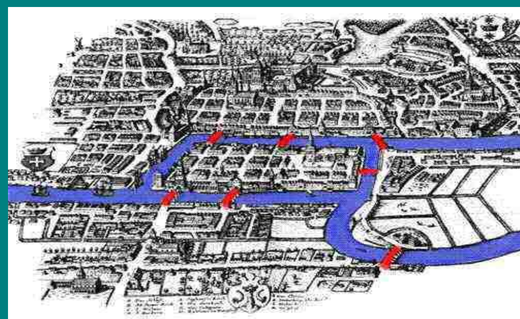
Đồ thị

Biên soạn

TS. Nguyễn Viết Đông

1

Những khái niệm và tính chất cơ bản

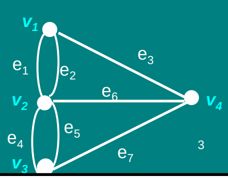


2

Những khái niệm và tính chất cơ bản

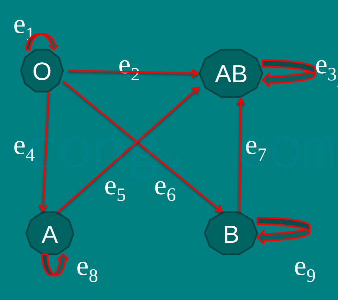
$V = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$
$E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7\}$

$e_1 = v_1 v_2$, $e_2 = v_1 v_2$,
$e_3 = v_1 v_4$, $e_4 = v_2 v_3$,
$e_5 = v_2 v_3$, $e_6 = v_2 v_4$,
$e_7 = v_3 v_4$



3

Những khái niệm và tính chất cơ bản



V= {O, A, B, AB}

$E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7, e_8, e_9\}$

•
•

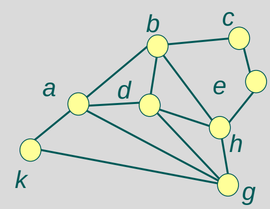
4

Những khái niệm và tính chất cơ bản

Định nghĩa đồ thị

Định nghĩa1.Đồ thị vô hướng G = (V, E) gồm:

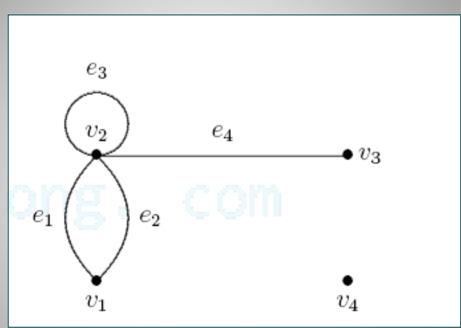
i) V là tập hợp khác rỗng mà các phần tử của nó gọi là *đỉnh*(vertex) của G.
ii) E là đa tập hợp gồm các cặp không sắp thứ tự của hai đỉnh. Mỗi phần tử của E được gọi là một *cạnh*(edge) của G. Ký hiệu uv.



Những khái niệm và tính chất cơ bản

Chú ý

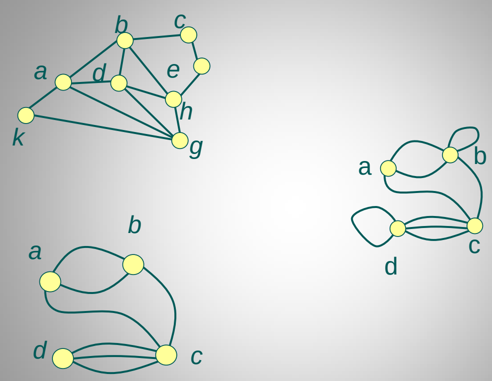
- Ta nói cạnh uv nối u với v, cạnh uv *kề* với u,v.
- Nếu uv ∈E thì ta nói đỉnh u *kề* đỉnh v.
- Hai cạnh nối cùng một cặp đỉnh gọi là *hai cạnh song song.*
- Cạnh uu có hai đầu mút trùng nhau gọi là một *khuyên*.



Những khái niệm và tính chất cơ bản

- **Định nghĩa 2.** Đồ thị vô hướng không có cạnh song song và không có khuyên gọi là *đơn đồ thị vô hướng*.
- **Định nghĩa 3.** Đồ thị vô hướng cho phép có cạnh song song nhưng không có khuyên gọi là *đa đồ thị* vô hướng.
- **Định nghĩa 4.** Đồ thị vô hướng cho phép có cạnh song song và có khuyên gọi là *giả đồ thị*

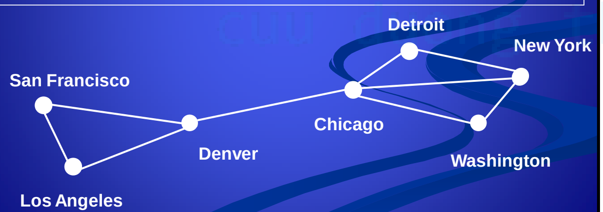
9



10

Những khái niệmvà tính chấtcơ bản
Simple Graph

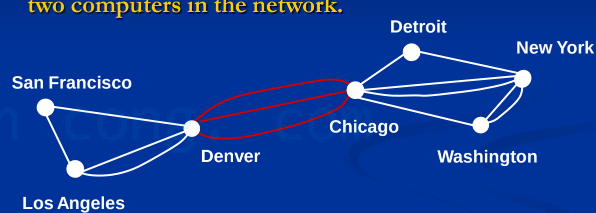
Definition . A ***simple graph*** *G* = (*V*, *E*) consists of *V*, a nonempty set of ***vertices***, and *E*, a set of unordered pairs of distinct elements of *V* called ***edges***.



11

Multigraph -A Non-Simple Graph

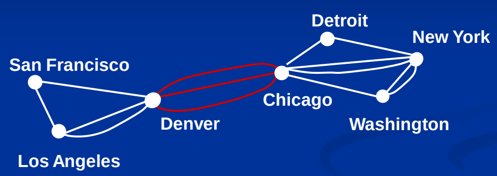
There can be multiple telephone lines between two computers in the network.



- In a ***multigraph*** *G = (V, E)* two or more edges may connect the same pair of vertices.

12

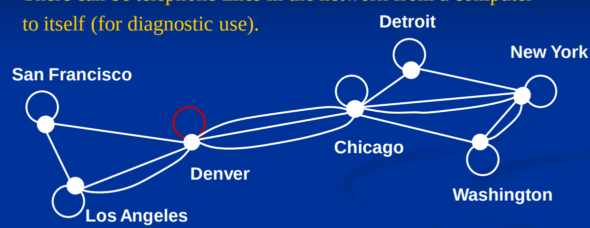
Multiple Edges



Two edges are called ***multiple*** or ***parallel edges*** if they connect the same two distinct vertices.

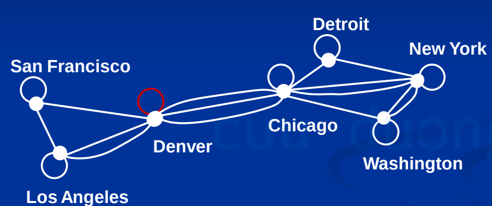
Pseudograph- A Non-Simple Graph

There can be telephone lines in the network from a computer to itself (for diagnostic use).



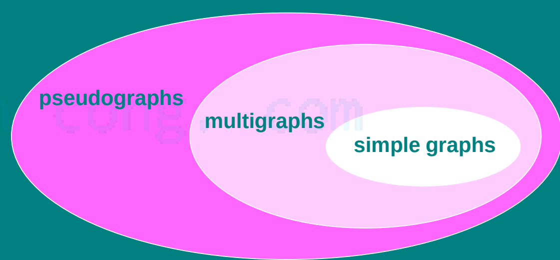
- In a ***pseudograph*** *G = (V, E)* two or more edges may connect the same pair of vertices, and in addition, an edge may connect a vertex to itself.

Loops



An edge is called a ***loop*** if it connects a vertex to itself.

Undirected Graphs



Những khái niệm và tính chất cơ bản

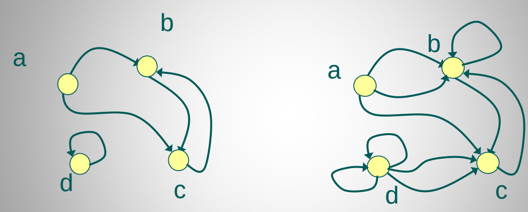
Định nghĩa 5

Đa đồ thị có hướng G =(V,E) gồm:

i) V là tập hợp khác rỗng mà các phần tử của nó gọi là đỉnh của G.

ii)E là đa tập hợp gồm các cặp có sắp thứ tự của hai đỉnh. Mỗi phần tử của E được gọi là một cung(cạnh)của G. Ký hiệu uv.

