ĐẠI HỌC QUỐC GIA TP HỒ CHÍ MINH
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN
KHOA TOÁN - TIN HỌC

ĐẶNG ĐỨC TRỌNG – ĐINH NGỌC THANH – PHẠM HOÀNG QUÂN

Tiểu luận
GIẢI TÍCH 2

NHÓM 5
VÕ ANH KHOA – VŨ TRẦN MINH KHƯƠNG – NGUYỄN THANH HOÀI
ĐẶNG PHƯỚC NHẬT – TRƯƠNG HỒNG KHA

Ω

TP. HỒ CHÍ MINH 5/2011

ĐẶNG ĐỨC TRỌNG – ĐINH NGỌC THANH – PHẠM HOÀNG QUÂN

Tiểu luận
GIẢI TÍCH 2

NHÓM 5
VÕ ANH KHOA – VŨ TRẦN MINH KHƯƠNG – NGUYỄN THANH HOÀI
ĐẶNG PHƯỚC NHẬT – TRƯƠNG HỒNG KHA

Ω

TP. HỒ CHÍ MINH 5/2011

LỜI NÓI ĐẦU

Cuốn sách "Tiểu luận GIẢI TÍCH 2" này được biên soạn dựa theo cuốn sách "Giáo trình GIẢI TÍCH 2" của thầy Đặng Đức Trọng – Đinh Ngọc Thanh – Phạm Hoàng Quân, dành cho sinh viên năm I của trường Đại học Khoa Học Tự Nhiên, Đại học Quốc Gia Thành phố Hồ Chí Minh, sinh viên trong giai đoạn đại cương ở một số trường và những bạn đọc quan tâm đến mảng kiến thức này, tham khảo trong quá trình học tập và làm việc. Cuốn sách này gồm có 7 chương, trong đó ở mỗi chương chúng tôi chia làm hai phần I, II với bố cục như sau :

Phần I : Giải các bài tập theo từng chương trong cuốn sách "Giáo trình GIẢI TÍCH 2". Ở phần này, chúng tôi sẽ cố gắng đưa ra những lời giải chi tiết để giúp cho người đọc có thể trau dồi kiến thức cũng như tham khảo một số kĩ năng trong quá trình làm bài tập. Tuy nhiên, chúng tôi vẫn khuyến khích các bạn nên dành thời gian để tự giải một số bài tập, nhằm nắm vững căn bản ở môn học này.

Phần II : Phần này là những bài tập được đưa vào trong quá trình chúng tôi tham khảo và sưu tầm được. Chúng tôi muốn đưa vào để giúp cho người đọc đam mê tìm tòi và khám phá thêm được nhiều điều mới ở môn học này. Tuy nhiên, chúng tôi sẽ không đưa ra lời giải cho phần này với mong muốn người đọc có thể tự thảo luận, trao đổi với bạn bè, đồng nghiệp để thấy được "cái hay" trong từng bài.

Trong quá trình biên soạn, do nhiều yếu tố khách quan và chủ quan, cuốn sách này không tránh khỏi sự sai sót. Vì vậy, chúng tôi mong được nhận các ý kiến đóng góp để chúng tôi hoàn thiện cuốn sách này hơn.

Thành phố Hồ Chí Minh, 5/2011

Các tác giả.

LỜI CẢM ƠN

Trong suốt quá trình biên soạn, chúng tôi xin chân thành cảm ơn sự giúp đỡ của thầy Đặng Đức Trọng, thầy Trần Quốc Khanh, các bạn Cử Nhân Tài Năng K10 (khóa 2010) và một số bạn khác, đã vui lòng nhận kiểm tra lại, góp ý thêm và chia sẻ một số tài liệu tham khảo khác để chúng tôi hoành thành cuốn sách này.

MỤC LỤC

Chương 1:

KHÔNG GIAN MÊTRÍC

1.1. Chứng minh rằng mọi khoảng mở trong $\mathbb{R}$ đều chứa một số vô tỉ. Từ đó suy ra:

(i) Nếu x là một số vô tỉ thì có dãy hữu tỉ $\{x_n\}$ hội tụ về x.

(ii) Nếu x là một số hữu tỉ thì có dãy vô tỉ $\{x_n\}$ hội tụ về x.

Bài giải:

Trước hết ta lưu ý rằng ta có tính chất sau :

Với mọi $c < d$ thì đều tồn tại một số hữu tỉ p sao cho $p \in (c, d)$. (*)

Xét $a < b$ bất kì, ta chứng minh tồn tại một số vô tỉ x sao cho $x \in (a, b)$.(**)

Theo (*), tồn tại số hữu tỉ p sao cho p sao cho $p \in (a - \sqrt{2}, b - \sqrt{2})$.

Do đó $p + \sqrt{2} \in (a, b)$.

Chọn $x = p + \sqrt{2}$, ta có x vô tỉ do p hữu tỉ và $x \in (a, b)$.

Như vậy ta đã chứng minh được (**).

Trong phần tiếp theo, ta chỉ chứng minh (i), (ii) chứng minh hoàn toàn tương tự.

(i) Với x vô tỉ, theo (*) tồn tại x_n hữu tỉ sao cho : $x_n \in \left(x - \frac{1}{n}, x + \frac{1}{n}\right)$.

Do đó :$|x_n - x| < \frac{1}{n}$. Suy ra $\{x_n\}$ là dãy hữu tỉ hội tụ về x vô tỉ.

1.2. Cho $a_1, a_2, \dots, a_n$ là n số thực, chứng minh rằng :

$$A = \{a_1, a_2, \dots \dots \dots, a_n\}$$

là tập đóng trong $\mathbb{R}$ và không có tập mở nào chứa trong A.

<u>Bài giải:</u>

Ta cần chứng minh A là tập đóng.

Không mất tính tổng quát, ta có thể giả sử n số thực $a_1, a_2, \dots, a_n$ được sắp theo thứ tự tăng dần (bởi vì ta luôn sắp được thứ tự của các số), nghĩa là :

$$a_1 < a_2 < \cdots < a_n.$$

Khi đó, ta *x*ét :

$\mathbb{R}\backslash A = \mathbb{R}\backslash\{a_1, a_2, \dots, a_n\} = (-\infty, a_1) \cup (a_1, a_2) \cup \dots \cup (a_{n-1}, a_n) \cup (a_n, +\infty)$.

Do $\mathbb{R}\backslash A$ là hợp của các khoảng mở nên $\mathbb{R}\backslash A$ là tập mở. Dẫn đến A là tập đóng trong $\mathbb{R}$.

Tiếp theo, ta có nhận *x*ét sau : Nếu U là tập mở khác rỗng trong $\mathbb{R}$ thì U chứa vô hạn phần tử.

Thật vậy, U mở khác rỗng nên tồn tại $x \in U$.

Theo định nghĩa tập mở, tồn tại $\varepsilon > 0$ sao cho : $(x - \varepsilon, x + \varepsilon) \subset U$.

Mà khoảng $(x - \varepsilon, x + \varepsilon)$ chứa vô hạn phần tử, nên dẫn đến *U* chứa vô hạn phần tử.

