

ĐIỆN TRƯỜNG TĨNH TRONG CHÂN KHÔNG

HỒ VĂN BÌNH

hvbinh@hcmus.edu.vn

1. Điện tích

a. Tính chất

b. Định luật Coulomb

2. Điện trường

a. Cường độ điện trường

b. Điện trường của một điện tích điểm

c. Nguyên lý chồng chất điện trường

d. Đường sức điện trường

3. Điện tích và điện trường quanh ta

4. Bài tập áp dụng

Tính chất của điện tích

- Điện tích của hệ kín được bảo toàn.
- Điện tích bị lượng tử hóa,
 $e=1,60\times 10^{-19}$ C là điện tích cơ sở.
- Vật được tích điện thông qua:
 - cọ xát với một vật khác,
 - tiếp xúc với một vật tích điện,
 - hiện tượng **cảm ứng điện**.



Mặt đất tích điện
thông qua cảm ứng.

Định luật Coulomb

- Lực tĩnh điện do điện tích điểm q_1 tác động lên điện tích điểm q_2 (đặt trong chân không):

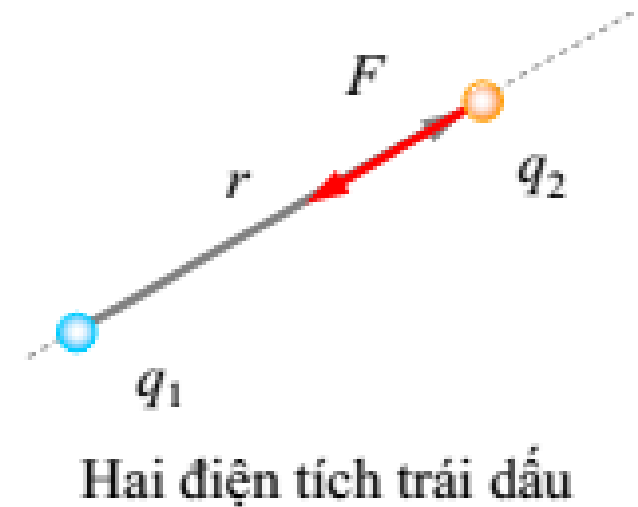
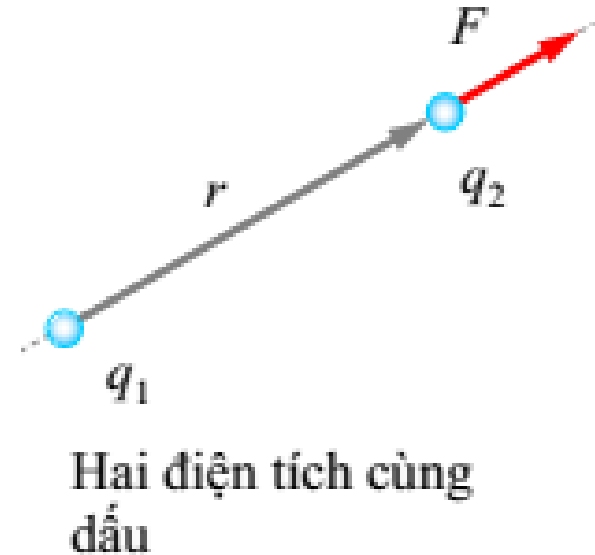
$$F = k \frac{|q_1||q_2|}{r^2}$$

$$\vec{F} = k \frac{q_1 q_2}{r^3} \vec{r}$$

$$k = 1/4\pi\epsilon_0 = 8,99 \times 10^9 \text{ N.m}^2/\text{C}^2$$

$$\epsilon_0 = 8,85 \times 10^{-12} \text{ C}^2/\text{N.m}^2$$

- ϵ_0 được gọi là hằng số điện
- r là vectơ nối từ q_1 đến q_2

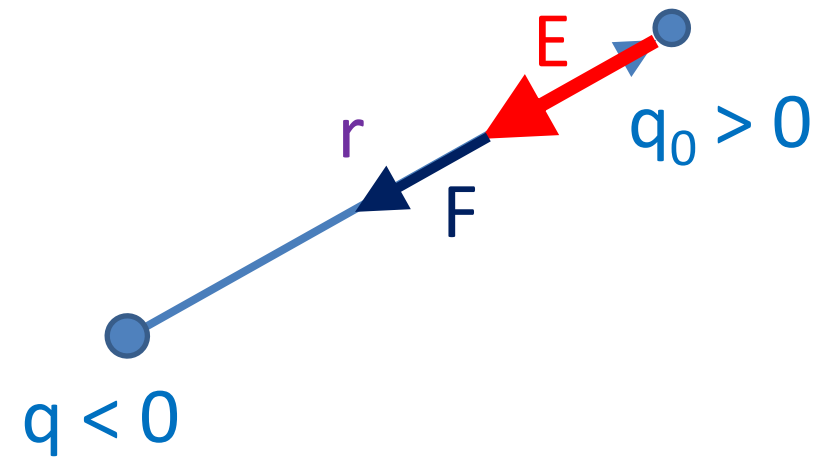
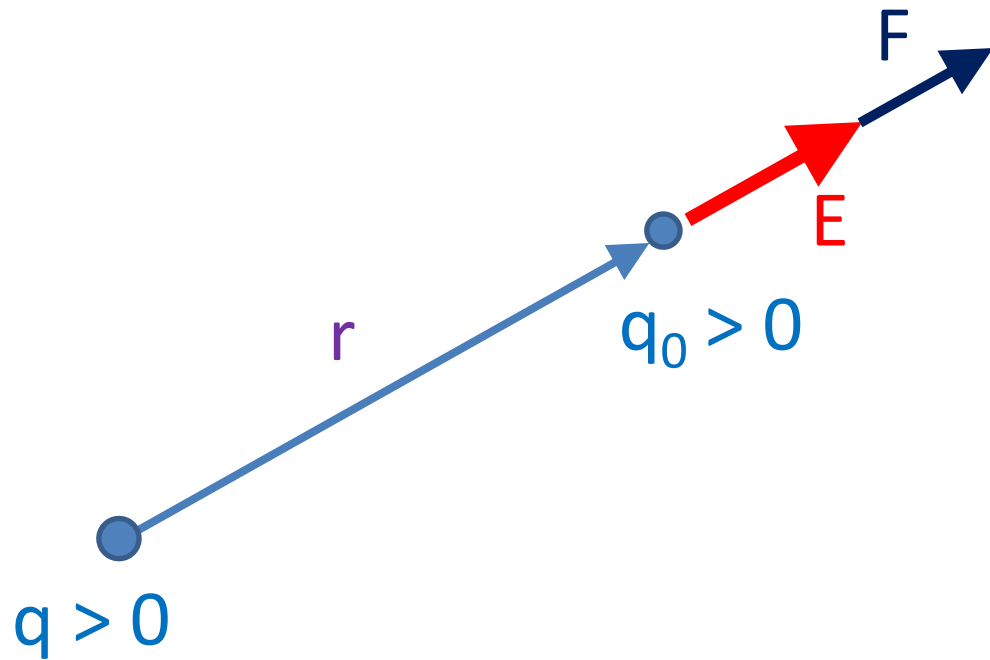


- Mỗi hệ điện tích đều tạo ra quanh mình một điện trường
- Tại mỗi điểm trong đó có một **vector** cường độ điện trường E xác định.
- Để xác định điện trường E ở *một vị trí, người ta* đặt tại đó một **điện tích thử** q_0 , và đo lực tĩnh điện F lên q_0
- Điện trường E sẽ là:

$$\vec{E} = \vec{F} / q_0$$

(N/C hay V/m)

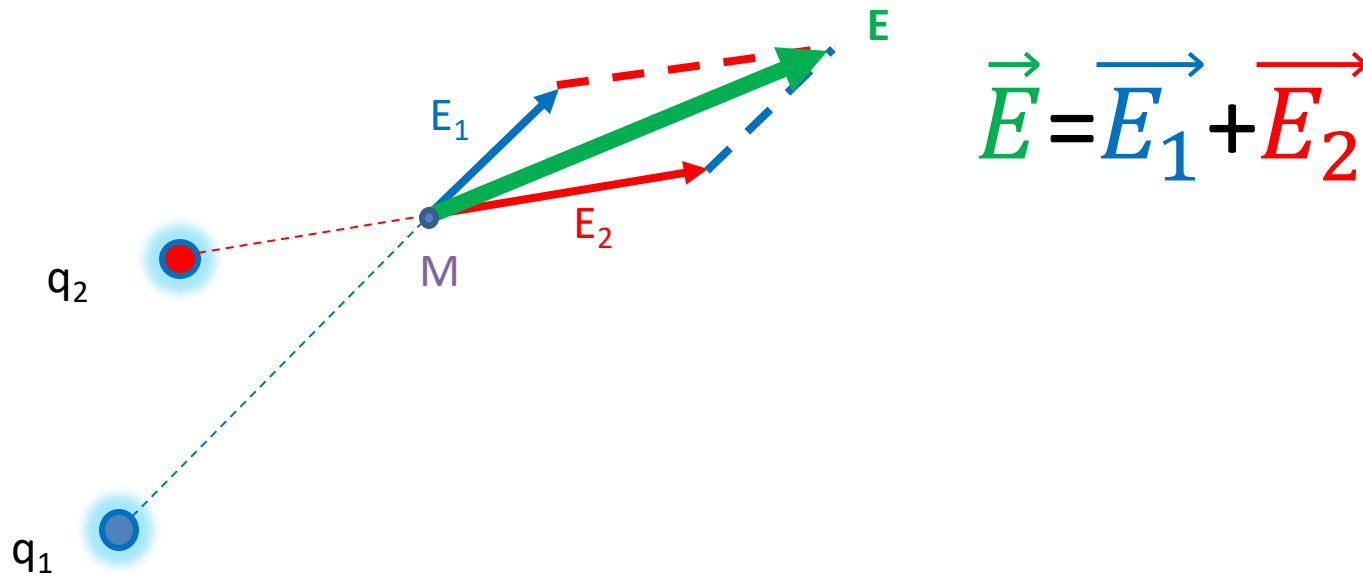
Điện trường của một điện tích điểm



$$\vec{F} = k \frac{qq_0}{r^3} \vec{r}$$

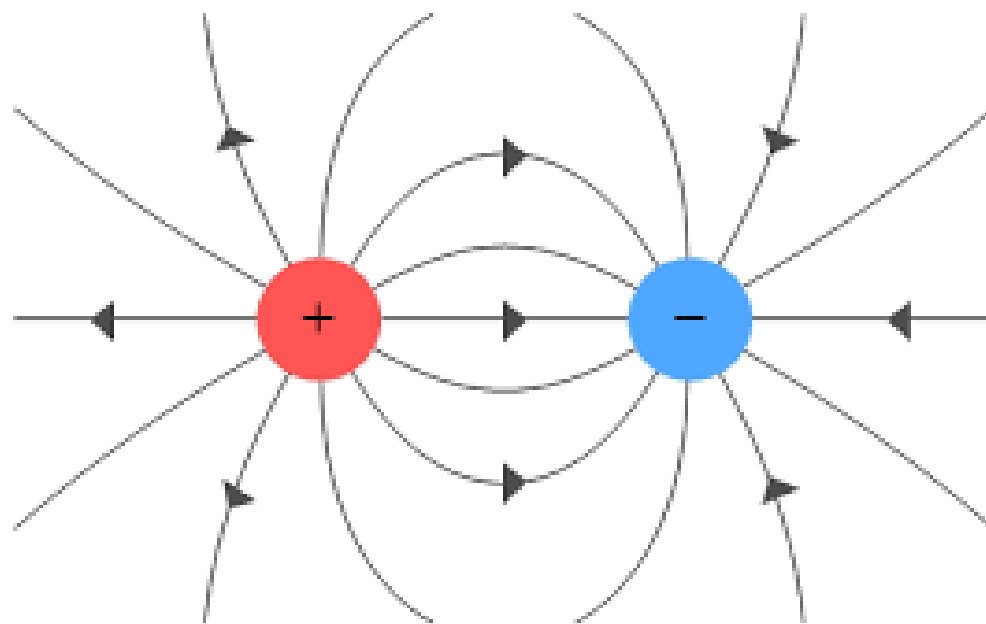
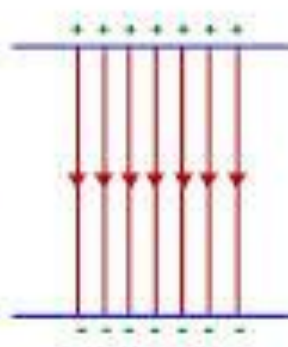
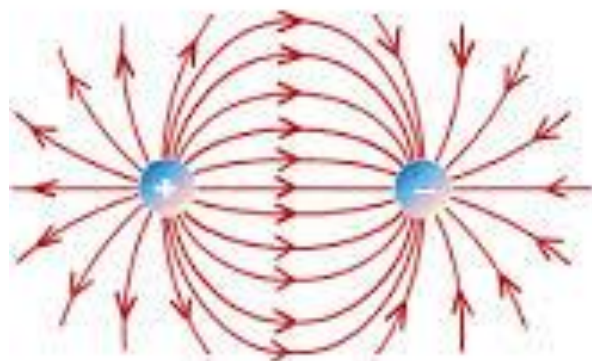
$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q_0} = k \frac{q}{r^3} \vec{r}$$

- Điện trường do hệ điện tích điểm tạo ra bằng tổng các **vecto** điện trường của tất cả các điện tích.

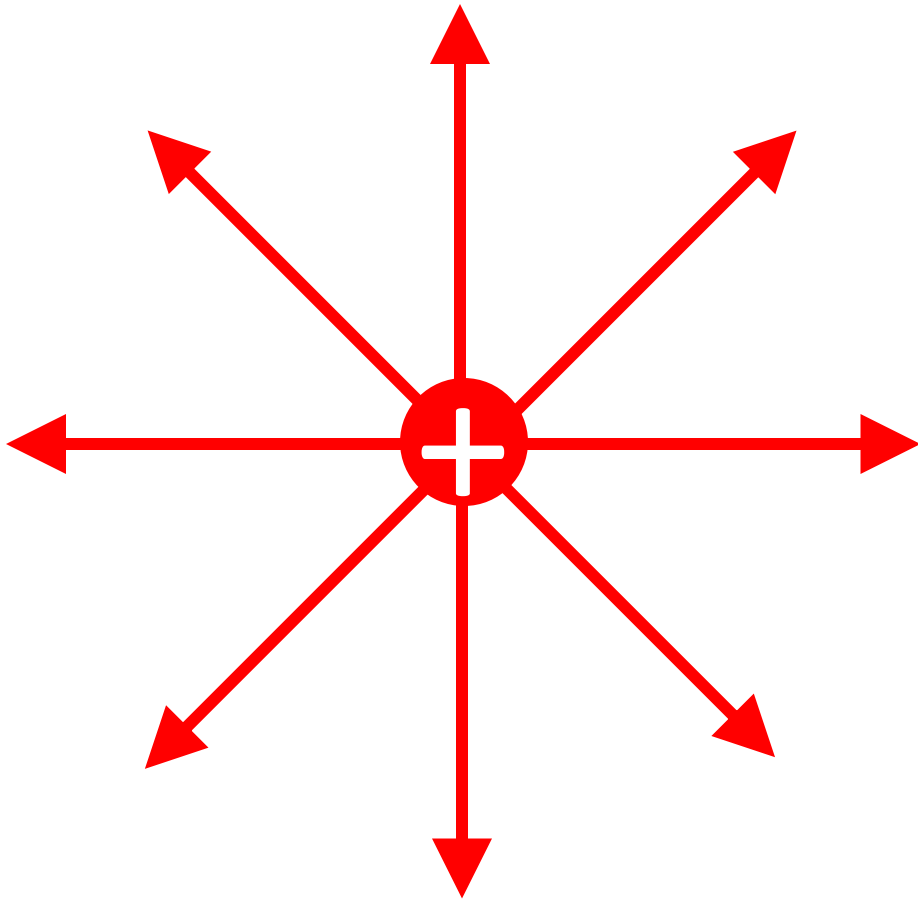


Đường sức điện trường

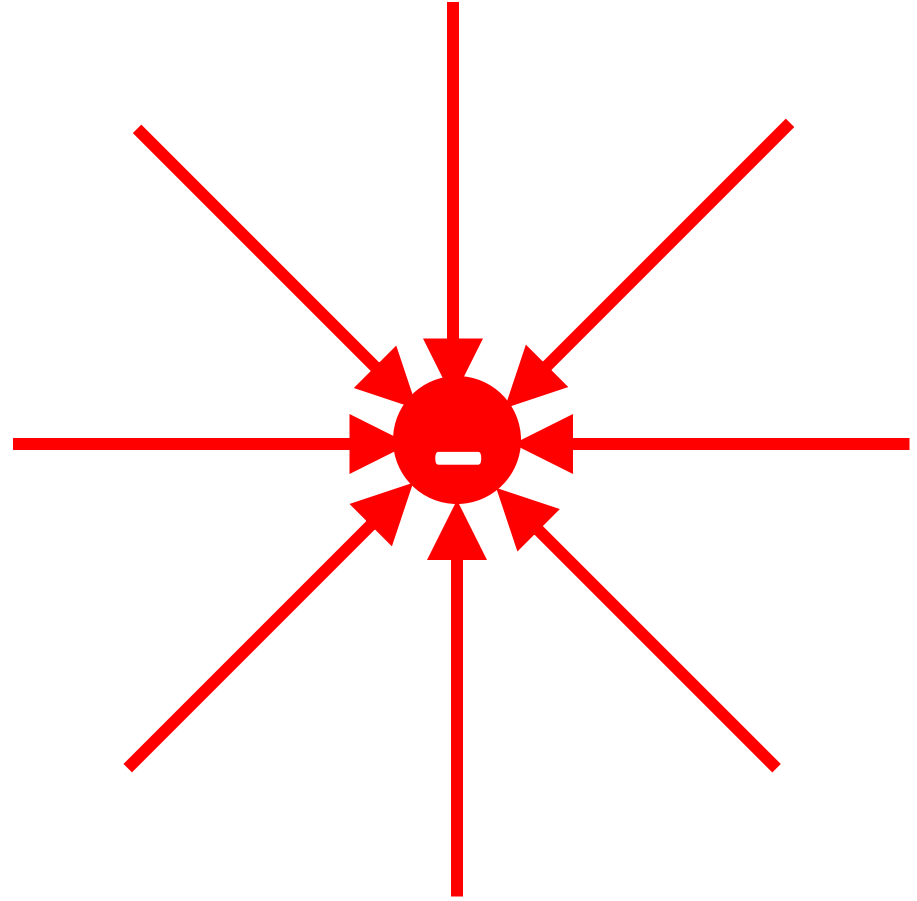
- Là những đường nhận ***E* làm tiếp tuyến** tại mọi điểm.
- Có chiều là chiều của vecto điện trường.
- Mật độ đường sức qua một mặt phẳng nhỏ vuông góc với điện trường thì tỷ lệ với độ lớn điện trường đi qua mặt đó.
- Hai đường sức không bao giờ cắt nhau



Đường sức điện trường



$q > 0$



$q < 0$

MỘT SỐ VÍ DỤ THỰC TẾ



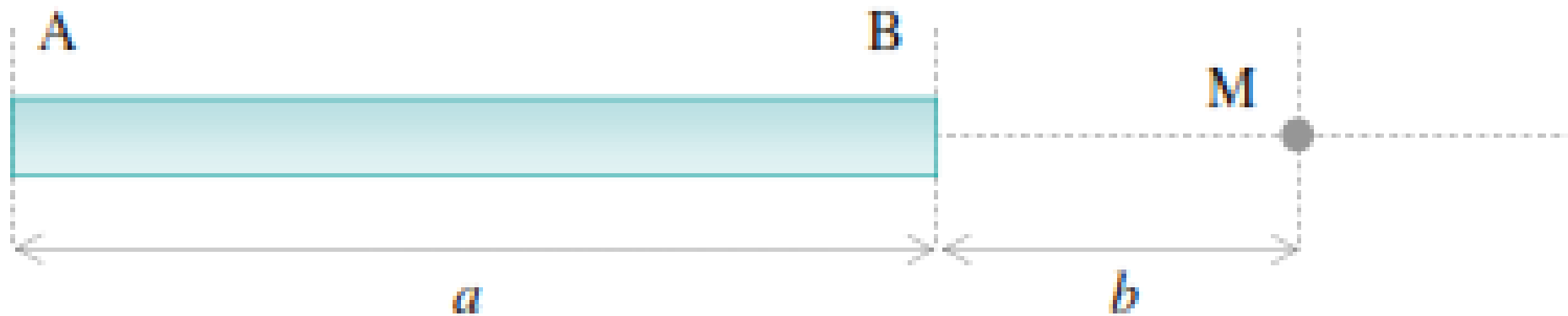
MỘT SỐ VÍ DỤ THỰC TẾ

Điện trường
giữa mây và
mặt đất làm tóc
người phụ nữ
này dựng ngược
lên.



