Bài giảng Toán tổ hợp

Đại học Khoa học Tự nhiên, Tp HCM

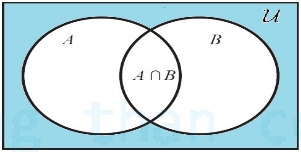
Nội dung

Chương 3. MỘT SỐ KỸ THUẬT ĐẾM KHÁC

1. Sử dụng sơ đồ Ven
2. Nguyên lý bù trừ
3. Đa thức quân xe

3.1.Sử dụng sơ đồ Ven

Xét sơ đồ Ven



Ta ký hiệu

- $\mathcal{U}$ là tập vũ trụ
- $\overline{A}$ là phần bù của A trong $\mathcal{U}$
- $N(A)$ là số phần tử của A.
- $N = N(\mathcal{U})$

Khi đó $N(\overline{A} \cap \overline{B}) = N - N(A) - N(B) + N(A \cap B)$ **(1)**

Ví dụ. Một trường học có 100 sinh viên, trong đó có 50 sinh viên học tiếng Anh, 40 sinh viên học tiếng Pháp và 20 sinh viên học cả tiếng Anh và tiếng Pháp. Hỏi có bao nhiêu sinh viên không học tiếng Anh lẫn không học tiếng Pháp?

Giải. Gọi là $\mathcal{U}$ là tập hợp sinh viên của trường. Gọi A là tập hợp sinh viên học tiếng Anh và P là tập hợp sinh viên học tiếng Pháp. Ta có

$$N = N(\mathcal{U}) = 100,\ N(A) = 50,\ N(P) = 40 \text{ và } N(A \cap P) = 20.$$

Theo yêu cầu bài toán chúng ta cần tính $N(\overline{A} \cap \overline{P})$. Ta có

$$\begin{aligned} N(\overline{A} \cap \overline{P}) &= N - N(A) - N(P) + N(A \cap P) \\ &= 100 - 50 - 40 + 20 = 30 \end{aligned}$$

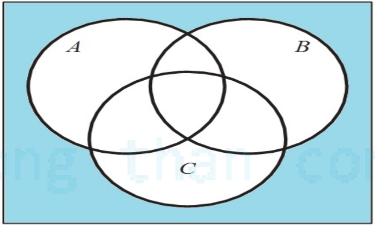
Ví dụ. Có bao nhiêu hoán vị các chữ số $0, 1, 2, \ldots, 9$ sao cho chữ số đầu lớn hơn 1 và chữ số cuối nhỏ hơn 8?

Giải. Gọi $\mathcal{U}$ là tập tất cả các hoán vị của $0, 1, 2, ..., 9$; A là tập tất cả các hoán vị với chữ số đầu là 0 hoặc 1 và B là tập tất cả các hoán vị với chữ số cuối là 8 hoặc 9. Khi đó yêu cầu của bài toán là tính $N(\overline{A} \cap \overline{B})$.

Ta có $N = 10!, N(A) = 2 \times 9!,\ N(B) = 2 \times 9!,\ N(A \cap P) = 2 \times 2 \times 8!$.
Áp dụng công thức **(1)** ta được

$$\begin{aligned} N(\overline{A} \cap \overline{B}) &= N - N(A) - N(B) + N(A \cap B) \\ &= 10! - (2 \times 9!) - (2 \times 9!) + (2 \times 2 \times 8!) = 2338560 \end{aligned}$$

Câu hỏi. Nếu ta mở rộng công thức **(1)** cho trường hợp 3 tập hợp thì như thế nào?



Đáp án. Khi đó công thức là

$$\begin{aligned} N(\overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C}) = & N - N(A) - N(B) - N(C) \\ & + N(A \cap B) + N(A \cap C) + N(B \cap C) \\ & - N(A \cap B \cap C) \qquad \textbf{(2)} \end{aligned}$$

Đối với trường hợp 3 tập hợp là A_1, A_2, A_3, ta có thể viết công thức **(2)** như sau:

$$N(\overline{A}_1 \cap \overline{A}_2 \cap \overline{A}_3) = N - \sum_i N(A_i) +) \sum_{i \neq j} N(A_i \cap A_j) - N(A_1 \cap A_2 \cap A_3)$$

Ví dụ. Một trường có 100 sinh viên trong đó có 40 sinh viên học tiếng Anh, 40 sinh viên học tiếng Pháp, 40 sinh viên học tiếng Đức, mỗi cặp ngôn ngữ có 20 sinh viên học và có 10 sinh viên học cả 3 ngôn ngữ. Hỏi có bao nhiêu sinh viên không học cả 3 tiếng Anh, Pháp và Đức?