Quy trở lại bài toán, do A có n phần tử nên mọi tập con khác rỗng của A đều có hữu hạn phần tử ($\leq n$) nên không thể là tập mở được (theo nhận *x*ét trên).

1.3. Cho (E,δ) là một không gian mêtríc và $A \subset E$. Chứng minh rằng :

(i) $\bar{A} = A \cup A'$, với A' là tập hợp các điểm tụ của A.

(ii) $\bar{A}$ là tập đóng trong E và là tập đóng nhỏ nhất trong E chứa A.

(iii) $\mathring{A}$ là tập mở trong E và là tập đóng lớn nhất trong E chứa trong A.

(iv) $\partial A = \partial(E \setminus A), \partial A = \bar{A} \cap \overline{E/A}$ và $E = \mathring{A} \cup \partial A \cup (E/A)^{\circ}$.

(v) ∂A là tập đóng trong E và A đóng nếu và chỉ nếu $\partial A \subset A$.

Bài giải:

(i)

- Chứng minh $\bar{A} \subset (A \cup A')$:

Lấy $x \in \bar{A}$ bất kì .

Nếu $x \in A$, ta có ngay $x \in A \cup A'$.

Nếu $x \notin A$: do x là điểm dính của A,với mọi $r > 0$, ta đều có : $B(x,r) \cap A \neq \emptyset$.

Nhận xét rằng: $(B(x,r)\setminus\{x\}) \cap A = B(x,r) \cap A$. (do $x \notin A$)

Suy ra $(B(x,r)\setminus\{x\}) \cap A \neq \emptyset$ với mọi $r > 0$.

Vậy $x \in \bar{A} \subset (A \cup A')$. (1)

- Chứng minh $(A \cup A') \subset \bar{A}$:

Lấy $x \in A$ bất kì .

Với mọi $r > 0$, $B(x,r) \cap A$ chứa x nên khác rỗng.

Suy ra $x \in \bar{A}$. Ta có $A \subset \bar{A}$.

Lấy $x \in A'$ bất kì.

Với mọi $r > 0, (B(x,r)\setminus\{x\}) \cap A \neq \emptyset$.

Vì $(B(x,r)\setminus\{x\}) \cap A \subset B(x,r) \cap A$, ta có $B(x,r) \cap A \neq \emptyset$ với mọi $r > 0$.

Suy ra $x \in \bar{A}$ .Vậy $A' \subset \bar{A}$ .Suy ra $(A \cup A') \subset \bar{A}$.(2)

Từ (1) và (2) suy ra $\overline{A} = A \cup A'$.

(ii)

- Chứng minh $\bar{A}$ là một tập đóng trong E.

Xét một dãy $\{x_n\}$ bất kì thỏa mãn : $x_n \to x$ trong E . Để chứng minh $\bar{A}$ là một tập đóng, ta chỉ cần chứng minh $x \in \bar{A}$.

Với $n \in \mathbb{N}$ bất kỳ: vì $x_n \in \bar{A}$ nên với mọi $r > 0$, ta đều có : $B(x_n, r) \cap A \neq \emptyset$.

Cho $r = \frac{1}{n}$, tồn tại $y_n \in B(x_n, \frac{1}{n}) \cap A$.

Ta tìm được một dãy $\{y_n\}$ chứa trong A thỏa : $|y_n - x_n| < \frac{1}{n}$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Nhận xét rằng: $|y_n - x| \leq |y_n - x_n| + |x_n - x| < \frac{1}{n} + |x_n - x|$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Cho $n \to \infty$, vế phải sẽ hội tụ về 0. Suy ra $y_n \to x$

Vậy tồn tại dãy $\{y_n\}$ chứa trong A hội tụ về x.

x là một điểm dính của A hay $x \in \bar{A}$.

- Chứng minh $\bar{A}$ là tập đóng nhỏ nhất trong E chứa A.

Xét B là một tập đóng chứa A bất kỳ. Ta chứng minh $\overline{A}$ chứa trong B.

Lấy x là một phần tử trong $\overline{A}$.

Tồn tại một dãy $\{x_n\}$ trong A hội tụ về x.

Nhận xét rằng $\{x_n\}$ đồng thời là một dãy trong B hội tụ về x..

Vì B đóng, ta suy ra $x \in B$.

Vậy $\bar{A} \subset B$.

(iii) Đầu tiên, ta chứng minh nếu B là một tập mở chứa trong A thì $B \subset \mathring{A}$

Lấy $x \in B$ bất kỳ. Vì B mở, ta có x là một điểm trong của B.

Tồn tại $r > 0$ sao cho : $B(x, r) \subset B$

Do $B \subset A$, ta có ngay $B(x, r) \subset A$. Vậy x là một điểm trong của A.

Ta có $x \in \mathring{A}$, $B \subset \mathring{A}$.

- Chứng minh Å là tập mở: Để chứng minh Å mở, ta chỉ cần chứng minh mọi điểm x chứa trong Å đều là điểm trong.

Lấy x chứa trong Å bất kỳ. Tồn tại $R > 0$ sao cho : $B(x,R) \subset A$

Vì $B(x,R)$ là một tập mở và chứa trong A, theo chứng minh ở phần trên, ta có $B(x,R) \subset$ Å.

Như vậy x là một điểm trong của Å. Ta có Å là tập mở.

Kết hợp với phần trên, ta có Å là tập mở lớn nhất trong E chứa trong A.

(iv)

- Chứng minh $\partial A = \partial\,(E\backslash A)$

Theo định nghĩa, $x \in \partial A$ khi và chỉ khi nó vừa là điểm dính của A vừa là điểm dính của $E\backslash A$.

Cũng từ định nghĩa $x \in \partial(E\backslash A)$ khi và chỉ khi nó vừa là điểm dính của $E\backslash A$ vừa là điểm dính của $E\backslash(E\backslash A) = A$.

- Ta có: Å $\cup\, \partial A \cup (E\backslash A)^\circ = ($Å$\, \cup\, \partial A) \cup (\partial(E\backslash A) \cup (E\backslash A)^\circ) = \bar{A} \cup \overline{E\backslash A} \supset E$ (do $\partial A = \partial(E\backslash A)$)

Vậy $E =$ Å $\cup\, \partial A \cup (E\backslash A)^\circ$.

(v)

- Chứng minh ∂A là tập đóng trong E :

Ta có : $\partial A = \overline{A} \cap \overline{E\backslash A}$.

Vì $\overline{A}$ và $\overline{E\backslash A}$ đều đóng, ta có ngay ∂A là một tập đóng.

- Chứng minh A đóng nếu và chỉ nếu $\partial A \subset A$.

Chiều thuận:

Giả sử A đóng.

Khi đó : $A = \overline{A}$. Ta suy ra : $\partial A = \overline{A} \cap \overline{E\backslash A} \subset \overline{A} = A$.

Chiều đảo:

Giả sử $\partial A \subset A$. Ta có $A \cup \partial A \subset A$.

Vì $\bar{A} = A \cup \partial A$

Suy ra $\overline{A} \subset A$.

Vậy, A là tập đóng.

1.4. Cho (E, δ) là một không gian mêtríc và ta định nghĩa:

$$d: E \times E \longrightarrow [0, +\infty)$$

$$d(x, y) = \frac{\delta(x,y)}{1+\delta(x,y)}$$

Chứng minh (E, d) là không gian mêtríc.