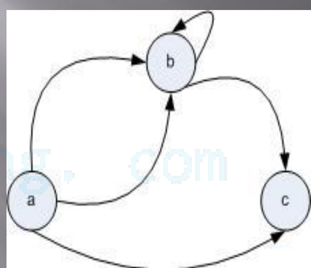
Ta nói cung uv đi từ u đến v, cung uv kề với u,v



Những khái niệm và tính chất cơ bản

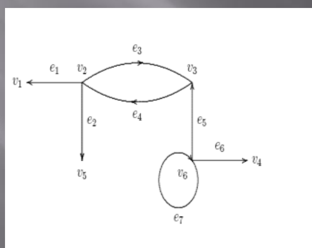
Chú ý

- Nếu uv là một cung thì ta nói:
  - Đỉnh u và v *kề nhau.*
  - Đỉnh u gọi là đỉnh *đầu(gốc)*, đỉnh v là đỉnh *cuối (ngọn)* của cung uv.Đỉnh v là đỉnh *sau* của đỉnh u.
- Hai cung có cùng gốc và ngọn gọi là cung *song song.*
- Cung có điểm gốc và ngọn trùng nhau gọi là *khuyên.*



Những khái niệm và tính chất cơ bản

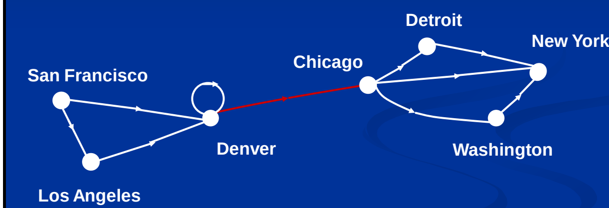
Định nghĩa 6: Đa đồ thị có hướng không chứa các cạnh song song gọi là *đồ thị có hướng*



21

A Directed Graph

- In a ***directed graph*** $G = (V, E)$ the edges are ordered pairs of (not necessarily distinct) vertices.

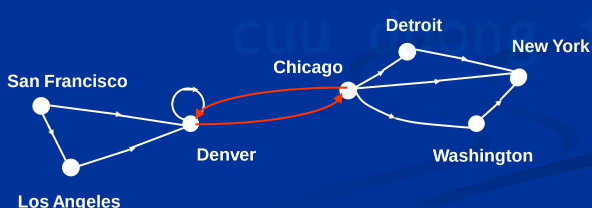


Some telephone lines in the network may operate in only one direction .

22

A Directed Graph

The telephone lines in the network that operate in two directions are represented by pairs of edges in opposite directions.



23

A Directed Multigraph

- In a ***directed multigraph*** $G = (V, E)$ the edges are ordered pairs of (not necessarily distinct) vertices, and in addition there may be multiple edges.

There may be several one-way lines in the same direction from one computer to another in the network.

24

Types of Graphs

TYPE	EDGES	MULTIPLE EDGES ALLOWED?	LOOPS ALLOWED?
Simple graph	Undirected	NO	NO
Multigraph	Undirected	YES	NO
Pseudograph	Undirected	YES	YES
Directed graph	Directed	NO	YES
Directed multigraph	Directed	YES	YES

25

Những khái niệm và tính chất cơ bản

Biểu diễn ma trận của đồ thị:

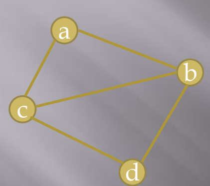
Ta sử dụng **ma trận kề**.

Cho G = (V,E) với V={1,2,…,n}.
Ma trận kề của G là ma trận A = $(a_{ij})_n$ xác định như sau:

a_{ij} = số cạnh(số cung) đi từ đỉnh i đến đỉnh j

26

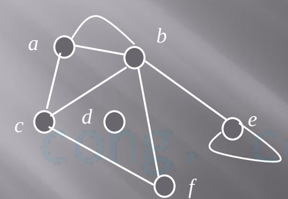
Tìm ma trận kề



$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{cccc} a & b & c & d \end{array} \\ \begin{array}{c} a \\ b \\ c \\ d \end{array} & \begin{Bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{Bmatrix} \end{array}$$

27

Tìm ma trận kề



$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{cccccc} a & b & c & d & e & f \end{array} \\ \begin{array}{c} a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ f \end{array} & \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

28

Những khái niệm và tính chất cơ bản

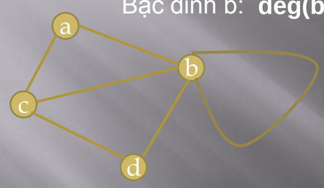
Bậc của đỉnh

- Cho đồ thị vô hướng G = (V,E). *Bậc* của đỉnh v, ký hiệu **deg(v)**, là số cạnh kề với v , trong đó một khuyên tại một đỉnh được đếm hai lần cho bậc của đỉnh ấy.

29

Bậc đỉnh a: **deg(a)** = 2

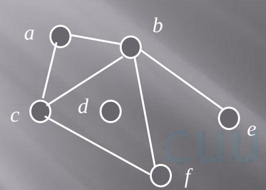
Bậc đỉnh b: **deg(b)** = 5



Bậc đỉnh c: **deg(c)** = 3

Bậc đỉnh d: **deg(d)** = 2

30



Bậc của các đỉnh?

31

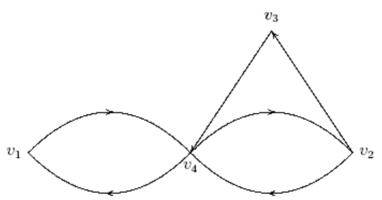
Những khái niệm và tính chất cơ bản

Cho đồ thị có hướng G = (V, E), v∈V

1) **deg⁻(v)**:= số cung có đỉnh cuối là v, gọi là *bậc vào* của v.
2) **deg ⁺(v)**:= số cung có đỉnh đầu là v, gọi là *bậc ra* của v
3) **deg(v)**:= deg⁻ (v) + deg⁺(v)

- Đỉnh bậc 0 gọi là *đỉnh cô lập*. Đỉnh bậc 1 gọi là *đỉnh treo*

32

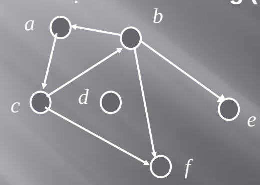


$$\begin{aligned} d^+(v_1) &= d^-(v_1) = 1, & d^+(v_2) &= 2, d^-(v_2) = 1, \\ d^+(v_3) &= d^-(v_3) = 1, & d^+(v_4) &= 2, d^-(v_4) = 3. \end{aligned}$$

33

Bậc đỉnh a: **$\deg^-(a)$=** 1 ; **$\deg^+(a)$=**1

Bậc đỉnh b: **$\deg^-(b)$=** 1 ; **$\deg^+(b)$=**3



Bậc đỉnh c: **$\deg^-(c)$=** 1 ; **$\deg^+(c)$=**2

Bậc đỉnh d: **$\deg^-(d)$=** 0 ; **$\deg^+(d)$=**0

Bậc đỉnh e: **$\deg^-(e)$=** 1 ; **$\deg^+(e)$=**0

Bậc đỉnh f: **$\deg^-(f)$=** 2 ; **$\deg^+(f)$=**0

34

Những khái niệm và tính chất cơ bản

Định lí

Cho đồ thị G = (V,E), m là số cạnh (cung)

1) $\boxed{2m = \sum_{v \in V} \deg(v)}$

2) Nếu G có hướng thì:

$$\boxed{m = \sum_{v \in V} \deg^-(v) = \sum_{v \in V} \deg^+(v)}$$

3) Số đỉnh bậc lẻ của đồ thị là số chẵn

35

Những khái niệm và tính chất cơ bản

Đẳng cấu

Định nghĩa

Cho hai đơn đồ thị G = (V,E) và G'= (V',E').

Ta nói rằng G *đẳng cấu* G', ký hiệu G ≅ G', nếu tồn tại song ánh f :V⟶ V'sao cho:

$\boxed{\text{uv là cạnh của G} \Leftrightarrow \text{f(u)f(v) là cạnh của G'}}$

36

Những khái niệm và tính chất cơ bản

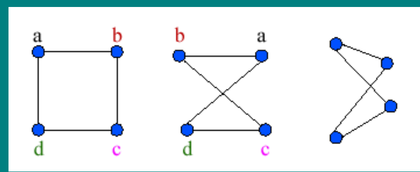
Chú ý

❑Nếu G và G' là các đơn đồ thị vô hướng đẳng cấu qua ánh xạ f thì chúng có:

- Cùng số đỉnh
- Cùng số cạnh
- Cùng số đỉnh với bậc cho sẵn(vd: số đỉnh bậc 2 của G và G' bằng nhau)
- deg v = deg f(v)

37

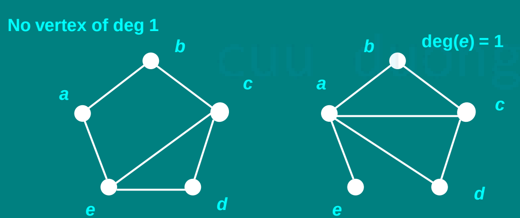
Graph Isomorphism



38

Note. ***Isomporphic*** simple graphs must have the same ***invariants***:

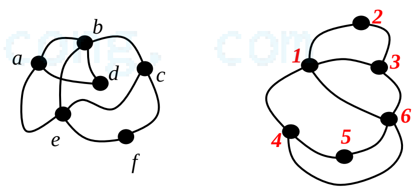
✓The number of vertices
✓The number of edges
✓The degrees of the vertices



Non-isomorphic graphs

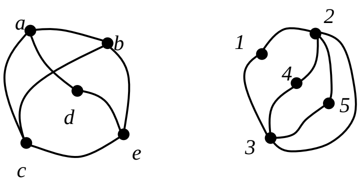
39

Isomorphism Example

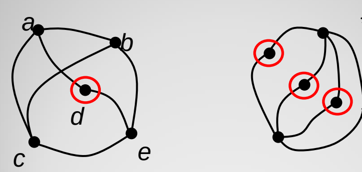


40

Non-Isomorphic Example



Are These Isomorphic?



* Same # of vertices
* Same # of edges
* Different # of verts of degree 2! (1 vs 3)

Những khái niệm và tính chất cơ bản

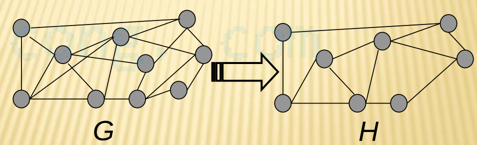
Đồ thị con

Cho hai đồ thị G = (V,E) và G’ = (V’,E’) (cùng vô hướng hoặc cùng có hướng).