Giải. Ta có $N = 100, N(A) = N(P) = N(D) = 40$, $N(A \cap P) = N(P \cap D) = N(A \cap D) = 20$, và $N(A \cap P \cap D) = 10$. Theo công thức **(2)** ta được

$$N(\overline{A} \cap \overline{P} \cap \overline{D}) = 100 - (40 + 40 + 40) + (20 + 20 + 20) - 10 = 30.$$

Ví dụ. Có bao nhiêu số nguyên dương ≤ 70 mà nguyên tố cùng nhau với 70?

Nhận xét. Số các số nguyên dương $\leq n$ mà chia hết cho k là phần nguyên n/k.

Giải. Gọi $\mathcal{U}$ là tập hợp các số nguyên dương ≤ 70. Ta có ước nguyên tố của 70 là 2, 5 và 7. Do đó muốn đếm các số nguyên tố cùng nhau với 70 ta cần đếm những số không chia hết cho 2, 5 hoặc 7.

Gọi A_1, A_2 và A_3 lần lượt là tập các số nguyên trong $\mathcal{U}$ chia hết cho $2, 5$ và 7. Khi đó đáp án cần tìm của bài toán là $N(\overline{A}_1 \cap \overline{A}_2 \cap \overline{A}_3)$. Ta có

$$N = 70, \quad N(A_1) = 70/2 = 35,$$
$$N(A_2) = 70/5 = 14, \quad N(A_3) = 70/7 = 10$$

Ta có một số chia hết cho 2 và 5 khi và chỉ khi số đó chia hết cho 10. Do đó $N(A_1 \cap A_2) = 70/10 = 7$. Tương tự ta có,

$$N(A_2 \cap A_3) = \frac{70}{5 \times 7} = 2,\ N(A_1 \cap A_3) = \frac{70}{2 \times 7} = 5.$$

$$N(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = \frac{70}{2 \times 5 \times 7} = 1.$$

Áp dụng công thức **(2)** ta có

$$N(\overline{A}_1 \cap \overline{A}_2 \cap \overline{A}_3) = 70 - (35 + 14 + 10) + (7 + 2 + 5) - 1 = 24.$$

Ví dụ. Có bao nhiêu số nguyên dương ≤ 1000 mà nguyên tố cùng nhau với

a) 50 b) 210

3.2. Nguyên lý bù trừ

Trong phần này chúng ta sẽ mở rộng công thức ở phần 1 cho trường hợp n tập hợp $A_1, A_2, \ldots, A_n$. Để đơn giản về mặt ký hiệu chúng ta viết "$\cap$" như là phép nhân. Ví dụ $A_1 \cap A_2 \cap A_3$ sẽ được viết thành $A_1A_2A_3$. Bằng việc sử dụng ký hiệu này, ta có số lượng phần tử không thuộc tất cả các tập $A_1, A_2, \ldots, A_n$ sẽ được viết là $N(\overline{A}_1\overline{A}_2\ldots\overline{A}_n)$.

Định lý. *Cho tập vũ trụ U có N phần tử và $A_1, A_2, \ldots, A_n$ là n tập hợp con của U. Ta đặt S_k là tổng số phần tử của tất cả tập giao của đúng k tập hợp từ các $\{A_i\}_{i=1,\ldots,n}$, cụ thể*

$$S_1 = \sum_i N(A_i),\ S_2 = \sum_{i\neq j} N(A_iA_j), \ldots,\ S_n = N(A_1A_2\ldots A_n).$$

Khi đó

$$\begin{aligned} N(\overline{A}_1\overline{A}_2\ldots\overline{A}_n) &= N + \sum_k (-1)^k S_k \\ &= N - S_1 + S_2 - \ldots + (-1)^k S_k + \ldots + (-1)^n S_n \end{aligned}$$

Hệ quả. *Cho $A_1, A_2, \dots, A_n$ là n tập hợp con của tập vũ trụ U. Khi đó*

$$\begin{aligned} N(A_1 \cup \ldots \cup A_n) &= \sum_{k \geq 1} (-1)^{k-1} S_k \\ &= S_1 - S_2 + \ldots + (-1)^{k-1} S_k + \ldots + (-1)^{n-1} S_n \end{aligned}$$