<u>**Bài giải:**</u>

Ta chứng minh (E, d) là một không gian mêtríc bằng định nghĩa:

(i) Do $\delta(x, y) \geq 0$ với mọi $x, y \in E$ và $\delta(x, y) = 0$ khi và chỉ khi $x = y$

Do đó $d(x, y) = \frac{\delta(x,y)}{\delta(x,y)+1} \geq 0$ với mọi $x, y \in E$.

Đồng thời $d(x, y) = 0$ khi chỉ khi $\delta(x, y) = 0$ hay $x = y$.

(ii) Do ta có $\delta(x, y) = \delta(y, x)$ với mọi $x, y \in E$ nên ta luôn có :

$d(x, y) = \frac{\delta(x,y)}{\delta(x,y)+1} = \frac{\delta(y,x)}{\delta(y,x)+1} = d(y, x)$.

(iii) Ta cần chứng mình bất đẳng thức tam giác $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ với mọi $x, y, z \in E$.

Ta đặt $a = \delta(x, y)$,$b = \delta(x, z)$,$c = \delta(x, z)$ $(a, b, c \geq 0)$.

Vậy cần chứng minh BĐT sau đây: $\frac{a}{a+1} \leq \frac{b}{b+1} + \frac{c}{c+1}$

Thật vậy ta luôn có $a \leq b + c$ và hàm $f(x) = \frac{x}{x+1}$ đồng biến trên $[0, \infty)$nên:

$$\frac{a}{a+1} \leq \frac{b+c}{b+c+1} = \frac{b}{b+c+1} + \frac{c}{b+c+1} \leq \frac{b}{b+1} + \frac{c}{c+1}$$

Vậy (E, d) là một không gian mêtríc.

1.5. Cho E là tập hợp khác trống và $\delta: E \times E \to \mathbb{R}$ thỏa các tính chất:

(i) $\delta(x,y) \geq 0 \quad \forall x,y \in E$

$\delta(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$

(ii) $\delta(x,y) \leq \delta(x,z) + \delta(y,z) \qquad \forall x,y,z \in E$.

Chứng minh rằng δ là một mêtríc trên E.

Bài giải:

Để chứng minh δ là một không gian mêtríc ta phải chứng minh thêm tính chất đối xứng tức là với mọi $x,y \in E$ ta luôn có $\delta(x,y) = \delta(y,x)$.

Nói cách khác từ giả thiết (i) và (ii) của đề bài chứng minh $\delta(x,y) = \delta(y,x)$với mọi $x,y \in E$ để rồi kết luận δ là một mêtríc trên E.

Thật vậy để chứng minh $\delta(x,y) = \delta(y,x)$ ta cần chứng minh $\delta(x,y) \leq \delta(y,x)$ và $\delta(x,y) \geq \delta(y,x)$

Chứng minh $\delta(x,y) \leq \delta(y,x)$.

Ta có :

$$\delta(x,y) \leq \delta(x,x) + \delta(y,x) = 0 + \delta(y,x) = \delta(y,x) .$$

Tương tự ta có :

$$\delta(y,x) \leq \delta(y,y) + \delta(x,y) = 0 + \delta(x,y) = \delta(x,y)$$

Do đó $\delta(x,y) = \delta(y,x)$.

Vậy δ là một mêtríc trên E.

1.6. Cho $(E_i, \delta_i)(i = 1,2, \dots \dots, n)$ là n không gian mêtríc.

(i) Đặt

$$d : E_1 \times E_1 \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$d(x,y) = \min\{1, \delta_1(x,y)\}$$

Chứng minh rằng *d* là một mêtríc trên E_1.

(ii) Đặt $E = E_1 \times E_2 \times \dots \dots \times E_n$ và $d_i: E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$, với

$$d_1(X,Y) = \sqrt{{\delta_1}^2(x_1,y_1) + {\delta_2}^2(x_2,y_2) + \cdots + {\delta_n}^2(x_n,y_n)}$$

$$d_2(X,Y) = \max\{\delta_1(x_1,y_1) + \delta_2(x_2,y_2) + \cdots + \delta_n(x_n,y_n)\}$$

$$d_3(X,Y) = \delta_1(x_1,y_1) + \delta_2(x_2,y_2) + \cdots + \delta_n(x_n,y_n)$$

Với $X = (x_1, x_2, \dots, x_n), Y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$.

Chứng minh rằng $(E, d_i), i = 1,2,3$ là không gian mêtríc.

Bài giải:

(i) - Chứng minh *d* là một mêtríc trên E_1:

1) Với mọi $x, y \in E_1$, do δ_1 là một mêtríc trên E_1 nên ta có : $\delta_1(x,y) \geq 0$ và $\delta_1(x,y) = 0$ khi chỉ khi $x = y$.

Do đó, $d(x,y) = \min(1, \delta_1(x,y)) \geq 0$.

Và $d(x,y) = \min\big(1, \delta_1(x,y)\big) = 0$ khi chỉ khi $\delta_1(x,y) = 0$ hay $x = y$.

2) Với mọi $x, y \in E_1$, do δ_1 là một mêtríc trên E_1 nên ta có : $\delta_1(x,y) = \delta_1(y,x)$.

Do đó, $d(x,y) = \min\big(1, \delta_1(x,y)\big) = \min\big(1, \delta_1(y,x)\big) = d(y,x)$.

3) Với mọi $x, y, z \in E_1$ cần chứng minh $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$

Ta luôn có $\delta_1(x,y) \leq \delta_1(x,z) + \delta_1(z,y)$

Nên $\min\{1, \delta_1(x,y)\} \leq \min\{1, \delta_1(x,z) + \delta_1(z,y)\} \leq \min\{1, \delta_1(x,z)\} + \min\{1, \delta_1(z,y)\}$

Hay $d(x,y) \le d(x,z) + d(z,y)$.

Vậy d là một mêtríc trên E_1.

(ii) a) (E_i, δ_i) là n không gian mêtríc nên (E, d_1) là không gian mêtríc với

$$d_1(X,Y) = \sqrt{\delta_1^2(x_1,y_1) + \delta_2^2(x_2,y_2) + \cdots + \delta_n^2(x_n,y_n)}$$

b) Với mọi $X, Y, Z \in E$, ta có :

-$d_2(X,Y) \ge 0$ và $d_2(X,Y) = 0$ khi và chỉ khi :

$\max\{\delta_1(x_1,y_1), \delta_2(x_2,y_2), \dots, \delta_n(x_n,y_n)\} = 0$

$\Leftrightarrow \delta_i(x_i,y_i) = 0, \forall i = \overline{1,n}$

$\Leftrightarrow X = Y$

-$d_2(X,Y) = d_2(Y,X)$ (do $\delta_i(x_i,y_i) = \delta_i(y_i,x_i), \forall i = \overline{1,n}$)

-$d_2(X,Y) \le d_2(X,Z) + d_2(Y,Z)$

Vì: $\max\{\delta_1(x_1,y_1), \delta_2(x_2,y_2), \dots, \delta_n(x_n,y_n)\} \le \max\{\delta_1(x_1,z_1) + \delta_1(y_1,z_1), \delta_2(x_2,y_2) + \delta_2(y_2,z_2), \dots, \delta_n(x_n,y_n) + \delta_n(y_n,z_n)\} \le \max\{\delta_1(x_1,z_1), \delta_2(x_2,y_2), \dots, \delta_n(x_n,y_n)\} + \max\{\delta_1(y_1,z_1), \delta_2(y_2,z_2), \dots, \delta_n(y_n,z_n)\}$

Vậy (E, d_2) là không gian mêtríc.

c) Với mọi $X, Y, Z \in E$,ta có :

-$d_3(X,Y) \ge 0$ và $d_3(X,Y) = 0$ khi và chỉ khi

$\delta_i(x_i,y_i) = 0, \forall i = \overline{1,n} \Leftrightarrow X = Y$.