- G’ được gọi là *đồ thị con* của G, ký hiệu G’≤ G nếu V’ ⊆ V và E’ ⊆ E
- Nếu ***V’ = V*** và E’ ⊆ E thì G’ được gọi là *đồ thị con khung* của G.

NHỮNG KHÁI NIỆM VÀ TÍNH CHẤT CƠ BẢN

Subgraphs



Đường đi, chu trình, đồ thị liên thông:

Cho G = (V,E) là đồ thị vô hướng $u,v \in V$

a) Đường đi (dây chuyền) có chiều dài k nối hai đỉnh u,v là dãy đỉnh và cạnh liên tiếp nhau

$v_0e_1v_1e_2\ldots v_{k-1}e_kv_k$ sao cho:

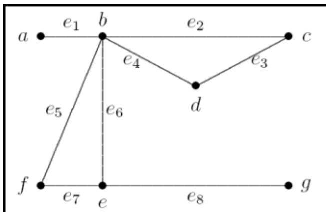
$v_0=u, v_k = v, e_i=v_{i-1}v_i$, i=1,2,…,k

Đường đi, chu trình, đồ thị liên thông

b) Đường đi không có *cạnh* nào xuất hiện quá một lần gọi là *đường đi đơn*

c) Đường đi không có *đỉnh* nào xuất hiện quá một lần gọi là *đường đi sơ cấp*

d) Đường đi được gọi là *chu trình* nếu nó bắt đầu và kết thúc tại cùng một đỉnh



Chu trình sơ cấp nào không?

❑(a, e_1,b,e_2,c,e_3,d,e_4,b)là đường đi từ đỉnh a tới đỉnh b có chiều dài là 4. Tuy nhiên, trong trường hợp này, đồ thị của chúng ta là đơn đồ thị, do vậy có thể gọi đường đi này bằng 1 cách ngắn gọn như sau: (a,b,c,d,b)

- ❑Chu trình sơ cấp:
  - ❑(b,c,d,b)
  - ❑(b,f,e,b)

Đường đi, chu trình, đồ thị liên thông

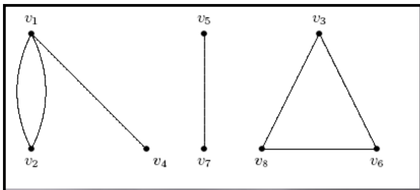
Định nghĩa. Cho G = (V,E). Trên V ta định nghĩa quan hệ tương đương như sau:

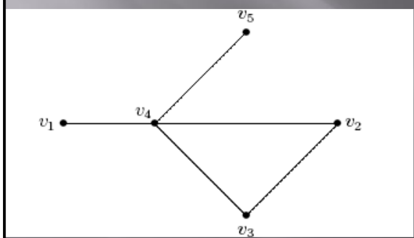
u~v ⇔ u = v hay có một đường đi từ u đến v

a) Nếu u~v thì ta nói hai đỉnh u và v *liên thông* với nhau

b) Mỗi lớp tương đương được gọi là một *thành phần liên thông* của G

c) Nếu G chỉ có một thành phần liên thông thì G gọi là *liên thông*





49

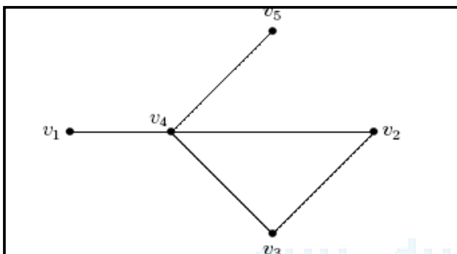
Đường đi, chu trình, đồ thị liên thông

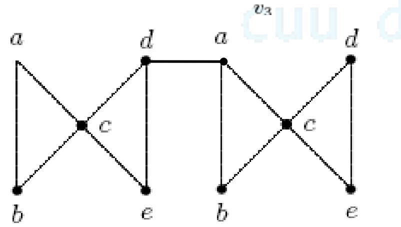
Định nghĩa. Cho G = (V,E) là đồ thị vô hướng liên thông

a) Đỉnh v được gọi là *đỉnh khớp* nếu G – v không liên thông (G – v là đồ thị con của G có được bằng cách xoá v và các cạnh kề với v)

b) Cạnh e được gọi là *cầu* nếu G- e không liên thông(G-e là đồ thị con của G có được bằng cách xoá cạnh e).

50





51

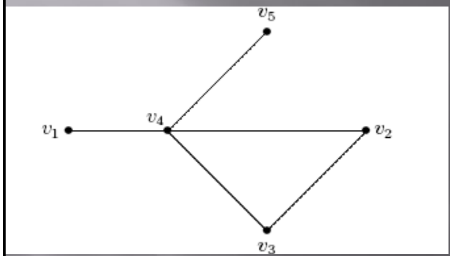
Đường đi, chu trình, đồ thị liên thông

Định nghĩa. Cho G = (V,E) vô hướng liên thông, không phải K_n, n>2.

a) *Số liên thông cạnh* của G, ký hiệu e(G) là số cạnh ít nhất mà khi xoá đi G không còn liên thông nữa.

b) *Số liên thông đỉnh* của G, ký hiệu v(G) là số đỉnh ít nhất mà khi xoá đi G không còn liên thông nữa.

52



53

Đường đi, chu trình, đồ thị liên thông

Định nghĩa. Cho G =(V,E) là đồ thị có hướng u,v∈V

a) Đường đi (dây chuyền) có chiều dài k nối hai đỉnh u,v là dãy đỉnh và cung liên tiếp nhau $v_0e_1v_1e_2\ldots v_{k-1}e_k\, v_k$ sao cho:

$v_0 = u$, $v_k = v$

$e_i = v_{i-1}v_i$, i = 1,2,,…,k.

54

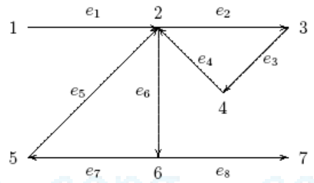
Đường đi, chu trình, đồ thị liên thông

b) Đường đi không có *cung* nào xuất hiện quá một lần gọi là *đường đi đơn*.

c) Đường đi không có *đỉnh* nào xuất hiện quá một lần gọi là *đường đi sơ cấp*.

d) Đường đi được gọi là *mạch(chu trình)* nếu nó bắt đầu và kết thúc tại cùng một đỉnh.

55



Đường đi có độ dài 4 từ đỉnh 1 tới đỉnh 2 là : (1,2,3,4,2)

56

Đường đi, chu trình, đồ thị liên thông

Định nghĩa. Cho đồ thị có hướng G = (V,E). Trên V ta định nghĩa quan hệ tương đương như sau:

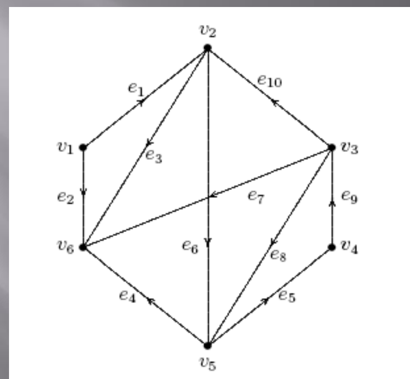
u~v ⇔ u = v hay có một đường đi từ u đến v và đường đi từ v đến u .

a) Nếu u~v thì ta nói hai đỉnh u và v *liên thông mạnh với nhau* .

b) Mỗi lớp tương đương được gọi là một *thành phần liên thông mạnh* của G .

c) Nếu G chỉ có một thành phần liên thông mạnh thì G gọi là *liên thông mạnh* .

57



58

Một số đồ thị vô hướng đặc biệt

1. *Đồ thị đủ cấp n*: K_n là đơn đồ thị cấp n mà giữa hai đỉnh bất kỳ đều có một cạnh.
2. *Đồ thị k-đều* : là đồ thị mà mọi đỉnh đều có bậc bằng nhau và bằng k.
3. *Đồ thị lưỡng phân:*
   G = (V,E), $V = V_1 \cup V_2$, $V_1 \cap V_2 = \varnothing$.

Mọi cạnh của G đều nối một đỉnh trong V_1 với một đỉnh trong V_2

59

Một số đồ thị đặc biệt

4. *Đồ thị lưỡng phân đủ:* là đồ thị đơn, lưỡng phân, mỗi đỉnh trong V_1 đều kề với mọi đỉnh trong V_2.

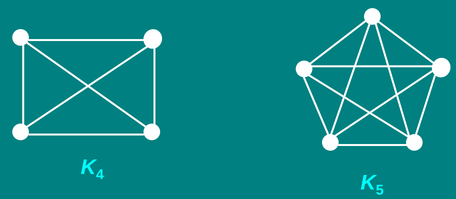
5. *Đồ thị bù*

Cho K_n = (V,E), G $(V,E_1) \le K_n$, $\overline{G} = \left(V, E \setminus E_1\right)$

$\overline{G}$ gọi là *đồ thị bù* của G. Đồ thị G được gọi là *tự bù* nếu G đẳng cấu với đồ thị bù của nó

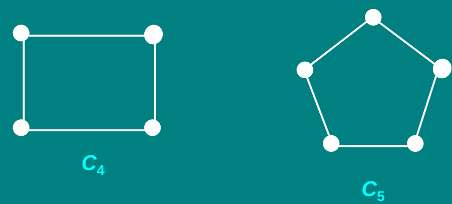
60

Một số đồ thị đặc biệt



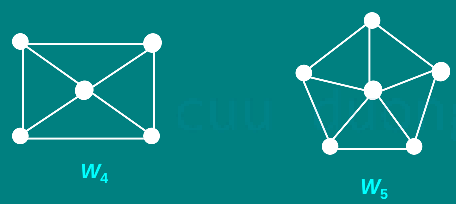
Complete graph K_n

Một số đồ thị đặc biệt



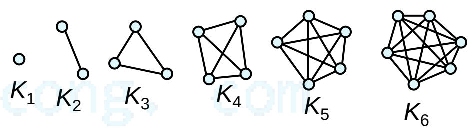
Cycle C_n

Một số đồ thị đặc biệt



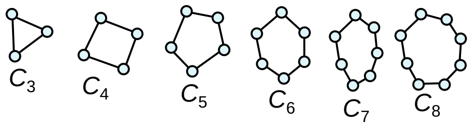
Wheele W_n

Complete Graphs



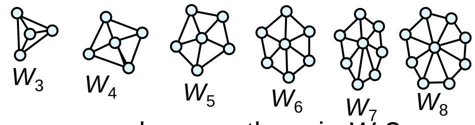
Note that K_n has $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n-1)}{2}$ edges.