BÀI TẬP 1

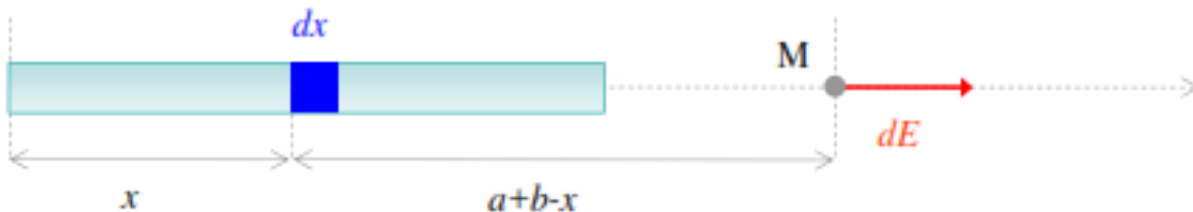
Một thanh thẳng AB có chiều dài a được tích điện đều với mật độ $\lambda > 0$. Tìm độ lớn điện trường tại một điểm M nằm trên đường nối dài của thanh, cách đầu B một đoạn b .



BÀI TẬP 1

- Chia thanh làm nhiều đoạn vi phân, mỗi đoạn có chiều dài dx , điện tích $dq = \lambda dx$, có vị trí x .
- Coi dq là một điện tích điểm, nó tạo ra ở M một điện trường có độ lớn bằng:

$$dE = k \frac{|dq|}{r^2} = k \frac{\lambda dx}{(a+b-x)^2}$$



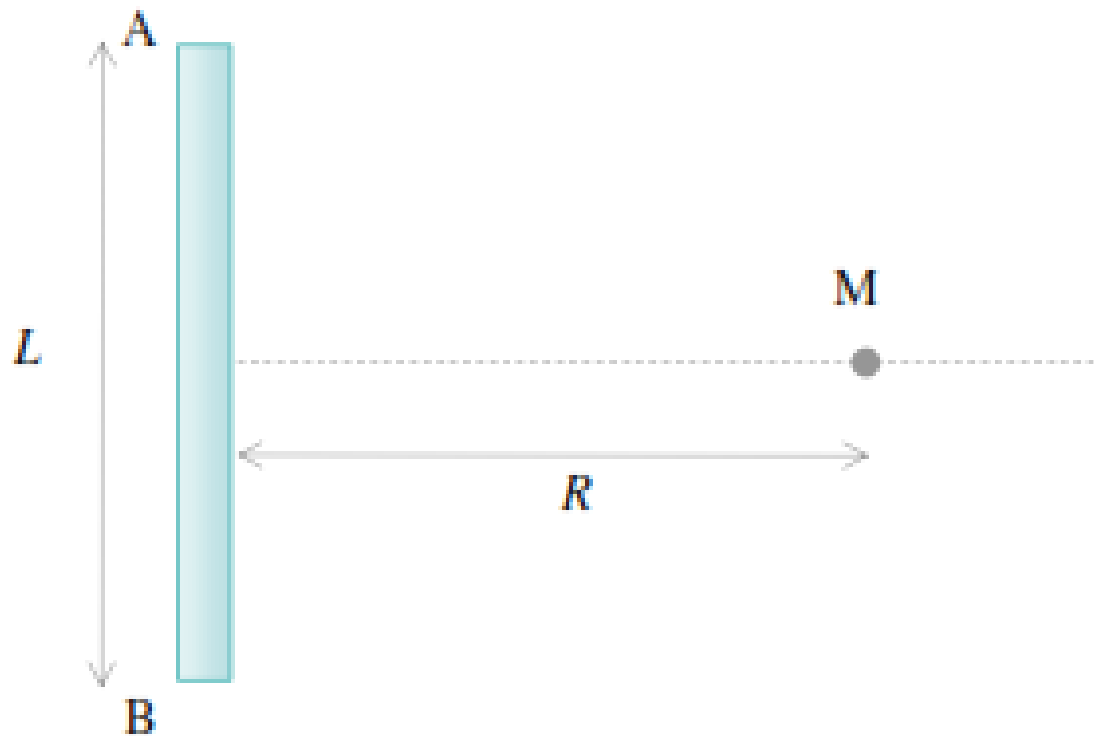
- Điện trường toàn phần tại M: $\vec{E} = \int d\vec{E}$
- Điện trường do mọi điện tích dq tạo ra đều cùng phương (trục x), do đó E cũng có phương trên trục x và có độ lớn:

$$E = \int dE = k\lambda \int_0^a \frac{dx}{(a+b-x)^2}$$

$$E = k\lambda \left[\frac{1}{a+b-x} \right]_0^a = k\lambda \left(\frac{1}{b} - \frac{1}{a+b} \right)$$

BÀI TẬP 2

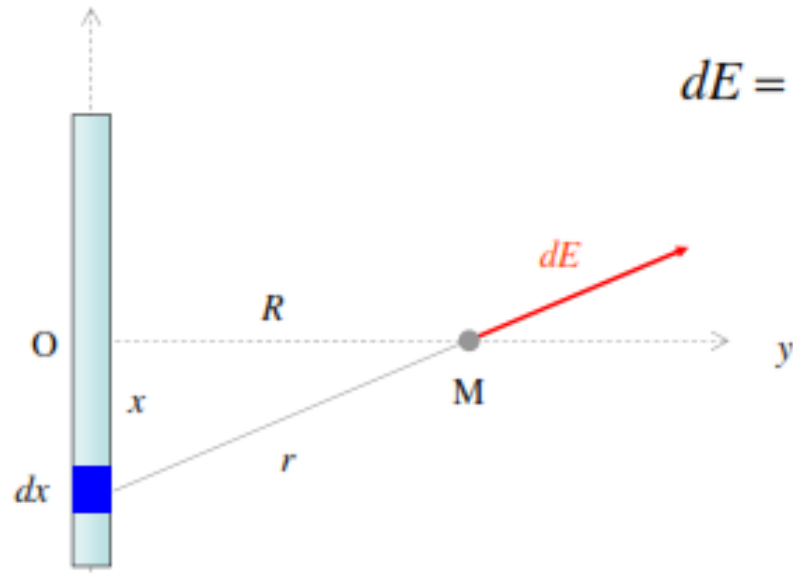
Một thanh thẳng AB có chiều dài L được tích điện đều với mật độ $\lambda > 0$. Tìm độ lớn điện trường tại một điểm M nằm trên đường trung trực của thanh, cách thanh một khoảng R .



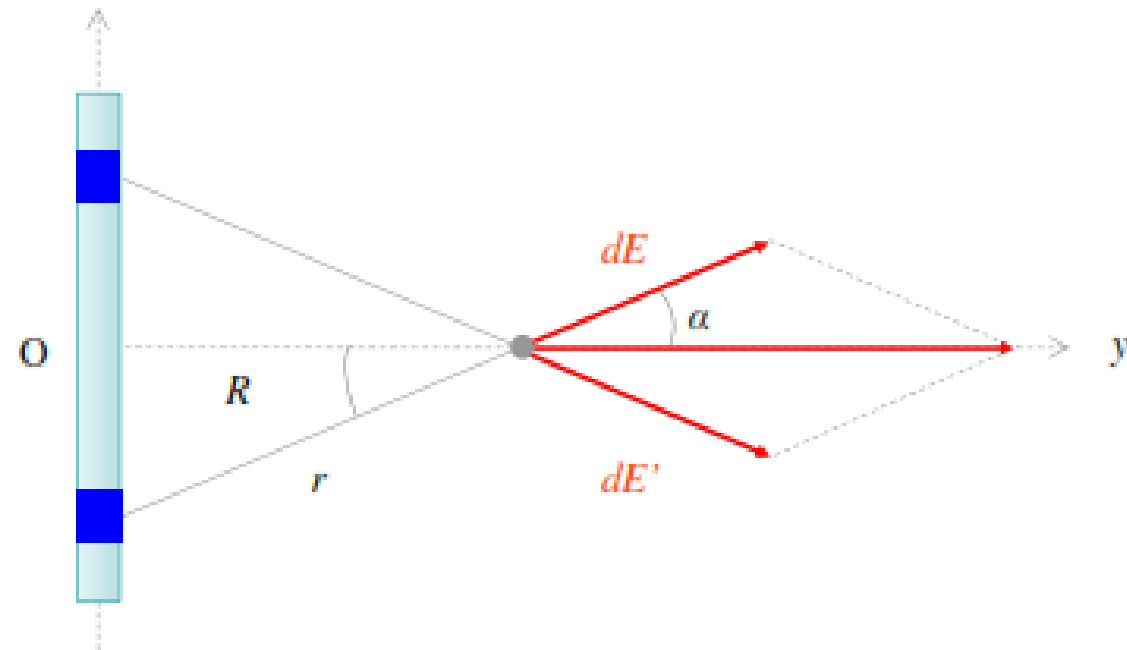
BÀI TẬP 2

- Chia thanh làm nhiều đoạn vi phân, mỗi đoạn có chiều dài dx , điện tích $dq = \lambda dx$, có vị trí x .
- dq tạo ra ở M một điện trường có độ lớn bằng:

$$dE = k \frac{|dq|}{r^2} = k \frac{\lambda dx}{R^2 + x^2}$$



- Điện trường toàn phần tại M: $\vec{E} = \int d\vec{E}$
- Do đối xứng, E có phương trên trục y .
- Do đó: $E_y = \int dE_y = \int dE \cos \alpha$



BÀI TẬP 2

$$E_y = \int k \frac{\lambda dx}{r^2} \cdot \frac{R}{r} = k\lambda R \int_{-L/2}^{L/2} \frac{dx}{(R^2 + x^2)^{3/2}}$$

$$\int \frac{dx}{(R^2 + x^2)^{3/2}} = \frac{x}{R^2 (R^2 + x^2)^{1/2}}$$

$$E_y = \frac{k\lambda R}{R^2} \cdot \frac{L}{(L^2/4 + R^2)^{1/2}}$$

$$E_y = \frac{2k\lambda L}{R\sqrt{R^2 + 4L^2}} = \frac{\lambda L}{2\pi\epsilon_0 R\sqrt{4R^2 + L^2}}$$

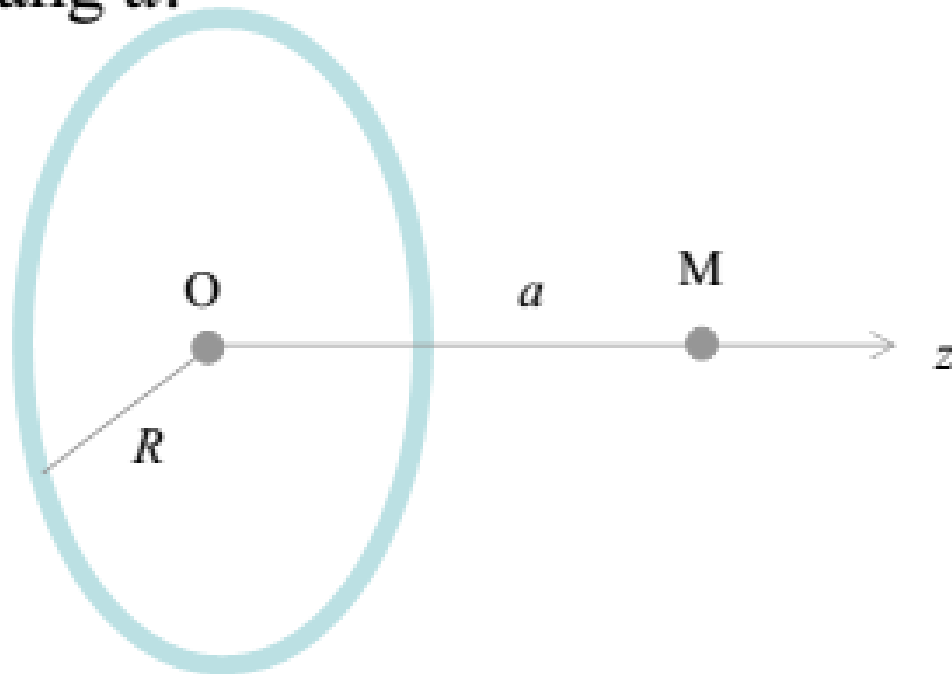
- Tìm điện trường tại M khi thanh AB dài vô hạn về cả hai phía.
- Trả lời:

$$E_y = \frac{\lambda L}{2\pi\epsilon_0 R\sqrt{4R^2 + L^2}} = \frac{\lambda L}{2\pi\epsilon_0 RL\sqrt{\left(\frac{2R}{L}\right)^2 + 1}}$$

$$E_y \xrightarrow{\frac{R}{L} \rightarrow 0} \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 R}$$

BÀI TẬP 3

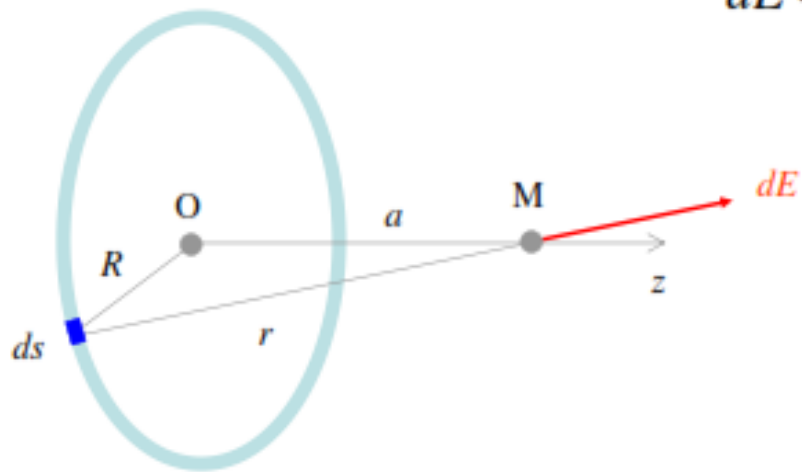
Một vành tròn bán kính R được tích điện đều với mật độ điện tích dài là $\lambda > 0$. Vành tròn này nằm trong mặt phẳng xy . Tìm điện trường tại một điểm M nằm trên trục z , cách mặt phẳng xy một khoảng bằng a .



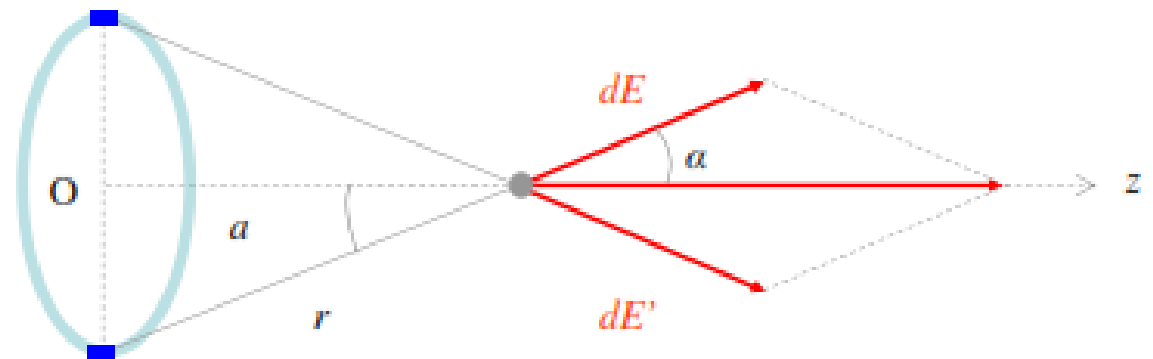
BÀI TẬP 3

- Chia vành tròn làm nhiều phần nhỏ vi phân, mỗi phần có chiều dài là ds , điện tích $dq = \lambda ds$.
- Điện trường do dq tạo ra ở M có độ lớn:

$$dE = k \frac{dq}{r^2} = k \frac{\lambda ds}{r^2}$$



- Điện trường toàn phần tại M: $\vec{E} = \int d\vec{E}$
- Do đối xứng, E có phương trên trục z .
- Do đó: $E_z = \int dE_z = \int dE \cos \alpha$



BÀI TẬP 3

$$E_z = \int k \frac{\lambda \cos \alpha}{r^2} ds$$

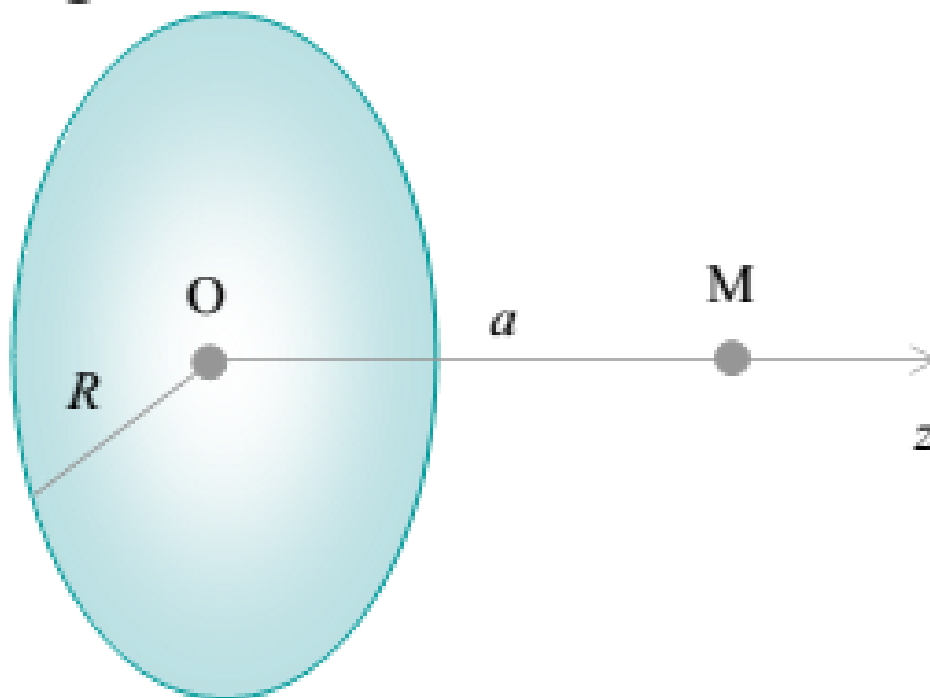
$$E_z = k \frac{\lambda \cos \alpha}{r^2} \int ds = k \frac{\lambda \cos \alpha}{r^2} 2\pi R$$

$$\cos \alpha = a/r \qquad r^2 = R^2 + a^2$$

$$E_z = 2\pi R k \lambda \frac{a}{(R^2 + a^2)^{3/2}}$$

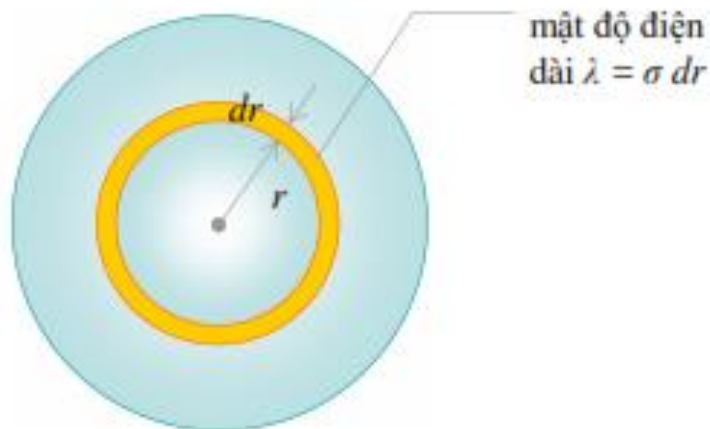
BÀI TẬP 4

Một đĩa tròn bán kính R được tích điện đều với mật độ điện tích là $\sigma > 0$. Đĩa tròn này nằm trong mặt phẳng xy . Tìm điện trường tại một điểm M nằm trên trục z , cách mặt phẳng xy một khoảng bằng a .



BÀI TẬP 4

- Chia đĩa tròn thành nhiều vành, mỗi vành có bán kính là r và bề dày là dr .
- Mỗi vành có diện tích là $2\pi r dr$, do đó có điện tích là $\sigma 2\pi r dr$ và mật độ điện tích dài là $\lambda = \sigma 2\pi r dr / 2\pi r = \sigma dr$.



