thái tĩnh, nghĩa là $\{q_0\} = \{\dot{q}_0\} = \{0\}$

$$X_k(t) = \{\phi_k\}^T \{R\} \frac{1}{\omega_k^2 - r^2}(sinrt - \frac{r}{\omega_k} sin\omega_k t) \tag{11.49}$$

$$\dot{X}_k(t) = \{\phi_k\}^T \{R\} \frac{1}{\omega_k^2 - r^2}(r.cosrt - r.cos\omega_k t) \tag{11.50}$$

$$\ddot{X}_k(t) = \{\phi_k\}^T \{R\} \frac{1}{\omega_k^2 - r^2}(-r^2 sinrt + r\omega_k sin\omega_k t) \tag{11.51}$$

Trong giai đoạn dao động bình ổn (không xét thành phần dao động với tần số dao động riêng ω_k)

$$K_k(t) = \frac{\omega_k^2}{\omega_k^2 - r^2} sinrt \tag{11.52}$$

$$X_k(t) = A_k^* sin(\omega_k t + \lambda_k) + \{\varphi_k\}^T \{R\} \frac{sinrt}{\omega_k^2 - r^2} \tag{11.53}$$

Giả sử trước khi chịu tác dụng của tải trọng, hệ ở trạng thái tĩnh nghĩa là $\{q_o\} = \{\dot{q}_o\} = 0$, thì:

$$X_k(t) = \{\varphi_k\}^T \{R\} \frac{sinrt}{\omega_k^2 - r^2} \tag{11.54}$$

$$\dot{X}_k(t) = \{\varphi_k\}^T \{R\} \frac{r.cos\, rt}{\omega_k^2 - r^2} \tag{11.55}$$

$$\ddot{X}_k(t) = -\{\varphi_k\}^T \{R\} \frac{r^2.sinrt}{\omega_k^2 - r^2} \tag{11.56}$$

Hệ có n bậc tự do sẽ có n nghiệm dạng (11.41) hoặc (11.44÷11.45). Thành phần chuyển vị nút thứ m $q_{m(t)}$ của véc tơ chuyển vị nút $\{q_{(t)}\}$ bằng tổng chuyển vị nút trong tất cả các dạng riêng:

$$q_m(t) = \sum_{k=1}^{n} q_{mk}(t) = \sum_{k=1}^{n} \varphi_{mk} X_k(t) \tag{11.57}$$

Với φ_{mk} là giá trị thứ m của véc tơ riêng thứ k.

Tổng quát, véc tơ chuyển vị nút

$$\{q(t)\} = [\phi]\{X(t)\} \tag{11.58}$$

trong đó:

$$\{X(t)\} = \{X_1(t) \quad X_2(t) \quad ... \quad X_n(t)\}^T \tag{11.59}$$

2. Trường hợp xét lực cản

Khi không xét lực cản, hệ phương trình vi phân (11.34) xác định chuyển vị khái quát được đưa về dạng (11.37) và có thể phân ly thành n phương trình riêng biệt dạng (11.38).

Trong thực tế rất khó xác định chính xác các tham số cản của kết cấu do chúng phụ thuộc vào các tần số dao động riêng. Hơn nữa để sử dụng có hiệu quả phương pháp phân tích ra các dạng riêng theo dạng (11.34), lực cản được biểu diễn bằng quan hệ:

$$\{\varphi_k\}^T[C]\{\varphi_j\} = 2\omega_k\xi_k\delta_{kj} \qquad (11.60)$$

trong đó:

ξ_k - tỉ số cản của dạng dao động riêng thứ k được xác định theo (11.20).

δ_{kj} - toán tử Kronecker với $\delta_{kj} = 1$ khi $k = j$ và $\delta_{kj} = 0$ khi $k \neq j$.

Với quan hệ (11.60), phương trình (11.34) phân ly thành n phương trình dạng:

$$\ddot{X}_k(t) + 2\omega_k\xi_k\dot{X}_k(t) + \omega_k^2 X_k(t) = r_k(t) \quad \text{Với } k = 1, 2, \dots n \qquad (11.61)$$

Phương trình (11.61) có dạng như phương trình dao động của hệ một bậc tự do có xét lực cản với khối lượng bằng đơn vị.

Ký hiệu: $\varpi_k = \omega_k\sqrt{1-\xi_k^2}$ (11.62)

Nghiệm (11.61) có dạng:

$$X_k(t) = e^{-\xi_k\varpi_k t}\left(A_k sin\varpi_k t + B_k cos\varpi_k t\right) + \frac{1}{\varpi_k}\int_0^t r_k(u)e^{-\xi_k\omega_k(t-u)} sin\varpi_k(t-u)\,du \qquad (11.63)$$

trong đó:

- Thành phần đầu của (11.63) là nghiệm của phương trình vi phân thuần nhất (dao động tự do) và thành phần thứ hai là nghiệm riêng của phương trình không thuần nhất có xét lực cản.
- Các hằng số tích phân A_k và B_k xác định từ điều kiện ban đầu.

Tương tự như trường hợp không xét lực cản, $q_m(t)$ là thành phần chuyển vị nút thứ m của véc tơ chuyển vị nút $\{q(t)\}$ và véc tơ chuyển vị nút $\{q(t)\}$ xác định theo (11.57) và (11.58). Trong trường hợp thành phần thứ hai của (11.63) không tính được bằng tích phân dưới dạng tường minh có thể sử dụng phương pháp tích phân số.

B. Phương pháp tích phân trực tiếp

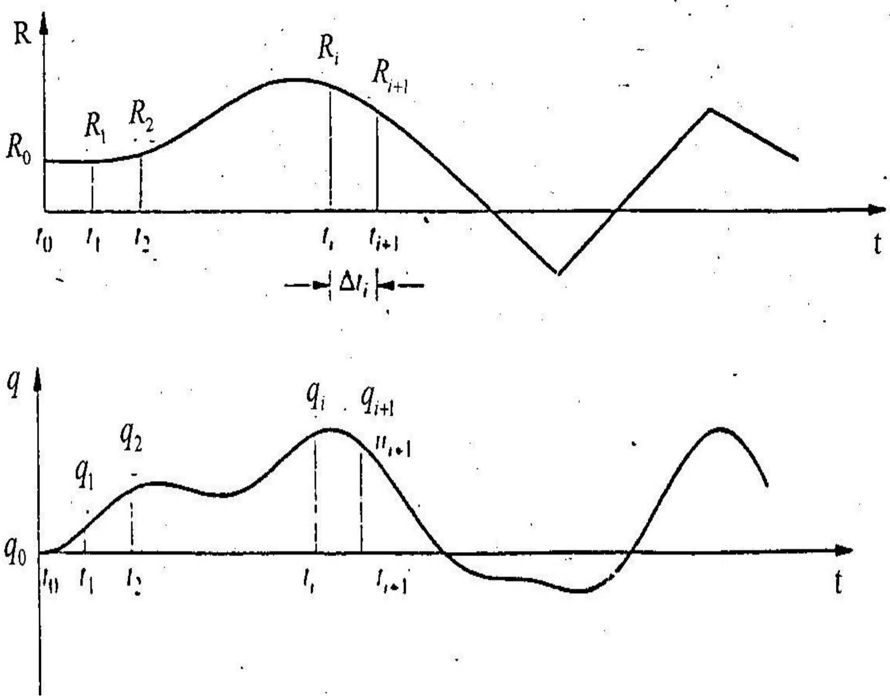
Phương pháp tích phân trực tiếp là phương pháp trước khi tích phân không tiến hành bất kỳ biến đổi nào đối với phương trình khảo sát. Khi tích phân trực tiếp phương trình (11.2) trong khoảng thời gian từ 0 đến t^*, ta chia khoảng thời gian làm N khoảng Δt bằng nhau:

$$\Delta t = \frac{t^*}{N} \qquad (11.64)$$

và tính tích phân theo từng bước với khoảng thời gian Δt. Giả sử biết điều kiện ban đầu tại thời điểm $t = 0$:

$$\{q\} = \{q_0\}\,;\ \{\dot{q}\} = \{\dot{q}_0\} \text{ và } \{\ddot{q}\} = \{\ddot{q}_0\} \qquad (11.65)$$

thì sau từng bước tích phân sẽ lần lượt nhận được nghiệm của (8.2) tại các thời điểm $i = 0, \Delta t, 2\Delta t \ldots t, t + \Delta t, t + 2\Delta t, \ldots t^*$. Trên hình 11-1 biểu diễn lực và chuyển vị tại các thời điểm tích phân theo bước thời gian thứ i.



Hình 11.1

Độ ổn định nghiệm của các phương pháp tích phân trực tiếp phụ thuộc vào độ lớn của khoảng thời gian Δt.

Phương pháp tích phân trực tiếp không những hiệu quả cho các bài toán tuyến tính mà rất hiệu quả cho cả bài toán phi tuyến.

11.2.3. Phương pháp sai phân trung tâm

1. Nội dung phương pháp và thuật toán

Gia tốc và vận tốc tại bước thời gian thứ i được biểu diễn bằng các biểu thức sai phân:

$$\{\ddot{q}\}_i = \frac{\{q\}_{i+1} - 2\{q\}_i + \{q\}_{i-1}}{\Delta t^2} \tag{11.66}$$

$$\{\dot{q}\}_i = \frac{\{q\}_{i+1} - \{q\}_{i-1}}{2\Delta t} \tag{11.67}$$

Thay (11.66) và (11.67) vào (11.2) dẫn đến phương trình xác định $\{q\}_{i+1}$

$$[M]\frac{\{q\}_{i+1} - 2\{q\}_i + \{q\}_{i-1}}{(\Delta t)^2} + [C]\frac{\{q\}_{i+1} - \{q\}_{i-1}}{2\Delta t} + [K]\{q\}_i = \{R\}_i \tag{11.68}$$

Trong phương trình này, chuyển vị $\{q\}_i$ và $\{q\}_{i-1}$ đã biết từ tích phân theo bước thời gian trước. Như vậy, chuyển vị nút $\{q\}_{i+1}$ được tính từ điều kiện cân bằng tại bước thời gian thứ i.

Chuyển các đại lượng đã biết sang vế phải, nhận được:

$$\left(\frac{[M]}{(\Delta t)^2} + \frac{[C]}{2\Delta t}\right)\{q\}_{i+1} = \{R\}_i - \left(\frac{[M]}{(\Delta t)^2} - \frac{[C]}{2\Delta t}\right)\{q\}_{i-1} - \left([K] - \frac{2[M]}{(\Delta t)^2}\right)\{q\}_i \tag{11.69}$$

hoặc:

$$\left[\widehat{K}\right]\{q\}_{i+1} = \left\{\widehat{R}\right\}_i \tag{11.70}$$

trong đó:

$$\left[\widehat{K}\right] = \frac{[M]}{(\Delta t)^2} + \frac{[C]}{2\Delta t} \tag{11.71}$$

$$\left\{\widehat{R}\right\}_i = \{R\}_i - \left(\frac{[M]}{(\Delta t)^2} - \frac{[C]}{2\Delta t}\right)\{q\}_{i-1} - \left([K] - \frac{2[M]}{(\Delta t)^2}\right)\{q\}_i \tag{11.72}$$

Từ (11.70) xác định được $\{q\}_{i+1}$:

$$\{q\}_{i+1} = \frac{\left\{\widehat{R}\right\}_i}{\left[\widehat{K}\right]} \tag{11.73}$$

Chuyển vị $\{q\}_{i+1}$ tại bước thời gian thứ $i+1$ được xác định từ phương trình cân bằng động (11.2) tại bước thời gian thứ i mà không sử dụng điều kiện cân bằng tại bước thời gian thứ $i+1$. Do đó, phương pháp tích phân trực tiếp này gọi là phương pháp tích phân tường minh.

Chú ý là $\{q\}_{i+1}$ được tính từ $\{q\}_i$ và $\{q\}_{i-1}$. Bởi vậy, để tính chuyển vị tại bước thời gian thứ $i=1$ (Δt), cần xác định $\{q_{-1}\}$ tại bước thời gian thứ $i=0$ ($-\Delta t$) so với thời điểm ban đầu $t=0$.

Từ (11.66) và (11.67):

$$\{\dot{q}\}_0 = \frac{\{q\}_1 - \{q\}_{-1}}{2\Delta t} \qquad \{\ddot{q}\}_0 = \frac{\{q\}_1 - 2\{q\}_0 + \{q\}_{-1}}{(\Delta t)^2} \tag{11.74}$$

Xác định $\{q\}_1$ từ phương trình đầu và thay vào phương trình thứ hai, nhận được:

$$\{q\}_{-1} = \{q\}_0 - \Delta t\{\dot{q}\}_0 + \frac{(\Delta t)^2}{2}\{\ddot{q}\}_0 \tag{11.75}$$

Phương trình cân bằng động tại thời điểm ban đầu $t = 0$ với chuyển vị ban đầu $\{q\}_0$, vận tốc ban đầu $\{\dot{q}\}_0$ và véc tơ tải qui nút $\{R\}_0$ đã biết, có dạng:

$$[M]\{\ddot{q}\}_0 + [C]\{\dot{q}\}_0 + [K]\{q\}_0 = \{R\}_0$$

Từ phương trình này rút ra gia tốc tại thời điểm $t = 0$:

$$\{\ddot{q}\}_0 = \frac{\{R\}_0 - [C]\{\dot{q}\}_0 - [K]\{q\}_0}{[M]} \tag{11.76}$$

Thuật toán của phương pháp sai phân trung tâm cho trong bảng 11.1.