-$d_3(X,Y) = d_3(Y,X)$ (do $\delta_i(x_i,y_i) = \delta_i(y_i,x_i), \forall i = \overline{1,n}$).

-$d_2(X,Y) \le d_2(X,Z) + d_2(Y,Z)$

Vì $\delta_i(x_i,y_i) \le \delta_i(x_i,z_i) + \delta_i(y_i,z_i), \forall i = \overline{1,n}$

Vậy (E, d_3) là không gian mêtríc.

1.7. (i) Cho (X,δ) là một không gian mêtríc. Chứng minh rằng $\overline{B(a,r)} \subset B'(a,r)$ với $\overline{B(a,r)}$ là bao đóng của $B(a,r)$.

(ii) Cho X là một tập hợp có ít nhất hai phần tử. Xét mêtríc $\delta: X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$ với

$$\delta(x,y) = \begin{cases} 1\text{ , nếu } x \neq y \\ 0\text{ , nếu } x = y \end{cases}$$

Chứng minh $\overline{B(a,1)} \neq B'(a,r)\ \forall a \in X$.

(iii) Lấy $X = \mathbb{R}^n$ với mêtríc

$$\delta(x,y) = \sqrt{(x_1-y_1)^2 + (x_2-y_2)^2 + \cdots + (x_n-y_n)^2}$$

Trong đó $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n), y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$.

Chứng minh rằng $\overline{B(a,r)} = B'(a,r),\ \forall a \in \mathbb{R}^n$.

<u>Bài giải:</u>

i) Cho $B'(a,r)$ là một quả cầu đóng nên là một tập đóng. Dễ thấy $B(a,r) \subset B'(a,r)$.

Mặt khác theo tính chất của bao đóng, ta đã biết $\overline{B(a,r)}$ là tập đóng nhỏ nhất chứa $B(a,r)$. Do đó ta suy ra $\overline{B(a,r)} \subset B'(a,r)$.

ii) Lấy một *a* trong *X* bất kỳ.

Theo định nghĩa mêtríc δ, ta có $\delta(a,x) < 1$ khi và chỉ khi $\delta(a,x) = 0$, nghĩa là $x = a$.

Do đó $B(a,1) = \{x \in X\ \ \delta(a,x) < 1\} = \{a\}$ và $\overline{B(a,1)} = \{a\}$

Mặt khác X là không gian mêtríc có ít nhất hai phần tử. Suy ra X chứ ít nhất một phần tử x khác a ,vẫn theo định nghĩa mêtríc δ, ta có $\delta(a,x) = 1$. Như vậy, quả cầu đóng $B'(a,1)$ chứa x khác a.

Điều này chứng tỏ $B'(a,1) \neq B(a,1)$.

iii) Theo câu (i) ta đã có $\overline{B(a,r)} \subset B'(a,r)$

Nên để nhận được $\overline{B(a,r)} = B'(a,r)$, ta cần chứng minh $\overline{B(a,r)} \supset B'(a,r)$.

Thật vậy, lấy một $x \in B'(a,r)$ bất kì ta sẽ chứng minh $x \in \overline{B(a,r)}$ bằng cách chỉ ra một dãy $\{x_m\}$ chứa trong $B(a,r)$ thoả $x_m \to x$.

Đặt $x_m = a + \left(1 - \frac{1}{m}\right)(x - a)$. Ta có nhận xét sau:

- Khi $m \to \infty$, dễ thấy $x_m \to x$
- Hơn nữa, vì $x_m - a = \left(1 - \frac{1}{m}\right)(x - a)$ nên $x_{m.k} - a_k = \left(1 - \frac{1}{m}\right)(x_k - a_k)$ với mọi $k = \overline{1, n}$.

Ta suy ra : $\delta(x_m, a) = \sqrt{(x_{m.1} - a_1)^2 + (x_{m.2} - a_2)^2 + \cdots + (x_{m.n} - a_n)^2}$

$=\left(1 - \frac{1}{m}\right)\sqrt{(x_1 - a_1)^2 + (x_2 - a_2)^2 + \cdots + (x_n - a_n)^2}$

$= \left(1 - \frac{1}{m}\right)\delta(x,a) < \delta(x,a) \leq r$ với mọi $m \in \mathbb{N}$.

Do đó $\{x_m\} \subset B(a,r)$ mọi $m \in \mathbb{N}$.

1.8. Cho $\{x_n\}$ là một dãy trong không gian mêtríc (E, δ). Chứng minh rằng $\{x_n\}$ hội tụ nếu và chỉ nếu các dãy $\{x_{2n}\}$,$\{x_{2n+1}\}$,$\{x_{3n}\}$ hội tụ.

<u>Bài giải:</u>

Chiều thuận: Hiển nhiên.

Chiều nghịch:

Giả sử $\{x_{2n}\}$, $\{x_{2n+1}\}$, $\{x_{3n}\}$ hội tụ.

Do $\{x_{6n}\}$ là dãy con của hai dãy hội tụ $\{x_{2n}\}$ và $\{x_{3n}\}$, nên $\{x_{2n}\}$ và $\{x_{3n}\}$ có cùng giới hạn.

Do $\{x_{6n+3}\}$ là dãy con của hai dãy hội tụ $\{x_{2n+1}\}$ và $\{x_{3n}\}$, nên $\{x_{2n+1}\}$ và $\{x_{3n}\}$ có cùng giới hạn.

Từ đó ta suy ra: $\{x_{2n}\}$, $\{x_{2n+1}\}$, $\{x_{3n}\}$ có cùng giới hạn.

Vậy $\{x_n\}$ hội tụ.

1.9. Cho (E, δ) là một không gian mêtríc. Chứng minh rằng :

(i) Nếu $x, y \in E$ và $x \neq y$ thì có các tập mở V_x và V_y sao cho $x \in V_x, y \in V_x$ và $V_x \cap V_y = \emptyset$.

(ii) Tập hợp gồm hữu hạn gồm một phần tử của E là tập đóng trong E và do đó tập hợp gồm hữu hạn các phần tử trong E là tập đóng trong E.

(iii) Nếu $diam\, A < r$ thì với mọi phần tử $x \in A$, ta có $A \subset B(x, 2r)$.