Chứng minh. Từ Định lý trên ta có

$$\begin{aligned} N(\overline{A}_1 \ldots \overline{A}_n) &= N - S_1 + S_2 - \ldots + (-1)^k S_k + \ldots + (-1)^n S_n \\ &= N - \Big(S_1 - S_2 + \ldots + (-1)^{k-1} S_k + \ldots + (-1)^{n-1} S_n\Big). \end{aligned}$$

Mặt khác
$$N(A_1 \cup \ldots \cup A_n) = N - N(\overline{A}_1 \ldots \overline{A}_n).$$

Do đó ta có điều phải chứng mình ■

Ví dụ. Tìm số nghiệm nguyên không âm của phương trình

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 18 \qquad (*)$$

thỏa điều kiện $x_i \leq 7, \forall i = 1, \dots, 4$.

Giải. Gọi $\mathcal{U}$ là tập hợp các nghiệm nguyên không âm của phương trình (∗). Ta có$N = N(\mathcal{U}) = K_4^{18} = \binom{4+18-1}{18} = 1330.$
Gọi A_i là tập hợp các nghiệm nguyên không âm của phương trình (∗) thỏa tính chất $x_i \geq 8$. Khi đó kết quả của bài toán là $N(\overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3\overline{A}_4)$.

Bằng việc giải những bài toán tìm số nghiêm nguyên ta được

- $N(A_i) = K_4^{10} = \binom{13}{10}$
- $N(A_iA_j) = K_4^2 = \binom{5}{2}$
- $N(A_iA_jA_k) = 0$
- $N(A_1A_2A_3A_4) = 0$

Vì vai trò của các A_i $(1 \leq i \leq 4)$ như nhau nên ta có:

- $S_1 = \sum_i N(A_i) = 4\binom{13}{10} = 1144$
- $S_2 = \sum_{i \neq j} N(A_iA_j) = \binom{4}{2}\binom{5}{2} = 60$
- $S_3 = 0, \;\; S_4 = 0$

Áp dụng Định lý, ta có

$$\begin{aligned} N(\overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3\overline{A}_4) &= N - S_1 + S_2 - S_3 + S_4 \\ &= 1330 - 1144 + 60 - 0 + 0 = 246 \end{aligned}$$

Ví dụ. Có bao nhiêu cách lấy 6 lá bài từ bộ bài 52 lá sao cho

a) có đầy đủ 4 chất (cơ, rô, chuồn, bích).

b) ít nhất một chất không có

Giải. Gọi $\mathcal{U}$ là tất cả bộ 6 lá bài được lấy từ bộ bài và A_1, A_2, A_3, A_4 lần lượt là tất cả bộ 6 lá bài mà không có chất cơ, rô, chuồn và bích. Ta có

- $N = N(\mathcal{U}) = \binom{52}{6}$
- $N(A_1) = \binom{39}{6}$
- $N(A_1A_2) = \binom{26}{6}$
- $N(A_1A_2A_3) = \binom{13}{6}$
- $N(A_1A_2A_3A_4) = 0$

Vì vai trò A_1, A_2, A_3, A_4 giống nhau nên ta có

- $S_1 = 4\binom{39}{6}$
- $S_2 = \binom{4}{2}\binom{26}{6}$
- $S_3 = \binom{4}{3}\binom{13}{6}$
- $S_4 = 0$

a) $N(\overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3\overline{A}_4) = N - S_1 + S_2 - S_3 + S_4 = 8682544$

b) $N(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4) = S_1 - S_2 + S_3 - S_4 = 11675976$

Ví dụ. Tìm số nghiệm nguyên không âm của phương trình

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 25 \qquad (*)$$

thỏa điều kiện $x_1 \leq 5$, $x_2 \leq 6$, $x_3 \leq 7$.

Ví dụ. Tìm số nghiệm nguyên không âm của phương trình $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 20$ thỏa điều kiện $x_i \leq 8\,(i = 1, \ldots 6)$

Định lý. *Cho tập vũ trụ U có n phần tử và $A_1, A_2, \ldots A_n$ là n tập hợp con của U. Khi đó số phần tử thuộc vào đúng m tập hợp, ký hiệu* $\boldsymbol{N_m}$*, là*

$$N_m = \sum_{i=0}^{n-m} (-1)^i \binom{m+i}{m} S_{m+i}$$
$$= S_m - \binom{m+1}{m} S_{m+1} + \ldots + (-1)^{n-m} \binom{n}{m} S_n$$