Cycles



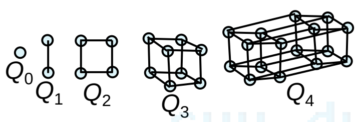
How many edges are there in C_n?

Wheels



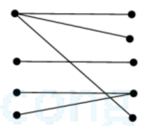
How many edges are there in W_n?

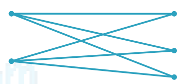
n–cubes (hypercubes)



Number of vertices: 2^n. Number of edges:Exercise to try!

Bipartite Graph





Đề thi

1)2000. ĐHBK

Cho đồ thị vô hướng , đơn G có 7 đỉnh trong đó có một đỉnh bậc 6. Hỏi G có liên thông không?

Giải. Đỉnh bậc 6 nối với 6 đỉnh còn lại. Do đó hai đỉnh bất kỳ đều có một đường đi qua đỉnh bậc 6

69

Đề thi

2)2001,ĐHBK

Cho đồ thị vô hướng G liên thông mà mỗi đỉnh đều có bậc bằng 20. Chứng minh rằng nếu xoá đi một cạnh bất kỳ thì đồ thị thu được vẫn còn liên thông

70

Đề thi

Giải .

Giả sử ta xóa cạnh uv. Ta chỉ cần chứng minh vẫn có đường đi từ u đến v.

Phản chứng. Giả sử không có đường đi từ u đến v. Khi đó thành phần liên thông G' chứa u mà không chứa v. Trong G', u có bậc 19, mọi đỉnh khác đều có bậc 20. Tổng các bậc trong G' là số lẻ .Vô lý.

71

Đề thi

3)2002,ĐHKHTN.

Đồ thị G gồm n đỉnh, 41 cạnh, mọi đỉnh đều có bậc p. Nếu p lẻ và p> 1 thì đồ thị G có liên thông không?

72

Đề thi

Giải . Từ công thức bậc của đỉnh ta có np=2.41.
Vì p lẻ nên p là ước của 41. Mà 41 là số nguyên tố nên p = 41.
Vậy n = 2
Do đó G có 2 đỉnh mà cả 2 đỉnh đều có bậc 41. Nếu G không liên thông thì G phải tách thành 2 thành phần liên thông, mà mỗi thành phần liên thông đều có bậc 41 (lẻ). Vô lý.

73

Đề thi

4)2005, ĐHKHTN.

Vẽ đơn đồ thị vô hướng gồm 6 đỉnh với bậc 2,2,3,3,3,5

74

Đề thi

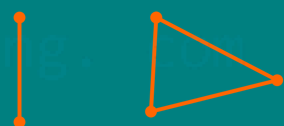
Giải .

❖ Nhận xét . Đỉnh bậc 5 nối với 5 đỉnh còn lại. Do đó ta chỉ phải quan tâm đến 5 đỉnh còn lại. Ta xét đơn đồ thị với 5 đỉnh và các bậc là 1,1,2,2,2.

➢ TH1. Hai đỉnh bậc 1 nối với nhau, 3 đỉnh bậc 2 nối với nhau tạo thành chu trình

75

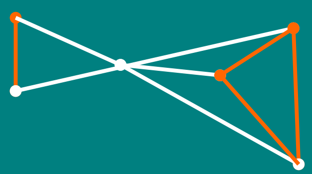
Đề thi



76

Đề thi

Suy ra đồ thị cần tìm là



77

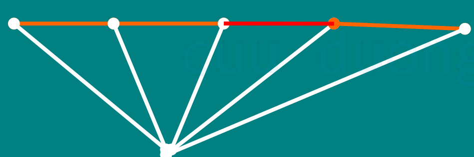
Đề thi

➢ TH2. Hai đỉnh bậc 1 không nối với nhau. Khi đó hai đỉnh bậc 1 phải nối với hai đỉnh bậc 2 khác nhau và đỉnh bậc hai còn lại phải nối với hai đỉnh bậc hai ấy

78

Đề thi

- Suy ra đồ thị cần tìm là:



79

Đề thi

5)2006 , ĐHKHTN.

Vẽ đồ thị đơn vô hướng gồm 6 đỉnh với bậc 2,2,3,3,3,3

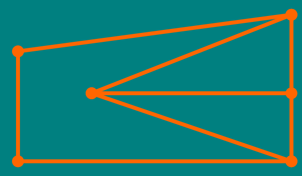
80

Đề thi

Giải.
TH1. 2 đỉnh bậc 2 nối với nhau. Nếu chúng nối đến cùng một đỉnh bậc 3 thì đỉnh bậc 3 này chỉ nối đến một trong 3 đỉnh còn lại:không thể được. Như vậy hai đỉnh bậc hai nối đến hai đỉnh bậc 3 khác nhau. Bỏ 2 đỉnh bậc hai ta sẽ được một đơn đồ thị vô hướng gồm 4 đỉnh với bậc 2, 2, 3, 3. Để ý rằng trong đồ thị này mỗi đỉnh bậc 2 đều nối với 2 đỉnh bậc 3 và do đó 2 đỉnh bậc 3 cũng nối với nhau.

Đề thi

Ta được

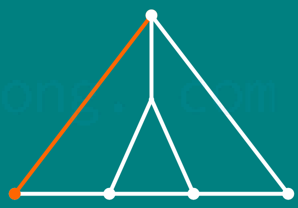


Đề thi

TH2. 2 đỉnh bậc 2 không nối với nhau nhưng nối đến cùng một đỉnh bậc 3. Khi ấy nếu bỏ đi hai cạnh này ta được một đồ thị 6 đỉnh với bậc 1, 1, 1, 3, 3, 3. Nếu 2 đỉnh bậc 1 nối với nhau hoặc nối đến cùng một đỉnh bậc 3 thì bỏ đi 2 đỉnh này còn lại một đồ thị đỉnh với bậc 1, 3, 3, 3 hoặc 1, 1, 3, 3: không thể được. Như vậy mỗi đỉnh bậc 1 nối đến đỉnh bậc 3 khác nhau. Bỏ đi đỉnh bậc 1 sẽ còn lại một chu trình 2, 2, 2

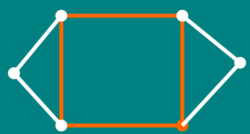
Đề thi

và ta được đồ thị



Đề thi

- TH3. 2 đỉnh bậc 2 không nối với nhau và mỗi đỉnh nối đến 2 đỉnh bậc 3 khác nhau. Khi ấy nếu bỏ đi hai đỉnh này sẽ còn lại một chu trình 2, 2, 2, 2 và ta được:



Đề thi

6) Đề thi 07

Tìm tất cả các đơn đồ thị vô hướng (sai khác một đẳng cấu) gồm 6 đỉnh với bậc :

2, 2, 2, 3, 3, 4

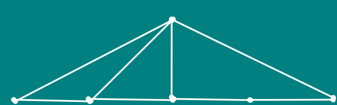
Đề thi

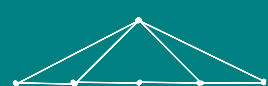
<u>**Giải**</u> **2,5 đ** (vẽ mỗi đồ thị được **0,5đ**. Lý luận đầy đủ đây là 4 lời giải duy nhất: **0,5đ**)

Trường hợp 1: đỉnh bậc 4 nối đến 2 đỉnh bậc 3 và 2 đỉnh bậc 2. Bỏ đỉnh bậc 4 và 4 cạnh tương ứng ta sẽ được 1 đồ thị đơn vô hướng gồm 5 đỉnh với bậc 1, 1, 2, 2, 2.

Trường hợp 1a: mỗi đỉnh bậc 1 đều nối với 1 đỉnh bậc 2 (phải khác nhau). Do đó đỉnh bậc 2 còn lại sẽ nối đến 2 đỉnh bậc 2 trên. Chúng tạo thành một dây chuyền 1,2,2,2,1. Ta được 2 đồ thị không đẳng cấu nhau

Đề thi



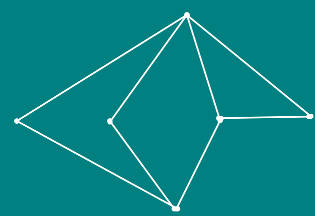


Đề thi

Trường hợp 2: đỉnh bậc 4 nối đến 3 đỉnh bậc 2 và 1 đỉnh bậc 3. Khi ấy nếu bỏ đi đỉnh bậc 4 và các cạnh tương ứng ta sẽ được 1 đồ thị đơn vô hướng gồm 5 đỉnh với bậc 1, 1, 1, 2, 3. Khi ấy đỉnh bậc 3 chỉ có thể nối đến 2 đỉnh bậc 1 và đỉnh bậc 2. Đỉnh bậc 1 còn lại sẽ nối đến đỉnh bậc 2, và ta được

89

Đề thi



90

Đề thi

Trường hợp 1b: 2 đỉnh bậc 1 nối nhau. Như vậy 3 đỉnh bậc 2 tạo thành một dây chuyền. Ta được đồ thị

91

Đề thi

ĐHKHTN08 .Cho đồ thị G đơn, vô hướng ,10 đỉnh và có nhiều hơn 36 cạnh.Hỏi G có liên thông không ?Tại sao?