- Theo BT 3, mỗi vành tạo ra tại M một điện trường nằm trên trục z:

$$dE_z = 2\pi k \lambda \frac{a}{(r^2 + a^2)^{3/2}} = 2\pi k \sigma a \frac{r dr}{(r^2 + a^2)^{3/2}}$$

- Điện trường toàn phần là tổng của các điện trường do các vành như trên tạo ra:

$$E_z = 2\pi k \sigma a \int_0^R \frac{r dr}{(r^2 + a^2)^{3/2}}$$

$$E_z = -2\pi k \sigma a \left[\frac{1}{\sqrt{r^2 + a^2}} \right]_0^R = 2\pi k \sigma \left(1 - \frac{a}{\sqrt{R^2 + a^2}} \right)$$

BÀI TẬP 4

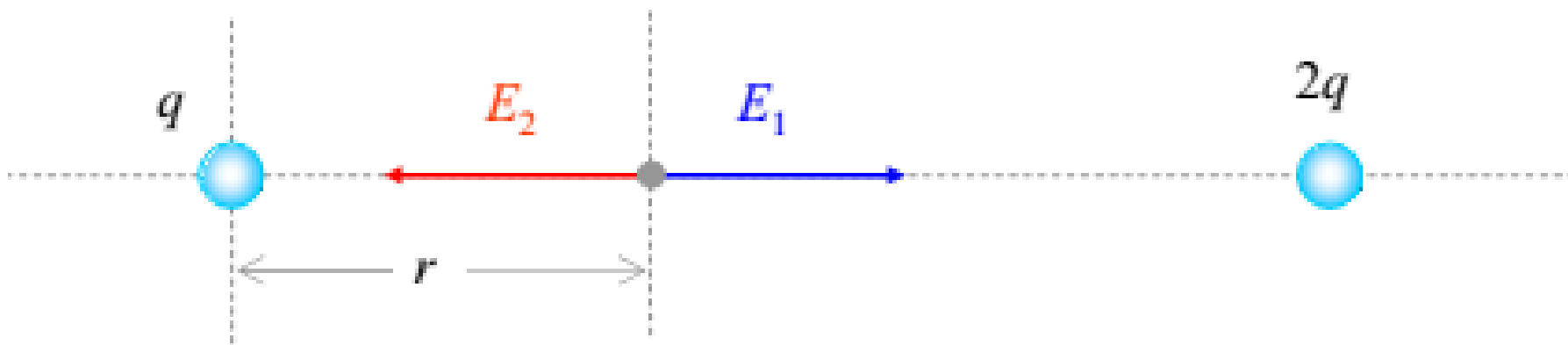
- Tìm điện trường tại M khi đĩa tròn có bán kính tiến tới vô cùng (trở thành bán phẳng vô hạn tích điện đều).
- Trả lời:

$$E_z = 2\pi k \sigma \left(1 - \frac{a}{\sqrt{R^2 + a^2}} \right) = 2\pi k \sigma \left(1 - \frac{a}{R\sqrt{1 + (a/R)^2}} \right)$$

$$E_z \xrightarrow{\frac{a}{R} \rightarrow 0} 2\pi k \sigma = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$$

BÀI TẬP 5

Hai điện tích điểm q và $2q$ đặt cách nhau 10 cm. M là một điểm nằm trên đường nối dài hai điện tích và cách q một đoạn r . Tìm r để điện trường tổng hợp tại M triệt tiêu.



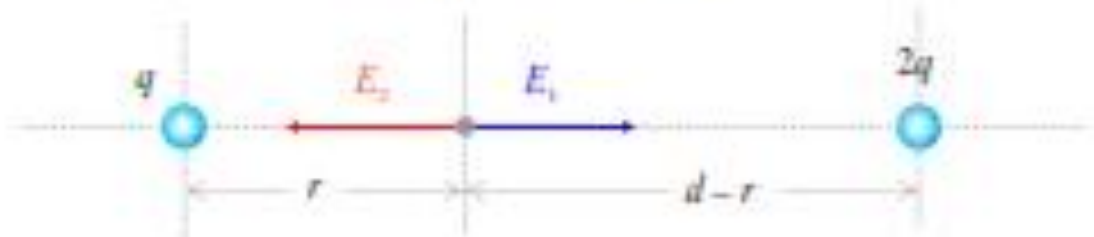
BÀI TẬP 5

- Gọi d là khoảng cách giữa hai điện tích, độ lớn điện trường do chúng tạo ra ở M lần lượt là:

$$E_1 = k \frac{|q|}{r^2} \quad E_2 = k \frac{2|q|}{(d-r)^2}$$

- Độ lớn của điện trường toàn phần tại M là:

$$E = |E_1 - E_2| = k|q| \left(\frac{1}{r^2} - \frac{2}{(d-r)^2} \right)$$



- Đặt $E = 0$ ta có:

$$2r^2 - (d-r)^2 = (r\sqrt{2} + r - d)(r\sqrt{2} - r + d) = 0$$

- Do đó:

$$r = d / (1 + \sqrt{2}) = 4.1 \text{ cm}$$

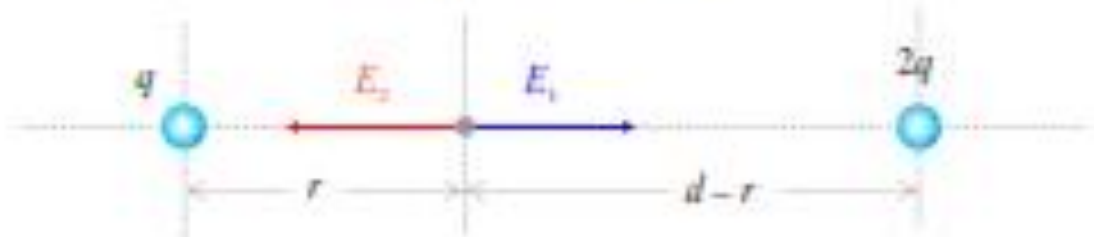
BÀI TẬP 5

- Gọi d là khoảng cách giữa hai điện tích, độ lớn điện trường do chúng tạo ra ở M lần lượt là:

$$E_1 = k \frac{|q|}{r^2} \quad E_2 = k \frac{2|q|}{(d-r)^2}$$

- Độ lớn của điện trường toàn phần tại M là:

$$E = |E_1 - E_2| = k|q| \left(\frac{1}{r^2} - \frac{2}{(d-r)^2} \right)$$



- Đặt $E = 0$ ta có:

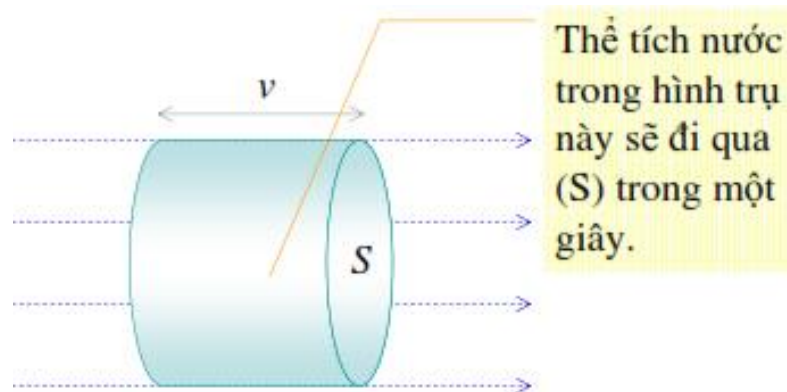
$$2r^2 - (d-r)^2 = (r\sqrt{2} + r - d)(r\sqrt{2} - r + d) = 0$$

- Do đó:

$$r = d / (1 + \sqrt{2}) = 4.1 \text{ cm}$$

VÍ DỤ VỀ THÔNG LƯỢNG DÒNG NƯỚC

- Xét một dòng nước chảy thẳng đều với vận tốc v , và một mặt phẳng (S), đặt vuông góc với dòng chảy.
- Thông lượng Φ của nước qua (S) (thể tích nước qua (S) trong một đơn vị thời gian):
- $\Phi = v \cdot S$

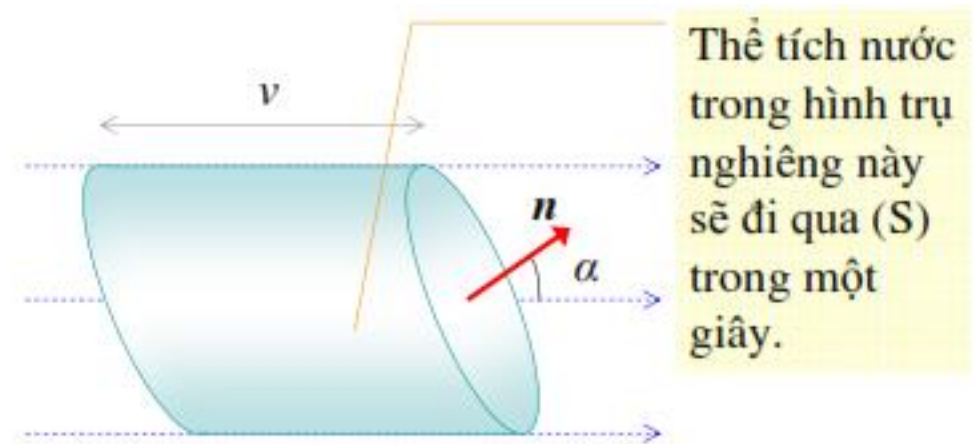


VÍ DỤ VỀ THÔNG LƯỢNG DÒNG NƯỚC

- Nếu (S) tạo một góc với dòng nước thẳng đều,
- thông lượng của nước qua (S) là:

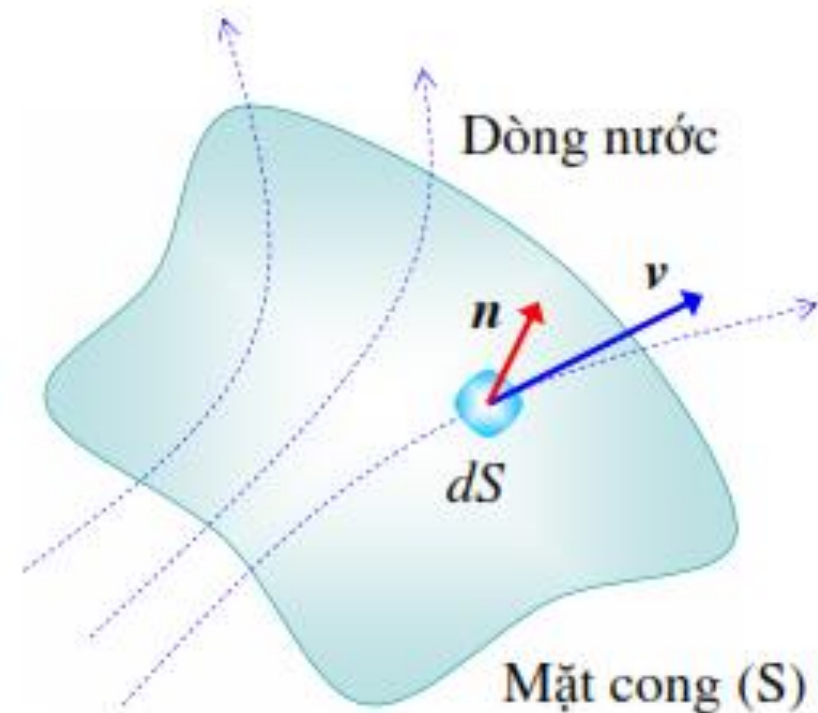
$$\Phi = vS \cos \alpha = \vec{v} \cdot \vec{n}S$$

- Dấu của Φ phụ thuộc vào góc α .



VÍ DỤ VỀ THÔNG LƯỢNG DÒNG NƯỚC

- Dòng nước bất kỳ, mặt cong (S) bất kỳ.
- Chia (S) làm nhiều phần nhỏ diện tích dS .



VÍ DỤ VỀ THÔNG LƯỢNG DÒNG NƯỚC

- Có thể coi mỗi phần dS là phẳng, và dòng chảy qua đó là thẳng đều. Do đó,
- thông lượng qua dS là:

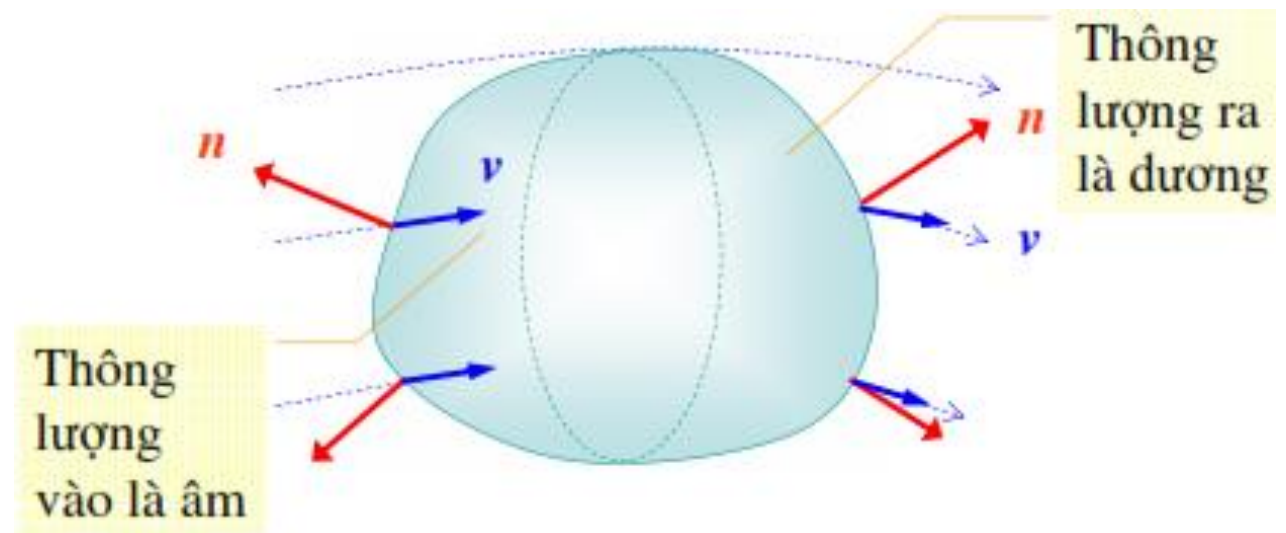
$$d\Phi = v dS \cos \alpha = \vec{v} \cdot \vec{n} dS$$

- $\vec{v}, \vec{n}$ là vecto vận tốc và pháp vecto trên dS .
- Thông lượng qua cả mặt cong (S) sẽ là tổng thông lượng qua tất cả các phần dS :

$$\Phi = \int d\Phi = \int_{(S)} \vec{v} \cdot \vec{n} dS$$

VÍ DỤ VỀ THÔNG LƯỢNG DÒNG NƯỚC

- Nếu mặt (S) là một mặt kín thì ta quy ước chọn n hướng ra ngoài mặt (S).
- Do đó thông lượng nước qua một mặt kín = lưu lượng nước đi ra ở một bên trừ đi lưu lượng nước đi vào ở phía bên kia.



Thông lượng điện trường – Định nghĩa

- Tương tự, chúng ta cũng định nghĩa thông lượng điện trường qua một mặt (S) bất kỳ là:

$$\Phi = \int d\Phi = \int_{(S)} \vec{E} \cdot \vec{n} dS$$

- với ***E , n là vecto điện trường và pháp vecto trên dS .***
- Điện thông cũng là số đại số.
- Đối với mặt (S) kín, pháp vecto cũng được chọn hướng ra ngoài.

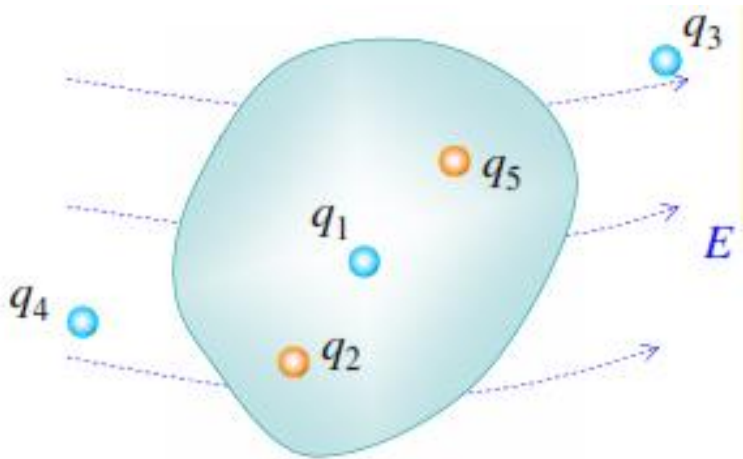
Thông lượng điện trường – Ý nghĩa

- Điện thông qua mặt dS vuông góc với điện trường là $d\Phi = EdS$,
- $d\Phi =$ số đường sức đi qua dS .
- Do đó điện thông Φ qua (S) bằng tổng số đường sức qua (S).
- $\Phi > 0$ khi các đường sức đi theo chiều của pháp vectơ,
- $\Phi < 0$ khi chúng theo chiều ngược lại.
- Φ qua một mặt kín = số đường sức đi ra trừ số đường sức đi vào.

Định luật Gauss

- Điện thông qua một mặt kín (S) bằng tổng các điện tích bên trong (S) chia cho ϵ_0

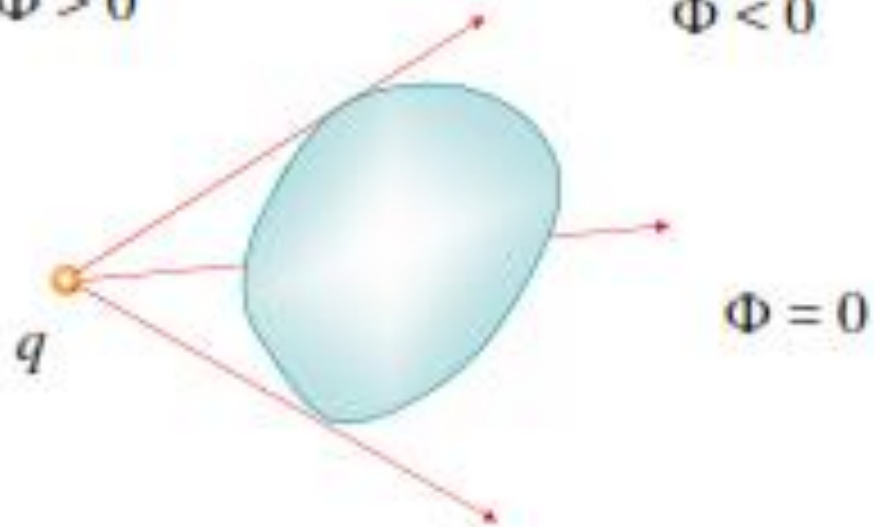
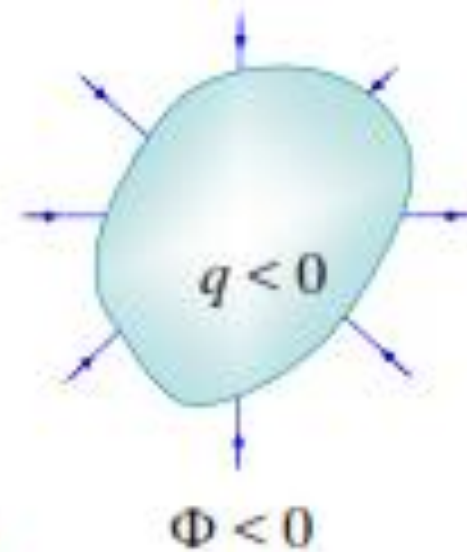
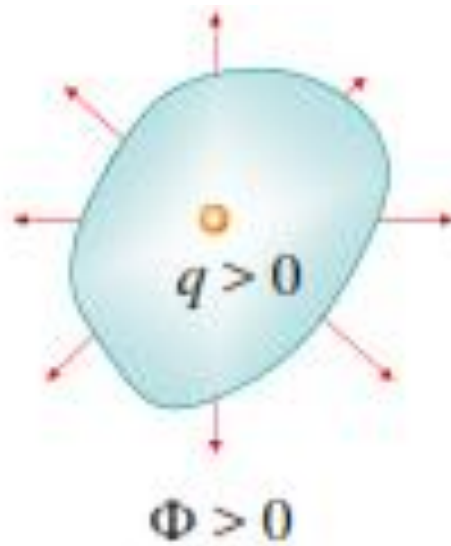
$$\Phi_S = \oint_{(S)} \vec{E} \cdot \vec{n} dS = \frac{Q_{in}}{\epsilon_0}$$