Nếu ta gọi $\boldsymbol{N_m^*}$ *là số phần tử thuộc ít nhất m tập hợp thì*

$$N_m^* = \sum_{i=0}^{n-m} (-1)^i \binom{m+i}{m-1} N_{m+i}$$
$$= S_m - \binom{m}{m-1} S_{m+1} + \ldots + (-1)^{n-m} \binom{n-1}{m-1} S_n.$$

Ví dụ. Có bao nhiêu chuỗi tam phân (chỉ gồm 0, 1, 2) độ dài 4 thỏa mãn: a) chứa đúng 2 chữ số 1 b) chứa nhiều hơn 2 chữ số 1

Giải. Gọi $\mathcal{U}$ là tập hợp tất cả những chuỗi tam phân có độ dài 4. Gọi A_i là tập hợp tất cả các chuỗi tam phân có chữ số tại vị trí i là 1. Ta có

- $N = 3^4$
- $S_1 = \binom{4}{1} 3^3$
- $S_2 = \binom{4}{2} 3^2$
- $S_3 = \binom{4}{3} 3^1$
- $S_4 = \binom{4}{4} 3^0$

Áp dụng định lý trên ta có:

a) $N_2 = S_2 - \binom{3}{2} S_3 + \binom{4}{2} S_4 = 24.$

b) $N_2^* = S_2 - \binom{2}{1} S_3 + \binom{3}{1} S_4 = 33.$

Ví dụ. Có 5 lá thư và 5 phong bì ghi sẵn địa chỉ. Bỏ ngẫu nhiên các lá thư vào phong bì.

a) Hỏi xác xuất để không lá thư nào đúng địa chỉ là bao nhiêu?

b) Hỏi xác xuất để đúng 3 lá thư đúng địa chỉ là bao nhiêu?

Sau đó tổng quát hóa bài toán cho n và $k \leq n$

Giải. Gọi A_i là tập các cách bỏ 5 là thư vào 5 phong bì sao cho lá thứ i đúng địa chỉ. Bây giờ ta đi tìm $N(\overline{A}_1\overline{A}_2\ldots\overline{A}_5)$.Ta có

- $N = 5!$
- $S_1 = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix} 4! = \dfrac{5!}{1!}$
- $S_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} 3! = \dfrac{5!}{2!}$
- $S_3 = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix} 2! = \dfrac{5!}{3!}$
- $S_4 = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix} 1! = \dfrac{5!}{4!}$
- $S_5 = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \end{pmatrix} 0! = \dfrac{5!}{5!}$

Ta có

$$\begin{aligned} N(\overline{A}_1\overline{A}_2\ldots\overline{A}_5) &= N - S_1 + S_2 - S_3 + S_4 - S_5 \\ &= 5! - \frac{5!}{1!} + \frac{5!}{2!} - \frac{5!}{3!} + \frac{5!}{4!} - \frac{5!}{5!} \end{aligned}$$

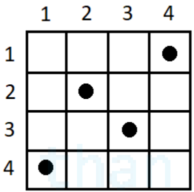
Đa thức quân xe

Xe là một quân cờ quan trọng trong cờ tướng cũng như cờ vua, nó có quyền ăn bất cứ quân cờ nào của đối phương ở trên cùng dòng hoặc cùng cột và không bị cản trở bởi quân cờ khác. Một số bài toán đếm có thể đưa về dạng tính số cách đặt k quân xe trên một bàn cờ sao cho hai quân xe bất kỳ không thể ăn nhau, tức là không có hai quân xe nào ở cùng dòng hay cùng cột.

Định nghĩa. Tập hợp tất cả các hoán vị của $\{1, 2, \ldots, n\}$ được ký hiệu là S_n. Mỗi hoán vị của $\sigma \in S_n$ được xem như là một song ánh từ $\{1, 2, \ldots, n\}$ vào $\{1, 2, \ldots, n\}$

Nhận xét. Một hoán vị $\sigma \in S_n$ tương đương với một cách đặt n quân xe trên bàn cờ $n \times n$ ở các tọa độ $i, \sigma(i)$ (với $1 \leq i \leq n$), ta thấy không có hai quân xe nào ăn nhau.

Ví dụ. Hoán vị $\sigma = 4231$ tương đương với cách đặt quân xe



Định nghĩa. Xét các tập con $X_1, X_2, \ldots, X_n \subset \{1, 2, \ldots, n\}$. Đặt

$$P(X_1, X_2, \ldots, X_n) = \{\sigma \in S_n | \sigma(i) \notin X_i\}.$$

Tập X_i được gọi là vị trí cấm của i, các hoán vị thuộc $P(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ được gọi là hoán vị với vị trí cấm.