Giải(tóm tắt). G là đồ thị liên thông

Phản chứng.

Giả sử G không liên thông .Gọi G_1 là một thành phần liên thông gồm k đỉnh $1\leq k\leq 9$.Gọi m là số cạnh của G thì $m \leq k^2 -10k +45$.

Mà max $(k^2 -10k +45) =36$ (với $1\leq k\leq 9$) nên $m \leq 36$.Trái giả thiết.

92

Đề thi

ĐHKHTN 2009.
Xét đồ thị đơn vô hướng G với 6 đỉnh , trong đó có một đỉnh bậc 1 và 5 đỉnh bậc 3. Chứng minh rằng G liên thông.
Giải.
Giả sử G không liên thông. Gọi $G_1, G_2, \ldots, G_k$ là các thành phần liên thông của G ($k \geq 2$). Vì G không có đỉnh cô lập nên mỗi thành phần liên thông đều phải có ít nhất hai đỉnh. Như vậy mỗi thành phần liên thông đều phải có ít nhất một đỉnh bậc 3. Suy ra mỗi thành phần liên thông phải có ít nhất 4 đỉnh. Vậy G phải có ít nhất $4k \geq 8$ đỉnh . Trái giả thiết.

93

Đề thi

- Cách khác.

Nếu bỏ đi đỉnh bậc 1 và cạnh kề nó ta sẽ được đơn đồ thị vô hướng H gồm 5 đỉnh với bậc là 2, 3, 3, 3, 3. Rõ ràng nếu H liên thông thì G cũng liên thông.
Trong đồ thị H đỉnh bậc 2 phải nối với 2 đỉnh bậc 3 khác nhau. Bỏ đỉnh bậc 2 này và bỏ hai cạnh kề với nó ta được đồ thị K gồm 4 đỉnh với bậc 2, 2, 3, 3. Rõ ràng nếu K liên thông thì H cũng liên thông và do đó G cũng liên thông.
Trong đồ thị K hai đỉnh bậc 3 phải nối với nhau. Bỏ cạnh nối hai đỉnh bậc 3 này ta được đồ thị gồm 4 đỉnh bậc 2, đồ thị này là một chu trình , nó liên thông . Do đó G liên thông.

94

Bài toán đường đi ngắn nhất

Đồ thị có trọng số

1. Đồ thị G = (V,E) gọi là đồ thị có *trọng số* (hay chiều dài, trọng lượng) nếu mỗi cạnh(cung) e được gán với một số thực w(e).Ta gọi w(e) là *trọng lượng* của e.
2. *Độ dài* của đường đi từ u đến v bằng tổng độ dài các cạnh mà đường đi qua
3. *Khoảng cách* giữa 2 đỉnh u,v là độ dài ngắn nhất của các đường đi từ u đến v.

95

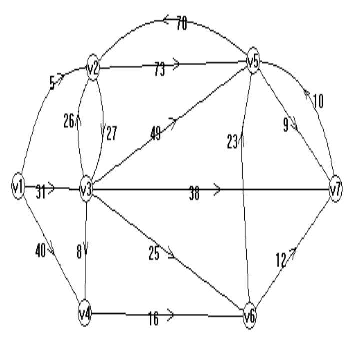
Bài toán đường đi ngắn nhất

Ma trận khoảng cách(trọng số)

Cho G = (V, E), $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ là đơn đồ thị có trọng số. Ma trận khoảng cách của G là ma trận $D = (d_{ij})$ xác định như sau:

$$d_{ij} = \begin{cases} 0 & khi\ i = j \\ w(v_i v_j) & khi\ v_i v_j \in E \\ \infty & khi\ v_i v_j \notin E \end{cases}$$

96



$$D = \begin{pmatrix} 0 & 5 & 31 & 40 & \infty & \infty & \infty \\ \infty & 0 & 27 & \infty & 73 & \infty & \infty \\ \infty & 26 & 0 & 8 & 49 & 25 & 38 \\ \infty & \infty & \infty & 0 & \infty & 16 & \infty \\ \infty & 70 & \infty & \infty & 0 & \infty & 9 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & 23 & 0 & 12 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & 10 & \infty & 0 \end{pmatrix}$$

97

Bài toán đường đi ngắn nhất

Thuật toán Dijkstra

Bài toán.

Cho G = (V, E) đơn, liên thông, có trọng số dương (w(uv) > 0 với mọi u khác v). Tìm đường đi ngắn nhất từ u_0 đến v và tính khoảng cách $d(u_0,v)$.

98

Bài toán đường đi ngắn nhất

Phương pháp

Xác định tuần tự các đỉnh có khoảng cách đến u_0 từ nhỏ đến lớn.

1. Trước tiên đỉnh có khoảng cách nhỏ nhất đến u_0 là u_0.
2. Trong $V\backslash\{u_0\}$ tìm đỉnh có khoảng cách đến u_0 nhỏ nhất (đỉnh này phải là một trong các đỉnh kề với u_0) giả sử đó là u_1

99

Bài toán đường đi ngắn nhất

3. Trong $V\backslash\{u_0,u_1\}$ tìm đỉnh có khoảng cách đến u_0 nhỏ nhất(đỉnh này phải là một trong các đỉnh kề với u_0 hoặc u_1)giả sử đó là u_2
4. Tiếp tục như trên cho đến bao giờ tìm được khoảng cách từ u_0 đến mọi đỉnh .

Nếu G có n đỉnh thì:

$0 = d(u_0,u_0) < d(u_0,u_1) \le d(u_0,u_2) \le \ldots \le d(u_0,u_{n-1})$

100

Thuật toán Dijkstra

Bước1. i:=0, S:=V\{u_0}, L(u_0):=0, L(v):= ∞với mọi v ∈S và đánh dấu đỉnh v bởi(∞,-). Nếu n=1 thì xuất d(u_0,u_0)=0=L(u_0)

Bước2. Với mọi v ∈S và kề với u_i(nếu đồ thị có hướng thì v là đỉnh sau của u_i), đặt L(v):= min{L(v),L(u_i)+w(u_i v)}.Xác định k = minL(v) ,v∈S.

Nếu k= L(v_j) thì xuất d(u_0,v_j)= k và đánh dấu v_j bởi (L(v_j);u_i).
u_{i+1}:= v_j S:=S\{u_{i+1}}

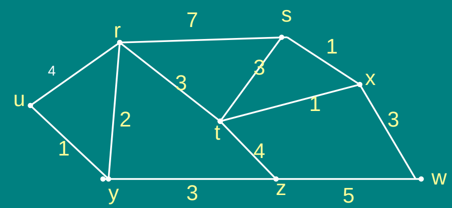
Bước3 i:=i+1

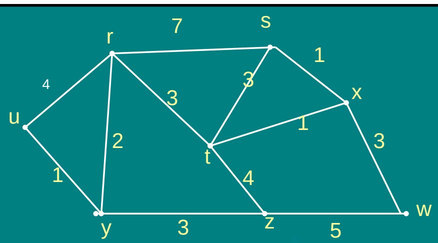
Nếu i = n-1 thì kết thúc

Nếu không thì quay lại Bước 2

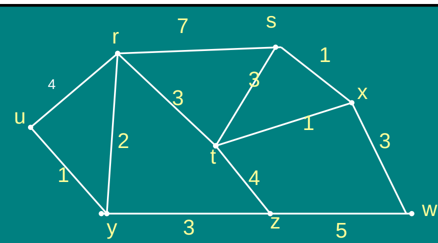
Bài toán đường đi ngắn nhất

Bài tập 1. Tìm đường đi ngắn nhất từ u_0 đến các đỉnh còn lại

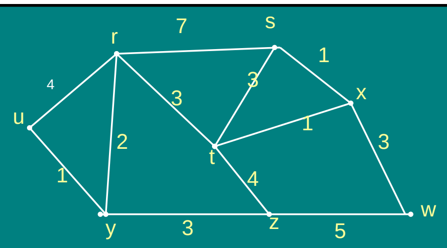




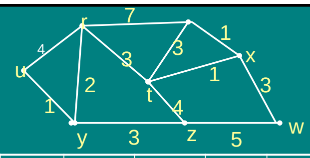
u_0	r	s	t	x	y	z	w
0*	(∞,-)	(∞,-)	(∞,-)	(∞,-)	(∞,-)	(∞,-)	(∞,-)



u_0	r	s	t	x	y	z	w
0*	(∞,-)	(∞,-)	(∞,-)	(∞,-)	(∞,-)	(∞,-)	(∞,-)
-	(4,u_0)	(∞,-)	(∞,-)	(∞,-)	(1u_0)*	(∞,-)	(∞,-)