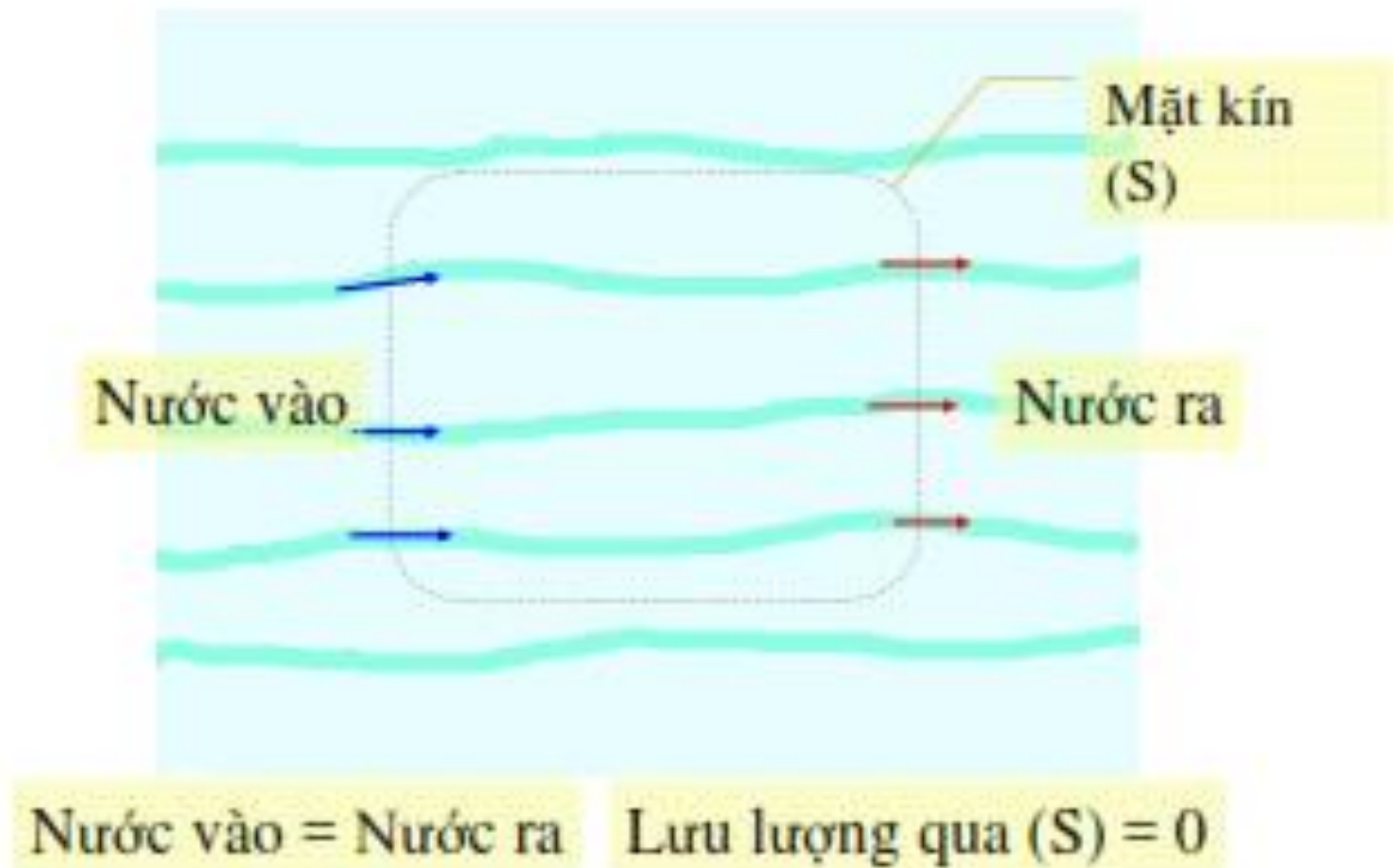
$$Q_{in} = q_2 + q_5 - q_1$$

Điện trường do tất cả các điện tích có mặt tạo ra, nhưng chỉ các điện tích bên trong (S) mới đóng góp vào điện thông qua (S). **Tại sao?**

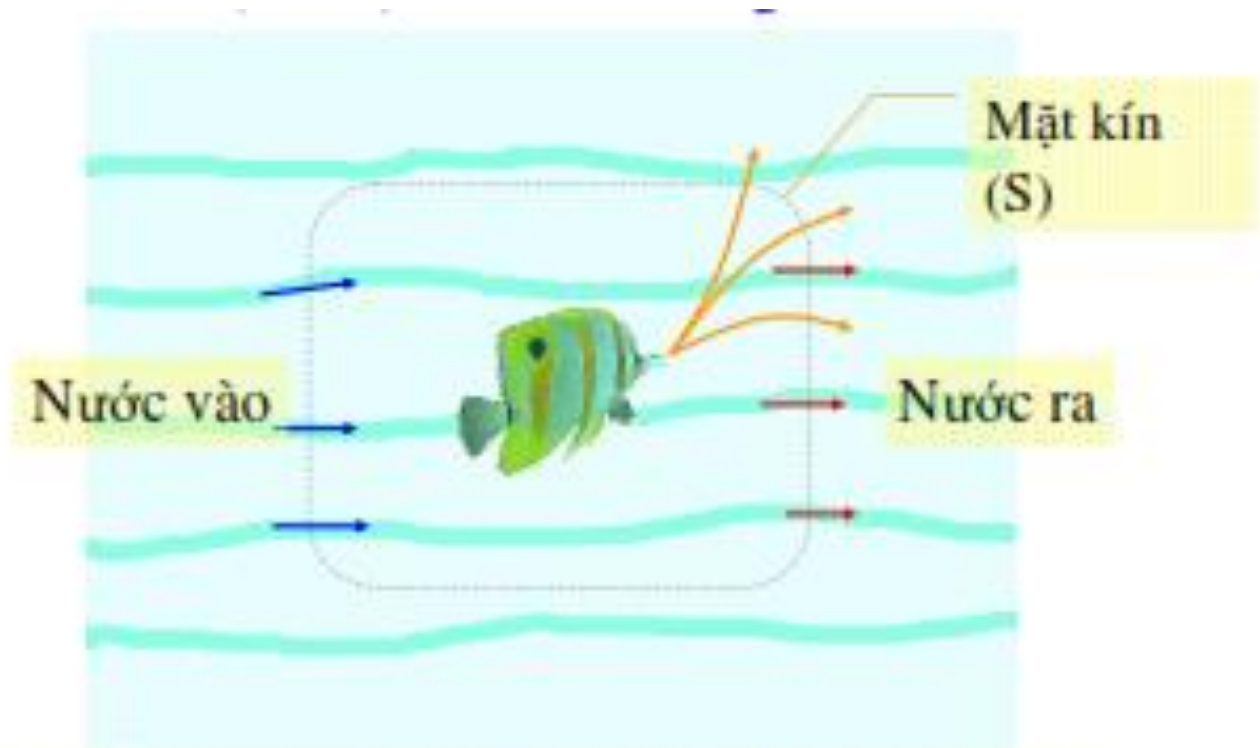
Định luật Gauss



Định luật Gauss – dòng nước:



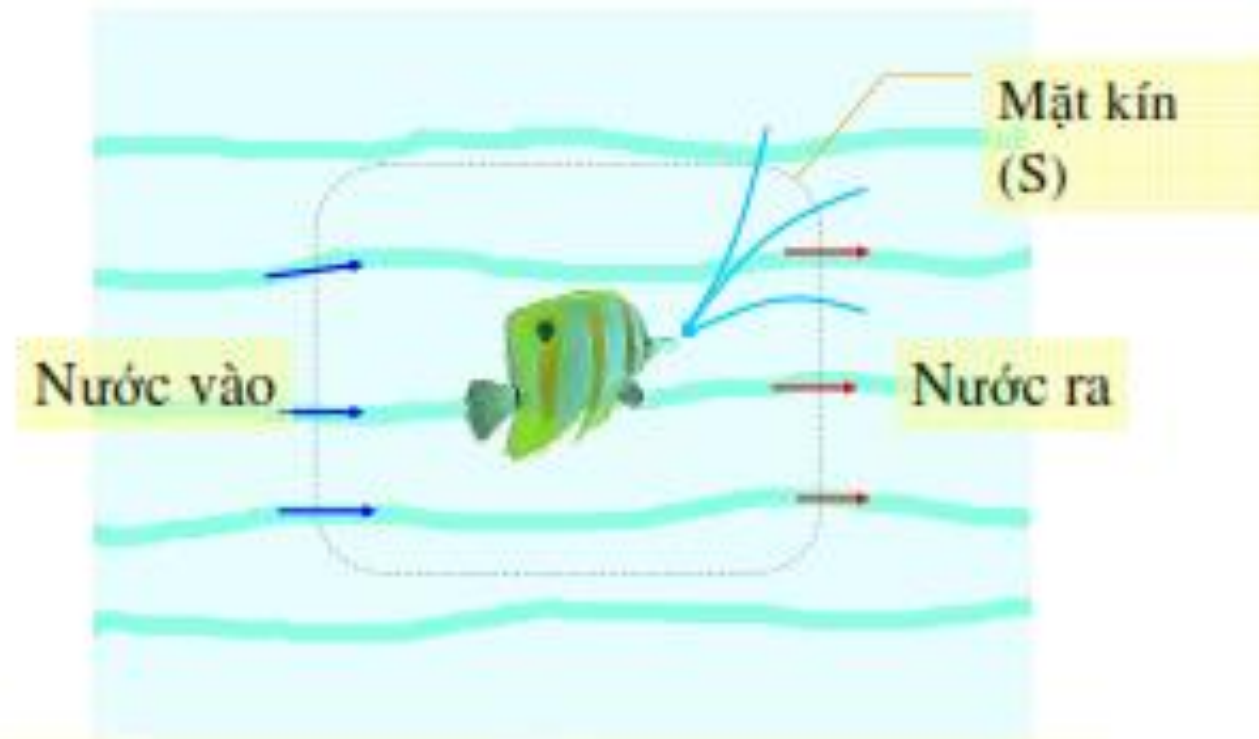
Định luật Gauss – dòng nước:



Nước vào < Nước ra Lưu lượng qua (S) > 0

Cá phun nước ~ điện tích dương

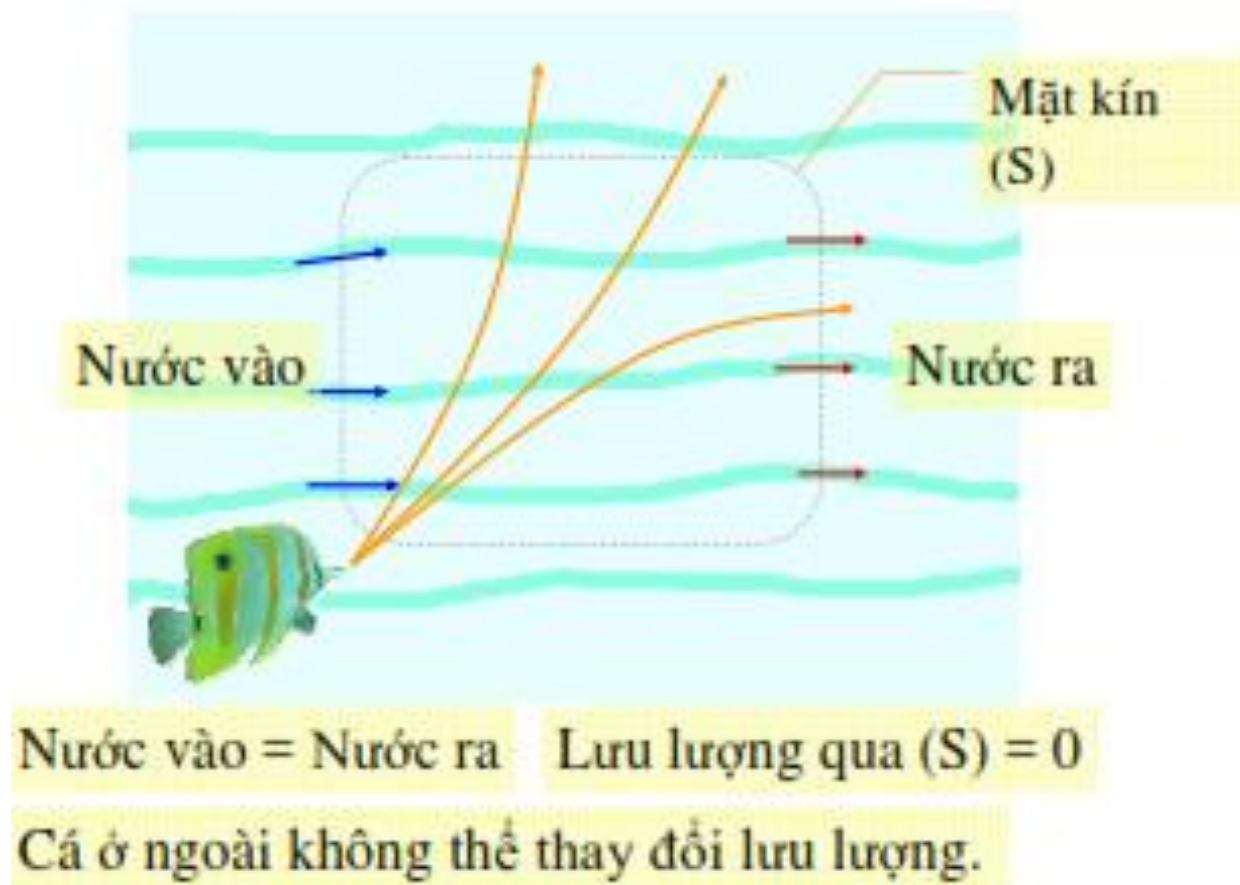
Định luật Gauss – dòng nước:



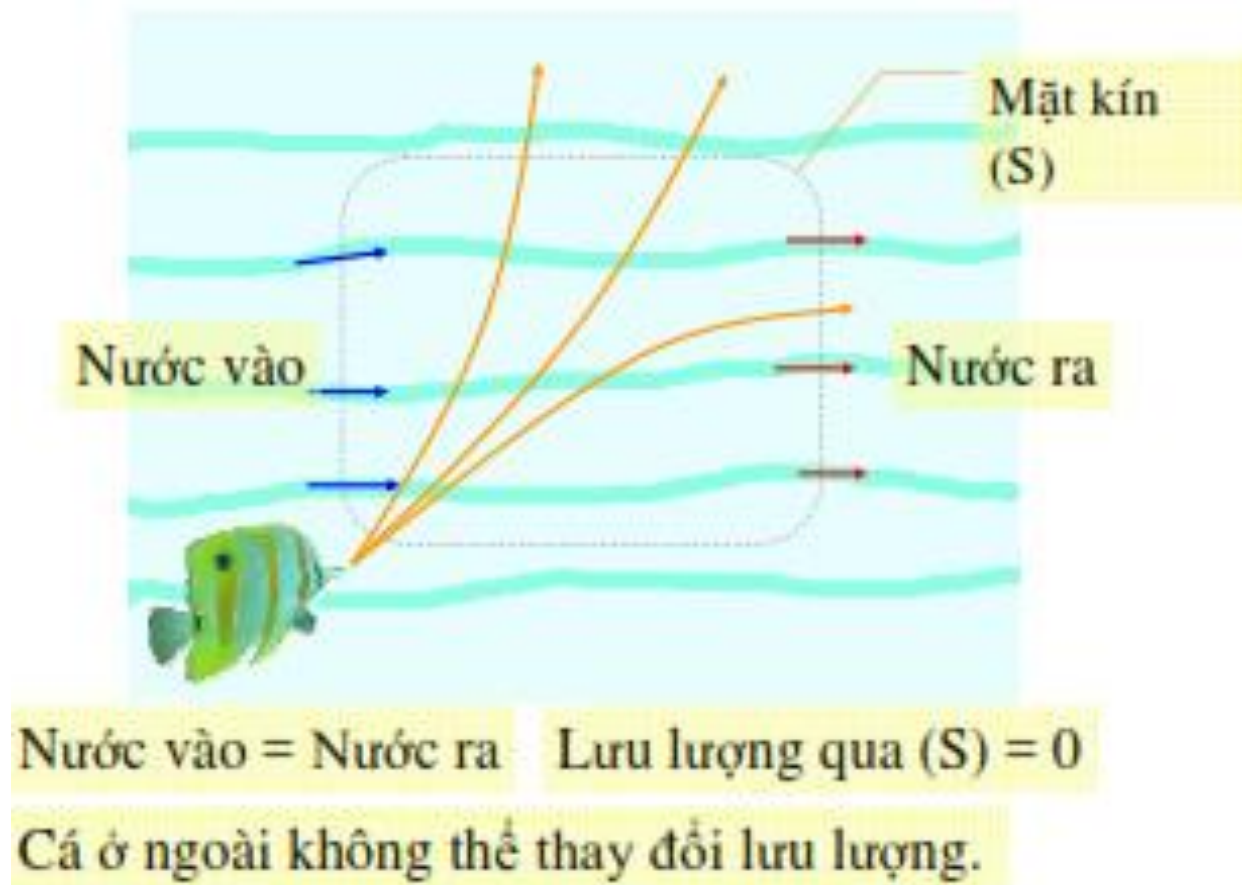
Nước vào > Nước ra Lưu lượng qua (S) < 0

Cá uống nước ~ điện tích âm

Định luật Gauss – dòng nước:

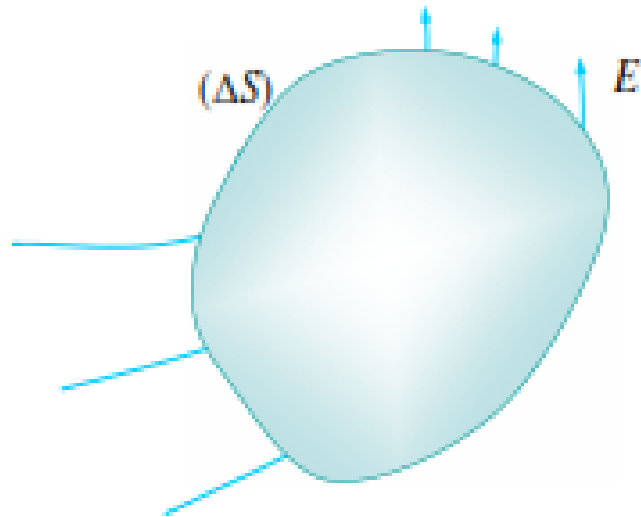


Định luật Gauss – dòng nước:



Divergence (div) – định nghĩa

- Xét một mặt kín nhỏ (ΔS) bao quanh một điểm $M(x, y, z)$.
- Thể tích giới hạn bởi mặt kín này là ΔV và điện thông qua (ΔS) là $\Delta\Phi$



Divergence (div) – định nghĩa

- Giới hạn của $\Delta\Phi/\Delta V$ khi (ΔS) tiến rất gần tới M được gọi là divergence của điện trường tại M :

$$\text{div}\vec{E} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta\Phi}{\Delta V}$$

- Như vậy divergence là thông lượng tính trên một đơn vị thể tích trong (ΔS) .

Divergence trong tọa độ Descartes

- Trong tọa độ Descartes $\text{div} \vec{E}$ tại $M(x,y,z)$ có biểu thức:

$$\text{div} \vec{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}$$

- trong đó các đạo hàm riêng được thực hiện ở vị trí $M(x,y,z)$.

Dạng vi phân của định luật Gauss

- Áp dụng định luật Gauss cho (ΔS) , trong đó có chứa điện tích ΔQ :

$$\Delta\Phi = \frac{\Delta Q}{\epsilon_0}$$

- Chia hai vế cho thể tích ΔV trong mặt kín rồi lấy giới hạn khi ΔV tiến tới không:

$$\lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta\Phi}{\Delta V} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta Q}{\Delta V}$$

Mật độ điện tích
ở M

$$\text{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

Ứng dụng định lí O – G:

- B1:** Chọn mặt kín (S) – gọi là mặt Gauss, sao cho việc tính tích phân được đơn giản nhất.
- B2:** Tính thông lượng điện trường gởi qua (S).
- B3:** Tính tổng điện tích chứa trong (S).
- B4:** Thay vào biểu thức của định lí O – G, suy ra đại lượng cần tìm.