<u>Bài giải:</u>

i) Đặt $V_x = B(x, a); V_y = B(y, b), (x, y \in E, x \neq y)$

Khi ta chọn $a = b = \frac{\delta(x,y)}{3} > 0$ thì sẽ được $B(x, a) \cap B(y, b) = \emptyset$.

Suy ra: $V_x \cap V_y = \emptyset$.

Vì $B(x, a), B(y, b)$ là các tập mở nên với $x, y \in E, x \neq y$ thì có hai tập mở V_x, V_y sao cho $x \in V_x, y \in V_y$ và $V_x \cap V_y = \emptyset$.

Ta được điều cần chứng minh.

ii) Tương tự 1.2.

iii) Ta có $diamA < r$, hay $\sup_{a,b \in A} \delta(a, b) < r$.

Cần chứng minh: Với mọi $x \in A$: $A \subset B(x, 2r)$.

Thật vậy: Cho $z \in A$.Ta có: Với mọi $x, y, z \in A$,

$$\delta(x, z) \leq \delta(x, y) + \delta(y, z) < 2r$$

Suy ra $A \subset B(x, 2r), \forall x \in A$.

1.10. Cho dãy hàm $f_m(x)$=$\lim_{n\to\infty}(cosm!\,\pi x)^{2n}$ xác định trên $\mathbb{R}$. Chứng minh rằng (f_m) hội tụ từng điểm về hàm Dirichlet $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = 1$ khi $x \in \mathbb{Q}$ và $f(x) = 0$ khi $x \notin \mathbb{Q}$.

Bài giải:

+ Với $x \in \mathbb{Q}$. Suy ra $x = \frac{p}{q}$ $(p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}^*)$

$\cos(m!\,\pi x) = cos\left(\frac{m!p}{q}\pi\right)$

Với $m \geq q$. Suy ra $\frac{m!p}{q}\pi \in \mathbb{Z}$.

$cos\left(\frac{m!p}{q}\pi\right) = (-1)^{\frac{m!p}{q}}$

$\left[\cos\left(\frac{m!p}{q}\pi\right)\right]^{2n} = 1$

$\lim_{n\to\infty}[cos\,(m!\,\pi x)]^{2n} = 1$

Suy ra f_m hội tụ về $f(x) = 1, \forall x \in \mathbb{Q}$.

+ Với $x \notin \mathbb{Q}$. Suy ra $x \in I$.

$\cos(m!\,\pi x) \in (-1,1)$

Ta được: $0 \leq [\cos(m!\,\pi x)]^2 < 1$

Suy ra $[\cos(m!\,\pi x)]^{2n} \xrightarrow{n\to\infty} 0$

f_m hội tụ về $f(x) = 0, \forall x \notin \mathbb{Q}$.

1.11. Cho (f_n) và (g_n) là hai dãy hàm hội tụ đều trên D. Chứng minh rằng $(f_n + g_n)$ cũng đều hội tụ đều trên D.

Hơn nữa, giả sử thêm rằng (f_n) và (g_n) là hai dãy hàm bị chặn. Chứng tỏ rằng dãy hàm $(f_n g_n)$ cũng hội tụ đều trên D.

Bài giải:

Khi $n \to \infty$ thì : $\begin{cases} d(f_n, f) \to 0 \\ d(g_n, g) \to 0 \end{cases}$

- Ta có: $0 \leq \sup |f_n(x) + g_n(x) - f(x) - g(x)| \leq \sup |f_n(x) - f(x)| + \sup |g_n(x) - g(x)|, x \in D$.

Hay $0 \leq d(f_n + g_n, f + g) \leq d(f_n, f) + d(g_n, g)$

Suy ra: $f_n + g_n \rightrightarrows f + g$.

- Từ giả thuyết ta có: $\begin{cases} \exists M > 0 \text{ sao cho} : \sup |f_n(x)| \leq M, x \in D \\ \exists N > 0 \text{ sao cho} : \sup |g_n(x)| \leq N, x \in D \end{cases}$

Suy ra : $|f(x)| \leq |f_n(x) - f(x)| + |f_n(x)| \leq d(f_n, f) + M$

Khi đó :

$$\begin{aligned} &\sup |f_n(x)g_n(x) - f(x)g(x)| \\ &\leq \sup |[f_n(x) - f(x)]g_n(x)| + \sup |[g_n(x) - g(x)]f(x)| \\ &\leq N sup\,|f_n(x) - f(x)| + [M + d(f_n, f)] \sup |g_n(x) - g(x)|, x \in D \end{aligned}$$

Hay $0 \leq d(f_n g_n, fg) \leq N d(f_n, f) + [M + d(f_n, f)] d(g_n, g)$

Suy ra : $f_n g_n \rightrightarrows fg$.

1.12. Xét dãy hàm :

$$f_n(x) = \frac{x}{1 + nx^2}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Chứng tỏ rằng (f_n) hội tụ đều về một hàm f và $f'(x) = \lim_{n\to\infty} f'_n(x)$ tại mọi $x \neq 0$. Khảo sát trường hợp $x = 0$.

Bài giải:

Cố định n. Xét hàm $f(x) = \frac{x}{1+nx^2}$.

$f'(x) = \frac{1-nx^2}{(1+nx^2)^2}$

Cho $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 1 - nx^2 = 0 \Leftrightarrow x = \pm\frac{1}{\sqrt{n}}$.

x	$-\infty$		$-\frac{1}{\sqrt{n}}$		$\frac{1}{\sqrt{n}}$		∞
$f'(x)$		-	0	+	0	-	
$f(x)$	0	$\searrow$	$-\frac{1}{2\sqrt{n}}$	$\nearrow$	$\frac{1}{2\sqrt{n}}$	$\searrow$	0

Vậy

$$|f_n(x)| = \left|\frac{x}{1+nx^2}\right| \leq \left|\frac{1}{2\sqrt{n}}\right| \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

Suy ra $f_n(x)$ hội tụ đều về hàm $f(x) = 0, \forall x$.

Và:

$$\lim_{n\to\infty} f'_n(x) = \lim_{n\to\infty}\frac{1-nx^2}{(1+nx^2)^2} = 0 = f'(x)$$

1.13. Chứng tỏ rằng dãy hàm $f_n(x) = nx(1-x)^n$ hội tụ từng điểm nhưng không hội tụ đều trên đoạn [0,1].

Bài giải:

- Hội tụ từng điểm :

- Với $x = 0$:

  $f_n(x) = 0, \forall n.$

- Với $x = 1$:

  $f_n(x) = 0, \forall n.$

- Với $x \in (0,1)$:

$$0 \le nx(1-x)^n = \frac{nx}{\left(1+\frac{x}{1-x}\right)^n} \le \frac{nx}{C_n^2 \frac{x^2}{(1-x)^2}} = \frac{nx}{\frac{n(n-1)}{2}\frac{x^2}{(1-x)^2}}$$

$$= \frac{2(1-x)^2}{(n-1)x} \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

Vậy $f_n(x)$ hội tụ từng điểm về hàm $f(x) = 0$.

- Không hội tụ đều :

$f_n(x)$ hội tụ từng điểm về $f(x) = 0$.

$f_n(x)$ chỉ có thể hội tụ đều về $f(x) = 0$.