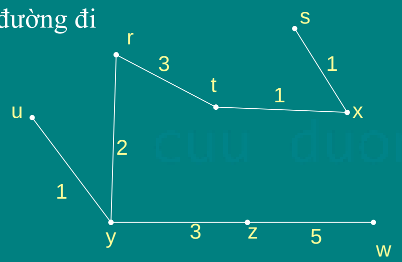
u_0	r	s	t	x	y	z	w
0*	(∞,-)	(∞,-)	(∞,-)	(∞,-)	(∞,-)	(∞,-)	(∞,-)
-	$(4,u_0)$	(∞,-)	(∞,-)	(∞,-)	$(1u_0)$*	(∞,-)	(∞,-)
-	(3,y)*	(∞,-)	(∞,-)	(∞,-)	-	(4,y)	(∞,-)



u_0	r	s	t	x	y	z	w
0*	(∞,-)	(∞,-)	(∞,-)	(∞,-)	(∞,-)	(∞,-)	(∞,-)
-	$(4,u_0)$	(∞,-)	(∞,-)	(∞,-)	$(1u_0)$*	(∞,-)	(∞,-)
-	(3,y)*	(∞,-)	(∞,-)	(∞,-)	-	(4,y)	(∞,-)
-	-	(10,r)	(6,r)	(∞,-)	-	(4,y)*	(∞,-)
-	-	(10,r)	(6,r)*	(∞,-)	-	-	(9,z)
-	-	(9,t)	-	(7,t)*	-	-	(9,z)
-	-	(8,x)*	-	-	-	-	(9,z)
-	-	-	-	-	-	-	(9,z)*

Bài toán đường đi ngắn nhất

Cây đường đi



Bài toán đường đi ngắn nhất

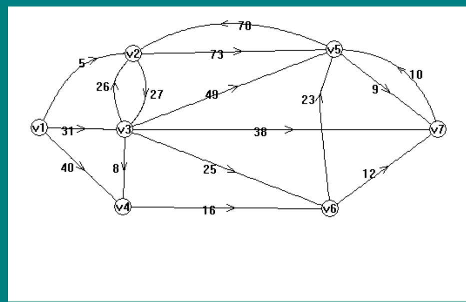
Bài tập 2(ĐHKHTN,2006).

Câu 5. Cho đồ thị có trọng số G = (V, E) ,
V = { v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6 , v_7}xác định bởi ma trận trọng số D. Dùng thuật toán Dijkstra tìm đường đi ngắn nhất từ v_1 đến các đỉnh v_2,v_3,v_4, v_5, v_6,v_7

Bài toán đường đi ngắn nhất

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 5 & 31 & 40 & \infty & \infty & \infty \\ \infty & 0 & 27 & \infty & 73 & \infty & \infty \\ \infty & 26 & 0 & 8 & 49 & 25 & 38 \\ \infty & \infty & \infty & 0 & \infty & 16 & \infty \\ \infty & 70 & \infty & \infty & 0 & \infty & 9 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & 23 & 0 & 12 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & 10 & \infty & 0 \end{pmatrix}$$

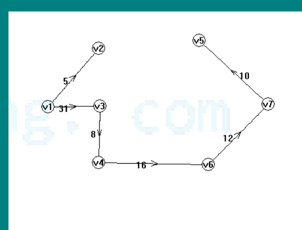
Bài toán đường đi ngắn nhất



Bài toán đường đi ngắn nhất

v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7
0*	$(\infty,-)$	$(\infty,-)$	$(\infty,-)$	$(\infty,-)$	$(\infty,-)$	$(\infty,-)$
-	$(5,v_1)$*	$(31,v_1)$	$(40,v_1)$	$(\infty,-)$	$(\infty,-)$	$(\infty,-)$
-	-	$(31,v_1)$*	$(40,v_1)$	$(78,v_2)$	$(\infty,-)$	$(\infty,-)$
-	-	-	$(39,v_3)$*	$(78,v_2)$	$(56,v_3)$	$(69,v_3)$
-	-	-	-	$(78,v_2)$	$(55,v_4)$*	$(69,v_3)$
-	-	-	-	$(78,v_2)$	-	$(67,v_6)$*
-	-	-	-	$(77,v_7)$	-	-

Bài toán đường đi ngắn nhất



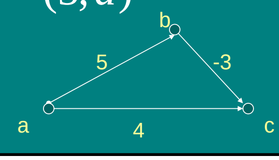
Bài toán đường đi ngắn nhất

Bài tập3(ĐHKHTN2005).

Cho một ví dụ chứng tỏ rằng thuật toán Dijkstrađể tìm đường đi ngắn nhất từ một đỉnh đến các đỉnh khác không áp dụng được cho đồ thị có trọng lượng nếu có cạnh có trọng lượng âm

Bài toán đường đi ngắn nhất

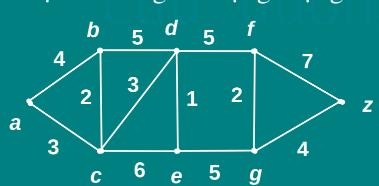
$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & (\infty,-) & (\infty,-) \\ - & (5,a) & (4,a)^{*} \\ - & (5,a)^{*} & - \end{pmatrix}$$



Bài toán đường đi ngắn nhất

BÀI 4(Đề2007)

Dùng thuật toán Dijsktra để tìm đường đi ngắn nhất từ đỉnh ***a*** đến đỉnh *z* và chiều dài của nó trong đồ thị vô hướng có trọng lượng sau:



a	*b*	*c*	*d*	*e*	*f*	*g*	*z*
0	(∞,-)	(∞,-)	(∞,-)	(∞,-)	(∞,-)	(∞,-)	(∞,-)
0	(4.*a*)	(3.*a*)	(∞,-)	(∞,-)	(∞,-)	(∞,-)	(∞,-)
0	(4.*a*)	**(3.*a*)**	(6.*c*)	(9.*c*)	(∞,-)	(∞,-)	(∞,-)
0	**(4.*a*)**	**(3.*a*)**	(6.*c*)	(9.*c*)	(∞,-)	(∞,-)	(∞,-)
0	**(4.*a*)**	**(3.*a*)**	**(6.*c*)**	(7.*d*)	(11.*d*)	(∞,-)	(∞,-)
0	**(4.*a*)**	**(3.*a*)**	**(6.*c*)**	**(7.*d*)**	(11.*d*)	(12,*e*)	(∞,-)
0	**(4.*a*)**	**(3.*a*)**	**(6.*c*)**	**(7.*d*)**	**(11.*d*)**	(12,*e*)	(18,*f*)
0	**(4.*a*)**	**(3.*a*)**	**(6.*c*)**	**(7.*d*)**	**(11.*d*)**	**(12,*e*)**	(16,*g*)
0	**(4.*a*)**	**(3.*a*)**	**(6.*c*)**	**(7.*d*)**	**(11.*d*)**	**(12,*e*)**	**(16,*g*)**

Bài toán đường đi ngắn nhất

Thuật toán Ford – Bellman

Tìm đường đi ngắn nhất từ u_0 đến các đỉnh hoặc chỉ ra đồ thị có mạch âm.

Bước 1. $L_0(u_0)$ =0 và $L_0(v) = \infty$ $\forall v \neq u_0$. Đánh dấu đỉnh v bằng (∞ ,-) ; k=1.

Bước 2. $L_k(u_0)$ = 0 và

$L_k(v) = \min\{L_{k-1}(u)+w(uv)/u$ là đỉnh trước của v}

Nếu $L_k(v) = L_{k-1}(y)+w(yv)$ thì đánh dấu đỉnh v bởi $(L_k(v),y)$

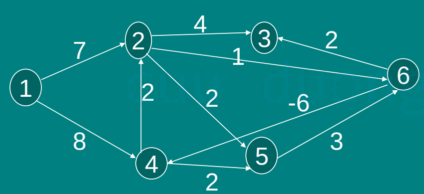
Bài toán đường đi ngắn nhất

Bước 3. Nếu $L_k(v) = L_{k-1}(v)$ với mọi v, tức $L_k(v)$ ổn định thì dừng. Ngược lại đến bước 4.

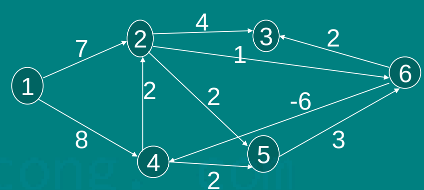
Bước 4. Nếu k = n thì dừng. G có mạch âm. Nếu $k \leq n-1$ thì trở về bước 2 với k:=k+1

Bài toán đường đi ngắn nhất

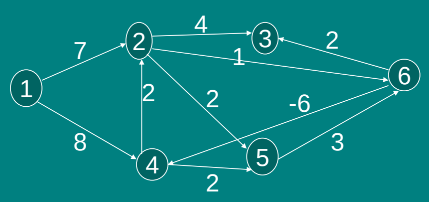
- BT1.