Bảng 11.1. **Thuật toán của phương pháp sai phân trung tâm**

1.0 *Các phép tính ban đầu*

1.1 Xác định ma trận độ cứng $[K]$, ma trận khối lượng $[M]$, ma trận cản $[C]$ và véc tơ tải qui nút $\{R\}$ của hệ đã xét đến điều kiện biên;

$$\{\ddot{q}\}_0 = \frac{\{R\}_0 - [C]\{\dot{q}\}_0 - [K]\{q\}_0}{[M]}$$

1.2 $\{q\}_{-1} = \{q\}_0 - \Delta t\{\dot{q}\}_0 + \frac{(\Delta t)^2}{2}\{\ddot{q}\}_0$

1.3 $[\hat{K}] = \frac{[M]}{(\Delta t)^2} + \frac{[C]}{2\Delta t}$

1.4 $[a] = \frac{[M]}{(\Delta t)^2} - \frac{[C]}{2\Delta t}$

1.5 $[b] = [K] - \frac{2[M]}{(\Delta t)^2}$

2.0 *Đối với từng bước thời gian thứ i*

2.1 $\{\hat{R}\}_i = \{R\}_i - [a]\{q\}_{i-1} - [b]\{q\}_i$

2.2 $\{q\}_{i+1} = \frac{\{\hat{R}\}_i}{[\hat{K}]}$

2.3 Khi cần thiết xác định gia tốc và vận tốc tại thời điểm i

$$\{\dot{q}\}_i = \frac{\{q\}_{i+1} - \{q\}_{i-1}}{2\Delta t} \qquad \{\ddot{q}\}_i = \frac{\{q\}_{i+1} - 2\{q\}_i + \{q\}_{i-1}}{(\Delta t)^2}$$

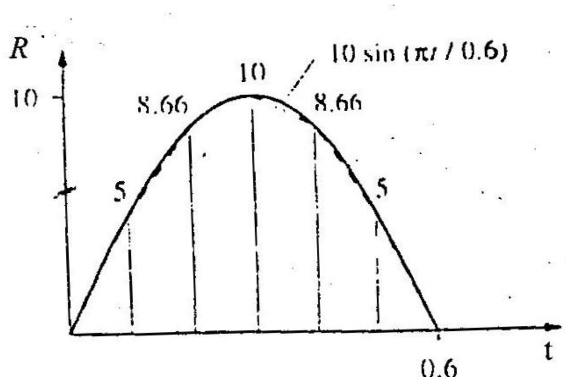
3.0 *Tính cho các bước thời gian tiếp theo từ bước 2.1 đến 2.3.*

Phương pháp sai phân trung tâm là phương pháp ổn định có điều kiện. Để nghiệm ổn định, bước thời gian Δt cần phải thoả mãn:

$$\Delta t < \Delta t_{gh} \le \frac{T_{\min}}{\pi} \quad (T_{\min} \text{ là chu kỳ dao động riêng nhỏ nhất của hệ}) \quad (11.77)$$

2. Thí dụ 11.1

Xác định chuyển vị của hệ 01 bậc tự do chịu tải trọng động cho trên hình 11-2.



Hình 11.2

Các bước giải theo PP sai phân trung tâm với bước thời gian $\Delta t = 0{,}1\sec$ như sau:

1.0 *Tính toán ban đầu*

Khối lượng $m = 0{,}2533$; độ cứng $k = 10$; hệ số cản $c = 0{,}1592$; Tại thời điểm $t = 0$: chuyển vị và vận tốc ban đầu $q_0 = 0$; $\dot{q}_0 = 0$;

1.1 $\ddot{q}_0 = \dfrac{R_0 - c.\dot{q}_0 - k.q_0}{m} = 0$

1.2 $q_{-1} = q_0 - (\Delta t)\dot{q}_0 + \dfrac{(\Delta t)^2}{2}\ddot{q}_0 = 0$

1.3 $\widehat{k} = \dfrac{m}{(\Delta t)^2} + \dfrac{c}{2\Delta t} = 26{,}13$

1.4 $a = \dfrac{m}{(\Delta t)^2} - \dfrac{c}{2\Delta t} = 24{,}53$

1.5 $b = k - \dfrac{2m}{(\Delta t)^2} = -40{,}66$

2.0 *Tính cho từng bước thời gian*

2.1 $\widehat{R}_i = R_i - a.q_{i-1} - b.q_i = R_i - 24{,}53.q_{i-1} - 40{,}66.q_i$

2.2 $q_{i+1} = \dfrac{\widehat{R}_i}{\widehat{k}} = \dfrac{\widehat{R}_i}{26{,}13}$

3.0 *Tính cho các bước thời gian tiếp theo từ bước 2.1 và 2.2 với* $i = 0,1,2,3,...$

Giá trị số theo từng bước thời gian cho trong bảng:

t_i	R_i	q_{i-1}	q_i	$\hat{R}_i$ (2.1)	q_{i+1} (2.2)
0,0	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
0,1	5,0000	0,0000	0,0000	5,0000	0,1914
0,2	8,6602	0,0000	0,1914	16,4419	0,6293
0,3	10,0000	0,1914	0,6293	30,8934	1,1825
0,4	8,6602	0,6293	1,1825	41,3001	1,5808
0,5	5,0000	1,1825	1,5808	40,2649	1,5412
0,6	0,0000	1,5808	1,5412	23,8809	0,9141
0,7	0,0000	1,5412	0,9141	-0,6456	-0,0247
0,8	0,0000	0,9141	-0,0247	-23,4309	-0,8968
0,9	0,0000	-0,0247	-0,8968	-35,8598	-1,3726
1,0	0,0000	-0,8968	-1,3726	-33,8058	-1,2940

11.2.4. Phương pháp Newmark

1. Nội dung phương pháp và thuật toán

Phương trình cân bằng động tại thời điểm i:

$$[M]\{\ddot{q}\}_i + [C]\{\dot{q}\}_i + (f_S)_i = \{R\}_i \qquad (11.78)$$

Phương trình cân bằng động tại bước thời điểm $i+1$:

$$[M]\{\ddot{q}\}_{i+1} + [C]\{\dot{q}\}_{i+1} + (f_S)_{i+1} = \{R\}_{i+1} \qquad (11.79)$$

Đối với bài toán tuyến tính:

$$(f_S)_i = [K]\{q\}_i \text{ và } (f_S)_{i+1} = [K]\{q\}_{i+1} \qquad (11.80)$$

Thủ tục tích phân số theo từng bước thời gian Δt cho phép xác định được $\{q\}_{i+1}, \{\dot{q}\}_{i+1}, \{\ddot{q}\}_{i+1}$ *từ* $\{q\}_i, \{\dot{q}\}_i, \{\ddot{q}\}_i$ đã biết từ bước tích phân trước.

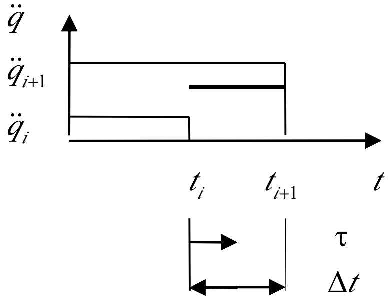
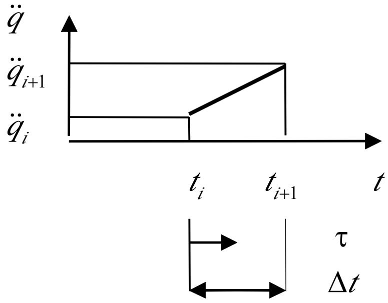
Phương pháp Newmark là phương pháp tích phân theo từng bước thời gian, sử dụng các giả thiết sau [13]:

$$\{\dot{q}\}_{i+1} = \{\dot{q}\}_i + \left[(1-\gamma)\Delta t\right]\{\ddot{q}\}_i + (\gamma\Delta t)\{\ddot{q}\}_{i+1} \qquad (11.81.a)$$

$$\{q\}_{i+1} = \{q\}_i + (\Delta t)\{\dot{q}\}_i + \left[(0,5-\beta)(\Delta t)^2\right]\{\ddot{q}\}_i + \left[\beta(\Delta t)^2\right]\{\ddot{q}\}_{i+1} \qquad (11.81.b)$$

Các tham số β, γ biểu diễn sự thay đổi gia tốc trên từng bước thời gian tích phân, đảm bảo ổn định và độ chính xác của nghiệm. Khi $\gamma = \frac{1}{2}, \beta = \frac{1}{4}$ các biểu thức (11.81) tương ứng với phương pháp gia tốc trung bình không đổi. Khi $\gamma = \frac{1}{2}, \beta = \frac{1}{6}$ các biểu thức (11.81) tương ứng với phương pháp gia tốc tuyến tính.

Quan hệ giữa $\{q\}_{i+1}, \{\dot{q}\}_{i+1}, \{\ddot{q}\}_{i+1}$ và $\{q\}_i, \{\dot{q}\}_i, \{\ddot{q}\}_i$ tương ứng với phương pháp gia tốc trung bình không đổi và phương pháp gia tốc tuyến tính cho trong bảng sau

<table>
<tr><td colspan="2">1. Gia tốc trung bình không đổi</td></tr>
<tr><td>$\{\ddot{q}(\tau)\} = \frac{1}{2}\left(\{\ddot{q}\}_{i+1} + \{\ddot{q}\}_i\right)$ (11.82)</td><td rowspan="3">
</td></tr>
<tr><td>$\{\dot{q}(\tau)\} = \{\dot{q}\}_i + \frac{\tau}{2}\left(\{\ddot{q}\}_{i+1} + \{\ddot{q}\}_i\right)$ (11.83)</td></tr>
<tr><td>$\{\dot{q}\}_{i+1} = \{\dot{q}\}_i + \frac{\Delta t}{2}\left(\{\ddot{q}\}_{i+1} + \{\ddot{q}\}_i\right)$ (11.84)</td></tr>
<tr><td colspan="2">$\{q(\tau)\} = \{q\}_i + \{\dot{q}\}_i.\tau + \frac{\tau^2}{4}\left(\{\ddot{q}\}_{i+1} + \{\ddot{q}\}_i\right)$ (11.85)</td></tr>
<tr><td colspan="2">$\{q\}_{i+1} = \{q\}_i + \{\dot{q}\}_i \Delta t + \frac{(\Delta t)^2}{4}\left(\{\ddot{q}\}_{i+1} + \{\ddot{q}\}_i\right)$ (11.86)</td></tr>
<tr><td colspan="2">2. Gia tốc tuyến tính</td></tr>
<tr><td>$\{\ddot{q}(\tau)\} = \{\ddot{q}\}_i + \frac{\tau}{\Delta t}\left(\{\ddot{q}\}_{i+1} - \{\ddot{q}\}_i\right)$ (11.82)</td><td rowspan="3">
</td></tr>
<tr><td>$\{\dot{q}(\tau)\} = \{\dot{q}\}_i + \{\ddot{q}\}_i.\tau + \frac{\tau^2}{2\Delta t}\left(\{\ddot{q}\}_{i+1} - \{\ddot{q}\}_i\right)$ (11.83)</td></tr>
<tr><td>$\{\dot{q}\}_{i+1} = \{\dot{q}\}_i + \frac{\Delta t}{2}\left(\{\ddot{q}\}_{i+1} + \{\ddot{q}\}_i\right)$ (11.84)</td></tr>
<tr><td colspan="2">$\{q(\tau)\} = \{q\}_i + \{\dot{q}\}_i \tau + \{\ddot{q}\}_i \frac{\tau^2}{2} + \frac{\tau^3}{6\Delta t}\left(\{\ddot{q}\}_{i+1} - \{\ddot{q}\}_i\right)$ (11.85)</td></tr>
<tr><td colspan="2">$\{q\}_{i+1} = \{q\}_i + \{\dot{q}\}_i \Delta t + (\Delta t)^2\left(\frac{1}{6}\{\ddot{q}\}_{i+1} + \frac{1}{3}\{\ddot{q}\}_i\right)$ (11.86)</td></tr>
</table>

Phương trình (11.82) biểu diễn sự thay đổi của gia tốc trong từng bước thời gian là không đổi hoặc tuyến tính. Tích phân biểu thức $\{\ddot{q}(\tau)\}$ theo (11.82) xác định được vận tốc $\{\dot{q}(\tau)\}$ và tại thời điểm $\tau = \Delta t$ nhận được vận tốc $\{\dot{q}\}_{i+1}$. Tích phân biểu thức $\{\dot{q}(\tau)\}$ theo (11.83) xác định được chuyển vị $\{q(\tau)\}$ và tại thời điểm $\tau = \Delta t$ nhận được chuyển vị $\{q\}_{i+1}$. So sánh (11.84), (11.86) với (11.81) xác định được các tham số γ, β tương ứng với phương pháp gia tốc trung bình không đổi và phương pháp gia tốc tuyến tính.

Tích phân số theo từng bước thời gian với các đại lượng chuyển vị, vận tốc, gia tốc, lực nút qui đổi dưới dạng số gia rất thuận lợi khi giải bài toán phi tuyến. Ký hiệu:

$$\{\Delta q\}_i = \{q\}_{i+1} - \{q\}_i; \tag{11.87}$$

$$\{\Delta \dot{q}\}_i = \{\dot{q}\}_{i+1} - \{\dot{q}\}_i; \tag{11.88}$$

$$\{\Delta \ddot{q}\}_i = \{\ddot{q}\}_{i+1} - \{\ddot{q}\}_i \tag{11.89}$$

$$\{\Delta R\}_i = \{R\}_{i+1} - \{R\}_i \tag{11.90}$$

Phương trình (11.81) dưới dạng số gia:

$$\{\Delta \dot{q}\}_i = (\Delta t)\{\ddot{q}\}_i + (\gamma.\Delta t)\{\Delta \ddot{q}\}_i; \tag{11.91}$$

$$\{\Delta q\}_i = (\Delta t)\{\dot{q}\}_i + \frac{(\Delta t)^2}{2}\{\ddot{q}\}_i + \beta(\Delta t)^2\{\Delta \ddot{q}\}_i \tag{11.92}$$

Từ phương trình thứ hai, rút ra

$$\{\Delta \ddot{q}\}_i = \frac{1}{\beta(\Delta t)^2}\{\Delta q\}_i - \frac{1}{\beta \Delta t}\{\dot{q}\}_i - \frac{1}{2\beta}\{\ddot{q}\}_i \tag{11.93}$$

Thay (11.93) vào (11.91)

$$\{\Delta \dot{q}\}_i = \frac{\gamma}{\beta \Delta t}\{\Delta q\}_i - \frac{\gamma}{\beta}\{\dot{q}\}_i + \Delta t.\left(1 - \frac{\gamma}{2\beta}\right)\{\ddot{q}\}_i \tag{11.94}$$

Từ hai phương trình cân bằng động tại bước thời gian i theo (11.78) và bước thời gian $i+1$ theo (11.79), chú ý đến (11.94) nhận được phương trình chuyển động dưới dạng số gia.

Đối với bài toán tuyến tính:

$$[M]\{\Delta \ddot{q}\}_i + [C]\{\Delta \dot{q}\}_i + [K]\{\Delta q\}_i = \{\Delta R\}_i \tag{11.95}$$

hay:

$$\left[\hat{K}\right]\{\Delta q\}_i = \left\{\Delta \hat{R}\right\}_i \tag{11.96}$$

trong đó:

$$\left[\hat{K}\right] = [K] + \frac{\gamma}{\beta \Delta t}[C] + \frac{1}{\beta(\Delta t)^2}[M] \tag{11.97}$$

$$\left\{\Delta\widehat{R}\right\}_i = \left\{\Delta R\right\}_i + \left(\frac{1}{\beta\Delta t}[M] + \frac{\gamma}{\beta}[C]\right)\left\{\dot{q}\right\}_i + \left[\frac{1}{2\beta}[M] + \Delta t\left(\frac{\gamma}{2\beta} - 1\right)[C]\right]\left\{\ddot{q}\right\}_i \quad (11.98)$$

Từ (11.96), gia số chuyển vị nút:

$$\left\{\Delta q\right\}_i = \left[\widehat{K}\right]^{-1}\left\{\Delta\widehat{R}\right\}_i \quad (11.99)$$

Sau khi xác định được $\left\{\Delta q\right\}_i$, các đại lượng $\left\{\Delta\dot{q}\right\}_i$ và $\left\{\Delta\ddot{q}\right\}_i$ được xác định bằng (11.93) và (11.94); Các đại lượng $\left\{q\right\}_{i+1}$, $\left\{\dot{q}\right\}_{i+1}$ và $\left\{\ddot{q}\right\}_{i+1}$ xác định bằng biểu thức ($11.87 \div 11.89$).