Ứng dụng định lí Gauss

- B1:** Chọn mặt kín (S) – gọi là mặt Gauss, sao cho việc tính tích phân được đơn giản nhất.
- B2:** Tính thông lượng điện trường gởi qua (S).
- B3:** Tính tổng điện tích chứa trong (S).
- B4:** Thay vào biểu thức của định lí O – G, suy ra đại lượng cần tìm.

Bài tập 1 – đối xứng trụ

Cho một dây không dẫn điện, dài vô hạn, tích điện đều với mật độ $\lambda > 0$.
Tìm điện trường ở khoảng cách r tính từ trục của dây.

HƯỚNG DẪN

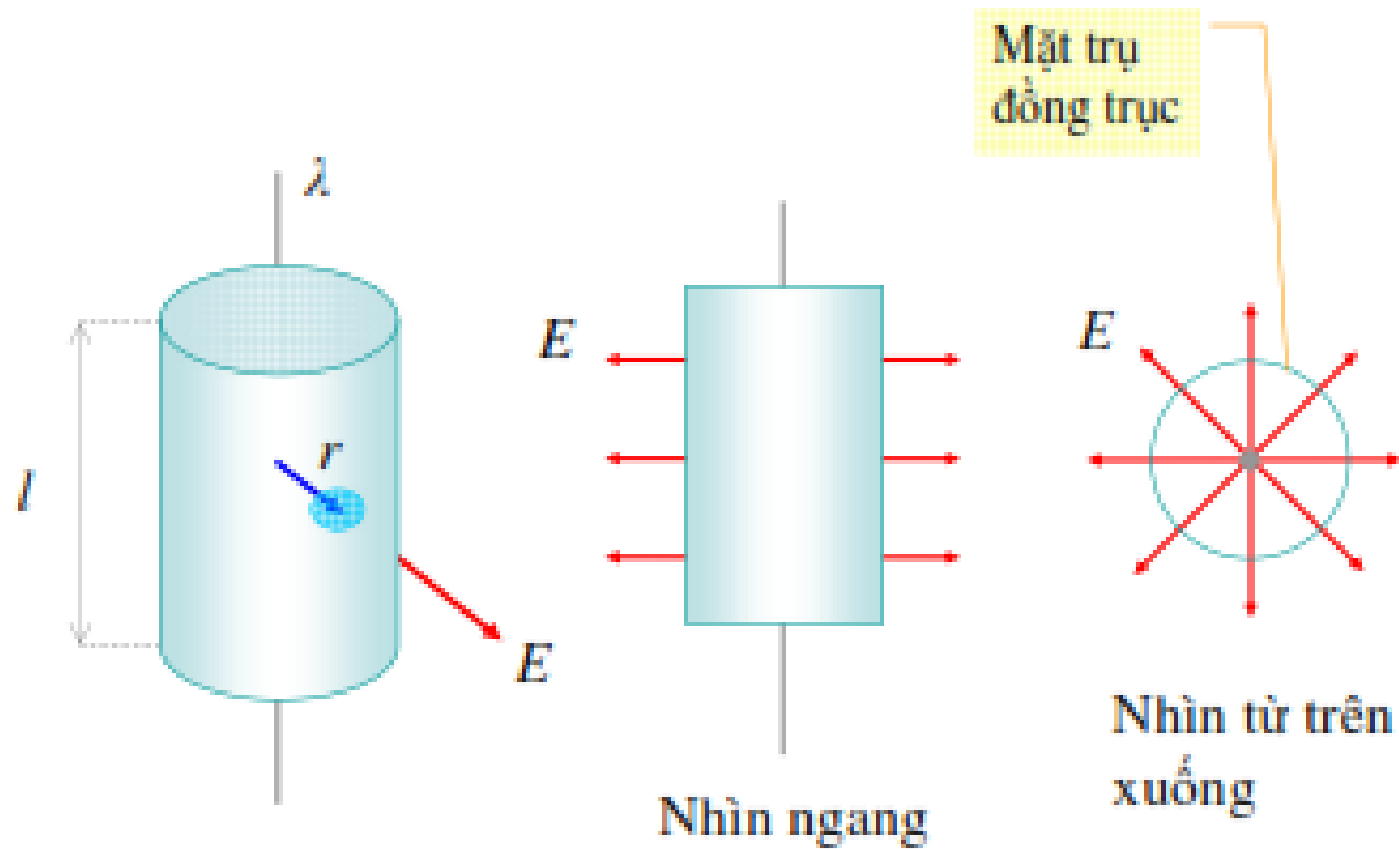
- Dây có tính đối xứng trụ, tức là đối xứng đối với trục của nó.
- Do đó điện trường do dây tạo ra cũng có tính đối xứng trụ.

Bài tập 1 – đối xứng trụ

Do tính đối xứng trụ, điện trường có tính chất như sau:

- Đường sức điện trường là những đường thẳng xuyên tâm trong các mặt phẳng cắt trục đối xứng.
- Xét một mặt trụ đồng trục với dây;
- Điện trường vuông góc với mặt trụ này và có độ lớn không đổi trên đó.

Bài tập 1 – đối xứng trụ



Bài tập 1 – đối xứng trụ

- Xét mặt kín (S) gồm mặt trụ đồng trục với dây, có bán kính r và chiều cao l và hai đáy của nó.
- Điện thông qua (S) bằng điện thông qua mặt bên hình trụ:

$$\Phi = \int E dS = E \cdot 2\pi r l$$

- Mặt khác, theo định luật Gauss thì:

$$\Phi = \frac{Q_{in}}{\epsilon_0} = \frac{\lambda \cdot l}{\epsilon_0}$$

- Do đó:

$$E = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r}$$

Bài tập 2 – đối xứng phẳng

Cho một bản phẳng vô hạn, không dẫn điện, tích điện đều với mật độ $\sigma > 0$. *Xác định điện trường ở khoảng cách r tính từ bản phẳng.*

HƯỚNG DẪN

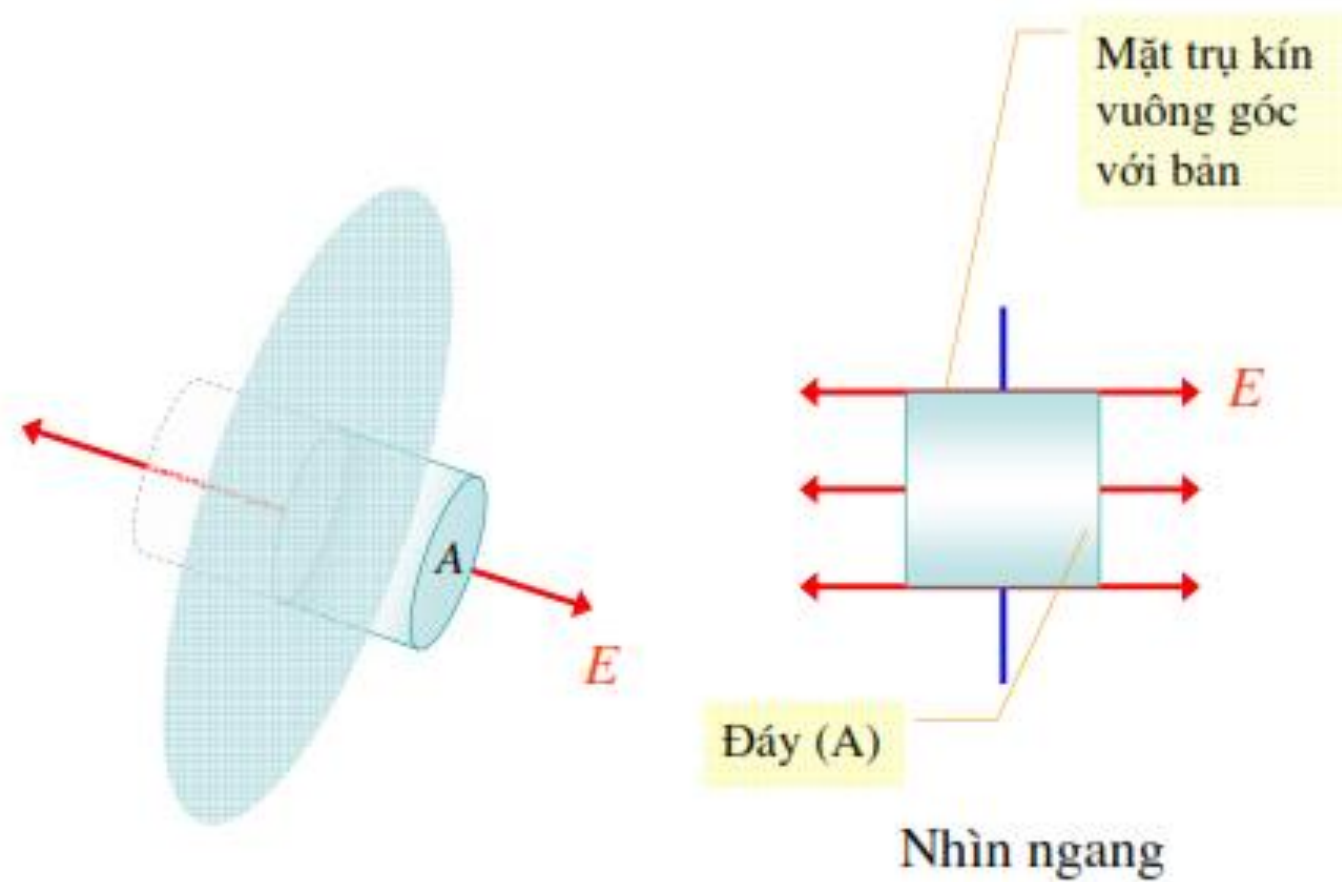
- Hệ có tính đối xứng đối với mặt phẳng đi qua bản tích điện,
- Do đó điện trường do bản tạo ra cũng đối xứng đối với bản phẳng.

Bài tập 2 – đối xứng phẳng

Điện trường này có đặc điểm:

- Đường sức là những đường thẳng song song vuông góc với bản phẳng tích điện, có chiều đối xứng qua bản.
- Trên một mặt phẳng song song với bản thì điện trường có độ lớn không đổi.

Bài tập 2 – đối xứng phẳng



Bài tập 2 – đối xứng phẳng

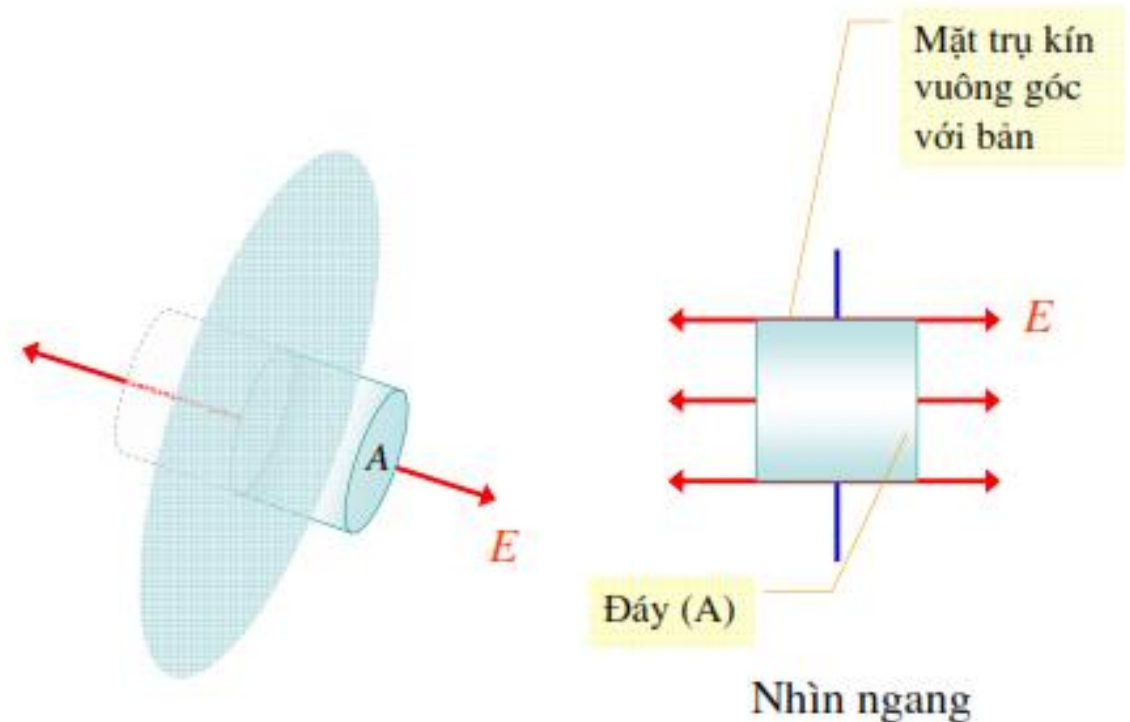
- Xét mặt kín (S) là một mặt trụ vuông góc với bản, nhận bản làm mặt phẳng đối xứng.
- Điện thông qua (S) bằng hai lần điện thông qua mặt đáy (A):

$$\Phi_S = 2 \int_{(A)} \vec{E} \cdot \vec{n} dS = 2E \int_{(A)} dS = 2EA$$

- Mặt khác, theo định luật Gauss thì:

$$\Phi_S = \frac{Q_{in}}{\epsilon_0} = \frac{\sigma A}{\epsilon_0}$$

$$E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$$



Bài tập 3 – đối xứng cầu

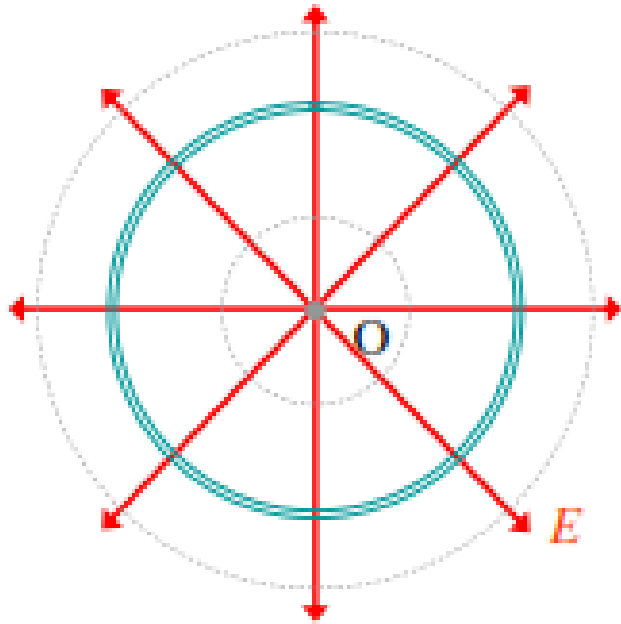
Một vỏ cầu mỏng bán kính R có điện tích $q > 0$ phân bố đều trên bề mặt. Tìm điện trường do vỏ cầu tạo ra ở bên trong và bên ngoài nó.

Nhận xét:

- Hệ có tính đối xứng cầu đối với tâm của vỏ cầu,
- điện trường do hệ tạo ra cũng có tính đối xứng cầu đối với tâm vỏ cầu.

Bài tập 3 – đối xứng cầu

Một vỏ cầu mỏng bán kính R có điện tích $q > 0$ phân bố đều trên bề mặt. Tìm điện trường do vỏ cầu tạo ra ở bên trong và bên ngoài nó.



Đường sức là những đường xuyên tâm.

Trên một mặt cầu tâm O, điện trường có độ lớn không đổi.

Bài tập 3 – đối xứng cầu

- Xét mặt kín (S) là một mặt cầu bán kính r đồng tâm với vỏ cầu. Điện trường trên (S) không đổi nên điện thông qua nó là:

$$\Phi_S = \int_{(S)} \vec{E} \cdot \vec{n} dS = E \int_{(S)} dS = E \cdot 4\pi r^2$$

- Mặt khác theo định luật Gauss thì:

$$\Phi_S = \frac{Q_{in}}{\epsilon_0}$$

- Do đó: $E = \frac{Q_{in}}{4\pi\epsilon_0 r^2}$

- Để tìm Q_{in} chúng ta phân biệt hai trường hợp, khi $r < R$ và $r \geq R$:

$$Q_{in} = \begin{cases} 0 & r < R \\ q & r \geq R \end{cases}$$

Điện trường bên trong một vỏ cầu tích điện đều luôn luôn bằng không.

- Do đó điện trường là:

$$E = \begin{cases} 0 & r < R \\ \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} & r \geq R \end{cases}$$

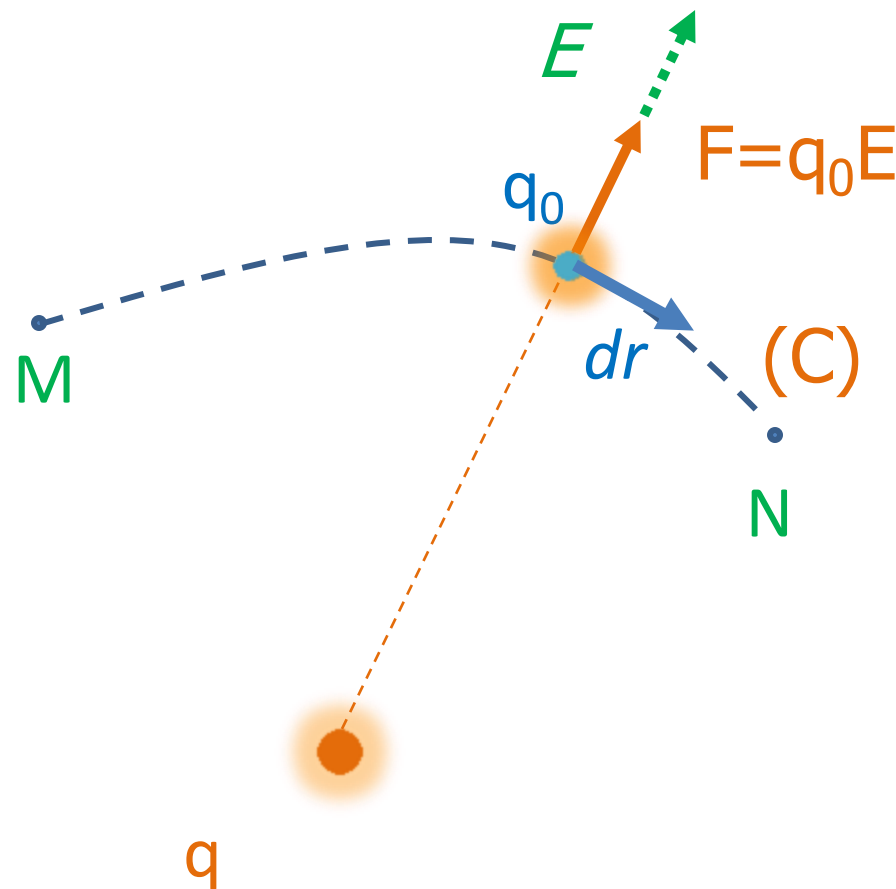
Điện trường bên ngoài một vỏ cầu tích điện đều, điện tích q = điện trường của một điện tích điểm q đặt tại tâm.

Công của lực tĩnh điện

Xét điện tích thử q_0 chuyển động trong điện trường tạo bởi q , từ M đến N, theo đường cong (C).