Bài toán đường đi ngắn nhất

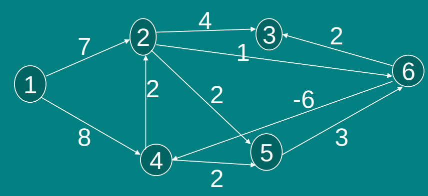


k	1	2	3	4	5	6
0	0	(∞,-)	(∞,-)	(∞,-)	(∞,-)	(∞,-)



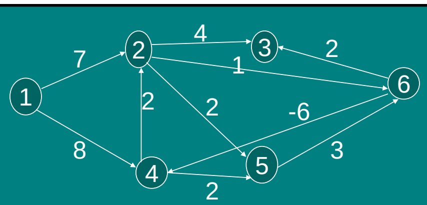
k	1	2	3	4	5	6
0	0	(∞,-)	(∞,-)	(∞,-)	(∞,-)	(∞,-)
1	0	(7,1)	(∞,-)	(8,1)	(∞,-)	(∞,-)

121



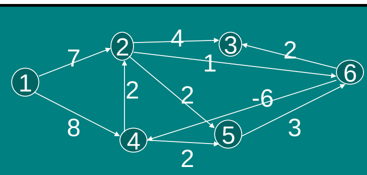
k	1	2	3	4	5	6
0	0	(∞,-)	(∞,-)	(∞,-)	(∞,-)	(∞,-)
1	0	(7,1)	(∞,-)	(8,1)	(∞,-)	(∞,-)
2	0	(7,1)	(11,2)	(8,1)	(9,2)	(8,2)

122



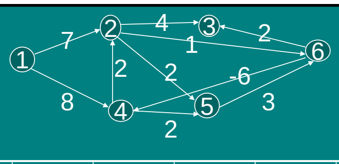
k	1	2	3	4	5	6
0	0	(∞,-)	(∞,-)	(∞,-)	(∞,-)	(∞,-)
1	0	(7,1)	(∞,-)	(8,1)	(∞,-)	(∞,-)
2	0	(7,1)	(11,2)	(8,1)	(9,2)	(8,2)
3	0	(7,1)	(10,6)	(2,6)	(9,2)	(8,2)

123



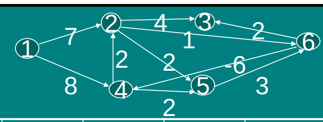
k	1	2	3	4	5	6
0	0	(∞,-)	(∞,-)	(∞,-)	(∞,-)	(∞,-)
1	0	(7,1)	(∞,-)	(8,1)	(∞,-)	(∞,-)
2	0	(7,1)	(11,2)	(8,1)	(9,2)	(8,2)
3	0	(7,1)	(10,6)	(2,6)	(9,2)	(8,2)
4	0	(4,4)	(10,6)	(2,6)	(4,4)	(8,2)

124



k	1	2	3	4	5	6
0	0	(∞,-)	(∞,-)	(∞,-)	(∞,-)	(∞,-)
1	0	(7,1)	(∞,-)	(8,1)	(∞,-)	(∞,-)
2	0	(7,1)	(11,2)	(8,1)	(9,2)	(8,2)
3	0	(7,1)	(10,6)	(2,6)	(9,2)	(8,2)
4	0	(4,4)	(10,6)	(2,6)	(4,4)	(8,2)
5	0	(4,4)	(8,2)	(2,6)	(4,4)	(5,2)

125



k	1	2	3	4	5	6
0	0	(∞,-)	(∞,-)	(∞,-)	(∞,-)	(∞,-)
1	0	(7,1)	(∞,-)	(8,1)	(∞,-)	(∞,-)
2	0	(7,1)	(11,2)	(8,1)	(9,2)	(8,2)
3	0	(7,1)	(10,6)	(2,6)	(9,2)	(8,2)
4	0	(4,4)	(10,6)	(2,6)	(4,4)	(8,2)
5	0	(4,4)	(8,2)	(2,6)	(4,4)	(5,2)
6	0	(4,4)	(7,6)	(-1,6)	(4,4)	(5,2)

126

Bài toán đường đi ngắn nhất

k = n = 6 . $L_k(i)$ chưa ổn định nên đồ thị có mạch âm. Chẳng hạn:

4→2→6→4 có độ dài -3

127

Bài toán đường đi ngắn nhất

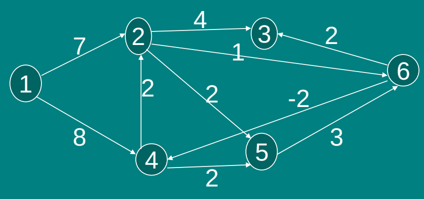
k = n = 6 . $L_k(i)$ chưa ổn định nên đồ thị có mạch âm. Chẳng hạn:

4→2→6→4 có độ dài -3

128

Bài toán đường đi ngắn nhất

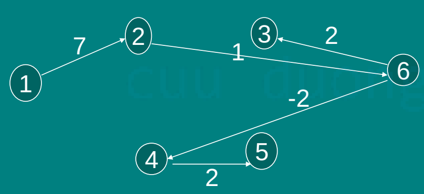
- BT2.



Bài toán đường đi ngắn nhất

k	1	2	3	4	5	6
0	0	(∞,-)	(∞,-)	(∞,-)	(∞,-)	(∞,-)
1	0	(7,1)	(∞,-)	(8,1)	(∞,-)	(∞,-)
2	0	(7,1)	(11,2)	(8,1)	(9,2)	(8,2)
3	0	(7,1)	(10,6)	(6,6)	(9,2)	(8,2)
4	0	(7,1)	(10,6)	(6,6)	(8,4)	(8,2)
5	0	(7,1)	(10,6)	(6,6)	(8,4)	(8,2)

Bài toán đường đi ngắn nhất



Bài toán đường đi ngắn nhất

Thuật toán Floyd.

Tìm đường đi ngắn nhất giữa tất cả các cặp đỉnh hoặc chỉ ra đồ thị có mạch âm. Ngoài ma trận khoảng cách D ta còn dùng ma trận Q = (Q_{ij}), trong đó

$$Q_{ij} = \begin{cases} j \ \ khi\ ij \in E \\ 0 \ \ khi\ ij \notin E \end{cases}$$

Bài toán đường đi ngắn nhất

Bước 1. D_0 = D, Q_0 = Q, k = 1.

Bước 2. Với i = 1 đến n, với j =1 đến n. Đặt

$$D_k(i,j)=\begin{cases} D_{k-1}(i,k)+D_{k-1}(k,j) & \text{if } D_{k-1}(i,j)>D_{k-1}(i,k)+D_{k-1}(k,j) \\ D_{k-1}(i,j) & \text{if } D_{k-1}(i,j)\le D_{k-1}(i,k)+D_{k-1}(k,j) \end{cases}$$

$$Q_k(i,j)=\begin{cases} Q_{k-1}(i,k) & \text{if } D_{k-1}(i,j)>D_{k-1}(i,k)+D_{k-1}(k,j) \\ Q_{k-1}(i,j) & \text{if } D_{k-1}(i,j)\le D_{k-1}(i,k)+D_{k-1}(k,j) \end{cases}$$

133

Bài toán đường đi ngắn nhất

- Bước 3. Nếu k = n thì dừng. Nếu k < n thì trở lại Bước 2 với k := k + 1

134

Bài toán đường đi ngắn nhất

- Cho đồ thị G có ma trận khoảng cách là

	1	2	3	4	5	6
1	0	4	1	∞	∞	∞
2	∞	0	∞	5	3	∞
3	∞	2	0	10	∞	∞
4	∞	∞	∞	0	∞	9
5	∞	∞	∞	4	0	7
6	∞	6	∞	∞	∞	0

135

Bài toán đường đi ngắn nhất

- Khi đó ma trận Q sẽ là

	1	2	3	4	5	6
1	0	2	3	0	0	0
2	0	0	0	4	5	0
3	0	2	0	4	0	0
4	0	0	0	0	0	6
5	0	0	0	4	0	6
6	0	2	0	0	0	0

136

Bài toán đường đi ngắn nhất

- Ta có $D_1 = D$, $Q_1 = Q$ và

$D_2 =$

	1	2	3	4	5	6
1	0	4	1	9	7	∞
2	∞	0	∞	5	3	∞
3	∞	2	0	7	5	∞
4	∞	∞	∞	0	∞	9
5	∞	∞	∞	4	0	7
6	∞	6	∞	11	9	0

137

Bài toán đường đi ngắn nhất

$Q_2 =$

	1	2	3	4	5	6
1	0	2	3	2	2	0
2	0	0	0	4	5	0
3	0	2	0	2	2	0
4	0	0	0	0	0	6
5	0	0	0	4	0	6
6	0	2	0	2	2	0

138

Bài toán đường đi ngắn nhất

$D_3 =$

	1	2	3	4	5	6
1	0	3	1	8	6	∞
2	∞	0	∞	5	3	∞
3	∞	2	0	7	5	∞
4	∞	∞	∞	0	∞	9
5	∞	∞	∞	4	0	7
6	∞	6	∞	11	9	0

139

Bài toán đường đi ngắn nhất

$Q_3 =$

	1	2	3	4	5	6
1	0	3	3	3	3	∞
2	0	0	0	4	5	0
3	0	2	0	2	2	0
4	0	0	0	0	0	6
5	0	0	0	4	0	6
6	0	2	0	2	2	0

140

Bài toán đường đi ngắn nhất

$D_4 =$

	1	2	3	4	5	6
1	0	3	1	8	6	17
2	∞	0	∞	5	3	14
3	∞	2	0	7	5	16
4	∞	∞	∞	0	∞	9
5	∞	∞	∞	4	0	7
6	∞	6	∞	11	9	0

141

Bài toán đường đi ngắn nhất

$Q_4 =$

	1	2	3	4	5	6
1	0	3	3	3	3	3
2	0	0	0	4	5	4
3	0	2	0	2	2	2
4	0	0	0	0	0	6
5	0	0	0	4	0	6
6	0	2	0	2	2	0

142

Bài toán đường đi ngắn nhất

$D_5 =$

	1	2	3	4	5	6
1	0	3	1	8	6	13
2	∞	0	∞	5	3	10
3	∞	2	0	7	5	12
4	∞	15	∞	0	∞	9
5	∞	13	∞	4	0	7
6	∞	6	∞	11	9	0

143

Bài toán đường đi ngắn nhất

$Q_5 =$

	1	2	3	4	5	6
1	0	3	3	3	3	3
2	0	0	0	4	5	5
3	0	2	0	2	2	2
4	0	0	0	0	0	6
5	0	0	0	4	0	6
6	0	2	0	2	2	0

144

Bài toán đường đi ngắn nhất

D_6 =

	1	2	3	4	5	6
1	0	3	1	8	6	13
2	∞	0	∞	5	3	10
3	∞	2	0	7	5	12
4	∞	15	∞	0	18	9
5	∞	13	∞	4	0	7
6	∞	6	∞	11	9	0

145

Bài toán đường đi ngắn nhất

Q_6 =

	1	2	3	4	5	6
1	0	3	3	3	3	3
2	0	0	0	4	5	5
3	0	2	0	2	2	2
4	0	6	0	0	6	6
5	0	6	0	4	0	6
6	0	2	0	2	2	0

146

Bài toán đường đi ngắn nhất

- Đường đi ngắn nhất từ đỉnh 1 đến đỉnh 6 là
$1 \rightarrow 3 \rightarrow 2 \rightarrow 5 \rightarrow 6$ vì
$Q_6(1,6) = 3, Q_6(3,6) = 2, Q_6(2,6) = 5, Q_6(5, 6) = 6$.
- Đường đi ngắn nhất từ đỉnh 4 đến đỉnh 5 là
$4 \rightarrow 6 \rightarrow 2 \rightarrow 5$ vì
$Q_6(4,5) = 6, Q_6(6,5) = 2, Q_6(2,5) = 5$.