Đặt $x = \frac{1}{n} \in [0,1]$

$$f_n(x) = n\frac{1}{n}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n = \left(1-\frac{1}{n}\right)^n \xrightarrow{n\to\infty} \frac{1}{e}$$

Chọn $\varepsilon = \frac{1}{2e}$.

1.14. Tìm các điểm trong, điểm biên và xét xem các tập hợp được cho có là tập đóng hay không?

Bài giải:

a. $\{(x,y): 0 \leq x \leq 1, 2 \leq y \leq 3\}$

Điểm trong: $\{(x,y): 0 < x < 1, 2 < y < 3\}$

Điểm biên: $\{(x,y): (0; 2 \leq y \leq 3), (1; 2 \leq y \leq 3), (0 \leq x \leq 1; 2), (0 \leq x \leq 1; 3)\}$

Tập đóng.

b. (2,4) x (1,3)

Điểm trong: $\{(x,y): 2 < x < 4, 1 < y < 3\}$

Điểm biên: $\{(x,y): (2; 1 \leq y \leq 3), (4; 1 \leq y \leq 3), (2 \leq x \leq 4; 1), (2 \leq x \leq 4; 3)\}$

Không là tập đóng.

c. $\{(x,y): 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}$

Điểm trong: $\{(\mathrm{x},\mathrm{y}): 0 < \mathrm{x}^2 + \mathrm{y}^2 < 4\}$

Điểm biên: $\{(x,y): x^2 + y^2 = 1 \vee x^2 + y^2 = 4\}$

Tập đóng.

d. $\{(x,y): 2 \leq x^2 \leq 5\}$

Điểm trong: $\{(x,y): 2 < x^2 < 5\}$

Điểm biên: $\{(x,y): x = \pm\sqrt{2}; x = \pm\sqrt{5}\}$

Tập đóng.

e. $\{(x,y): y \leq x^2\}$

Điểm trong: $\{(x,y): y < x^2\}$

Điểm biên: $\{(x,y): y = x^2\}$

Tập đóng.

f. $\{(x,y): x+y \le x^2\}$

Điểm trong: $\{(x,y): y < x^2 - x\}$

Điểm biên: $\{(x,y): y = x^2 - x\}$

Tập đóng.

g. $\{(x,y,z): x^2+y^2 \le 1, 0 \le z \le 5\}$

Điểm trong: $\{(x,y,z): 0 < x^2+y^2 < 1, 0 < z < 5\}$

Điểm biên: $\{(x,y,z): x^2+y^2 = 1{,}0 < z < 5\} \cup \{(x,y,z): x^2+y^2 \le 1, z = 0 \vee z = 5\}$

Tập đóng.

h. $\{(x,y,z): 1 \le x \le 2, y \le z^2\}$

Điểm trong: $\{(x,y,z): 1 < x < 2, y < z^2\}$

Điểm biên: $\{(x,y,z): 1 \le x \le 2, y = z^2\}$

Tập đóng.

i. $\{(x,y): a \le x \le b, x \le y \le x^2\}$

Điểm trong: $\{(x,y): a \le x \le b, x < y < x^2\}$

Điểm biên:

- $a < b \le 0$ và $a < 0 < b < 1$: $\{(x,y): a \le x \le b, y = x \vee y = x^2 \vee x = a \vee (0{,}0)\}$
- $0 < a < b < 1$: $\emptyset$
- $0 < a < 1 < b$ và $1 \le a < b$: $\{(x,y): a \le x \le b, y = x \vee y = x^2 \vee x = b \vee (1{,}1)\}$
- $a < 0, b > 1$: $\{(x,y): a \le x \le b, y = x \vee y = x^2 \vee x = a \vee x = b \vee (0{,}0) \vee (1{,}1)\}$

Tập đóng.

j. $\{(x, y, z): x^2 + y^2 \leq 1, x + y \leq z \leq 4x\}$

Điểm trong: $\{(x, y, z): x^2 + y^2 < 1, x + y < z < 4x\}$

Điểm biên: $\{(x, y, z): x^2 + y^2 = 1, x + y < z < 4x\} \cup \{(x, y, z): x^2 + y^2 \leq 1, x + y = z \vee z = 4x\}$

Tập đóng.

Bài Tập Mở Rộng

1. Chứng minh d là mêtríc trên X:

a. Cho các không gian mêtríc (X_1,d_1),(X_2,d_2). Trên tập $X = X_1$ x X_2,ta định nghĩa:

$$d((x_1,x_2),(y_1,y_2)) = d_1(x_1,y_1) + d_2(x_2,y_2)$$

b. S là tập hợp các dãy số thực $x = \{a_k\}_k$.Ta định nghĩa :

$$d(x,y) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k}\frac{|a_k-b_k|}{1+|a_k-b_k|} \quad , x = \{a_k\}, y = \{b_k\}$$

2. Cho (E,δ) là một không gian mêtríc và $A, B \subset E$ .Chứng minh rằng:

a. $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

b. Nếu $A \subset B$ thì $\overline{A} \subset \overline{B}$

c. $(\mathring{A})^{\circ} = \mathring{A}$

d. $\overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$

3. Chứng minh rằng nếu E là một không gian vectơ định chuẩn và $d: E^2 \to \mathbb{R}$ là một ánh xạ thỏa mãn ba tính chất của mêtric trên E và có thêm hai tính chất:

-$\forall x, y \in E, \beta \in \mathbb{R}, d(\beta x, \beta y) = |\beta| d(x,y)$.

-$\forall x, y, z \in E, d(x+z, y+z) = d(x,y)$.

Thì tồn tại một và chỉ một chuẩn $\|.\|$ trên E sao cho:

$\forall x, y \in E, d(x,y) = \|x-y\|$.

4. Cho E là một không gian vectơ, hai chuẩn $\|.\|_1$, $\|.\|_2$ trên E, $a \in E$, $r \in \mathbb{R}^+$; giả sử $B'_{\|.\|_1}(a;r) = B'_{\|.\|_2}(a;r)$.

Chứng minh rằng $\|.\|_1 = \|.\|_2$.

5. Cho E là một không gian vectơ định chuẩn; A,B là tập khác rỗng của E; ta định nghĩa:$d_A : E \longrightarrow \mathbb{R}$, cũng tương tự với d_B.

$$x \mapsto d(x, A)$$

Chứng minh: $d_A = d_B$ khi và chỉ khi $\overline{\mathrm{A}} = \overline{\mathrm{B}}$.

6. Cho E là một không gian vectơ định chuẩn; A,B là hai tập khác rỗng và bị chặn trong E . Chứng minh:

$$diam(A \cup B) \leq diam(A) + diam(B) + d(A, B).$$

7. Cho không gian mêtríc (X, d). Với $x \in X, \emptyset \neq A \subset X$, ta định nghĩa:

$$d(x, A) = \inf_{y \in A} d(x, y)$$

Chứng minh rằng: $x \in \bar{A}$ khi và chỉ khi $d(x, A) = 0$.