Gia tốc có thể xác định từ phương trình cân bằng động tại bước thời gian $i+1$ (thời điểm t_{i+1}):

$$\left\{\ddot{q}\right\}_{i+1} = \frac{\left\{R\right\}_{i+1} - [C]\left\{\dot{q}\right\}_{i+1} - [K]\left\{q\right\}_{i+1}}{[M]} \quad (11.100)$$

Phương trình (11.100) dùng để xác định gia tốc tại thời điểm $t = 0$.

Phương pháp tích phân số nhận được nghiệm tại bước thời gian $i+1$ qua nghiệm tại bước thời gian i gọi là phương pháp tích phân tường minh.

Thuật toán của phương pháp Newmark dưới dạng số gia là thuật toán rất thích hợp khi giải bài toán phi tuyến, cho trong bảng 11.2, [10].

Bảng 11.2. **Thuật toán của phương pháp Newmark dưới dạng số gia**

(1) Phương pháp gia tốc trung bình không đổi: $\gamma = \frac{1}{2}; \beta = \frac{1}{4}$

(2) Phương pháp gia tốc tuyến tính: $\gamma = \frac{1}{2}; \beta = \frac{1}{6}$

1.0 *Tính toán ban đầu*

1.1 $\left\{\ddot{q}_0\right\} = \dfrac{\left\{R_o\right\} - [C]\left\{\dot{q}_0\right\} - [K]\left\{q_0\right\}}{[M]}$

($\left\{R_0\right\},\left\{\dot{q}_0\right\},\left\{q_0\right\}$ - véc tơ lực nút qui đổi, vận tốc và chuyển vị ban đầu tại thời điểm $t = 0$).

1.2 Chọn Δt

1.3 $\left[\widehat{K}\right] = [K] + \dfrac{\gamma}{\beta\Delta t}[C] + \dfrac{1}{\beta(\Delta t)^2}[M]$

1.4 $a = \dfrac{1}{\beta\Delta t}[M] + \dfrac{\gamma}{\beta}[C]$ $\qquad b = \dfrac{1}{2\beta}[M] + \Delta t\left(\dfrac{\gamma}{2\beta} - 1\right)[C]$

2.0 *Tính toán với mỗi bước thời gian i*

2.1 $\left\{\Delta\widehat{R}\right\}_i = \left\{\Delta R\right\}_i + a\left\{\dot{q}\right\}_i + b\left\{\ddot{q}\right\}_i$

2.2 $\{\Delta q\}_i = \dfrac{\{\Delta \widehat{R}\}_i}{[\widehat{K}]}$

2.3 $\{\Delta \dot{q}\}_i = \dfrac{\gamma}{\beta \Delta t}\{\Delta q\}_i - \dfrac{\gamma}{\beta}\{\dot{q}\}_i + \Delta t\left(1 - \dfrac{\gamma}{2\beta}\right)\{\ddot{q}\}_i$

2.4 $\{\Delta \ddot{q}\}_i = \dfrac{1}{\beta(\Delta t)^2}\{\Delta q\}_i - \dfrac{1}{\beta \Delta t}\{\dot{q}\}_i - \dfrac{1}{2\beta}\{\ddot{q}\}_i$

2.5. $\{q\}_{i+1} = \{q\}_i + \{\Delta q\}_i$; $\{\dot{q}\}_{i+1} = \{\dot{q}\}_i + \{\Delta \dot{q}\}_i$; $\{\ddot{q}\}_{i+1} = \{\ddot{q}\}_i + \{\Delta \ddot{q}\}_i$

3.0 *Tính lặp cho bước thời gian tiếp theo từ bước 2.1 đến bước 2.5.*

Đối với bài toán tuyến tính, có thể sử dụng thuật toán xác định các đại lượng tại bước thời gian $i+1$ qua các đại lượng đã được xác định tại bước thời gian i theo thuật toán cho trong bảng 11.3, [13].

Bảng 11.3. **Thuật toán phương pháp Newmark**

1.0 Các phép tính ban đầu

1.1 Xác định ma trận độ cứng $[K]$, ma trận khối lượng $[M]$, ma trận cản $[C]$ và véc tơ lực nút qui đổi $\{R_t\}$ của hệ.

1.2 Xác định giá trị ban đầu $\{q_0\}$, $\{\dot{q}_0\}$ và $\{\ddot{q}_0\}$.

1.3 Chọn bước thời gian Δt và các tham số $\alpha = \dfrac{1}{4}$ và $\delta = \dfrac{1}{2}$ để tích phân ổn định vô điều kiện và tính các hằng số a_i (i=1÷7)

$$a_0 = \frac{1}{\alpha \Delta t^2};\ a_1 = \frac{\delta}{\alpha \Delta t};\ a_2 = \frac{1}{\alpha \Delta t};\ a_3 = \frac{1}{2\alpha} - 1;\ a_4 = \frac{\delta}{\alpha} - 1;$$

$$a_5 = \frac{\Delta t}{2}\left(\frac{\delta}{\alpha} - 2\right);\ a_6 = \Delta t(1-\delta);\ a_7 = \delta.\Delta t \qquad (11.101)$$

1.4 Xác định ma trận độ cứng ảnh hưởng $[\widehat{K}]$

$$[\widehat{K}] = [K] + a_0[M] + a_1[C] \qquad (11.102)$$

2.0 Đối với từng bước thời gian

2.1 Tính tải trọng ảnh hưởng tại bước thời gian $i+1$

$$\{\widehat{R}\}_{i+1} = \{R\}_i + [M]\left(a_0\{q\}_i + a_2\{\dot{q}\}_i + a_3\{\ddot{q}\}_i\right) + [C]\left(a_1\{q\}_i + a_4\{\dot{q}\}_i + a_5\{\ddot{q}\}_i\right) \qquad (11.103)$$

2.2 Xác định chuyển vị nút tại bước thời gian $i+1$

$$[\widehat{K}]\{q\}_{i+1} = \{\widehat{R}\}_{i+1} \qquad (11.104)$$

2.3 Xác định gia tốc và vận tốc tại bước thời gian $i+1$

$$\{\ddot{q}\}_{i+1} = a_0\left(\{q\}_{i+1} - \{q\}_i\right) - a_2\{\dot{q}\}_i - a_3\{\ddot{q}\}_i$$

$$\{\dot{q}\}_{i+1} = \{\dot{q}\}_i + a_6\{\ddot{q}\}_i + a_7\{\ddot{q}\}_{i+1} \qquad (11.105)$$

Phương pháp Newmark ổn định nghiệm nếu thoả mãn điều kiện:

$$\frac{\Delta t}{T_n} \le \frac{1}{\pi\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{\gamma - 2\beta}} \qquad (11.106)$$

- Với phương pháp gia tốc trung bình không đổi $\gamma = \frac{1}{2}$ và $\beta = \frac{1}{4}$, điều kiện ổn định nghiệm (8.106) có dạng: $\frac{\Delta t}{T_n} < \infty$ (11.107)

Như vậy, điều kiện ổn định nghiệm luôn thoả mãn với mọi giá trị của Δt. Tuy nhiên, để đảm bảo độ chính xác, giá trị của Δt phải đủ nhỏ.

- Với phương pháp gia tốc tuyến tính $\gamma = \frac{1}{2}$ và $\beta = \frac{1}{6}$, điều kiện ổn định nghiệm (11.106) có dạng: $\frac{\Delta t}{T_n} < 0,551$ (11.108)

2. Thí dụ 11.2

Giải bài toán thí dụ 11.1 bằng phương pháp gia tốc trung bình không đổi

1.0 Tính toán ban đầu

- Khối lượng $m = 0,2533$; độ cứng $k = 10$; hệ số cản $c = 0,1592$; Tại thời điểm $t = 0$: chuyển vị và vận tốc ban đầu $q_0 = 0$; $\dot{q}_0 = 0$; lực nút $R_0 = 0$

1.1 $\ddot{q}_0 = \dfrac{R_0 - c.\dot{q}_0 - k_0.q_0}{m} = 0$

1.2 Chọn bước thời gian $\Delta t = 0,1\text{sec}$

1.3 $\hat{k} = k + \dfrac{2}{\Delta t}c + \dfrac{4}{(\Delta t)^2}m = 114,5$

1.4 $a = \dfrac{4}{\Delta t}m + 2.c = 10,45$; $b = 2m = 0,5066$

2.0 Tính cho mỗi bước thời gian

2.1 $\Delta\hat{R}_i = \Delta R_i + a.\dot{q}_i + b.\ddot{q}_i = \Delta R_i + 10.45\dot{q}_i + 0.5066\ddot{q}_i$

2.2 $\Delta q_i = \dfrac{\Delta\hat{R}_i}{\hat{k}_i} = \dfrac{\Delta\hat{R}_i}{114,5}$

2.3 $\Delta\dot{q}_i = \dfrac{2}{\Delta t}\Delta q_i - 2\dot{q}_i = 20\Delta q_i - 2\dot{q}_i$

2.4 $\Delta\ddot{q}_i = \dfrac{4}{(\Delta t)^2}\left(\Delta q_i - \Delta t.\dot{q}_i\right) - 2.\ddot{q}_i = 400\left(\Delta q_i - 0,1\dot{q}_i\right) - 2.\ddot{q}_i$

2.5 $q_{i+1} = q_i + \Delta q_i$; $\dot{q}_{i+1} = \dot{q}_i + \Delta\dot{q}_i$; $\ddot{q}_{i+1} = \ddot{q}_i + \Delta\ddot{q}_i$

3.0 Tính cho các bước thời gian tiếp theo từ bước 2.1 đến bước 2.5.

Kết quả số cho trong bảng:

t_i	R_i	$\ddot{q}_i$ (2.5)	ΔR_i	$\Delta\widehat{R}_i$ (2.1)	Δq_i (2.2)	$\Delta\dot{q}_i$ (2.3)	$\Delta\ddot{q}_i$ (2.4)	$\dot{q}_i$ (2.5)	q_i (2.5)
0,0	0,0000	0,0000	5,0000	5,0000	0,0437	0,8733	17,4666	0,0000	0,0000
0,1	5,0000	17,4666	3,6603	21,6356	0,1890	2,0323	5,7137	0,8733	0,0437
0,2	8,6602	23,1803	1,3398	43,4485	0,3794	1,7776	-10,8087	2,9057	0,2326
0,3	10,000	12,3724	-1,3397	53,8708	0,4705	0,0428	-23,8893	4,6833	0,6121
0,4	8,6602	-11,5169	-3,6602	39,8948	0,3484	-2,483	-26,6442	4,7261	1,0825
0,5	5,0000	-38,1611	-5,0000	-0,9009	-0,0079	-4,641	-16,5122	2,2422	1,4309
0,6	0,0000	-54,6733	0,0000	-52,7740	-0,4609	-4,418	20,9716	-2,3995	1,4231
0,7	0,0000	-33,7017	0,0000	-88,3275	-0,7714	-1,791	31,5787	-6,8133	0,9622
0,8	0,0000	-2,1229	0,0000	-91,0486	-0,7952	1,3159	30,5646	-8,6095	0,1908
0,9	0,0000	28,4417	0,0000	-61,8123	-0,5398	3,7907	18,9297	-7,2936	-0,6044
1,0	0,0000	47,3714	0,0000					-3,5029	-1,1442

3. Thí dụ 11.3

Giải bài toán thí dụ 11.1 bằng phương pháp gia tốc tuyến tính.

1.0 Tính toán ban đầu

- Khối lượng $m = 0,2533$; độ cứng $k = 10$; hệ số cản $c = 0,1592$; Tại thời điểm $t = 0$: chuyển vị và vận tốc ban đầu $q_0 = 0$; $\dot{q}_0 = 0$; lực nút $R_0 = 0$

1.1 $\ddot{q}_0 = \dfrac{R_0 - c.\dot{q}_0 - k_0.q_0}{m} = 0$

1.2 Chọn bước thời gian $\Delta t = 0,1\text{sec}$

1.3 $\widehat{k} = k + \dfrac{3}{\Delta t}c + \dfrac{6}{(\Delta t)^2}m = 166,8$

1.4 $a = \dfrac{6}{\Delta t}m + 3.c = 15,68$; $b = 3m + \dfrac{\Delta t}{2}c = 0,7679$

2.0 Tính cho mỗi bước thời gian

2.1 $\Delta\widehat{R}_i = \Delta R_i + a.\dot{q}_i + b.\ddot{q}_i = \Delta R_i + 15,68\dot{q}_i + 0,7679\ddot{q}_i$

2.2 $\Delta q_i = \dfrac{\Delta\widehat{R}_i}{\widehat{k}_i} = \dfrac{\Delta\widehat{R}_i}{166,8}$

2.3 $\Delta\dot{q}_i = \dfrac{3}{\Delta t}\Delta q_i - 3\dot{q}_i - \dfrac{\Delta t}{2}\ddot{q}_i = 30\Delta q_i - 3\dot{q}_i - 0{,}05\ddot{q}_i$

2.4 $\Delta\ddot{q}_i = \dfrac{6}{(\Delta t)^2}\left(\Delta q_i - \Delta t.\dot{q}_i\right) - 3.\ddot{q}_i = 600\left(\Delta q_i - 0{,}1\dot{q}_i\right) - 3.\ddot{q}_i$

2.5 $q_{i+1} = q_i + \Delta q_i$; $\dot{q}_{i+1} = \dot{q}_i + \Delta\dot{q}_i$; $\ddot{q}_{i+1} = \ddot{q}_i + \Delta\ddot{q}_i$

3.0 Tính cho các bước thời gian tiếp theo từ bước 2.1 đến bước 2.5.

Kết quả số cho trong bảng sau:

t_i	R_i	$\ddot{q}_i$ (2.5)	ΔR_i	$\Delta\widehat{R}_i$ (2.1)	Δq_i (2.2)	$\Delta\dot{q}_i$ (2.3)	$\Delta\ddot{q}_i$ (2.4)	$\dot{q}_i$ (2.5)	q_i (2.5)
0,0	0,000	0,0000	5,0000	5,0000	0,0300	0,8995	17,9903	0,0000	0,0000
0,1	5,000	17,990	3,6603	31,5749	0,1893	2,0824	5,6666	0,8995	0,0300
0,2	8,660	23,656	1,3398	66,2479	0,3973	1,7897	-11,5191	2,9819	0,2193
0,3	10,00	12,137	-1,3397	82,7784	0,4964	-0,0296	-24,8677	4,7716	0,6166
0,4	8,660	-12,729	-3,6602	60,8987	0,3652	-2,6336	-27,2127	4,7420	1,1130
0,5	5,000	-39,942	-5,0000	-2,6205	-0,0157	-4,7994	-16,1033	2,1084	1,4782
0,6	0,000	-56,045	0,0000	-85,2198	-0,5110	-4,4558	22,9749	-2,6911	1,4625
0,7	0,000	-33,071	0,0000	-137,426	-0,8241	-1,6292	33,5584	-7,1469	0,9514
0,8	0,000	0,4874	0,0000	-137,196	-0,8227	1,6218	31,4613	-8,7761	0,1273
0,9	0,000	31,948	0,0000	-87,6156	-0,5254	4,1031	18,1644	-7,1543	-0,6954
1,0	0,000	50,113	0,0000					-3,0512	-1,2208