Công của lực tĩnh điện là:

$$W_{MN} = q_0 \int_{(C)M \rightarrow N} \vec{E} \cdot d\vec{r}$$

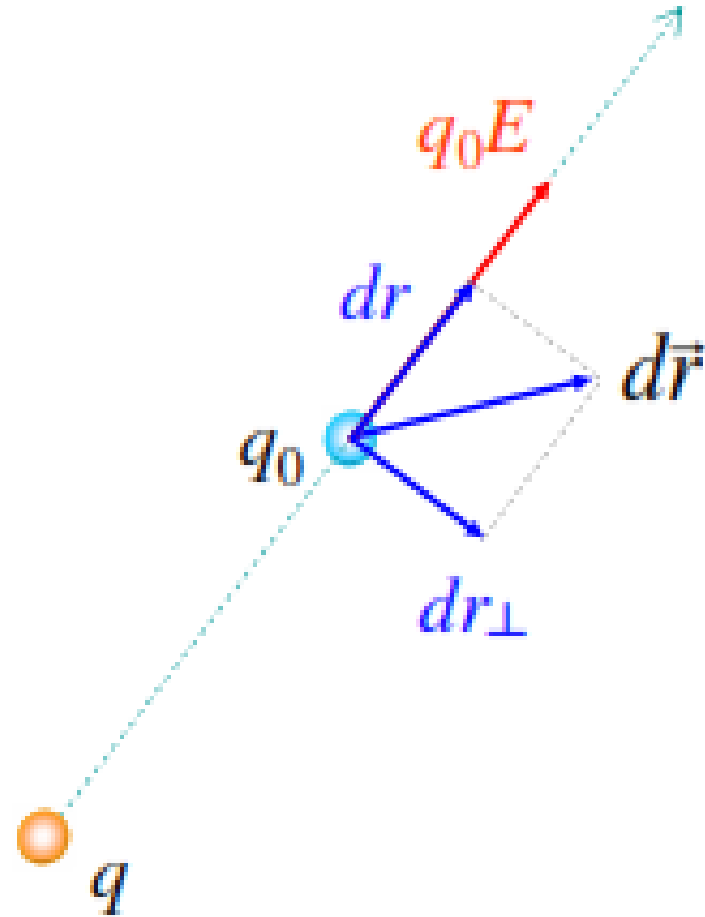


Công của lực tĩnh điện

- Phân tích vectơ dịch chuyển ***dr*** thành hai thành phần vuông góc và song song với điện trường (phương bán kính *r*).
- Chỉ có thành phần song song có đóng góp vào công:

$$\delta W = q_0 \vec{E} \cdot d\vec{r} = q_0 E dr$$

$$\delta W = q_0 k \frac{q}{r^2} dr = k q_0 q \frac{dr}{r^2}$$



Công của lực tĩnh điện

- Ta có thể viết lại biểu thức trên như sau:

$$\delta W = -d\left(k \frac{q_0 q}{r}\right)$$

- Suy ra:
$$W_{MN} = \int \delta W = -\Delta\left(k \frac{q_0 q}{r}\right) = k \frac{q_0 q}{r_M} - k \frac{q_0 q}{r_N}$$

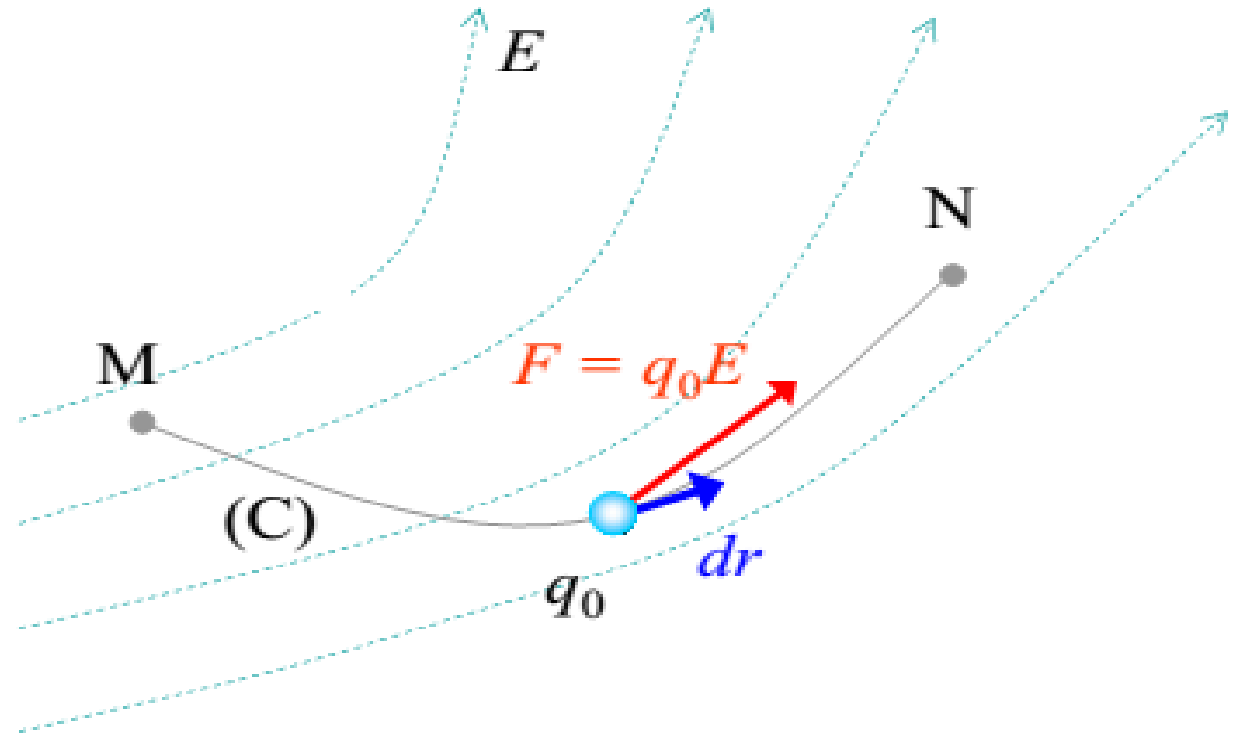
- Công của lực tĩnh điện không phụ thuộc đường đi, chỉ phụ thuộc vị trí đầu và cuối.
- Kết quả trên cũng đúng với một điện trường bất kỳ.

Thế năng tĩnh điện

- Cho điện tích thử q_0 chuyển động trong một điện trường từ M đến N, theo đường cong (C).

- Công của lực tĩnh điện là:

$$W_{MN} = q_0 \int_{(C)M \rightarrow N} \vec{E} \cdot d\vec{r}$$



Thế năng tĩnh điện

- Công của lực tĩnh điện không phụ thuộc đường đi, chỉ phụ thuộc vào vị trí đầu và vị trí cuối.
- Do đó người ta có thể định nghĩa thế năng tĩnh điện U của hệ (điện tích thử + điện trường):

$$U_M - U_N = q_0 \int_M^N \vec{E} \cdot d\vec{r}$$

- U là một hàm của vị trí; tích phân được thực hiện theo một đường cong bất kỳ nối M và N.
- $U_M - U_N = -\Delta U$ là độ giảm thế năng tĩnh điện giữa M và N. Thế năng biến đổi thành công.

Thế năng tĩnh điện

- Nếu chọn thế năng tại một điểm P nào đó bằng không (chọn P làm gốc thế năng) thì thế năng tĩnh điện tại điểm M là:

$$U_M = q_0 \int_M^P \vec{E} \cdot d\vec{r}$$

- Tích phân được thực hiện theo một đường cong bất kỳ nối M và P.

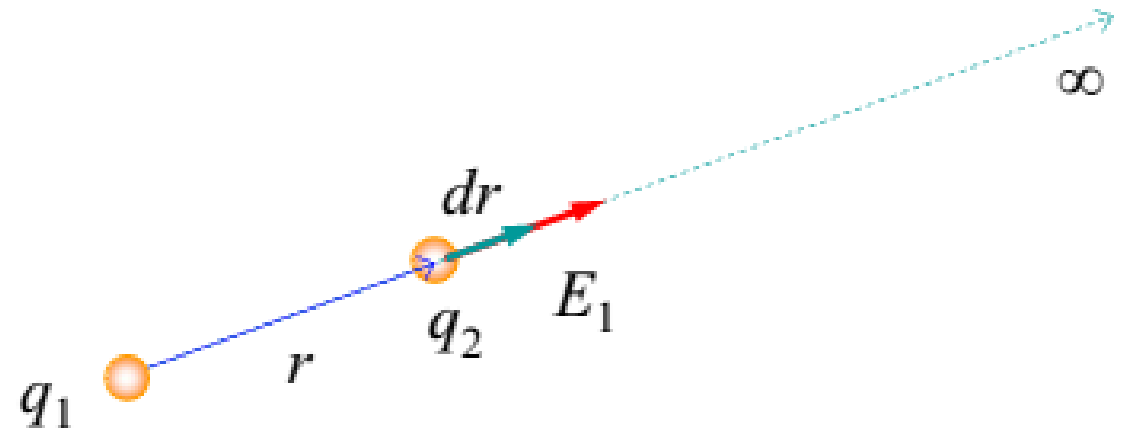
Thế năng của hai điện tích điểm:

- Xét hai điện tích điểm q_1 và q_2 cách nhau một khoảng r .
- Theo công thức trên thế năng tĩnh điện của hệ là:

$$U = q_2 \int_r^{\infty} \vec{E}_1 \cdot d\vec{r}$$

Gốc thế năng ở ∞ , tích phân thực hiện trên đường qua hai điện tích, từ r tới ∞ .

- E_1 là điện trường tạo bởi q_1



Thế năng của hai điện tích điểm:

- Suy ra:

$$U = kq_1q_2 \int_r^{\infty} \frac{\vec{r} \cdot d\vec{r}}{r^3} = kq_1q_2 \int_r^{\infty} \frac{dr}{r^2}$$

$$U = k \frac{q_1q_2}{r}$$

- Để tạo nên một hệ hai điện tích điểm, năng lượng cần cung cấp ít nhất phải bằng thế năng tĩnh điện của hệ.

Thế năng tĩnh điện của một hệ điện tích điểm

- Xét một hệ điện tích điểm bất kỳ.
- năng lượng tĩnh điện của hệ bằng tổng năng lượng tĩnh điện của tất cả các cặp điện tích thuộc hệ.

$$U = \sum_{(i,j)} k \frac{q_i q_j}{r_{ij}}$$

- (i, j) chỉ cặp điện tích q_i, q_j cách nhau một khoảng r_{ij} .
- U là năng lượng tối thiểu cần cung cấp để tạo nên hệ.

Điện thế

- Điện thế tại M được định nghĩa là:

$$V_M = \frac{U_M}{q_0} = \int_M^P \vec{E} \cdot d\vec{r}$$

Đơn vị điện thế là J/C
hay Volt (V)

- Điện thế chỉ phụ thuộc vào điện trường chứ không phụ thuộc vào điện tích thử.
- Độ giảm điện thế giữa hai vị trí M và N trong điện trường là:

$$V_M - V_N = -\Delta V = \int_M^N \vec{E} \cdot d\vec{r}$$

Điện thế tạo bởi một điện tích điểm

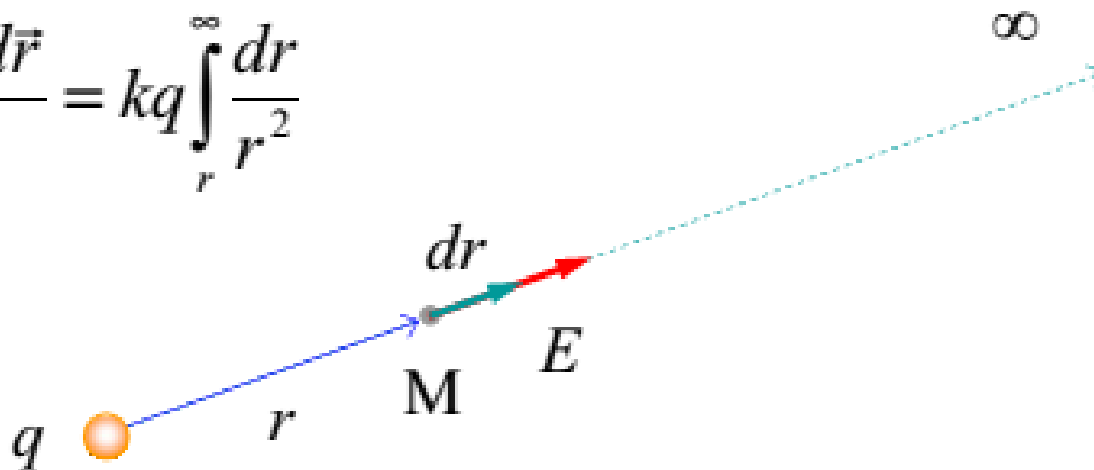
- Điện trường do điện tích điểm q tạo ra:

$$\vec{E} = k \frac{q\vec{r}}{r^3}$$

- Nếu gốc thế năng P ở vô cùng và đường lấy tích phân là đường thẳng thì:

$$V_M = kq \int_M^P \frac{\vec{r} \cdot d\vec{r}}{r^3} = kq \int_r^\infty \frac{dr}{r^2}$$

$$V_M = k \frac{q}{r}$$



Điện thế tạo bởi hệ điện tích điểm

- Điện thế tạo bởi một hệ điện tích điểm bằng tổng điện thế của tất cả các điện tích điểm thuộc hệ.
- Nếu hệ là một phân bố điện tích liên tục, ta chia hệ làm nhiều phần nhỏ vi phân, sao cho mỗi phần được coi như một điện tích điểm.
- Tổng sẽ được thay thế bằng tích phân.

Tìm điện trường từ điện thế

- Độ giảm điện thế giữa hai điểm rất gần nhau:

$$-dV = \vec{E} \cdot d\vec{r} = E_x dx + E_y dy + E_z dz$$

- Mặt khác ta có:

$$dV = \frac{\partial V}{\partial x} dx + \frac{\partial V}{\partial y} dy + \frac{\partial V}{\partial z} dz = \text{grad} V \cdot d\vec{r}$$

- Suy ra:

$$\vec{E} = -\text{grad} V$$

$$E_x = -\frac{\partial V}{\partial x}, \quad E_y = -\frac{\partial V}{\partial y}, \quad E_z = -\frac{\partial V}{\partial z}$$

Mặt đẳng thế

- Mặt đẳng thế là tập hợp các điểm có cùng một điện thế trong điện trường.

$$V(x, y, z) = \text{const}$$

- Ví dụ, mặt đẳng thế trong điện trường do một điện tích điểm q tạo ra là các mặt cầu có tâm đặt tại q :

$$V = k \frac{q}{r} = \text{const} \Leftrightarrow r = \text{const}$$

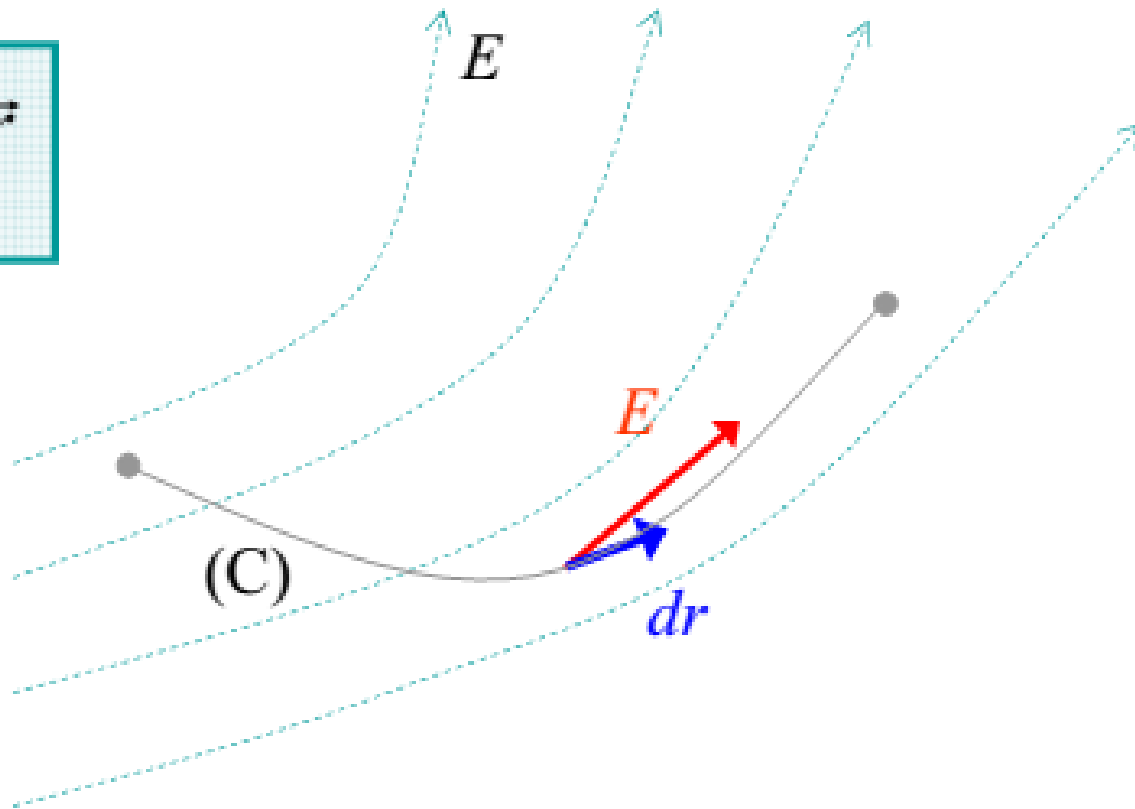
Tính chất

- Điện trường vuông góc với mặt đẳng thế,
- và hướng theo chiều giảm của điện thế.
- Khi một điện tích điểm dịch chuyển trên một mặt đẳng thế thì công của lực tĩnh điện bằng không.

Lưu số của trường tĩnh điện

- Cho một đường cong (C) trong không gian có điện trường, lưu số của điện trường trên (C) được định nghĩa là:

$$\Gamma_C = \int_{(C)} \vec{E} \cdot d\vec{r}$$



Lưu số của trường tĩnh điện

- Công thực hiện khi điện tích dịch chuyển trên một đường kín (C) thì bằng không.

$$q_0 \oint_{(C)} \vec{E} \cdot d\vec{r} = 0$$

- Vậy lưu số điện trường theo một đường kín luôn luôn bằng không:

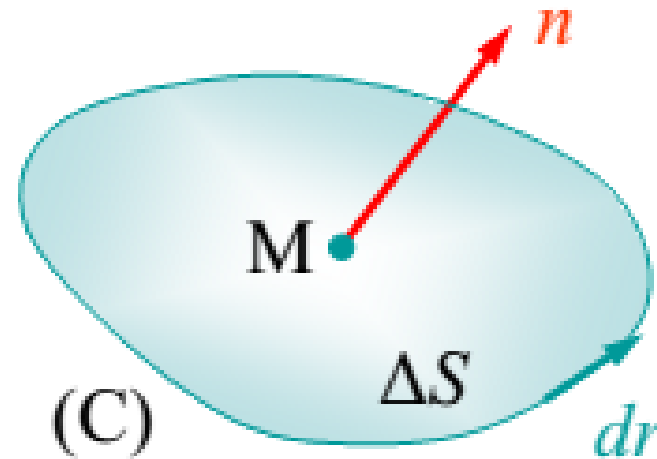
$$\oint_{(C)} \vec{E} \cdot d\vec{r} = 0$$

- Trường tĩnh điện là một *trường không có xoáy*: đường sức không khép kín.

Định nghĩa

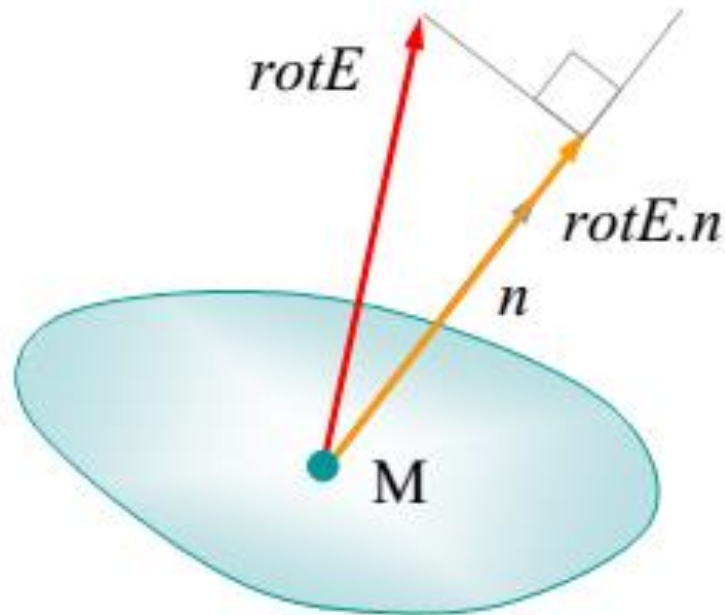
- Xét một đường cong kín (C) nhỏ bao quanh một điểm $M(x, y, z)$.
- Gọi diện tích giới hạn trong (C) là ΔS , *pháp vectơ* của mặt phẳng trong (C) là $\vec{n}$, và *lưu số của điện trường* trên (C) là $\Delta \Gamma$.
- Rotation của điện trường ở M, ký hiệu là $\text{rot} \vec{E}$, được định nghĩa như sau:

$$\text{rot} \vec{E} \cdot \vec{n} = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta \Gamma}{\Delta S}$$



Tính chất

- Hình chiếu của $\text{rot}E$ trên một phương n là:
- Mật độ lưu số trên một đường khép kín nhỏ vuông góc với phương đó.