8. Trong $\mathbb{R}^6$,tìm giới hạn của:

$$\mathrm{x_n} = \left(\frac{1}{\mathrm{n^p}}, \frac{\mathrm{n^{100}}}{\mathrm{e^n}}, \frac{\mathrm{lnn}}{\mathrm{n^p}}, \frac{1}{\sqrt[\mathrm{n}]{\mathrm{n!}}}, \sqrt[\mathrm{n}]{2}, \sqrt[\mathrm{n}]{\mathrm{n^p}}\right), (\mathrm{p} > 0).$$

9. Cho $(E, \|.\|)$ là một không gian vectơ định chuẩn; $a, b \in E$; $r, s \in \mathbb{R}^+$.

Chứng minh rằng:

a.$B'(a; r) \subset B'(b; s)$ khi và chỉ khi $\|\mathrm{a} - \mathrm{b}\| \leq \mathrm{s} - \mathrm{r}$.

b.$B'(a;r) = B'(b;s)$ khi và chỉ khi $\begin{cases} \mathrm{a} = \mathrm{b} \\ \mathrm{r} = \mathrm{s} \end{cases}$.

10. Cho A là tập con của $\mathbb{R}$ chứa mọi điểm hữu tỉ thuộc [0,1] . Chứng minh nếu A đóng thì A chứa [0,1].

11. Cho *X* là tập vô hạn và bị chặn trong $\mathbb{R}^n$. Chứng minh *X* có điểm tụ.

12. Tìm điều kiện cần và đủ cho $x, y \in \mathbb{R}^n$ để có các đẳng thức:

$$|< x, y >| = \|x\|\|y\| \; và \; \|x + y\| = \|x\| + \|y\|.$$

13. Chứng tỏ rằng dãy hàm $f_n(x) = 1 - \frac{1}{n}|x|, n \in \mathbb{N}$ hội tụ từng điểm nhưng không hội tụ đều trên $\mathbb{R}$.

Chương 2:

ÁNH XẠ LIÊN TỤC, TẬP COMPẮC, TẬP LIÊN THÔNG ĐƯỜNG

2.1. Cho E là một không gian mêtríc và A là tập con khác trống của E. Chứng minh rằng hàm đặc trưng χ_A của A xác định là :

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 \text{ nếu } x \notin A \\ 0 \text{ nếu } x \in A \end{cases}$$

liên tục trên E nếu và chỉ nếu A là tập vừa đóng vừa mở trong E.

Bài giải:

- **Chiều thuận:**

Giả sử χ_A liên tục trên E, suy ra: A đóng, do $A = \chi_A^{-1}(\{1\})$ và A mở, do $A = \chi_A^{-1}(\{0\})$.

- **Chiều đảo:**

Giả sử A vừa mở, vừa đóng trong E thì với F là tập mở bất kì trong $\mathbb{R}$, ta có:

$$\chi_A^{-1}(F) = \begin{cases} E & \text{nếu } 0 \in F \text{ và } 1 \in F \\ A & \text{nếu } 0 \notin F \text{ và } 1 \in F \\ E \backslash A & \text{nếu } 0 \in F \text{ và } 1 \notin F \\ \emptyset & \text{nếu } 0 \notin F \text{ và } 1 \in F \end{cases}$$

Do đó: χ_A liên tục trên E.

Vậy ta có điều phải chứng minh.

2.2. Cho $f : E \to F$ là một ánh xạ từ không gian mêtríc E vào không gian mêtríc F và A là một tập mở trong E. Chứng minh rằng $f|_A$ liên tục tại $x \in A$ nếu và chỉ nếu f liên tục tại x. Hơn nữa, chứng tỏ rằng điều kiện A là tập mở không thể bỏ được.

Bài giải:

* Với $x \in A$, ta cần chứng minh: $f|_A$ liên tục tại x khi và chỉ khi f liên tục tại x.

Chiều thuận: Ta cần chứng minh f liên tục tại x thì $f|_A$ liên tục tại x.

Để chứng minh $f|_A$ liên tục tại x, ta cần chứng minh:

Với mọi dãy $\{x_n\}$ trong A hội tụ về x thì $\{f|_A(x_n)\}$ hội tụ về $f|_A(x)$.

Ta có: f liên tục tại x tức là $f(x_n)$ hội tụ về $f(x)$,

Mà $A \subset E$, do đó $\{f|_A(x_n)\}$ hội tụ về $f|_A(x)$. Vậy ta đã chứng minh xong.

Chiều đảo: Ta chứng minh $f|_A$ liên tục tại x thì f liên tục tại x .

Để chứng minh f liên tục tại x, ta cần chứng minh:

Với mọi dãy $\{x_n\}$ trong E hội tụ về x thì $\{f(x_n)\}$ hội tụ về $f(x)$.

Trước hết, ta sẽ chứng minh tồn tại N sao cho: $x_n \in A$ với mọi $n > N$.

Do A mở trong E và $x \in A$ nên tồn tại $\varepsilon > 0$ sao cho $B(x, \varepsilon) \subset A$.

Do $\{x_n\}$ trong E hội tụ về x, nên tồn tại N sao cho: $\delta(x_n, x) < \varepsilon$ với mọi $n > N$.

Suy ra $x_n \in B(x, \varepsilon) \subset A$ với mọi $n > N$.

Dẫn đến $\{x_n\}_{n>N}$ là dãy trong A hội tụ về x. Mà ta có $f|_A$ liên tục tại x, nên: $\{f(x_n)\}$ hội tụ về $f(x)$. Ta có điều phải chứng minh.

*Chứng minh điều kiện A là tập mở không thể bỏ được:

Lấy $E = F = \mathbb{R}$, $A = \mathbb{Q}$ và $f = \chi_{\mathbb{Q}}$

Ta có : $\mathbb{R}$ là không gian mêtríc, $\mathbb{Q}$ là tập không mở, hàm đặc trưng $\chi_{\mathbb{Q}}$ của $\mathbb{Q}$ xác định là:

$$\chi_{\mathbb{Q}}(x) = \begin{cases} 1 & \text{nếu } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{nếu } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

Lúc này, hàm $f = \chi_{\mathbb{Q}}$ liên tục trên $\mathbb{Q}$ nhưng không liên tục trên $\mathbb{R}$.

Vì vậy, điều kiện A là tập mở không bỏ được.

2.3. Cho E là một không gian mêtríc và $f : E \to E$ là một ánh xạ liên tục. Chứng minh rằng tập hợp các điểm bất động của f

$$A = \{x \in E \mid f(x) = x\}$$

là một tập đóng trong E.

<u>Bài giải:</u>

Ta cần chứng minh $A = \{x \in E \mid f(x) = x\}$ là một tập đóng trong E.

Thật vậy, xét dãy bất kì $\{x_n\}$ trong A hội tụ về x trong E. Cần chứng minh $x \in A$.

Do $f(x_n) = x_n \ \ \forall n \in \mathbb{N}$ và f là ánh xạ liên tục trên E nên $\{f(x_n)\}$ hội tụ về $f(x)$.

Suy ra: $f(x) = x$ hay $x \in A$.

Vậy A đóng trong E.

2.4. Cho f và g là các hàm số liên tục trên không gian mêtríc E. Chứng minh rằng các hàm số $\sup(f, g)$ và $\inf(f, g)$ liên tục. Suy ra các hàm số f^+và f^- cũng liên tục.