So sánh giá trị số của chuyển vị tại các bước thời gian theo phương pháp sai phân trung tâm, phương pháp Newmark với giá trị lý thuyết cho trong bảng sau:

t_i	**PP SPTT**	**PP gia tốc trung bình không đổi**	**PP gia tốc tuyến tính**	**Lý thuyết**
0,0	0,0000	0,0000	0,0000	0.0000
0,1	0,1914	0,0437	0,0300	0,0328
0,2	0,6293	0,2326	0,2193	0,2332
0,3	1,1825	0,6121	0,6166	0,6487
0,4	1,5808	1,0825	1,1130	1,1605
0,5	1,5412	1,4309	1,4782	1,5241
0,6	0,9141	1,4231	1,4625	1,4814
0,7	-0,0247	0,9622	0,9514	0,9245
0,8	-0,8968	0,1908	0,1273	0,0593
0,9	-1,3726	-0,6044	-0,6954	-0,7751
1,0	-1,2940	-1,1442	-1,2208	-1,2718

11.3. PHƯƠNG PHÁP NEWTON-RAPHSON GIẢI BÀI TOÁN PHI TUYẾN

11.3.1. Nội dung phương pháp và thuật toán

Trong thực tế tính toán kết cấu, có thể gặp hai loại bài toán phi tuyến: phi tuyến vật lý và phi tuyến hình học. Bài toán là phi tuyến vật lý khi vật liệu có tính đàn dẻo hoặc khi vật liệu có tính chất cơ học thay đổi theo thời gian, lúc này quan hệ $\sigma = \sigma(\varepsilon)$ giữa ứng suất (lực) và biến dạng (chuyển vị) là quan hệ phi tuyến.

Trong bài toán phi tuyến vật lý, quan hệ giữa véc tơ ứng suất $\{\sigma\}$ và véc tơ biến dạng $\{\varepsilon\}$ có thể viết dưới dạng:

$$\{\sigma\} = \left[E^*(\varepsilon)\right]\{\varepsilon\} \tag{11.109}$$

trong đó ma trận $\left[E^*(\varepsilon)\right]$ là hàm của trạng thái biến dạng $\{\varepsilon\}$. Mặt khác, trạng thái biến dạng $\{\varepsilon\}$ được biểu diễn qua chuyển vị nút $\{q\}$ nên có thể biểu diễn:

$$\{\sigma\} = \left[E^*(q)\right]\{q\} \tag{11.110}$$

Do đó, phương trình cân bằng động phi tuyến có dạng:

$$\left[M(q)\right]\{\ddot{q}(t)\} + \left[C(q)\right]\{\dot{q}(t)\} + \left[K(q)\right]\{q(t)\} = \{R(t)\} \tag{11.111}$$

Dưới đây sẽ giới thiệu phương pháp Newton-Raphson giải bài toán tĩnh và kết hợp phương pháp Newton-Raphson với phương pháp Newmark giải bài toán động [10].

Phương pháp chung để giải các phương trình phi tuyến là phương pháp tính lặp dựa trên cơ sở lời giải tuyến tính. Do đó, các thuật toán của phương pháp Newmark đã trình bày trong mục 11.2 cho bài toán tuyến tính có thể mở rộng cho bài toán phi tuyến.

Trong mỗi bước lặp sẽ thực hiện phân phối lại ứng suất, biến dạng trong hệ và tính lại câc ma trận tương ứng với trạng thái ứng suất - biến dạng vừa tính được theo quan hệ của các đại lượng phi tuyến.

Đối với bài toán động, khi sử dụng phương pháp Newmark tải trọng cũng được chia thành nhiều cấp tương ứng với các bước thời gian và việc tính lặp theo phương pháp Newton-Raphson áp dụng cho từng cấp tải trọng trong mỗi bước thời gian tích phân.

Tương tự như phương trình cân bằng động dưới dạng số gia (11.95) cho bài toán tuyến tính, hiệu hai phương trình cân bằng động ở bước thời gian i và $i+1$ trong bài toán phi tuyến có dạng:

$$[M]\{\Delta\ddot{q}\}_i + [C]\{\Delta\dot{q}\}_i + \left(\Delta f_S\right)_i = \{\Delta R\}_i \tag{11.112}$$

trong đó:

$$\left(\Delta f_S\right)_i = \left[K\right]_{i,sec}\left\{\Delta q\right\}_i \tag{11.113}$$

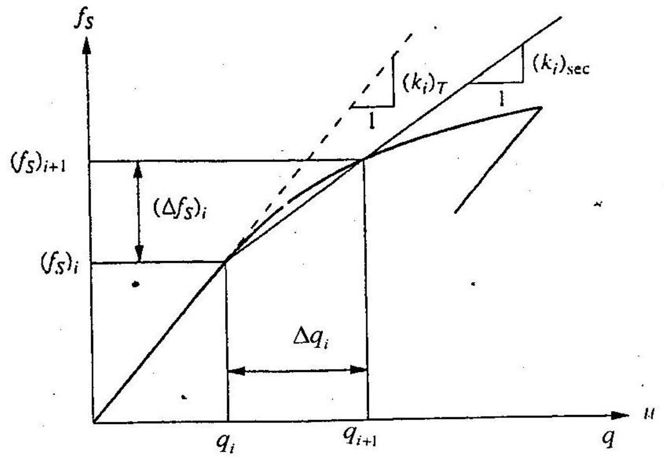
Ma trận cát tuyến $\left[K\right]_{i,sec}$ không thể xác định được vì $\left\{q\right\}_{i+1}$ chưa biết, hình 11-3. Nếu thừa nhận bước thời gian Δt nhỏ thì ma trận cát tuyến được thay thế bằng ma trận độ cứng tiếp tuyến $\left[K\right]_{i,T}$. Khi đó (11.113) có dạng:

$$\left(\Delta f_S\right)_i \cong \left[K\right]_{i,T}\left\{\Delta q\right\}_i \tag{11.114}$$

Bỏ ký hiệu T của ma trận độ cứng tiếp tuyến và thay vào phương trình (11.112), nhận được:

$$\left[M\right]\left\{\Delta\ddot{q}\right\}_i + \left[C\right]\left\{\Delta\dot{q}\right\}_i + \left[K\right]_i\left\{\Delta q\right\}_i = \left\{\Delta R\right\}_i \tag{11.115}$$

Phương trình này có dạng tương tự như phương trình (11.95) của bài toán tuyến tính nên các công thức của phương pháp Newmark cho hệ tuyến tính có thể áp dụng cho bài toán phi tuyến, trong đó thay thế ma trận độ cứng $\left[K\right]$ trong bài toán tuyến tính bằng ma trận độ cứng tiếp tuyến $\left[K\right]_i$ ở mỗi bước thời gian thứ i trong thuật toán Newmark, bảng 11-2. Đối với hệ phi tuyến bước 2.5 trong thuật toán Newmark và (11.100) lấy giá trị hiệu của $\left\{\ddot{q}\right\}_{i+1}$ và $\left\{\ddot{q}\right\}_i$ của bước tính trước.



Hình 11-3.

Tương tự như đối với bài toán tuyến tính, phương trình cân bằng động dưới dạng số gia của bài toán phi tuyến có dạng:

$$\left[\hat{K}\right]_i\left\{\Delta q\right\}_i = \left\{\Delta\hat{R}\right\}_i \tag{11.116}$$

trong đó:

$\left\{\Delta\hat{R}\right\}_i$ lấy theo công thức (11.99) - bài toán tuyến tính.

$$\left[\hat{K}\right]_i = \left[K\right]_i + \frac{\gamma}{\beta\Delta t}\left[C\right] + \frac{1}{\beta\left(\Delta t\right)^2}\left[M\right] \tag{11.117}$$

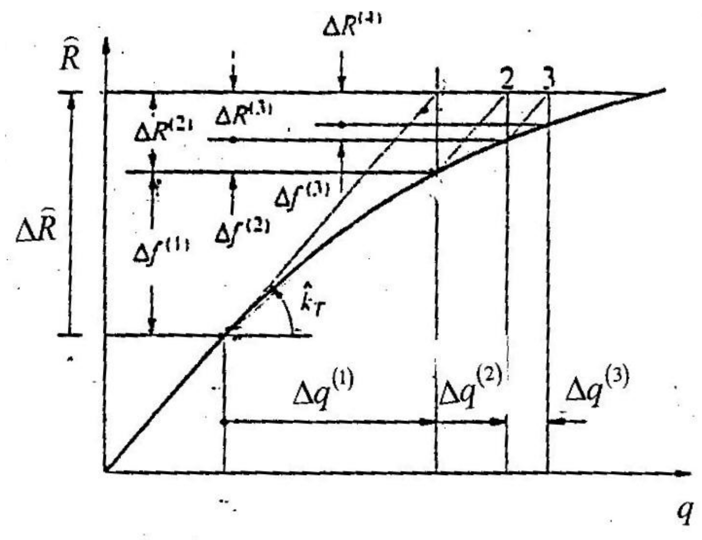
Để thuận tiện ở (11.116) bỏ chỉ số i ở ma trận độ cứng và thay bằng T (ma trận độ cứng tiếp tuyến):

$$\left[\hat{K}\right]_T \{\Delta q\} = \{\Delta \hat{R}\} \qquad (11.118)$$

với:

$$\left[\hat{K}\right]_T = [K]_T + \frac{\gamma}{\beta \Delta t}[C] + \frac{1}{\beta (\Delta t)^2}[M] \qquad (11.119)$$

Phương trình (11.118) là phương trình phi tuyến có thể giải bằng phương pháp Newton-Raphson. Phương trình này là phương trình phi tuyến vì ma trận độ cứng tiếp tuyến $[K]_T$ phụ thuộc vào chuyển vị $\{q\}$ nên ma trận $[K]_T$ không phải là ma trận hằng số. Trong bài toán tĩnh phi tuyến, ma trận $\left[\hat{K}\right]_T$ là ma trận $[K]_T$ và tính phi tuyến thể hiện trong $[K]_T$. Trong bài toán phi tuyến động, khối lượng và lực cản làm giảm tính phi tuyến vì ma trận hằng số $\frac{1}{\beta (\Delta t)^2}[M]$ thường có giá trị lớn hơn $[K]_T$.



Hình 11-4.

Trên hình 11-4 biểu diễn sơ đồ giải lặp phương trình (11.118) cho hệ 01 bậc tự do:

- Bước lặp đầu tiên (1):

$$\left[\hat{K}\right]_T \{\Delta q^{(1)}\} = \{\Delta \hat{R}\} \quad (1)$$

Giải (1) xác định được $\{\Delta q^{(1)}\}$ và xác định lực $\{\Delta f^{(1)}\} = \left[\hat{K}\right]_T \{\Delta q^{(1)}\}$ có giá trị nhỏ hơn $\{\Delta \hat{R}\}$ và lực còn lại $\{\Delta R^{(2)}\} = \{\Delta \hat{R}\} - \{\Delta f^{(1)}\}$

- Bước lặp thứ hai (2):

$$\left[\hat{K}\right]_T \{\Delta q^{(2)}\} = \{\Delta R^{(2)}\} \qquad (2)$$

Giải (2) xác định được $\{\Delta q^{(2)}\}$ và xác định lực $\{\Delta f^{(2)}\} = \left[\hat{K}\right]_T \{\Delta q^{(2)}\}$ có giá trị nhỏ hơn $\{\Delta R^{(2)}\}$ và lực còn lại $\{\Delta R^{(3)}\} = \{\Delta R^{(2)}\} - \{\Delta f^{(2)}\}$

Tiến hành các bước lặp như trên đến bước lặp thứ l với gia số chuyển vị $\Delta q^{(l)}$ đủ nhỏ so với gia số chuyển vị tính toán $\Delta q_{tt} = \sum_{j=1}^{l} \Delta q^{(j)}$, nghĩa là khi: $\frac{\Delta q^{(l)}}{\Delta q_{tt}} < \varepsilon$.

Khi đó gia số chuyển vị ở bước thời gian i đến i+1 có giá trị:

$$\{\Delta q\}_i = \sum_{j=1}^{l}\{\Delta q^{(j)}\} \qquad (11.120)$$

Thuật toán lặp của phương pháp Newton-Raphson cho trong bảng 11-4.

Bảng 11-4. **Thuật toán lặp Newton-Raphson - bài toán tĩnh**

1.0 Số liệu ban đầu

$$\{q^0\}_{i+1} = \{q\}_i;\ (f_S^0) = (f_S)_i;\ \{\Delta R^{(1)}\} = \{\Delta R\}_i;\ [\hat{K}]_T = [\hat{K}]_i$$

2.0 Các phép tính của mỗi bước lặp $j = 1, 2, 3, ...$

2.1 Giải phương trình $[\hat{K}]_T\{\Delta q^{(j)}\} = \{\Delta R^{(j)}\}$ xác định được $\{\Delta q^{(j)}\}$

2.2 $\{q^{(j)}\}_{i+1} = \{q^{(j-1)}\}_{i+1} + \{\Delta q^{(j)}\}$

2.3 $(\Delta f^{(j)}) = (f_S^{(j)}) - (f_S^{(j-1)}) + ([\hat{K}]_T - [K]_T)\{\Delta q^{(j)}\}$

2.4 $\{\Delta R^{(j+1)}\} = \{\Delta R^{(j)}\} - (\Delta f^{(j)})$

3.0 Tính lặp các bước tiếp theo từ 2.1 đến 2.4 cho đến khi nghiệm hội tụ.

Thuật toán Newmakr giải bài toán động kết hợp với phép lặp của phương pháp Newton-Raphson cho trong bảng 11-5.

Bảng 11-5. **Thuật toán phương pháp Newmark kết hợp phép lặp phương pháp Newton-Raphson giải bài toán động phi tuyến**

(1) Phương pháp gia tốc trung bình không đổi: $\gamma = \frac{1}{2}; \beta = \frac{1}{4}$

(2) Phương pháp gia tốc tuyến tính: $\gamma = \frac{1}{2}; \beta = \frac{1}{6}$

1.0 Tính toán ban đầu

1.1 $\{\ddot{q}_0\} = \dfrac{\{R_o\} - [C]\{\dot{q}_0\} - (f_S)\{q_0\}}{[M]}$

Với $\{R_0\}, \{\dot{q}_0\}, \{q_0\}$ là véc tơ lực nút qui đổi, vận tốc và chuyển vị ban đầu tại thời điểm $t = 0$).