Tính chất

- Đối với trường tĩnh điện thì lưu số trên một đường kín luôn luôn bằng không, nên:

$$\text{rot} \vec{E} = 0$$

- Người ta chứng tỏ được là $\text{rot} E$ có dạng:

$$\begin{aligned} \text{rot} \vec{E} = & \vec{i} \left(\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} \right) + \vec{j} \left(\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} \right) \\ & + \vec{k} \left(\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \right) \end{aligned}$$

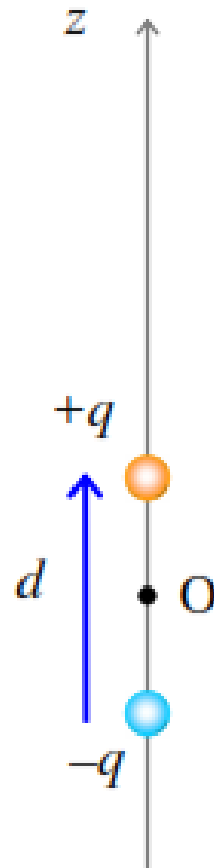
Bài tập về lưỡng cực điện

Lưỡng cực điện là một hệ gồm hai điện tích điểm $+q$ và $-q$, đặt cách nhau một khoảng d .

Chọn trục z là trục đi qua hai điện tích điểm và đặt gốc tọa độ O ở điểm giữa của chúng.

Định nghĩa vector momen lưỡng cực điện: $\vec{p} = q\vec{d}$

Vector $\vec{d}$ hướng từ $-q$ đến $+q$.

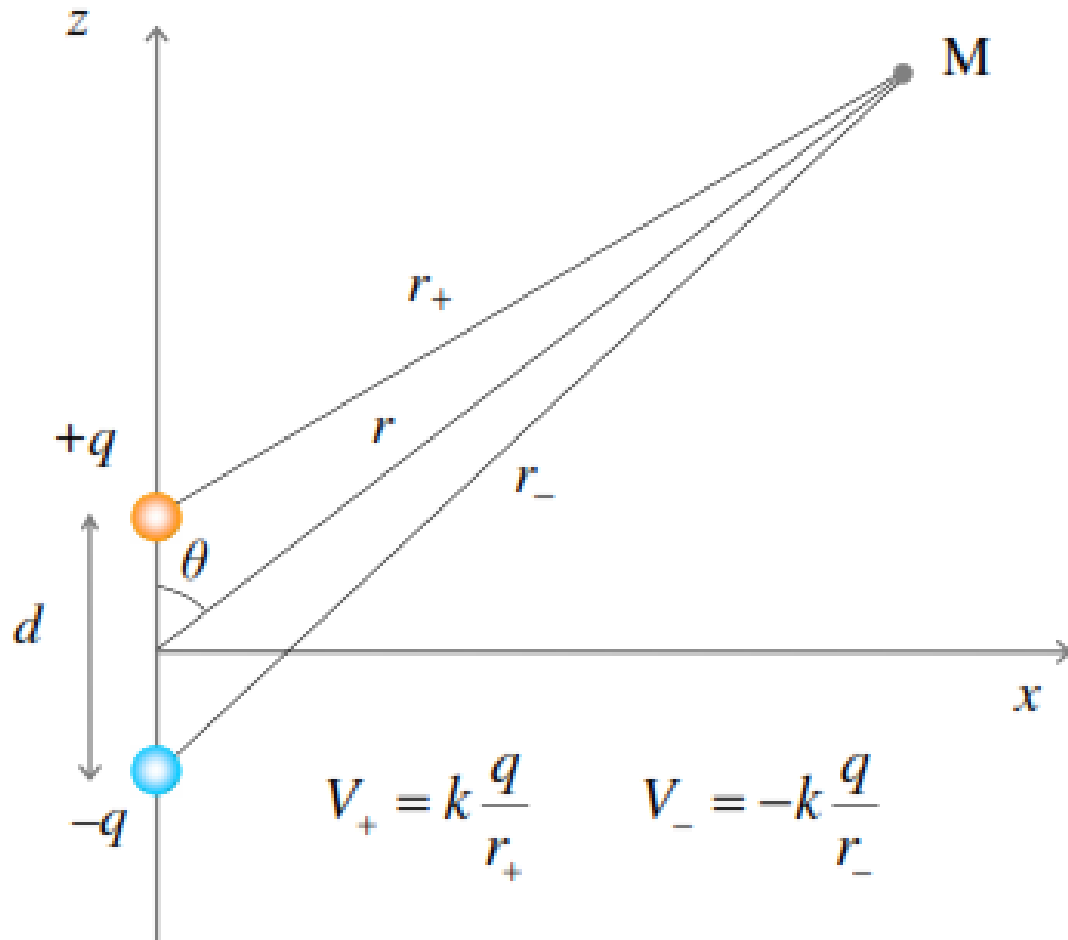


Hãy tìm:

(a) Điện thế do lưỡng cực điện tạo ra ở khoảng cách r lớn hơn nhiều so với d . Viết kết quả thu được qua momen lưỡng cực điện.

(b) Điện trường từ biểu thức của điện thế.

Bài tập về lưỡng cực điện



- Điện thế ở điểm $M(r, \theta)$:

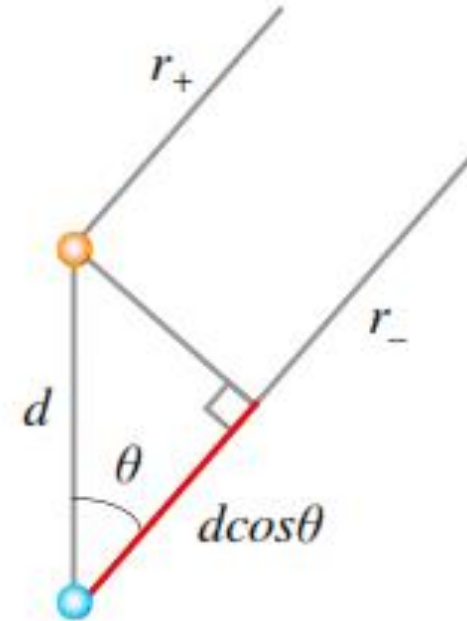
$$V = kq \left(\frac{1}{r_+} - \frac{1}{r_-} \right) = kq \left(\frac{r_- - r_+}{r_+ r_-} \right)$$

- Khi $r \gg d$ ta có gần đúng:

$$r_- - r_+ \approx d \cos \theta \quad r_+ r_- \approx r^2$$

- Suy ra:

$$V = kq \frac{d \cos \theta}{r^2} = k \frac{p \cos \theta}{r^2}$$



- Trở lại tọa độ Descartes:

$$r^2 = x^2 + z^2 \quad \cos \theta = z/r$$

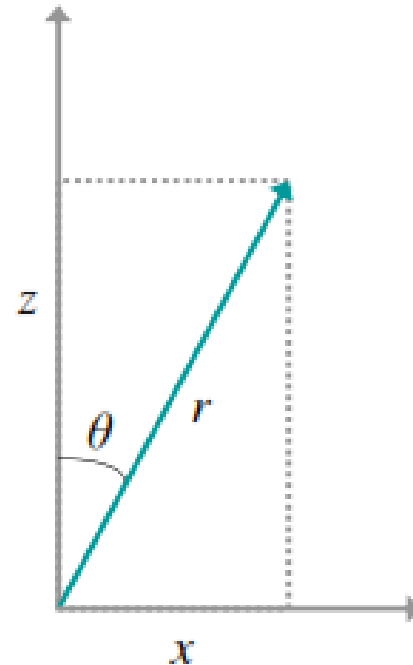
- Suy ra:

$$V = kp \frac{z}{r^3} = kp \frac{z}{(x^2 + z^2)^{3/2}}$$

- Vậy:

$$E_x = -\frac{\partial V}{\partial x} = 3kp \frac{xz}{r^5}$$

$$E_z = -\frac{\partial V}{\partial z} = kp \frac{3z^2 - r^2}{r^5}$$



- Suy ra độ lớn của điện trường:

$$E = \sqrt{E_x^2 + E_z^2} = \frac{kp}{r^4} \sqrt{r^2 + 3z^2}$$

$$E = \frac{kp}{r^3} \sqrt{1 + 3\cos^2 \theta}$$

Đặt một lưỡng cực điện có momen lưỡng cực p trong một điện trường đều E . Hãy tìm:

- (a) Thế năng tĩnh điện của lưỡng cực điện.
- (b) Momen lực tĩnh điện tác động lên lưỡng cực điện.

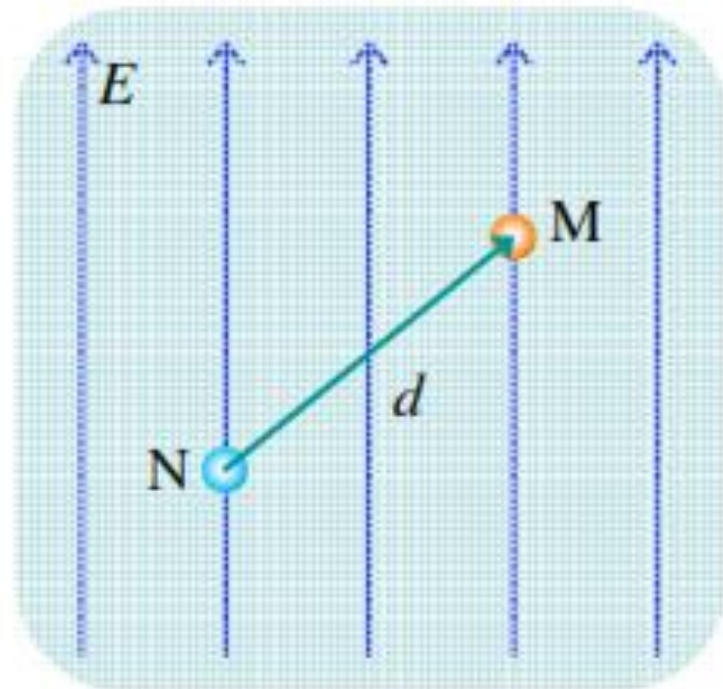
- Thế năng tĩnh điện:

$$U = qV_M - qV_N = q(V_M - V_N) = -q \int_N^M \vec{E} \cdot d\vec{r}$$

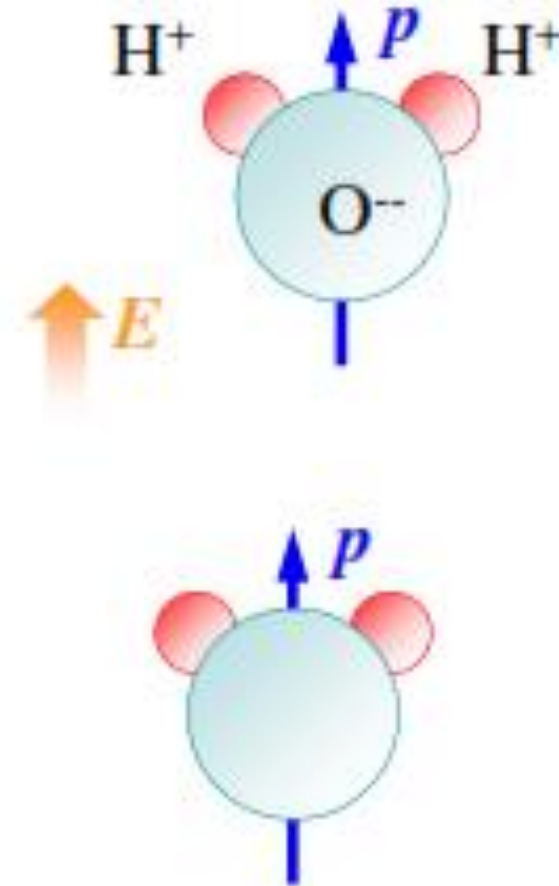
$$U = -q\vec{E} \cdot \int_N^M d\vec{r} = -q\vec{E} \cdot \vec{d}$$

$$U = -\vec{p} \cdot \vec{E}$$

- Thế năng này cực tiểu khi momen lưỡng cực điện song song cùng chiều với điện trường ngoài.



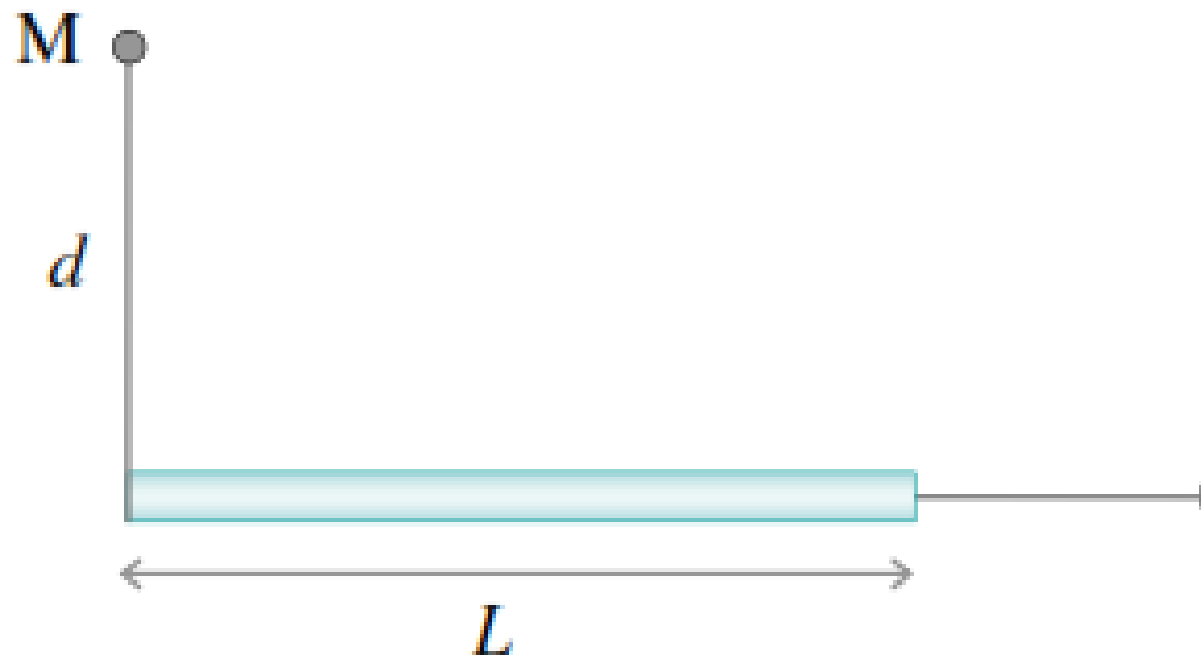
- Các phân tử nước trong thức ăn là những lưỡng cực điện.
- Trong một điện trường xoay chiều (tần số radio), các phân tử nước dao động để luôn luôn định hướng momen lưỡng cực của chúng theo điện trường.
- Sự ma sát giữa chúng với môi trường chung quanh tạo nên nhiệt làm chín thức ăn.



E.

Bài 3

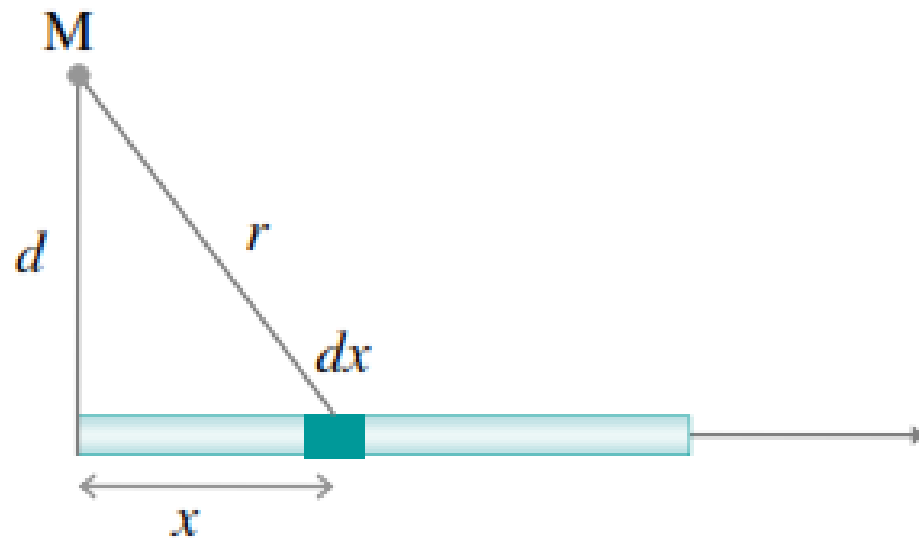
- Một dây không dẫn điện, chiều dài L được tích điện đều với mật độ $\lambda > 0$. Tìm điện thế do thanh tạo ra ở điểm M cách dây một khoảng d , nằm trên đường đi qua một đầu dây và vuông góc với dây.



Bài 3

- Điện thế do một đoạn vi phân dx ở tọa độ x tạo ra ở M:

$$dV = k \frac{dq}{r} = k \frac{\lambda dx}{\sqrt{x^2 + d^2}}$$



- Điện thế toàn phần ở M:

$$V = \int dV = k\lambda \int_0^L \frac{dx}{\sqrt{x^2 + d^2}}$$

$$V = k\lambda \left[\ln(x + \sqrt{x^2 + d^2}) \right]_0^L$$

$$V = k\lambda \ln \left(\frac{L + \sqrt{L^2 + d^2}}{d} \right)$$

Derivatives and Integrals

$$\frac{d}{dx} \sin x = \cos x$$

$$\frac{d}{dx} \cos x = -\sin x$$

$$\frac{d}{dx} e^x = e^x$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \ln(x + \sqrt{x^2 + a^2})$$

$$\int \frac{x dx}{(x^2 + a^2)^{3/2}} = -\frac{1}{(x^2 + a^2)^{1/2}}$$

$$\int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^{3/2}} = \frac{x}{a^2(x^2 + a^2)^{1/2}}$$

$$\int \sin x dx = -\cos x$$

$$\int \cos x dx = \sin x$$

$$\int e^x dx = e^x$$

Hai quả cầu kim loại bán kính $a = 5 \text{ cm}$ và $b = 2 \text{ cm}$ được đặt cách xa nhau một khoảng lớn hơn nhiều so với a , chúng được nối với nhau bằng một dây dẫn nhỏ. Lúc đầu hai quả cầu không tích điện và công tắc trên dây nối được mở. Sau đó người ta chuyển một điện tích $Q = 70 \times 10^{-9} \text{ C}$ lên một trong hai quả cầu rồi đóng công tắc lại. Sau khi hai quả cầu đạt cân bằng tĩnh điện, tính điện tích Q_a và Q_b của chúng.

Một điện tích $Q = 3 \text{ C}$ được đặt ở tâm của hai vỏ cầu dẫn điện đồng tâm. Vỏ cầu bên ngoài có bán kính $b = 3 \text{ m}$ được nối đất. Vỏ cầu bên trong có bán kính $a = 1 \text{ m}$ và điện tích toàn phần $Q_A = -1 \text{ C}$. Xét điểm P ở cách tâm một khoảng 2 m .

(a) Tìm điện tích ở mặt ngoài của vỏ cầu A.

(b) Tìm điện tích toàn phần trên vỏ cầu B.

(c) Tìm hiệu điện thế $\Delta V = V_A - V_B$ giữa hai vỏ cầu.

CÂU 4

In fig. 22-54, a nonconducting rod of length $L = 8.15$ cm has a charge $-q = -4.23$ fC uniformly distributed along its length. (a) What is the linear charge density of the rod? What are the (b) magnitude and (c) direction (relative to the positive direction of the x axis) of the electric field produced at point P , at distance $a = 12.0$ cm from the rod? What is the electric field magnitude produced at distance $a = 50$ m by (d) the rod and (e) a particle of charge $-q = -4.23$ fC that we use to replace the rod? (At that distance, the rod “looks” like a particle.)

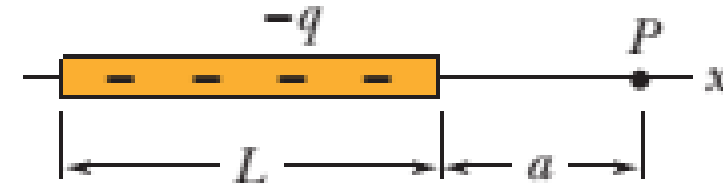


Figure 22-54 Problem 31.

CÂU 4

THINK Our system is a non-conducting rod with uniform charge density. Since the rod is an extended object and not a point charge, the calculation of electric field requires an integration.

EXPRESS The linear charge density λ is the charge per unit length of rod. Since the total charge is uniformly distributed on the rod of length L , we have $\lambda = q/L$. To calculate the electric at the point P shown in the figure, we position the x -axis along the rod with the origin at the left end of the rod, as shown in the diagram below.