Ví dụ. Cho $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ và các tập con $X_1 = \{3, 4\}$, $X_2 = \{5\}$, $X_3 = \{1, 3, 4\}$, $X_4 = \{2, 5\}$ và $X_5 = \emptyset$. Tìm số phần tử của tập hoán vị với vị trí cấm $P(X_1, X_2, \dots, X_n)$?

Nhận xét. Bài toán tương đương với bài toán tìm số cách đặt 5 quân xe trên bàn cờ 5×5 như hình sau, trong đó các ô gạch chéo là ô cấm

		×	×	
				×
×		×	×	
	×			×

Trong phần này chúng ta sẽ dùng phương pháp đa thức quân xe để giải những bài toán dạng này.

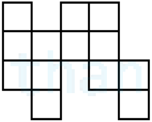
Ví dụ. Ta cần bố trí 4 người A, B, C, D vào 4 trong 5 công việc $1, 2, 3, 4, 5$. Biết rằng A không thích hợp với công việc 2 và 5; B không thích hợp với 5; C không thích hợp với 3; D không thích hợp với $1, 3$ và 4. Hỏi có bao nhiêu cách phân công mỗi người với một công việc thích hợp?

Hướng dẫn. Ta biểu diễn 4 người và 5 công việc thành một bàn cờ 4×5 như hình sau

	1	2	3	4	5
A		X			X
B					X
C			X		
D	X		X	X	

Ta dễ thấy một cách phân công mỗi người một công việc phù hợp chính là một cách đặt 4 quân xe vào bàn cờ.

Để đơn giản ta có thể xóa các ô cấm ra khỏi bàn cờ. Như vậy bàn cờ trên sẽ thành



Định nghĩa. Một bàn cờ là một tập con của mảng $m \times n$ ô vuông.

Ví dụ. Các ô vuông ở trên là một bàn cờ.

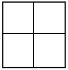
Định nghĩa. Cho C là một bàn cờ có m ô vuông và $k \leq m$. Gọi $r_k(C)$ là cách đặt k quân xe lên bàn cờ sao cho 2 xe bất kỳ không thể ăn nhau. Đa thức quân xe được định nghĩa là

$$R(C,x) = r_0(C) + r_1(C)x + r_2(C)x^2 + \cdots + r_m(C)x^m$$

Ta dễ thấy $r_0(C) = 1$ và $r_1(C) = m$.

Nhận xét. Việc hoán vị các dòng hay các cột trên bàn cờ không ảnh hưởng đến kết quả của đa thức quân xe.

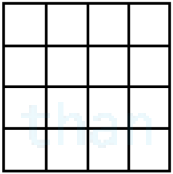
Ví dụ. Cho C là bàn cờ 2×2



Khi đó ta có 4 cách đặt một quân xe và 2 cách đặt hai quân xe. Do đó đa thức quân xe của C là

$$R(C,x) = 1 + 4x + 2x^2.$$

Ví dụ. Cho C là bàn cờ 4×4



Hãy tìm đa thức quân xe của C?

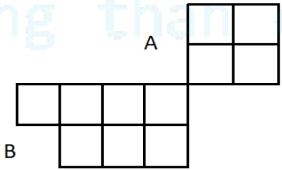
Hướng dẫn. Ta có $r_0(C) = 1, r_1(C) = 16$.

- Với 2 quân xe, ta có C_4^2 cách chọn vị trí dòng đặt xe. Với mỗi cách chọn dòng, quân xe thứ 1 có 4 cách chọn, quân xe thứ 2 có 3 cách chọn. Như vậy,
$$r_2(C) = C_4^2.4.3 = 72.$$
- Lý luận tương tự ta có
$$r_3(C) = C_4^3.4.3.2 = 96.$$
$$r_4(C) = C_4^4.4.3.2.1 = 24.$$

Vậy
$$R(C, x) = 1 + 16x + 72x^2 + 96x^3 + 24x^4$$

Định nghĩa. Hai phần A, B của bàn cờ C được gọi là rời nhau nếu không có ô vuông nào trong A có cùng dòng hay cùng cột với một ô vuông trong B