1.2 Chọn Δt

1.3 $a = \dfrac{\gamma}{\beta}[C] + \dfrac{1}{\beta(\Delta t)}[M]$ $b = \dfrac{1}{2\beta}[M] + \Delta t\left(\dfrac{\gamma}{2\beta} - 1\right)[C]$

2.0 Tính toán với mỗi bước thời gian i

2.1 $\{\Delta\hat{R}\}_i = \{\Delta R\}_i + a\{\dot{q}\}_i + b\{\ddot{q}\}_i$

2.2 Xác định ma trận độ cứng tiếp tuyến $[K]_i$

2.3 $\left[\widehat{K}\right]_i=\left[K\right]_i+\dfrac{\gamma}{\beta\Delta t}\left[C\right]+\dfrac{1}{\beta\left(\Delta t\right)^2}\left[M\right]$

2.4 Xác định $\{\Delta q\}_i$ từ $\left[\widehat{K}\right]_i$ và $\{\Delta\widehat{R}\}_i$ bằng thủ tục lặp Newton-Raphson cho trong bảng 11-4.

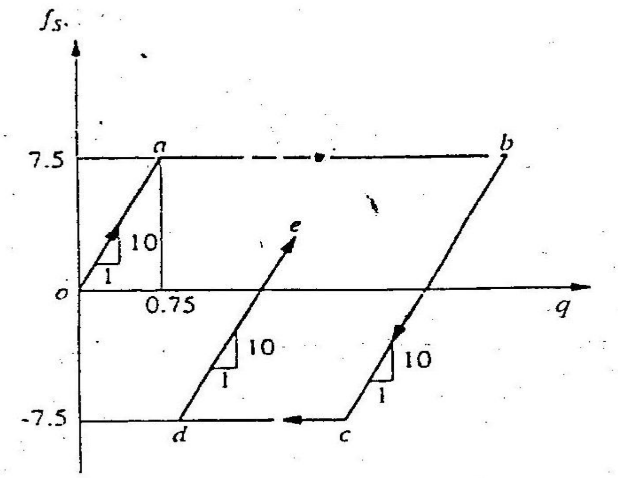
2.5 $\{\Delta\dot{q}\}_i=\dfrac{\gamma}{\beta\Delta t}\{\Delta q\}_i-\dfrac{\gamma}{\beta}\{\dot{q}\}_i+\Delta t\left(1-\dfrac{\gamma}{2\beta}\right)\{\ddot{q}\}_i$

2.6 $\{\Delta\ddot{q}\}_i=\dfrac{1}{\beta\left(\Delta t\right)^2}\{\Delta q\}_i-\dfrac{1}{\beta\Delta t}\{\dot{q}\}_i-\dfrac{1}{2\beta}\{\ddot{q}\}_i$

2.7 $\{q\}_{i+1}=\{q\}_i+\{\Delta q\}_i$; $\{\dot{q}\}_{i+1}=\{\dot{q}\}_i+\{\Delta\dot{q}\}_i$; $\{\ddot{q}\}_{i+1}=\{\ddot{q}\}_i+\{\Delta\ddot{q}\}_i$

3.0 Tính lặp cho bước thời gian tiếp theo từ bước 2.1 đến bước 2.7.

Sự khác nhau cơ bản của bài toán phi tuyến và bài toán tuyến tính là từ bước 2.1 - bảng 11-5, nghĩa là chuyển vị nút tại bước thời gian $i+1$ phải giải lặp trên cơ sở tính lại ma trận của hệ theo quan hệ phi tuyến.



Hình 11-5

11.3.2. Thí dụ

1. Thí dụ 4

Xác định chuyển vị của hệ 01 bậc tự do chịu tải trọng động như thí dụ 1. Quan hệ giữa lực và chuyển vị là quan hệ đàn dẻo lý tưởng cho trên hình 11-5 với giá trị chuyển vị đàn hồi $u_{dh}=0,75$. Sử dụng phương pháp Newmark - gia tốc trung bình không đổi (không tính lặp theo phương pháp Newton-Raphson).

Dưới đây dẫn ra các bước giải:

1.0 Tính toán ban đầu

- Khối lượng $m=0,2533$; độ cứng $k_0=10$; hệ số cản $c=0,1592$; Tại thời điểm $t=0$: chuyển vị và vận tốc ban đầu $q_0=0$; $\dot{q}_0=0$; lực nút $R_0=0$

1.1 $\ddot{q}_0=\dfrac{R_0-c.\dot{q}_0-k_0.q_0}{m}=0$

1.2 Chọn bước thời gian $\Delta t=0,1$

1.3 $a = \frac{4}{\Delta t}m + 2.c = 10,45$; $b = 2m = 0,5066$

2.0 Tính cho từng bước thời gian

2.1 $\Delta\widehat{R}_i = \Delta R_i + a.\dot{q}_i + b.\ddot{q}_i = \Delta R_i + 10,45\dot{q}_i + 0,5066\ddot{q}_i$

2.2 $k_i = k$ cho đoạn oa,bc và de; $k_i = 0$ cho đoạn ab và cd, hình 11-5.

2.3 $\widehat{k}_i = k_i + \frac{2}{\Delta t}c + \frac{4}{(\Delta t)^2}m = k_i + 104,5$

2.4 $\Delta q_i = \frac{\Delta\widehat{R}_i}{\widehat{k}_i}$ (không tính lặp theo phương pháp Newton-Raphson)

2.5 $\Delta\dot{q}_i = \frac{2}{\Delta t}\Delta q_i - 2\dot{q}_i = 20\Delta q_i - 2\dot{q}_i$

2.6 $q_{i+1} = q_i + \Delta q_i$; $\dot{q}_{i+1} = \dot{q}_i + \Delta\dot{q}_i$

2.7 $(f_s)_{i+1} = (f_s)_i + k_i\Delta q_i$

2.8 $\ddot{q}_{i+1} = \frac{R_{i+1} - c\dot{q}_{i+1} - (f_s)_{i+1}}{m}$

Ở trong thủ tục này không tính lặp theo phương pháp Newton-Raphson, gia tốc được tính ở bước 2.7 và 2.8 đã tính ở bước trước thay cho bước tính 2.7 trong bảng 11-5, bảo đảm cân bằng động ở cuối mỗi bước thời gian.

3.0 Tính toán cho các bước thời gian tiếp theo từ bước 2.1 đến bước 2.8

Giá trị số theo phương pháp Newmak - gia tốc trung bình không đổi (không tính lặp theo phương pháp Newton-Raphson) cho trong bảng sau:

t_i	R_i	$(f_s)_i$	$\ddot{q}_i$ (2.8)	$\Delta\widehat{R}_i$ (2.1)	k_i	$\widehat{k}_i$ (2.3)	Δq_i (2.4)	$\dot{q}_i$ (2.6)	q_i (2.6)
0.0	0,0000	0,0000	0,0000	5,0000	10	114,5043	0,0437	0,0000	0,0000
0.1	5,000	0,4367	17,4666	21,6356	10	114,5043	0,1890	0,8733	0,0437
0.2	8,6602	2,3262	23,1803	43,4485	10	114,5043	0,3794	2,9057	0,2326
0.3	10,000	6,1207	12,3724	53,8708	10	114,5043	0,4705	4,6833	0,6121
0.4	8,6602	7,5000	1,6110	46,5455	0	104,5043	0,4454	4,7261	1,0825
0.5	5,0000	7,5000	-12,4970	32,3703	0	104,5043	0,3098	4,1818	1,5279
0.6	0.,000	7,5000	-30,8738	5,3984	0	104,5043	0,0517	2,0132	1,8377
0.7	0,0000	7,5000	-28,9930	-24,9304	10	114,5043	-0,2177	-0,9801	1,8893
0.8	0,0000	5,3228	-18,8932	-44,8354	10	114,5043	-0,3916	-3,3744	1,6716
0.9	0,0000	1,4071	-2,7549	-47,9712	10	114,5043	-0,4189	-4,4568	1,2801

2. Thí dụ 5

Tính lại thí dụ 4 có tính lặp chuyển vị trong một bước thời gian bằng sử dụng thuật toán trong bảng 11-4 (thuật toán phương pháp lặp Newton-Raphson) và thuật toán trong bảng 11-5. Bước tính 2.4 trong bảng 11-5 là bước tính lặp. Dưới đây dẫn ra phép tính lặp cho thời điểm từ $t = 0,3 sec$ đến thời điểm $t = 0,4 sec$ (chuyển vị lớn hơn chuyển vị đàn hồi) với số liệu ban đầu tại thời điểm $t = 0,3 sec$. Sau khi tính bước lặp 2.4 tiếp tục tính bước 2.5 và bước 2.6 và bước 2.7 như sau:

2.6 $\Delta\ddot{q}_i = \dfrac{4}{(\Delta t)^2}\Delta q_i - \dfrac{4}{\Delta t}\dot{q}_i - 2\ddot{q}_i = 400\Delta q_i - 40\dot{q}_i - 2\ddot{q}_i$

2.7 $\ddot{q}_{i+1} = \ddot{q}_i + \Delta\ddot{q}_i$

Tính toán trong khoảng thời gian từ $t = 0,0 sec$ đến $t = 0,9 sec$ cho trong bảng. Trong 03 bước thời gian đầu chuyển vị nhỏ hơn chuyển vị đàn hồi $q < q_{dh} = 0,75$ (hệ tuyến tính) nên không cần tính lặp chuyển vị (bước 2.4 bảng 11.4). Do đó kết quả tính có giá trị như đã tính trong thí dụ 4. Nếu độ cứng hoặc lực cản thay đổi trong bước thời gian thì cần phải tính lặp.

Trong thí dụ này tính lặp chuyển vị theo phương pháp lặp Newton-Raphson ở bước thời gian từ $t = 0,3 sec$ đến $t = 0,4 sec$. Thuật toán như sau:

1.0 Số liệu ban đầu

$$q_{i+1}^{(0)} = 0,6121;\ f_s^{(0)} = 6,1207;\ \Delta R^{(1)} = \Delta\hat{R}_i = 53,8708;\ \hat{k}_T = 114,5043$$

2.0 Bước lặp thứ nhất $j = 1$

2.1 $\hat{k}_T \Delta q^{(1)} = \Delta R^{(1)}$ $\quad \Delta q^{(1)} = \dfrac{53,8708}{114,5043} = 0.4705$

2.2 $q_{i+1}^{(1)} = q_{i+1}^{(0)} + \Delta q^{(1)} = 0,6121 + 0,4705 = 1,0826$

2.3 $\Delta f^{(1)} = f_s^{(1)} - f_s^{(0)} + \dfrac{a}{\Delta t}\Delta q^{(1)} = 7,5 - 6,1207 + 104,5043.0,4705 = 50,5454$

2.4 $\Delta R^{(2)} = \Delta R^{(1)} - \Delta f^{(1)} = 53,8708 - 50,5454 = 3,3254$

2.0 Bước lặp thứ hai $j = 2$

2.1 $\hat{k}_T \Delta q^{(2)} = \Delta R^{(2)}$ $\quad \Delta q^{(2)} = \dfrac{3,3254}{114,5043} = 0.02904$

2.2 $q_{i+1}^{(2)} = q_{i+1}^{(1)} + \Delta q^{(2)} = 1,0825 + 0,02904 = 1,1116$

2.3 $\Delta f^{(2)} = f_s^{(2)} - f_s^{(1)} + \dfrac{a}{\Delta t}\Delta q^{(2)} = 7,5 - 7,5 + 104,5043.0,02904 = 3,0349$

2.4 $\Delta R^{(3)} = \Delta R^{(2)} - \Delta f^{(2)} = 3,3254 - 3,0349 = 0,2904$

2.0 Bước lặp thứ ba $j = 3$

2.1 $\widehat{k}_T \Delta q^{(3)} = \Delta R^{(3)} \quad \Delta q^{(3)} = \dfrac{0,2904}{114,5043} = 0.0025$

Tiếp tục các bước lặp như trên. Kết quả theo các bước lặp ở thời điểm $t = 0,3 sec$ đến $t = 0,4 sec$ cho trong bảng sau:

t_i	R_i	$(f_s)_i$	$\Delta\widehat{R}_i$ hoặc $\Delta R_{(j)}$	k_i	$\widehat{k}_i$	Δq_i hoặc $\Delta q_{(j)}$	$\dot{q}_i$	$\ddot{q}_i$	q_i hoặc $q_{i+1}^{(j)}$
0.0	0,0000	0,0000	0,0000	10	114,5043	0,0437	0,0000	0,0000	0,0000
0.1	5,000	0,4367	21,6356	10	114,5043	0,1890	0,8733	17,4666	0,0437
0.2	8,6602	2,3262	43,4485	10	114,5043	0,3794	2,9057	23,1803	0,2326
0.3	10,000	6,1207	53,8708 3.3254 0,2904 0,0254 0,22e-02	10	114,5043	0,4705 0,0290 0,0025 0,0002 0,19e-04	4,6833	12,3724	0,6121 1,1116 1,1141 1,1143 1,1143
0.4	8,6602	7,5000	52,9849	0	104,5043	0,5070	5,3621	1,2027	1,1143
0.5	5,0000	7,5000	38,4086	0	104,5043	0,3675	4,7782	-12,8805	1,6213
0.6	0,0000	7,5000	11,0600	0	104,5043	0,1058	2,5725	-31,2339	1,9889
0.7	0,0000	7,5000	-19,6226	10	114,5043	-0,1714	-0,4558	-29,3312	2,0947
0.8	0,0000	5,7863	-41,6857	10	114,5043	-0,3641	-2,9716	-20,9850	1,9233
0.9	0,0000	2,1458	-47,9600	10	114,5043	-0,4188	-4,3095	-5,7722	1,5593

Trong 03 bước thời gian tiếp theo, hệ ở nhánh dẻo có độ cứng $k = 0$ nên không tính lặp chuyển vị (tính theo bước 2.4 trong thuật toán thí dụ 4). Trong khoảng thời gian $0,6 sec$ đến $0,7 sec$, vận tốc đổi dấu tương ứng chuyển vị bắt đầu giảm nghĩa là hệ bắt đầu giảm tải dọc theo nhánh bc và độ cứng $k = 10$. Tuy nhiên, khi tính toán đã bỏ qua không tính lặp chuyển vị khi thay đổi độ cứng từ $k = 0$ đến $k = 10$.