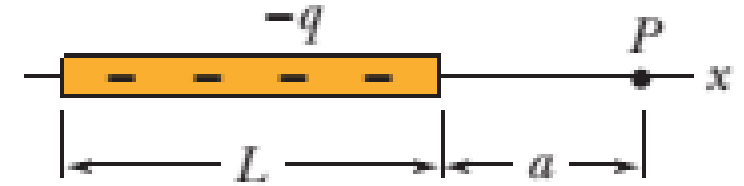
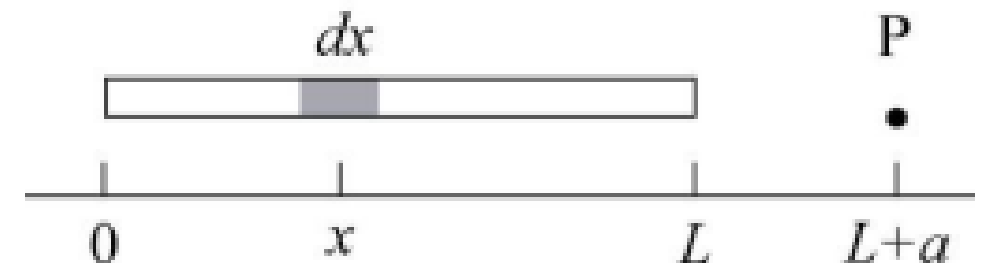


Figure 22-54 Problem 31.



CÂU 4

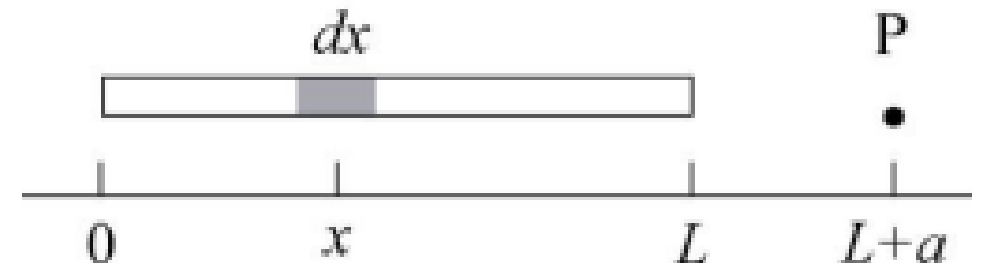
Let dx be an infinitesimal length of rod at x . The charge in this segment is $dq = \lambda dx$. The charge dq may be considered to be a point charge. The electric field it produces at point P has only an x component and this component is given by

$$dE_x = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda dx}{(L+a-x)^2}.$$

The total electric field produced at P by the whole rod is the integral

$$\begin{aligned} E_x &= \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \int_0^L \frac{dx}{(L+a-x)^2} = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{L+a-x} \Big|_0^L = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{L+a} \right) \\ &= \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \frac{L}{a(L+a)} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{a(L+a)}, \end{aligned}$$

upon substituting $-q = \lambda L$.



CÂU 4

ANALYZE (a) With $q = 4.23 \times 10^{-15}$ C, $L = 0.0815$ m, and $a = 0.120$ m, the linear charge density of the rod is

$$\lambda = \frac{-q}{L} = \frac{-4.23 \times 10^{-15} \text{ C}}{0.0815 \text{ m}} = -5.19 \times 10^{-14} \text{ C/m}.$$

(b) Similarly, we obtain

$$E_x = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{a(L+a)} = -\frac{(8.99 \times 10^9 \text{ N}\cdot\text{m}^2/\text{C}^2)(4.23 \times 10^{-15} \text{ C})}{(0.120 \text{ m})(0.0815 \text{ m} + 0.120 \text{ m})} = -1.57 \times 10^{-3} \text{ N/C},$$

or $|E_x| = 1.57 \times 10^{-3} \text{ N/C}$.

(c) The negative sign in E_x indicates that the field points in the $-x$ direction, or -180° counterclockwise from the $+x$ axis.

(d) If a is much larger than L , the quantity $L + a$ in the denominator can be approximated by a , and the expression for the electric field becomes

CÂU 4

$$E_x = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0 a^2}.$$

Since $a = 50 \text{ m} \gg L = 0.0815 \text{ m}$, the above approximation applies and we have $E_x = -1.52 \times 10^{-8} \text{ N/C}$, or $|E_x| = 1.52 \times 10^{-8} \text{ N/C}$.

(e) For a particle of charge $-q = -4.23 \times 10^{-15} \text{ C}$, the electric field at a distance $a = 50 \text{ m}$ away has a magnitude $|E_x| = 1.52 \times 10^{-8} \text{ N/C}$.

LEARN At a distance much greater than the length of the rod ($a \gg L$), the rod can be effectively regarded as a point charge $-q$, and the electric field can be approximated as

$$E_x \approx \frac{-q}{4\pi\epsilon_0 a^2}.$$

CÂU 4

In Fig. 22-55, positive charge $q = 7.81 \text{ pC}$ is spread uniformly along a thin nonconducting rod of length $L = 14.5 \text{ cm}$. What are the (a) magnitude and (b) direction (relative to the positive direction of the x axis) of the electric field produced at point P , at distance $R = 6.00 \text{ cm}$ from the rod along its perpendicular bisector?

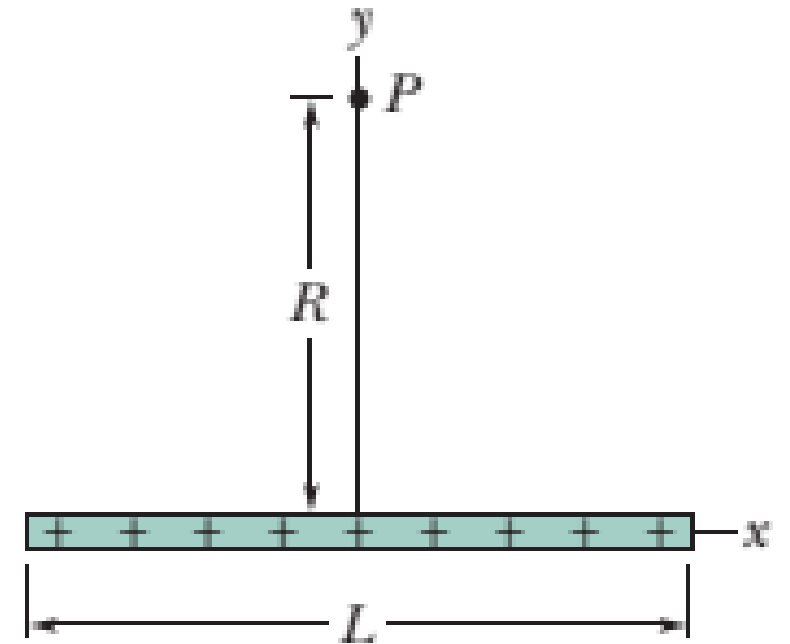


Figure 22-55 Problem 32.

CÂU 5

We assume $q > 0$. Using the notation $\lambda = q/L$ we note that the (infinitesimal) charge on an element dx of the rod contains charge $dq = \lambda dx$. By symmetry, we conclude that all horizontal field components (due to the dq 's) cancel and we need only “sum” (integrate) the vertical components. Symmetry also allows us to integrate these contributions over only half the rod ($0 \leq x \leq L/2$) and then simply double the result. In that regard we note that $\sin \theta = R/r$ where

$$r = \sqrt{x^2 + R^2}$$

(a) Using Eq. 22-3 (with the 2 and $\sin \theta$ factors just discussed) the magnitude is

$$|\vec{E}| = 2 \int_0^{L/2} \left(\frac{dq}{4\pi\epsilon_0 r^2} \right) \sin \theta = \frac{2}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{L/2} \left(\frac{\lambda dx}{x^2 + R^2} \right) \left(\frac{y}{\sqrt{x^2 + R^2}} \right)$$

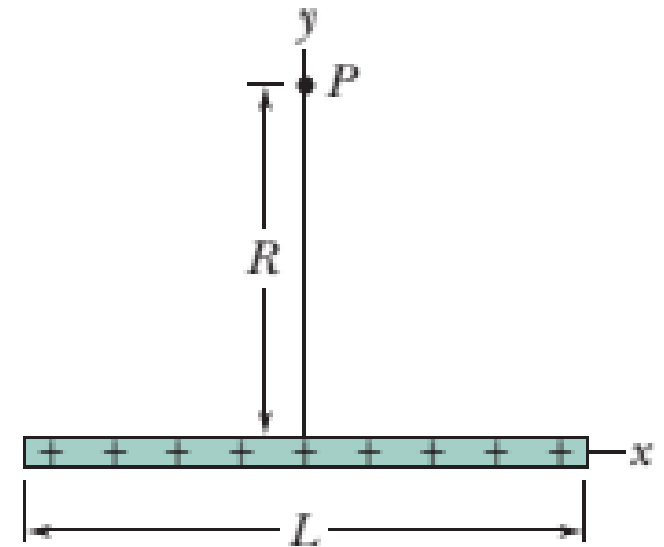


Figure 22-55 Problem 32.

CÂU 5

$$\begin{aligned}
 |\vec{E}| &= 2 \int_0^{L/2} \left(\frac{dq}{4\pi\epsilon_0 r^2} \right) \sin \theta = \frac{2}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{L/2} \left(\frac{\lambda dx}{x^2 + R^2} \right) \left(\frac{y}{\sqrt{x^2 + R^2}} \right) \\
 &= \frac{\lambda R}{2\pi\epsilon_0} \int_0^{L/2} \frac{dx}{(x^2 + R^2)^{3/2}} = \frac{(q/L)R}{2\pi\epsilon_0} \cdot \frac{x}{R^2 \sqrt{x^2 + R^2}} \bigg|_0^{L/2} \\
 &= \frac{q}{2\pi\epsilon_0 LR} \frac{L/2}{\sqrt{(L/2)^2 + R^2}} = \frac{q}{2\pi\epsilon_0 R} \frac{1}{\sqrt{L^2 + 4R^2}}
 \end{aligned}$$

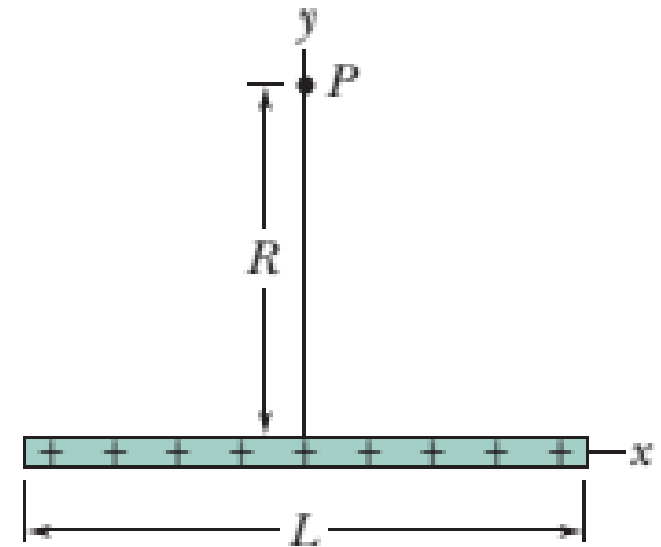


Figure 22-55 Problem 32.

where the integral may be evaluated by elementary means or looked up in Appendix E (item #19 in the list of integrals). With $q = 7.81 \times 10^{-12}$ C, $L = 0.145$ m, and $R = 0.0600$ m, we have $|\vec{E}| = 12.4$ N/C.

(b) As noted above, the electric field $\vec{E}$ points in the $+y$ direction, or $+90^\circ$ counterclockwise from the $+x$ axis.

CÂU 5

In Fig. 22-56, a “semi-infinite” nonconducting rod (that is, infinite in one direction only) has uniform linear charge density λ . Show that the electric field $\vec{E}_P$ at point P makes an angle of 45° with the rod and that this result is independent of the distance R . (*Hint: Separately find the component of parallel to the rod and the component perpendicular to the rod.*)

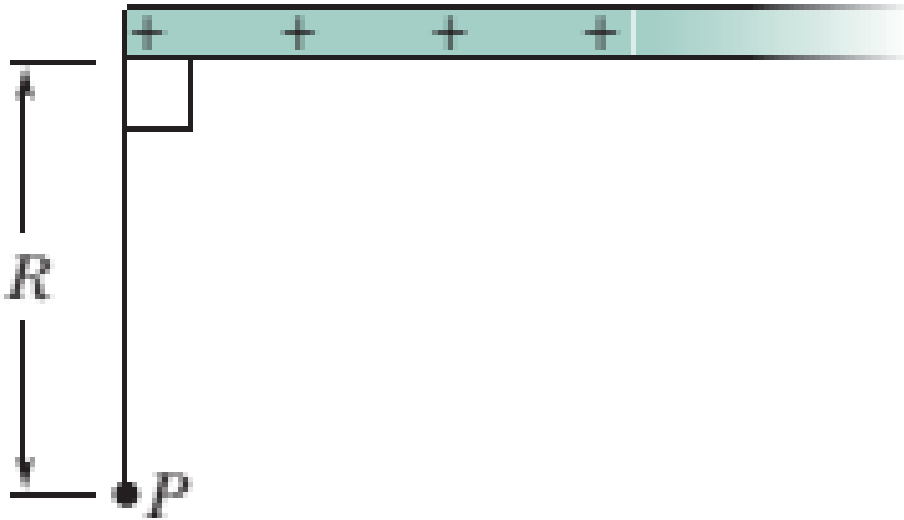


Fig. 22-56

CÂU 5

Consider an infinitesimal section of the rod of length dx , a distance x from the left end, as shown in the following diagram. It contains charge $dq = \lambda dx$ and is a distance r from P . The magnitude of the field it produces at P is given by

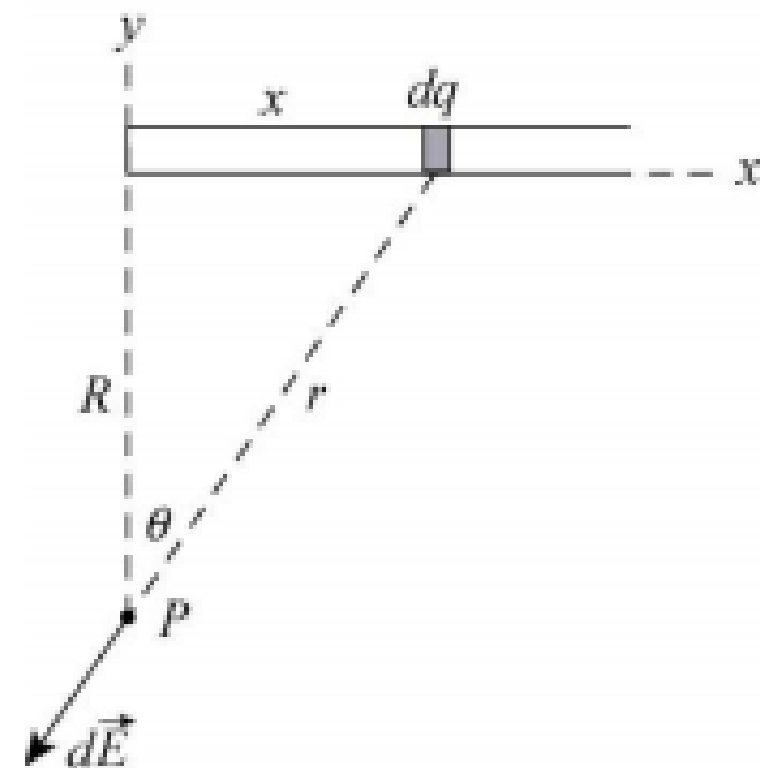
$$dE = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda dx}{r^2}.$$

The x and the y components are

$$dE_x = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda dx}{r^2} \sin \theta$$

and

$$dE_y = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda dx}{r^2} \cos \theta ,$$



CÂU 5

respectively. We use θ as the variable of integration and substitute $r = R/\cos \theta$, $x = R \tan \theta$ and $dx = (R/\cos^2 \theta) d\theta$. The limits of integration are 0 and $\pi/2$ rad. Thus,

$$E_x = -\frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 R} \int_0^{\pi/2} \sin \theta d\theta = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 R} \cos \theta \Big|_0^{\pi/2} = -\frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 R}$$

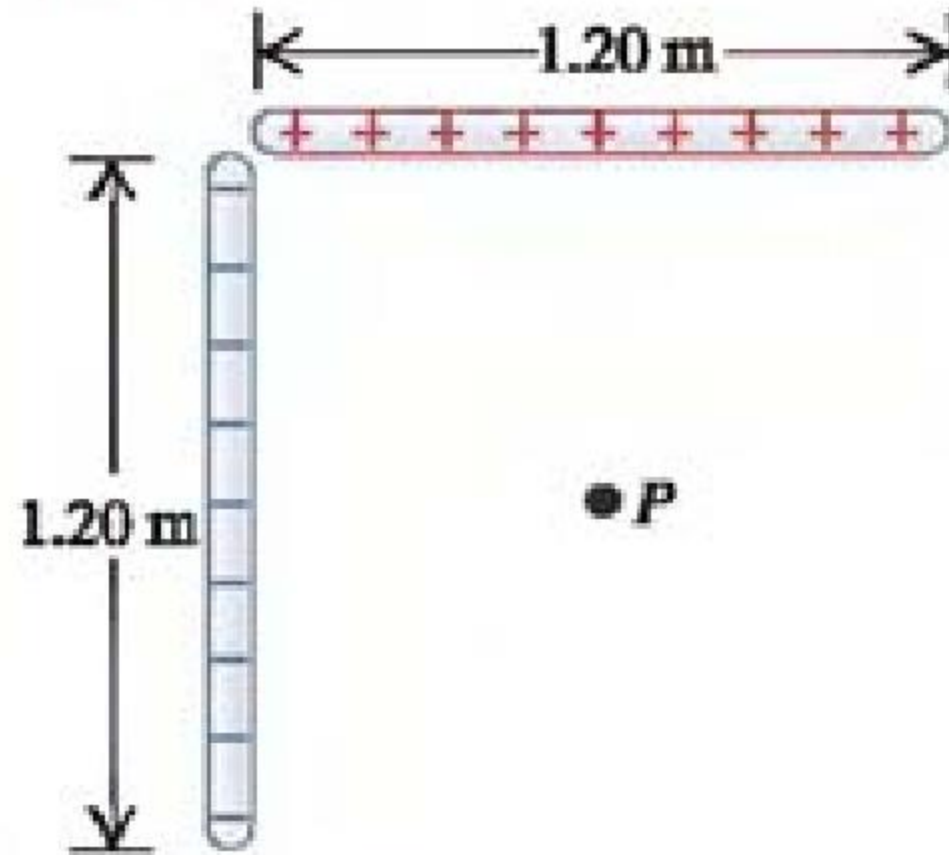
and

$$E_y = -\frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 R} \int_0^{\pi/2} \cos \theta d\theta = -\frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 R} \sin \theta \Big|_0^{\pi/2} = -\frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 R}.$$

We notice that $E_x = E_y$ no matter what the value of R . Thus, $\vec{E}$ makes an angle of 45° with the rod for all values of R .

CÂU 5

21.99. Two 1.20-m nonconducting wires meet at a right angle. One segment carries $+2.50\ \mu\text{C}$ of charge distributed uniformly along its length, and the other carries $-2.50\ \mu\text{C}$ distributed uniformly along it, as shown in Fig. 21.50. (a) Find the magnitude and direction of the electric field these wires produce at point P , which is 60.0 cm from each wire. (b) If an electron is released at P , what are the magnitude and direction of the net force that these wires exert on it?



CÂU 5

21.105. Three charges are placed as shown in Fig. 21.52. The magnitude of q_1 is $2.00 \mu\text{C}$, but its sign and the value of the charge q_2 are not known. Charge q_3 is $+4.00 \mu\text{C}$, and the net force $\vec{F}$ on q_3 is entirely in the negative x -direction. (a) Considering the different possible signs of q_1 and there are four possible force diagrams representing the forces $\vec{F}_1$ and $\vec{F}_2$ that q_1 and q_2 exert on q_3 . Sketch these four possible force configurations. (b) Using the sketches from part (a) and the direction of $\vec{F}$, deduce the signs of the charges q_1 and q_2 . (c) Calculate the magnitude of q_2 . (d) Determine F , the magnitude of the net force on q_3 .

Figure 21.52 Challenge Problem 21.105.