Ví dụ. Hai phần A, B của bàn cờ sau là rời nhau



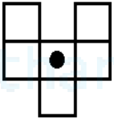
Định lý. *Nếu bàn cờ C chỉ gồm hai phần rời nhau A và B thì*

$$R(C, x) = R(A, x) \times R(B, x).$$

Định lý. *Cho a là ô vuông tùy ý của bàn cờ C. Gọi D là bàn cờ có được từ C bằng cách xóa dòng và cột chứa a, và E là bàn cờ có được từ C bằng cách xóa ô a. Khi đó*

$$R(C,x) = xR(D,x) + R(E,x).$$

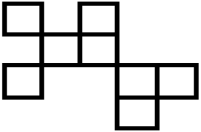
Ví dụ. Tìm đa thức quân xe của bàn cờ C sau



Áp dụng định lý trên ta được

$$
\begin{aligned}
R(C,x) &= xR\left(\square\ \square, x\right) + R\left(\begin{array}{ccc}\square & & \square\\ \square & & \square\\ & \square & \end{array}, x\right)\\
&= x(1+2x) + R\left(\begin{array}{c}\square\\ \square\end{array}\ \begin{array}{c}\square\\ \square\end{array}, x\right) \times R\left(\square, x\right)\\
&= x(1+2x) + (1+4x+2x^2)(1+x)\\
&= 1+6x+8x^2+2x^3.
\end{aligned}
$$

Ví dụ. Tìm đa thức quân xe của bàn cờ sau



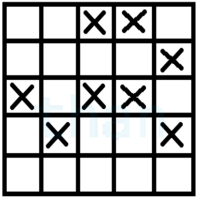
Đáp án. $1 + 8x + 20x^2 + 17x^3 + 4x^4$

Định lý. *Cho* $P(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ *là tập các hoán vị* $\sigma \in S_n$ *với các vị trí cấm* $X_1, X_2, \ldots, X_n$*. Gọi* B *là bàn cờ được tạo từ các vị trí cấm này. Khi đó số các hoán vị này là*

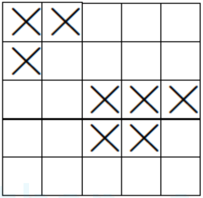
$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k (n-k)! r_k(B).$$

Ví dụ. Cho $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ và các tập con $X_1 = \{3, 4\}$, $X_2 = \{5\}$, $X_3 = \{1, 3, 4\}$, và $X_5 = \emptyset$. Tìm số phần tử của tập hoán vị với vị trí cấm $P(X_1, X_2, X_3, X_4, X_5)$?

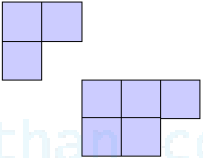
Bài toán tương đương với bài toán tìm số cách đặt 5 quân xe trên bàn cờ 5×5 như hình sau, trong đó các ô được gạch chéo là ô cấm.



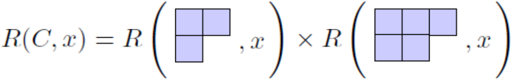
Hoán vị dòng 1 với dòng 4 và cột 1 với cột 5, ta được



Gọi B là bàn cờ được tạo bởi các ô cấm, ta có



Vì B tạo bởi 2 phần rời nhau nên



$$= (1 + 3x + x^2)(1 + 5x + 4x^2)$$
$$= 1 + 8x + 20x^2 + 17x^3 + 4x^4.$$

Theo định lý trên ta có số hoán vị với vị trí cấm là

$$\sum_{k=0}^{5} (-1)^k (5-k)!\, r_k(B)$$
$$= 5! \times 1 - 4! \times 8 + 3! \times 20 - 2! \times 17 + 1! \times 4 - 5! \times 0$$
$$= 18$$

Ví dụ. Ta cần bố trí bốn người A, B, C, D vào 4 trong 5 công việc. Biết rằng A không thích hợp với công việc 2 và 5, B không thích hợp với 5, C không thích hợp với 3, D không thích hợp với $1, 3$ và 4. Hỏi có bao nhiêu cách phân công mỗi người với một công việc phù hợp?

Hướng dẫn. Ta thêm vào người E và người này thích hợp với mọi công việc. Khi đó bài toán đưa về việc tìm số cách phân công 5 người cho 5 công việc. Đây cũng chính là bài toán tìm số hoán vị với vị trí cấm.

	1	2	3	4	5
A		X			X
B					X
C			X		
D	X		X	X	
E					

Gọi B là bàn cờ được tạo bởi các ô cấm. Khi đó
$R(B,x) = 1 + 7x = 15x^2 + 10x^3 + 2x^4$. Suy ra cách phân công công việc là 24.