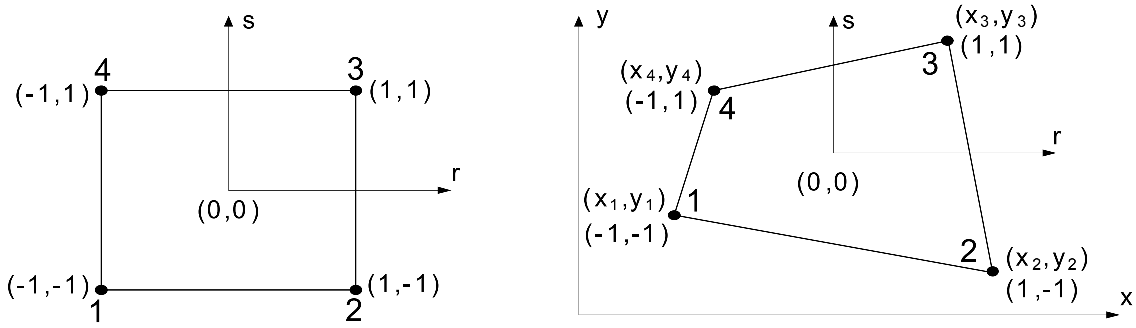
11.4. HỆ TỌA ĐỘ TỰ NHIÊN VÀ TÍCH PHÂN SỐ

11.4.1 Hệ tọa độ tự nhiên

Hệ tọa độ tự nhiên được sử dụng khi xét phần tử hữu hạn đồng tham số với việc đưa phần tử gốc ở hệ tọa độ tự nhiên về phần tử có hình dạng bất kỳ trong hệ tọa độ Descartes.

Hệ tọa độ tự nhiên là hệ tọa độ địa phương của phần tử cho phép xác định vị trí của một điểm bất kỳ trong phần tử bằng các tọa độ tự nhiên là các số không thứ nguyên, có giá trị trong khoảng [-1,1]. Thông thường, hệ tọa độ tự nhiên được chọn sao cho tại các nút đỉnh phần tử, các tọa độ tự nhiên có giá trị bằng -1 hay +1.

Các phần tử có dạng hình học khác nhau có hệ tọa độ tự nhiên khác nhau. Đối với hệ 3 chiều, tọa độ tự nhiên là r, s, t; còn đối với hệ 2 chiều, tọa độ tự



Hình 11-6. *Phần tử tứ giác và các tọa độ tự nhiên* (r,s) *và hệ tọa độ* (x,y)

nhiên là r, s. Ví dụ đối với phần tử tứ giác, hệ tọa độ tự nhiên là hệ tọa độ mà các trục r, s đi qua điểm giữa của các cặp cạnh đối diện nhau. Các cạnh này được xác định bởi phương trình $r=\pm 1$, $s=\pm 1$, hình 11-6.

Điểm P bất kỳ trong phần tử có tọa độ (x,y) sẽ có tọa độ (r,s) trong hệ tọa độ tự nhiên. Quan hệ giữa các tọa độ trong hệ tọa độ Descartes và hệ tọa độ tự nhiên, ví dụ cho phần tử tứ giác 4 nút có dạng:

$$x=\sum_{i=1}^{4} N_i(r,s).x_i=\begin{bmatrix} N_1 & N_2 & N_3 & N_4 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{Bmatrix} \qquad (11.121)$$

$$y=\sum_{i=1}^{4} N_i(r,s).y_i=\begin{bmatrix} N_1 & N_2 & N_3 & N_4 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{Bmatrix} \qquad (11.122)$$

trong đó, (x_i,y_i) là tọa độ vuông góc của nút i phần tử $(i=1\div 4)$ và N_i là hàm nội suy của hệ tọa độ tự nhiên có dạng:

$$N_i(r,s)=\frac{1}{4}(1+r.r_i)(1+s.s_i) \qquad (11.123)$$

với (r_i, s_i) là tọa độ tự nhiên của nút i. Dễ dàng thấy từ hình 8-6: $(r_1, s_1) = (-1, -1)$; $(r_2, s_2) = (1, -1)$; $(r_3, s_3) = (1, 1)$; $(r_4, s_4) = (-1, 1)$.

Từ (11.123), hàm nội suy N_i với $(i = 1 \div 4)$ có dạng:

$$N_1 = \frac{(1-r)(1-s)}{4} \tag{11.124.a}$$

$$N_2 = \frac{(1+r)(1-s)}{4} \tag{11.124.b}$$

$$N_3 = \frac{(1+r)(1+s)}{4} \tag{11.124.c}$$

$$N_4 = \frac{(1-r)(1+s)}{4} \tag{11.124.d}$$

Do xét trong hệ tọa độ tự nhiên nên cần thiết lập quan hệ đạo hàm của một đại lượng nào đó đối với các biến (r, s, t) trong hệ tọa độ tự nhiên và đạo hàm của đại lượng đó đối với biến (x, y, z) trong hệ tọa độ Descartes. Theo nguyên tắc tính đạo hàm riêng:

$$\frac{\partial}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial r} \qquad \frac{\partial}{\partial s} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s} + \frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial s};$$

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial t}$$

dưới dạng ma trận:

$$\begin{Bmatrix} \dfrac{\partial}{\partial r} \\ \dfrac{\partial}{\partial s} \\ \dfrac{\partial}{\partial t} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial r} & \dfrac{\partial y}{\partial r} & \dfrac{\partial z}{\partial r} \\ \dfrac{\partial x}{\partial s} & \dfrac{\partial y}{\partial s} & \dfrac{\partial z}{\partial s} \\ \dfrac{\partial x}{\partial t} & \dfrac{\partial y}{\partial t} & \dfrac{\partial z}{\partial t} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x} \\ \dfrac{\partial}{\partial y} \\ \dfrac{\partial}{\partial z} \end{Bmatrix} = [J] \begin{Bmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x} \\ \dfrac{\partial}{\partial y} \\ \dfrac{\partial}{\partial z} \end{Bmatrix} \tag{11.125}$$

trong đó, $[J]$ gọi là ma trận Jacobian có dạng :

$$[J] = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial r} & \dfrac{\partial y}{\partial r} & \dfrac{\partial z}{\partial r} \\ \dfrac{\partial x}{\partial s} & \dfrac{\partial y}{\partial s} & \dfrac{\partial z}{\partial s} \\ \dfrac{\partial x}{\partial t} & \dfrac{\partial y}{\partial t} & \dfrac{\partial z}{\partial t} \end{bmatrix} \tag{11.126}$$

Từ (11.125) đạo hàm đối với biến (x, y) trong hệ tọa độ Descartes:

$$\begin{Bmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x} \\ \dfrac{\partial}{\partial y} \\ \dfrac{\partial}{\partial z} \end{Bmatrix} = [J]^{-1} \begin{Bmatrix} \dfrac{\partial}{\partial r} \\ \dfrac{\partial}{\partial s} \\ \dfrac{\partial}{\partial t} \end{Bmatrix} \qquad (11.127)$$

11.4.2. Tích phân số

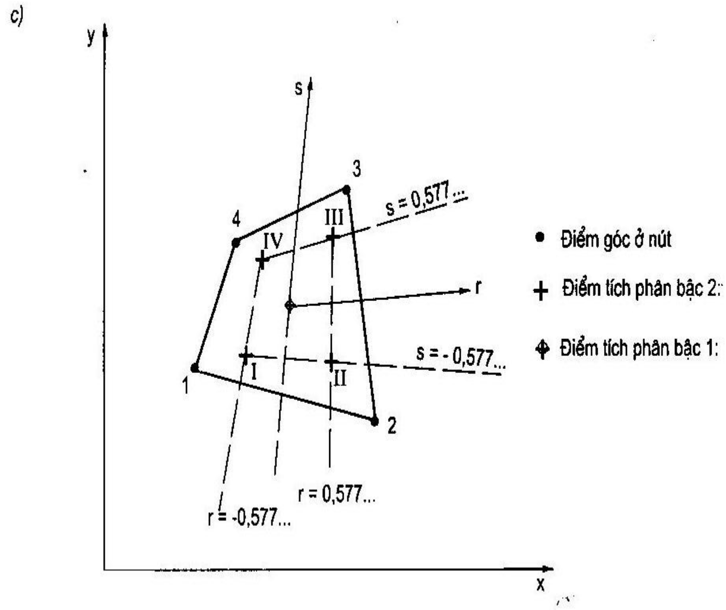
1. Tích phân số

Việc dùng các phần tử đồng tham số dẫn đến sự biến thiên các biến trong hệ tọa độ tự nhiên trong khoảng $[-1,1]$. Do đó, khi tính các tích phân ma trận độ cứng, ma trận khối lượng, véc tơ lực nút qui đổi xuất hiện các tích phân có cận biến thiên từ -1 đến +1.

$$I = \int_{-1}^{+1} F(r)\,dr$$

$$I = \int_{-1}^{+1}\int_{-1}^{+1} F(r,s)\,drds$$

$$I = \int_{-1}^{+1}\int_{-1}^{+1}\int_{-1}^{+1} F(r,s,t)\,drdsdt$$



Hình 11-7. *Phần tử tứ giác và các tọa độ tự nhiên (r,s) và hệ tọa độ chung (x,y)*

Có nhiều phương pháp tính tích phân số, trong đó phương pháp Gauss có hiệu quả nhất. Thực chất của phương pháp này là giá trị của tích phân bằng tổng giá trị hàm tại một số điểm Gauss nhân với một đại lượng gọi là trọng số, hình 11.7.

a. Đối với tích phân 1 lớp:

$$I = \int_{-1}^{+1} F(r)\,dr = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i F(r_i) \qquad (11.128)$$

trong đó:

$F(r_i)$ - giá trị của hàm $F(r)$ tại điểm Gauss r_i;

α_i - trọng số tương ứng với điểm Gauss.

Bảng 11-6 cho biết giá trị và các trọng số tương ứng với các điểm Gauss theo sơ đồ có số điểm Gauss n khác nhau.

Trong phép cầu phương Gauss, vị trí các điểm Gauss được xác định sao cho với một số n điểm Gauss thì tích phân đạt được độ chính xác nhất. Kết quả tích phân số là chính xác nếu bậc m của đa thức xấp xỉ với hàm $F(r)$ không vượt quá $2n-1$ với n là số điểm Gauss. Nếu $m=2n-1$, các hằng số r_i và trọng số α_i có thể tính tích phân với độ chính xác mong muốn.

Bảng 11-6. **Giá trị và trọng số của các điểm Gauss khi tích phân số**

Số điểm Gauss n	Toạ độ điểm Gauss theo phương r hoặc s, t	Trọng số α_i
1	$r_1 = 0$	$\alpha_1 = 2,0$
2	$r_2 = -r_1 = 0,5773502691$	$\alpha_2 = \alpha_1 = 1,0$
3	$r_2 = 0$ $r_3 = -r_1 = 0,77459667$	$\alpha_2 = 0,88888889$ $\alpha_3 = \alpha_1 = 0,55555556$

Khi tính tích phân số, khối lượng tính toán rất lớn và phụ thuộc vào việc chọn số điểm Gauss. Theo Bathe và Wilson [11], [13], khi tính ma trận độ cứng trong bài toán 02 chiều bậc tích phân tối thiểu được chọn như sau:

- Phần tử tứ giác 04 nút: 2x2 điểm Gauss;
- Phần tử chữ nhật 08 nút: 2x2 điểm Gauss;
- Phần tử cạnh cong dạng tứ giác 08 nút: 3x3 điểm Gauss.

Thí dụ tính tích phân (11.128) với $F(r) = 2r^3 + r^2 + 3$:

- Kết quả tính bằng giải tích:

$$I = \int_{-1}^{+1} \left(2r^3 + r^2 + 3\right) dr = 6,666666667$$

- Sử dụng (11.128) với số lượng các điểm Gauss theo bảng 11-6:

+ 01 điểm Gauss: $I = \int_{-1}^{+1} \left(2r^3 + r^2 + 3\right) dr = \alpha_1 F(r_1) = 2.\left(2.0^3 + 0^2 + 3\right) = 6,0$;

+ 02 điểm Gauss: $I = \int_{-1}^{+1} \left(2r^3 + r^2 + 3\right) dr = \alpha_1 F(r_1) + \alpha_2 F(r_2) =$

$$= 1.\left(2.(-0,57735027)^3 + (-0,57735027)^2 + 3\right) +$$

$$+1.\left(2.(0,57735027)^3 + (0,57735027)^2 + 3\right) = 6,66667228$$

+ 03 điểm Gauss: $I=\int_{-1}^{+1}\left(2r^3+r^2+3\right)dr=\alpha_1F\left(r_1\right)+\alpha_2F\left(r_2\right)+\alpha_3F\left(r_3\right)=$

$$=0,55555556.\left(2.(-0,77459667)^3+(-0,77459667)^2+3\right)+0,88888889.\left(2.0^3+0^2+3\right)+$$
$$+0,55555556.\left(2.(0,77459667)^3+(0,77459667)^2+3\right)=6,6666667$$

b. Đối với tích phân 2 lớp và 3 lớp:

Từ hình vẽ 11-6 và bảng 11-6, các điểm Gauss được đặt đối xứng với tâm của khoảng cách lấy tích phân. Các trọng số là như nhau với các điểm Gauss đối xứng nhau. Đối với tích phân 02 lớp, tiến hành lấy tích phân với biến r, sau đó lấy tích phân với biến s (hoặc ngược lại).

$$I=\int_{-1}^{+1}\int_{-1}^{+1}F(r,s)drds=\int_{-1}^{+1}\left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_iF\left(r_i,s\right)\right)ds=\sum_{j=1}^{n}\alpha_j\left[\sum_{i=1}^{n}\alpha_iF\left(r_i,s_j\right)\right]$$

hay

$$I=\int_{-1}^{+1}\int_{-1}^{+1}F\left(r,s\right)drds=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\alpha_i\alpha_jF\left(r_i,s_j\right)\qquad(11.129)$$

Xét tích phân 02 lớp với 02 điểm Gauss $\left(n=2\right)$. Từ bảng 11-6 với $i,j=1\div2$, $\alpha_i=\alpha_j=1,0$ và $r_2=-r_1=0,57735027$, $s_2=-s_1=0,57735027$. Khai triển (11.129):

$$I=\int_{-1}^{+1}\int_{-1}^{+1}F\left(r,s\right)drds=\alpha_1\alpha_1F\left(r_1,s_1\right)+\alpha_1\alpha_2F\left(r_1,s_2\right)+\alpha_2\alpha_1F\left(r_2,s_1\right)+\alpha_2\alpha_2F\left(r_2,s_2\right)$$

Giá trị tích phân là tổng giá trị của hàm tại tại 04 điểm Gauss nhân với các trọng số tương ứng.