147

Đường đi Euler - Đường đi Hamilton

Euler

(1707-1783)

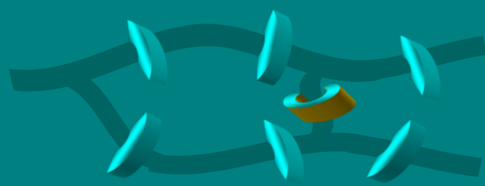
148

Đường đi Euler - Đường đi Hamilton

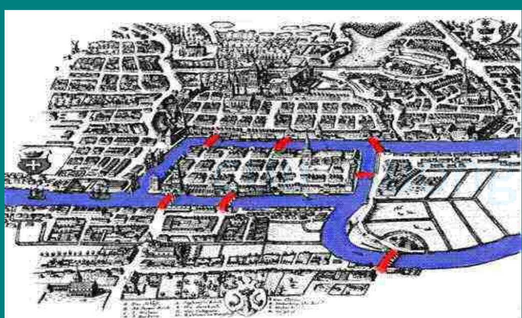
Hamilton
(1755-1804)

Đường đi Euler - Đường đi Hamilton

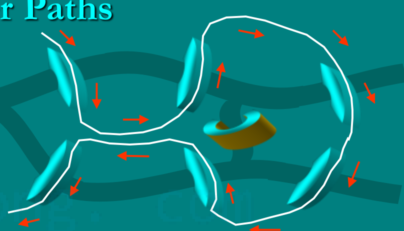
Problem. The town of Königsberg was divided into four sections by the branch of the Pregel River



These four sections are connected by seven bridges

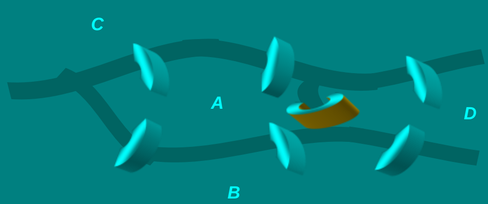


Euler Paths



Question. Can one cross seven bridges and return to the starting point without crossing any bridge twice?

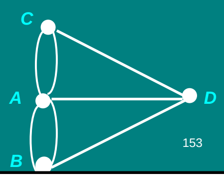
In the eighteenth century, Euler solved this problem using Graph Theory



Euler modeled this problem using the multigraph:

✓ four sections correspond to four vertices *A, B, C, D*.

✓ each bridge corresponds to an edge



153

Đường đi Euler - Đường đi Hamilton

Đường đi Euler

Định nghĩa.

i. *Đường đi Euler* là đường đi qua tất cả các cạnh mỗi cạnh (cung) đúng một lần.*Chu trình Euler là* chu trình đi qua tất cả các cạnh của đồ thị mỗi cạnh đúng một lần.

ii. Đồ thị được gọi là *đồ thị Euler* nếu nó có chu trình Euler

154

Đường đi Euler - Đường đi Hamilton

Điều kiện cần và đủ.

i. Cho G = (V,E) là đồ thị vô hướng liên thông. G là đồ thị Euler ⇔ Mọi đỉnh của G đều có bậc chẵn.

Nếu G có hai đỉnh bậc lẻ còn mọi đỉnh khác đều có bậc chẵn thì G có đường đi Euler

ii. Cho G là đồ thị có hướng liên thông. G là đồ thị Euler ⇔ G cân bằng.

155

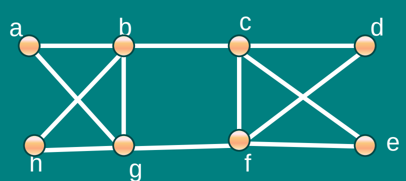
Đường đi Euler-Đường đi Hamilton

Thuật toán Fleury để tìm chu trình Euler.

1. Bắt đầu từ một đỉnh bất kỳ của G và tuân theo qui tắc sau: Mỗi khi đi qua một cạnh nào đó thì xoá nó đi, sau đó xoá đỉnh cô lập nếu có.
2. Không bao giờ đi qua một cầu trừ phi không còn cách đi nào khác.

156

Đường đi Euler-Đường đi Hamilton



abcfdcefghbga

157

Đường đi Euler - Đường đi Hamilton

Đường đi Hamilton.

Định nghĩa. *Đường đi Hamilton* là đường đi qua tất cả các đỉnh của đồ thị mỗi đỉnh đúng một lần.

- Định nghĩa tương tự cho chu trình Hamilton (mạch Hamilton).
- Đồ thi gọi là *đồ thị Hamilton* nếu nó có chu trình Hamilton

158

Đường đi Euler - Đường đi Hamilton

Điều kiện đủ (cho đồ thị đơn vô hướng).

i. Định lý Ore(1960). Cho đồ thị G có n đỉnh. Nếu deg(i)+deg(j) $\geq n \geq 3$ với i và j là hai đỉnh không kề nhau tuỳ ý thì G là Hamilton.

ii. Định lý Dirac (1952) Cho đồ thị G có n đỉnh. Nếu deg(i) $\geq n/2$ với i tuỳ ý thì G là Hamilton

159

Đường đi Euler - Đường đi Hamilton

Qui tắc để xây dựng một chu trình Hamilton H hoặc chỉ ra đồ thị vô hướng không là Hamilton

Qui tắc 1. Tất cả các cạnh kề với đỉnh bậc 2 phải ở trong H

Qui tắc 2. Không có chu trình con(chu trình có chiều dài <n) nào được tạo thành trong quá trình xây dựng H

160

Đường đi Euler - Đường đi Hamilton

Qui tắc 3. Khi chu trình Hamilton mà ta đang xây dựng đi qua đỉnh i thì xoá tất cả các cạnh kề với i mà ta chưa dùng(vì không được dùng đến nữa). Điều này lại có thể cho ta một số đỉnh bậc 2 và ta lại dùng qui tăc1.

Qui tắc 4. Không có đỉnh cô lập hay cạnh treo nào được tạo nên sau khi áp dụng qui tắc 3.

Đường đi Euler-Đường đi Hamilton

Điều kiện đủ cho đồ thị có hướng , đơn(không có khuyên và không có cạnh song song cùng chiều)

ĐK Meyniel. ij và ji $\notin E \Rightarrow deg(i)+deg(j) \geq 2n-1$ với i, j tùy ý.

ĐLMeyniel(1973). Nếu G là đồ thị đơn, liên thông mạnh và thoả ĐK Meyniel thì G là đồ thị Hamilton.

ĐL Camion(1959). Nếu G là đơn đồ thị đủ, liên thông mạnh thì G Hamilton

Đường đi Euler-Đường đi Hamilton

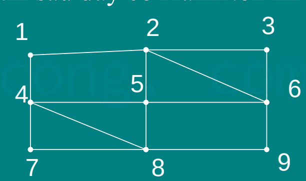
ĐLGhouila-Houri(1960) Nếu G là đơn đồ thị liên thông mạnh sao cho mọi đỉnh đều có bậc không nhỏ hơn n thì G Hamilton.

ĐL Woodall(1972). Cho G là đơn đồ thị thoả ij $\notin E \Rightarrow deg^+(i)+deg^-(j) \geq n$, với mọi i,j thì G Hamilton

Đường đi Euler-Đường đi Hamilton

- Đề thi2004(ĐHKHTN)

Đồ thi sau đây có Hamilton không?



Đường đi Euler-Đường đi Hamilton

- Giả sử G có chu trình Hamilton H, theo qui tăc1,tất cả các cạnh kề với đỉnh bậc 2 đều ở trong H:12,14,23,36,47,78,69,89. Ta có chu trình con là 1,2,3,6,9,8,7,4,1.

Vậy G không là đồ thị Hamilton.

Đề thi 2005(ĐHKHTN).Cho G là đồ thị không hướng, đơn, n≥ 3(n là số đỉnh), deg(i)+deg(j)≥n-1. Chứng minh rằng G có đường đi Hamilton.

165

Đường đi Euler-Đường đi Hamilton

- Giải:

Ta thêm vào đồ thị G một đỉnh z và nối z với mỗi đỉnh của G bởi một cạnh, ta thu được đồ thị G’ có n+1 đỉnh.Bậc của mọi đỉnh trong G’ đều lớn hơn bậc cũ của nó một đơn vị(trừz), còn bậc của z bằng n.

Do đó trong G’thì

deg’(i)+deg’(j)=deg(i)+1+deg(j) +1≥ n-1+1+1 = n+1, khi i và j khác z .

deg’ (i) + deg ’(z) = deg (i) + 1 + n ≥ n+1 ,với i khác z

Theo ĐL Ore thì G’ là đồ thị Hamilton,suy ra G có đường đi Hamilton

166