Thí dụ xét tích phân:

$$I=\int_{-1}^{+1}\int_{-1}^{+1}F\left(r,s\right)drds=\int_{-1}^{+1}\int_{-1}^{+1}\left(2r^3s+3\right)drds$$

Giá trị tính theo giải tích: $\int_{-1}^{+1}\int_{-1}^{+1}F\left(r,s\right)drds=12$

Giá trị tính theo tích phân số với: $\alpha_1=\alpha_2=1,0$; $r_1=s_1=r_2=s_2=0,5773502691$.

$$I=\int_{-1}^{+1}\int_{-1}^{+1}\left(2r^3s+3\right)drds=1.1.\left[2.\left(-0,5773502691\right)^3.\left(-0,5773502691\right)+3\right]+$$
$$+1.1.\left[2.\left(-0,5773502691\right)^3.\left(0,5773502691\right)+3\right]+$$
$$+1.1.\left[2.\left(0,5773502691\right)^3.\left(-0,5773502691\right)+3\right]+$$

$$+1.1.\left[2.\left(0,5773502691\right)^3.\left(0,5773502691\right)+3\right]=12$$

Tương tự với tích phân 03 lớp:

$$I=\int_{-1}^{+1}\int_{-1}^{+1}\int_{-1}^{+1}F\left(r,s,t\right)drdsdt=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\alpha_i\alpha_j\alpha_kF\left(r_i,s_j,t_k\right) \quad (11.130)$$

Tính tích phân 03 lớp với 02 điểm Gauss $\left(n=2\right)$. Giá trị các biến r,s,t và trọng số tương ứng với $i,j=1\div 2$ lấy như đối với tích phân 02 lớp. Khai triển tích phân (11.130) với 08 điểm tính tích phân:

$$I=I_{(1,1,1)}+I_{(1,2,1)}+I_{(1,1,2)}+I_{(1,2,2)}+I_{(2,1,1)}+I_{(2,2,1)}+I_{(2,1,2)}+I_{(2,2,2)}$$

với:

$$I_{(1,1,1)}=\alpha_1\alpha_1\alpha_1F\left(r_1,s_1,t_1\right) \qquad I_{(1,2,1)}=\alpha_1\alpha_2\alpha_1F\left(r_1,s_2,t_1\right);$$

$$I_{(1,1,2)}=\alpha_1\alpha_1\alpha_2F\left(r_1,s_1,t_2\right) \qquad I_{(1,2,2)}=\alpha_1\alpha_2\alpha_2F\left(r_1,s_2,t_2\right);$$

$$I_{(2,1,1)}=\alpha_2\alpha_1\alpha_1F\left(r_2,s_1,t_1\right) \qquad I_{(2,2,1)}=\alpha_2\alpha_2\alpha_1F\left(r_2,s_2,t_1\right)$$

$$I_{(2,1,2)}=\alpha_2\alpha_1\alpha_2F\left(r_2,s_1,t_2\right) \qquad I_{(2,2,2)}=\alpha_2\alpha_2\alpha_2F\left(r_2,s_2,t_2\right)$$

trong đó:

$$r_2=-r_1=a=0,5773502691$$

$$s_2=-s_1=a=0,5773502691$$

$$t_2=-t_1=a=0,5773502691$$

Thí dụ tính tích phân:

$I=\int_{-1}^{+1}\int_{-1}^{+1}\int_{-1}^{+1}\left(2r^3.s+3.t+5\right)drdsdt$. Giá trị tích phân tính bằng giải tích $I=40$

Tính tích phân $I=\int_{-1}^{+1}\int_{-1}^{+1}\int_{-1}^{+1}\left(2r^3.s+3.t+5\right)drdsdt$ bằng tích phân số theo phép cầu phương Gauss: $I=I_{(1,1,1)}+I_{(1,2,1)}+I_{(1,1,2)}+I_{(1,2,2)}+I_{(2,1,1)}+I_{(2,2,1)}+I_{(2,1,2)}+I_{(2,2,2)}$

với:

$$I_{(1,1,1)}=\alpha_1\alpha_1\alpha_1F\left(r_1,s_1,t_1\right)=1.1.1.\left(2.\left(-a\right)^3.\left(-a\right)+3.\left(-a\right)+5\right)=2.a^4-3a+5$$

$$I_{(1,2,1)}=\alpha_1\alpha_2\alpha_1F\left(r_1,s_2,t_1\right)=1.1.1.\left(2.\left(-a\right)^3.a+3.\left(-a\right)+5\right)=-2a^4-3a+5$$

$$I_{(1,1,2)}=\alpha_1\alpha_1\alpha_2F\left(r_1,s_1,t_2\right)=1.1.1.\left(2\left(-a\right)^3.\left(-a\right)+3.a+5\right)=2a^4+3a+5$$

$$I_{(1,2,2)}=\alpha_1\alpha_2\alpha_2F\left(r_1,s_2,t_2\right)=1.1.1.\left(2.\left(-a\right)^3.a+3.a+5\right)=-2a^4+3a+5$$

$$I_{(2,1,1)}=\alpha_2\alpha_1\alpha_1F\left(r_2,s_1,t_1\right)=1.1.1.\left(2.\left(a\right)^3.\left(-a\right)+3.\left(-a\right)+5\right)=-2a^4-3a+5$$

$$I_{(2,2,1)} = \alpha_2\alpha_2\alpha_1 F(r_2, s_2, t_1) = 1.1.1.\left(2.(a)^3.a + 3.(-a) + 5\right) = 2a^4 - 3a + 5$$

$$I_{(2,1,2)} = \alpha_2\alpha_1\alpha_2 F(r_2, s_1, t_2) = 1.1.1.\left(2.a^3.(-a) + 3.a + 5\right) = -2a^4 + 3a + 5$$

$$I_{(2,2,2)} = \alpha_2\alpha_2\alpha_2 F(r_2, s_2, t_2) = 1.1.1.\left(2.a^3.a + 3.a + 5\right) = 2a^4 + 3a + 5$$

$$I = I_{(1,1,1)} + I_{(1,2,1)} + I_{(1,1,2)} + I_{(1,2,2)} + I_{(2,1,1)} + I_{(2,2,1)} + I_{(2,1,2)} + I_{(2,2,2)} = 40$$

Đối với phần tử tấm, vỏ tứ giác thường chỉ sử dụng sơ đồ tích phân 1 điểm hoặc 2 điểm Gauss, hình 11-6.

2. Thí dụ tính ma trận độ cứng bằng tích phân số

Tính ma trận độ cứng của phần tử chữ nhật đồng tham số trong trạng thái màng bằng tích phân số theo phương pháp cầu phương Gauss, [3].

Tọa độ (x, y) tại điểm bất kỳ trong phần tử được xác định bằng công thức:

$$x = \sum_{i=1}^{4} N_i x_i \qquad y = \sum_{i=1}^{4} N_i y_i \tag{11.131}$$

Biểu thức (11.131) dưới dạng ma trận:

$$\begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ x_2 \\ y_2 \\ x_3 \\ y_3 \\ x_4 \\ y_4 \end{Bmatrix} \tag{11.132}$$

trong đó:

N_i - hàm nội suy của hệ tọa độ tự nhiên có dạng (11.124), với $(i = 1 \div 4)$ hàm nội suy N_i có dạng (11.124).

x_i, y_i - tọa độ tại nút $(i = 1 \div 4)$.

Đối với bài toán 02 chiều, quan hệ đạo hàm của đại lượng nào đó đối với biến (r, s) trong hệ tọa độ tự nhiên và đạo hàm của đại lượng đó với biến (x, y) trong hệ tọa độ Descartes có dạng:

$$\frac{\partial}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r}$$

$$\frac{\partial}{\partial s} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s}$$

dưới dạng ma trận:

$$\begin{Bmatrix} \dfrac{\partial}{\partial r} \\ \dfrac{\partial}{\partial s} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial r} & \dfrac{\partial y}{\partial r} \\ \dfrac{\partial x}{\partial s} & \dfrac{\partial y}{\partial s} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x} \\ \dfrac{\partial}{\partial y} \end{Bmatrix} = [J] \begin{Bmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x} \\ \dfrac{\partial}{\partial y} \end{Bmatrix} \tag{11.133}$$

với $[J]$ là ma trận Jacobian.

Chú ý đến (11.124) với các hàm nội suy N_i là hàm của các biến (r,s) nên:

$$[J] = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial N_1}{\partial r} & \dfrac{\partial N_2}{\partial r} & \dfrac{\partial N_3}{\partial r} & \dfrac{\partial N_4}{\partial r} \\ \dfrac{\partial N_1}{\partial s} & \dfrac{\partial N_2}{\partial s} & \dfrac{\partial N_3}{\partial s} & \dfrac{\partial N_4}{\partial s} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \\ x_4 & y_4 \end{bmatrix} \tag{11.134.a}$$

Thay hàm nội suy N_i, $(i = 1 \div 4)$ theo (11.130):

$$[J] = \begin{bmatrix} -\dfrac{(1-s)}{4} & \dfrac{(1-s)}{4} & \dfrac{(1+s)}{4} & -\dfrac{(1+s)}{4} \\ -\dfrac{(1-r)}{4} & -\dfrac{(1+r)}{4} & \dfrac{(1+r)}{4} & \dfrac{(1-r)}{4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \\ x_4 & y_4 \end{bmatrix} \tag{11.134.b}$$

Ma trận Jacobian phụ thuộc vào biến (r,s).

Từ (11.134), rút ra:

$$\begin{Bmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x} \\ \dfrac{\partial}{\partial y} \end{Bmatrix} = [J]^{-1} \begin{Bmatrix} \dfrac{\partial}{\partial r} \\ \dfrac{\partial}{\partial s} \end{Bmatrix} \tag{11.135}$$

Giả sử ma trận Jacobian nghịch đảo có dạng :

$$[J]^{-1} = \begin{bmatrix} J_{11}^* & J_{12}^* \\ J_{21}^* & J_{22}^* \end{bmatrix} \tag{11.136}$$

và áp dụng (11.135):

$$\begin{Bmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial x} \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} \\ \dfrac{\partial v}{\partial x} \\ \dfrac{\partial v}{\partial y} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} J_{11}^* & J_{12}^* & 0 & 0 \\ J_{21}^* & J_{22}^* & 0 & 0 \\ 0 & 0 & J_{11}^* & J_{12}^* \\ 0 & 0 & J_{21}^* & J_{22}^* \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial r} \\ \dfrac{\partial u}{\partial s} \\ \dfrac{\partial v}{\partial r} \\ \dfrac{\partial v}{\partial s} \end{Bmatrix} \tag{11.137}$$

Véc tơ biến dạng của phần tử trong trạng thái màng:

$$\{\varepsilon\}=\begin{Bmatrix}\varepsilon_x\\ \varepsilon_y\\ \gamma_{xy}\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&1&1&0\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\dfrac{\partial u}{\partial x}\\ \dfrac{\partial u}{\partial y}\\ \dfrac{\partial v}{\partial x}\\ \dfrac{\partial v}{\partial y}\end{Bmatrix} \tag{11.138}$$

Chú ý đến (11.137):

$$\{\varepsilon\}=\begin{Bmatrix}\varepsilon_x\\ \varepsilon_y\\ \gamma_{xy}\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}J_{11}^* & J_{12}^* & 0 & 0\\ 0 & 0 & J_{21}^* & J_{22}^*\\ J_{21}^* & J_{22}^* & J_{11}^* & J_{12}^*\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\dfrac{\partial u}{\partial r}\\ \dfrac{\partial u}{\partial s}\\ \dfrac{\partial v}{\partial r}\\ \dfrac{\partial v}{\partial s}\end{Bmatrix}=\left[J^*\right]\begin{Bmatrix}\dfrac{\partial u}{\partial r}\\ \dfrac{\partial u}{\partial s}\\ \dfrac{\partial v}{\partial r}\\ \dfrac{\partial v}{\partial s}\end{Bmatrix} \tag{11.139}$$

Chuyển vị (u,v) tại điểm bất kỳ trong phần tử được xác định bằng công thức:

$$u=\sum_{i=1}^{4}N_iu_i \qquad v=\sum_{i=1}^{4}N_iv_i \tag{11.140}$$

với u_i, v_i là chuyển vị tại nút $(i=1\div 4)$. Véc tơ chuyển vị nút của phần tử:

$$\{q\}_e=\{u_1\quad v_1\quad u_2\quad v_2\quad u_3\quad v_3\quad u_4\quad v_4\}^T$$

Từ (11.125), véc tơ đạo hàm riêng chuyển vị (u,v) theo biến (r,s) trong (11.139) có dạng:

$$\begin{Bmatrix}\dfrac{\partial u}{\partial r}\\ \dfrac{\partial u}{\partial s}\\ \dfrac{\partial v}{\partial r}\\ \dfrac{\partial v}{\partial s}\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}\dfrac{\partial N_1}{\partial r}&0&\dfrac{\partial N_2}{\partial r}&0&\dfrac{\partial N_3}{\partial r}&0&\dfrac{\partial N_4}{\partial r}&0\\ \dfrac{\partial N_1}{\partial s}&0&\dfrac{\partial N_2}{\partial s}&0&\dfrac{\partial N_3}{\partial s}&0&\dfrac{\partial N_4}{\partial s}&0\\ 0&\dfrac{\partial N_1}{\partial r}&0&\dfrac{\partial N_2}{\partial r}&0&\dfrac{\partial N_3}{\partial r}&0&\dfrac{\partial N_4}{\partial r}\\ 0&\dfrac{\partial N_1}{\partial s}&0&\dfrac{\partial N_2}{\partial s}&0&\dfrac{\partial N_3}{\partial s}&0&\dfrac{\partial N_4}{\partial s}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}u_1\\v_1\\u_2\\v_2\\u_3\\v_3\\u_4\\v_4\end{Bmatrix}=[f]\begin{Bmatrix}u_1\\v_1\\u_2\\v_2\\u_3\\v_3\\u_4\\v_4\end{Bmatrix} \tag{11.141}$$

Từ (11.139), (11.141):

$$\{\varepsilon\}_e = [D]_e \{q\}_e = \left[J^*\right][f]\{q\}_e$$

rút ra ma trận biến dạng - chuyển vị:

$$[D]_e = \left[J^*\right][f] \tag{11.142}$$

Từ hàm nội suy N_i có dạng (11.124), ma trận $[f]$ có dạng:

$$[f] = \begin{bmatrix} -\frac{1-s}{4} & 0 & \frac{1-s}{4} & 0 & \frac{1+s}{4} & 0 & -\frac{1+s}{4} & 0 \\ -\frac{1-r}{4} & 0 & -\frac{1+r}{4} & 0 & \frac{1+r}{4} & 0 & \frac{1-r}{4} & 0 \\ 0 & -\frac{1-s}{4} & 0 & \frac{1-s}{4} & 0 & \frac{1+s}{4} & 0 & -\frac{1+s}{4} \\ 0 & -\frac{1-r}{4} & 0 & -\frac{1+r}{4} & 0 & \frac{1+r}{4} & 0 & \frac{1-r}{4} \end{bmatrix} \tag{11.143}$$

Ma trận độ cứng phần tử màng được xác định theo công thức:

$$[K]_e = \delta \int_S [D]_e^T [E_0]_e [D]_e \, dS \tag{11.144.a}$$

trong đó:

$[E_0]_e$ - ma trận đàn hồi vật liệu trong trạng thái ứng suất phẳng, được xác định theo lý thuyết đàn hồi có dạng: $$[E_0]_e = \frac{E}{1-\mu^2}\begin{bmatrix} 1 & \mu & 0 \\ \mu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\mu}{2} \end{bmatrix} \tag{11.145}$$

với E, μ là mô đun đàn hồi và hệ số Poisson.

Tích phân (11.144) dưới dạng tích phân số:

$$[K]_e = \delta \int_S [D]_e^T [E_0]_e [D]_e \, dS = \delta \int_{-1}^{+1}\int_{-1}^{+1} [D]_e^T [E_0]_e [D]_e |J| \, drds \tag{11.144.b}$$

Ký hiệu: $$F(r_i, s_j) = \delta [D]_e^T [E_0]_e [D]_e |J| \tag{11.144.c}$$

thì biểu thức tính ma trận độ cứng bằng tích phân số Gauss có dạng:

$$[K]_e = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \alpha_i \alpha_j F(r_i, s_j) \tag{11.144.d}$$

Ma trận $[f]$ trong (11.142) và ma trận Jacobian $[J]$ phụ thuộc vào biến (r,s) trong hệ tọa độ tự nhiên. Tích phân số theo phương pháp Gauss như đã thấy ở các thí dụ trên, là tổng các giá trị của hàm dưới dấu tích phân với các trọng số tương ứng tại các điểm Gauss, với số điểm Gauss $n=2$ sẽ là tổng của 04 giá trị tại các điểm lấy tích phân I, II, III, IV, hình 11-6.

$$[K]_e = [K_I] + [K_{II}] + [K_{III}] + [K_{IV}] \tag{11.144.e}$$

Tính ma trận độ cứng của phần tử chữ nhật theo (11.144) với chiều dầy $\delta = 20$, mô đun đàn hồi $E = 2.10^3$, lấy hệ số Poisson $\mu = 0$. Tọa độ các nút phần tử trong hệ tọa độ Descartes cho trên hình 8-6. Tích phân số theo sơ đồ 04 điểm Gauss với $n = 2$. Từ bảng 11-6 với $i, j = 1 \div 2$, $\alpha_i = \alpha_j = 1,0$ và tại các điểm tích phân số:

Điểm I: $r_1 = -0,57735027$; $s_1 = -0,57735027$;

Điểm II: $r_2 = 0,57735027$; $s_2 = -0,57735027$;

Điểm III: $r_3 = 0,57735027$; $s_3 = 0,57735027$;

Điểm IV: $r_4 = -0,57735027$; $s_4 = 0,57735027$;

Thí dụ tính $[K_{III}]$ - tại điểm tích phân III:

Tính ma trận Jacobian theo (11.135.b) với giá trị r_3, s_3, x_3, y_3 tại điểm III, hình 11-6. Ký hiệu $a = 0,57735027$:

$$[J] = \begin{bmatrix} -\frac{(1-a)}{4} & \frac{(1-a)}{4} & \frac{(1+a)}{4} & -\frac{(1+a)}{4} \\ -\frac{(1-a)}{4} & -\frac{(1+a)}{4} & \frac{(1+a)}{4} & \frac{(1-a)}{4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 40 & 0 \\ 40 & 30 \\ 0 & 30 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20 & 0 \\ 0 & 15 \end{bmatrix} \tag{1}$$

Ma trận nghịch đảo: $[J]^{-1} = \begin{bmatrix} J_{11}^* & J_{12}^* \\ J_{21}^* & J_{22}^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/20 & 0 \\ 0 & 1/15 \end{bmatrix}$ (2)

Định thức $|J| = 300$ (3)

Ma trận tính theo (11.140):

$$[J^*] = \begin{bmatrix} J_{11}^* & J_{12}^* & 0 & 0 \\ 0 & 0 & J_{21}^* & J_{22}^* \\ J_{21}^* & J_{22}^* & J_{11}^* & J_{12}^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/20 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/15 \\ 0 & 1/15 & 1/20 & 0 \end{bmatrix} \tag{4}$$

Ma trận $[f]$ với r_3, s_3 có dạng (5).

$$[f]=\begin{bmatrix} -\frac{1-a}{4} & 0 & \frac{1-a}{4} & 0 & \frac{1+a}{4} & 0 & -\frac{1+a}{4} & 0 \\ -\frac{1-a}{4} & 0 & -\frac{1+a}{4} & 0 & \frac{1+a}{4} & 0 & \frac{1-a}{4} & 0 \\ 0 & -\frac{1-a}{4} & 0 & \frac{1-a}{4} & 0 & \frac{1+a}{4} & 0 & -\frac{1+a}{4} \\ 0 & -\frac{1-a}{4} & 0 & -\frac{1+a}{4} & 0 & \frac{1+a}{4} & 0 & \frac{1-a}{4} \end{bmatrix}$$

$$[f]=\begin{bmatrix} -0{,}1057 & 0 & 0{,}1057 & 0 & 0{,}3943 & 0 & -0{,}3943 & 0 \\ -0{,}1057 & 0 & -0{,}3943 & 0 & 0{,}3943 & 0 & 0{,}1057 & 0 \\ 0 & -0{,}1057 & 0 & 0{,}1057 & 0 & 0{,}3943 & 0 & -0{,}3943 \\ 0 & -0{,}1057 & 0 & -0{,}3943 & 0 & 0{,}3943 & 0 & 0{,}1057 \end{bmatrix} \tag{5}$$

Tích ma trận $[D]_e=\left[J^*\right][f]$, theo (11.142):

$$[D]_e=\begin{bmatrix} -0{,}0053 & 0 & 0{,}0053 & 0 & 0{,}0197 & 0 & -0{,}0197 & 0 \\ 0 & -0{,}007 & 0 & -0{,}0263 & 0 & 0{,}0263 & 0 & 0{,}007 \\ -0{,}007 & -0{,}0053 & -0{,}0263 & 0{,}0053 & 0{,}0263 & 0{,}0197 & 0{,}007 & -0{,}0197 \end{bmatrix}$$

Ma trận đàn hồi vật liệu $\left[E_0\right]_e$, với $\mu=0$ từ (11.145): $\left[E_0\right]_e=2.10^3\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$

Tích ma trận: $\left[E_0\right]_e[D]_e=$

$$=2.10^3\begin{bmatrix} -0{,}0053 & 0 & 0{,}0053 & 0 & 0{,}0197 & 0 & -0{,}0197 & 0 \\ 0 & -0{,}007 & 0 & -0{,}0263 & 0 & 0{,}0263 & 0 & 0{,}007 \\ -0{,}0035 & -0{,}0027 & -0{,}0132 & 0{,}0027 & 0{,}0132 & 0{,}0098 & 0{,}0035 & -0{,}0098 \end{bmatrix}$$

Nhân trái $\left[E_0\right]_e[D]_e$ với ma trận $[D]_e^T$, là tích $[D]_e^T\left[E_0\right]_e[D]_e$ và chú ý đến (11.124):

$$
[K_{III}] = 20.1.1.300.2.10^3 \begin{bmatrix} -0,0053 & 0 & -0,007 \\ 0 & -0,007 & -0,0053 \\ 0,0053 & 0 & -0,0263 \\ 0 & -0,0263 & 0,0053 \\ 0,0197 & 0 & 0,0263 \\ 0 & 0,0263 & 0,0197 \\ -0,0197 & 0 & 0,007 \\ 0 & 0,007 & -0,0197 \end{bmatrix} \times
$$

$$
\times \begin{bmatrix} -0,0053 & 0 & 0,0053 & 0 & 0,0197 & 0 & -0,0197 & 0 \\ 0 & -0,007 & 0 & -0,0263 & 0 & 0,0263 & 0 & 0,007 \\ -0,0035 & -0,0027 & -0,0132 & 0,0027 & 0,0132 & 0,0098 & 0,0035 & -0,0098 \end{bmatrix}
$$

Sau khi nhân ma trận:

$$
[K_{III}] = 10^4 \begin{bmatrix} 0,0631 & 0,0227 & 0,0772 & -0,0227 & -0,2362 & 0,0823 & 0,0959 & 0,0823 \\ & 0,076 & 0,0839 & 0,2037 & -0,0839 & -0,2832 & -0,0223 & 0,00353 \\ & & 0,4503 & -0,0852 & -0,2913 & -0,3093 & -0,2357 & 0,3093 \\ & & & 0,8472 & 0,0839 & -0,7677 & 0,0223 & -0,2832 \\ & & & & 0,8823 & 0,3093 & -0,3552 & -0,3093 \\ & & & & & 1,0617 & 0,0827 & -0,0107 \\ & & doixung & & & & 0,4951 & -0,0823 \\ & & & & & & & 0,2905 \end{bmatrix}
$$

Tính tương tự như trên cho các điểm lấy tích phân IV:

$$
[K_{IV}] = 20.1.1.300.2.10^3 \begin{bmatrix} -0,0053 & 0 & -0,0263 \\ 0 & 0,0263 & -0,0053 \\ 0,0053 & 0 & -0,007 \\ 0 & -0,007 & 0,0053 \\ 0,0197 & 0 & 0,007 \\ 0 & -0,007 & 0,0197 \\ -0,0197 & 0 & 0,0263 \\ 0 & 0,0263 & -0,0197 \end{bmatrix} \times
$$

$$
\times \begin{bmatrix} -0,0053 & 0 & 0,0053 & 0 & 0,0197 & 0 & -0,0197 & 0 \\ 0 & -0,0263 & 0 & -0,007 & 0 & 0,007 & 0 & 0,0263 \\ -0,0132 & -0,0027 & -0,0035 & 0,0027 & 0,0035 & 0,0098 & 0,0132 & -0,0098 \end{bmatrix}
$$

Sau khi nhân ma trận:

$$[K_{IV}]=10^4\begin{bmatrix} 0,4503 & 0,0852 & 0,0767 & -0,0852 & -0,2357 & -0,3093 & -0,2913 & 0,3093 \\ & 0,8472 & 0,0223 & 0,2037 & -0,0223 & -0,2832 & -0,0839 & -0,7677 \\ & & 0,0631 & -0,0227 & 0,0959 & -0,0823 & -0,2362 & 0,0823 \\ & & & 0,076 & 0,0223 & 0,00353 & 0,0839 & -0,2832 \\ & & & & 0,4951 & 0,0823 & -0,3548 & -0,0823 \\ & & & & & 0,2905 & 0,312 & -0,0108 \\ & & doixung & & & & 0,8823 & -0,3093 \\ & & & & & & & 1,0617 \end{bmatrix}$$

Tính tương tự như trên cho các điểm lấy tích phân I:

$$[K_{I}]=10^4\begin{bmatrix} 0,8823 & 0,3093 & -0,3552 & -0,3093 & -0,2359 & -0,0852 & -0,2913 & 0,0852 \\ & 1,0617 & 0,0827 & -0,0107 & -0,0827 & -0,2847 & -0,3120 & -0,7662 \\ & & 0,4951 & -0,0823 & 0,0959 & -0,0227 & -0,2362 & 0,0227 \\ & & & 0,2905 & 0,0827 & 0,0050 & 0,3120 & -0,2847 \\ & & & & 0,0631 & 0,0227 & -0,0772 & -0,0227 \\ & & & & & 0,0760 & 0,0839 & 0,02037 \\ & & doixung & & & & 0,4503 & -0,0852 \\ & & & & & & & 0,8472 \end{bmatrix}$$

Tính tương tự như trên cho các điểm lấy tích phân II:

$$[K_{II}]=10^4\begin{bmatrix} 0,4951 & 0,0823 & -0,3548 & -0,0823 & -0,2362 & -0,0227 & 0,0959 & 0,0227 \\ & 0,2905 & 0,3120 & -0,0108 & -0,3120 & -0,2847 & -0,0827 & 0,0050 \\ & & 0,8823 & -0,3093 & -0,2913 & -0,0852 & -0,2357 & 0,0852 \\ & & & 1,0617 & 0,3120 & 0,7662 & 0,0827 & -0,2847 \\ & & & & 0,4503 & 0,0852 & -0,0767 & -0,0852 \\ & & & & & 0,8472 & 0,0223 & 0,2037 \\ & & doixung & & & & 0,0631 & -0,0227 \\ & & & & & & & 0,0760 \end{bmatrix}$$

Cộng các ma trận $[K]_e=[K_I]+[K_{II}]+[K_{III}]+[K_{IV}]$ theo (11.144):

$$
[K]_e = 10^4 \begin{bmatrix}
1,8908 & 0,4995 & -0,5561 & -0,4995 & -0,9440 & -0,4995 & -0,3908 & 0,4995 \\
 & 2,2754 & 0,5009 & 0,3859 & -0,5009 & -1,1358 & -0,5009 & -1,5244 \\
 & & 1,8908 & -0,4995 & -0,3908 & -0,4995 & -0,9438 & 0,4995 \\
 & & & 2,2754 & 0,5009 & -1,5254 & 0,5009 & -1,1358 \\
 & & & & 1,8908 & 0,4995 & -0,5561 & -0,4995 \\
 & & & & & 2,2754 & 0,5009 & 0,3859 \\
 & & \mathit{doixung} & & & & 1,8908 & -0,4995 \\
 & & & & & & & 2,2754
\end{bmatrix}
$$

11.4.3. Ứng suất và nội lực phân bố của phần tử tứ giác 4 nút tại các điểm nút của phần tử

Ứng suất và nội lực phân bố của phần tử tứ giác 4 nút được xác định tại các điểm cầu phương Gauss 2x2 (I, II, III, IV) và các điểm nút (1, 2, 3, 4) của phần tử, hình 11-3.

Ứng suất (nội lực) tại các điểm nút của phần tử được ngoại suy theo công thức [9]:

$$
\begin{Bmatrix} \tau_{1j} \\ \tau_{2j} \\ \tau_{3j} \\ \tau_{4j} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} a & c & b & c \\ c & a & c & b \\ b & c & a & c \\ c & b & c & a \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \tau_{Ij} \\ \tau_{IIj} \\ \tau_{IIIj} \\ \tau_{IVj} \end{Bmatrix} \qquad (11.146)
$$

trong đó:

$\tau_{Ij}, \tau_{IIj}, \tau_{IIIj}, \tau_{IVj}$ - thành phần ứng suất (nội lực) được tính tại điểm cầu phương Gauss 2x2 từ điểm $I \div IV$;

$\tau_{1j}, \tau_{2j}, \tau_{3j}, \tau_{4j}$ - thành phần ứng suất (nội lực) tại các điểm nút của phần tử từ nút $1 \div 4$;

j - chỉ số của các thành phần ứng suất (nội lực), $j = 1 \div 6$

$$
a = 1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\,;\; b = 1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\,;\; c = -\frac{1}{2}
$$