<u>Bài giải:</u>

Với các hàm số $\sup(f, g), \inf(f, g)$ được xác định như sau:

$$\sup(f, g) = \frac{f + g + |f - g|}{2}$$

$$\inf(f, g) = \frac{f + g - |f - g|}{2}$$

Vì vậy, để chứng minh hai hàm số trên liên tục, ta chỉ cần chứng minh $|f-g|$ liên tục.

Đặt $h = f - g,$ ta sẽ chứng minh $|h|$ liên tục.

Ta có: f, g liên tục trên không gian mêtríc E nên h liên tục trên không gian mêtríc E, suy ra h^2 liên tục trên không gian mêtríc E, vì vậy $\sqrt{h^2} = |h|$ liên tục trên không gian mêtríc E.

Do đó: $|f-g|$ liên tục trên không gian mêtríc E.

Vậy hàm $\sup(f,g), \inf(f,g)$ liên tục trên không gian mêtríc E.

Từ đây suy ra hai hàm $f^+ = \sup(f,0)\,, f^- = \inf(f,0)$ cũng liên tục.

2.5. Cho f và g là hai ánh xạ liên tục từ không gian mêtríc X vào không gian mêtríc Y. Giả sử A là tập con khác trống của X sao cho $f(x) = g(x)\ \forall x \in A$. Chứng minh rằng $f(x) = g(x)\ \forall\, x \in \bar{A}$.

Bài giải:

Ta có $f(x) = g(x)$ với mọi $x \in A$, và ta cần chứng minh $f(y) = g(y)$ với mọi $y \in \overline{A}$.

Xét y bất kì trong $\overline{A}$, ta sẽ chứng minh $f(y) = g(y)$.

Thật vậy, theo định nghĩa của $\overline{A}$, tồn tại một dãy $\{y_n\}$ trong A sao cho $\{y_n\}$ hội tụ về y.

Mà $f(y_n) = g(y_n)$ với mọi n nên:

$$f(y) = \lim_{n\to\infty} f(y_n) = \lim_{n\to\infty} g(y_n) = g(y)$$

Suy ra $f(y) = g(y)$ với mọi $y \in \overline{A}$.

2.6. Cho X và Y là hai không gian mêtríc và f là một ánh xạ từ X vào Y sao cho $f|_K$ liên tục với mọi tập compắc $K \subset X$. Chứng minh f liên tục trên X.

Bài giải:

Trước hết lấy dãy $\{x_n\}$ trong X, hội tụ về $x \in X$. Ta sẽ chứng minh rằng tập $K = \{x_n | n \in \mathbb{N}\} \cup \{x\}$ là tập compắc.

Lấy $W = \cup_{i \in I} W_i$ là phủ mở của K. Ta chứng minh W có phủ con hữu hạn.

Ta có $x \in K$ nên $x \in W$.

Mà $W = \bigcup_{i \in I} W_i \Longrightarrow$ tồn tại $t \in I$ sao cho $x \in W_t$.

Mặt khác W_t là tập mở nên x là điểm trong của W_t , nghĩa là tồn tại $\varepsilon > 0$ sao cho $B(x, \varepsilon) \subset W_t$.

Ta có $\{x_n\}$ là dãy hội tụ về x nên tồn tại $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ đủ lớn sao cho:

Với mọi $n > N_\varepsilon$ thì $\{x_n\} \subset B(x, \varepsilon)$ nên $K \subset B(x, \varepsilon)$, dẫn đến K là tập bị chặn.

Do đó theo định lý Heine-Borel-Weierstrass thì tồn tại một họ con hữu hạn W_{n_k} phủ K:

$$K \subset \bigcup_{k \in I'} W_{n_k}$$

Vậy K compắc.

Vì $f|_K$ liên tục trên K nên theo chứng minh ở **bài 2.2** ta được f liên tục trên X.

2.7. Cho f là một ánh xạ liên tục từ không gian mêtríc X vào không gian mêtríc Y. Gọi $\Gamma = \{(x, f(x)) \in X \times Y | x \in X\}$ là đồ thị của f. Chứng minh rằng đồ thị của f là tập đóng trong $X \times Y$.

Bài giải:

$\Gamma = \{ (x, f(x)) \in X \times Y | x \in X \}$ là đồ thị của f

Lấy dãy $\{(x_n, y_n)\} \subset \Gamma$ sao cho (x_n, y_n) hội tụ về (x, y) trong $X \times Y$.

Suy ra $\{x_n\}$ hội tụ về x và $\{y_n\}$ hội tụ về y.

Vì f liên tục nên $\{f(x_n)\}$ hội tụ về $f(x)$.

Mặt khác: $f(x_n) = y_n$, nên $\{f(x_n)\}$ hội tụ về y.

Nên theo tính chất duy nhất của giới hạn thì $y = f(x)$.

Do đó $(x, y) \in \Gamma$ hay Γ là tập đóng trong $X \times Y$.

2.8. Cho $f : [0,1] \to [0,1]$ và f liên tục. Chứng minh rằng f có điểm bất động trong [0,1], nghĩa là có $x \in [0,1]$ sao cho $f(x) = x$.

Bài giải:

Gọi g là ánh xạ xác định trên [0,1] thoả : $g(x) = f(x) - x$

Theo giả thiết, ta suy ra: $\begin{cases} g \text{ liên tục trên } [0,1] \\ f(0) \geq 0 \\ f(1) \leq 1 \end{cases}$

Tức là: $\begin{cases} g \text{ liên tục trên } [0,1] \\ g(0) = f(0) - 0 \geq 0 \\ g(1) = f(1) - 1 \leq 0 \end{cases}$

Do đó : $\begin{cases} g \text{ liên tục trên } [0,1] \\ g(0).g(1) \leq 0 \end{cases}$

Nên tồn tại $t \in [0,1]$ sao cho $g(t) = 0$, tức là tồn tại $t \in [0,1]$ để $f(t) = t$.

2.9. Cho (E, δ_E) và (F, δ_F) là các không gian mêtríc và f là một ánh xạ từ E vào F. Biết rằng
f là một đồng phôi nghĩa là f song ánh, f liên tục, và f^{-1} liên tục. Chứng minh rằng :

i. E compắc nếu và chỉ nếu F compắc.

ii. E liên thông đường nếu và chỉ nếu F liên thông đường.

<u>Bài giải:</u>

f là song ánh từ E vào F nên $f(E) = F$ (*) hay $f^{-1}(F) = E$ (**)

a) Giả sử E compắc, do f liên tục trên E nên từ (*) ta có F compắc.

Đảo lại, giả sử F compắc, do f^{-1} cũng liên tục trên F nên từ (**) ta có E compắc.

Vậy E compắc nếu và chỉ nếu F compắc.

b) **Chiều thuận**: E liên thông đường $\Longrightarrow$ F liên thông đường.

Để chứng minh F liên thông đường thì ta sẽ chứng minh: Tồn tại 1 ánh xạ h liên tục, h: $[0,1] \longmapsto F$ sao cho: $\begin{cases} h(0) = m \\ h(1) = n \end{cases}$ $(m, n \in F)$.

Theo giả thuyết, ta có E liên thông đường nên tồn tại 1 ánh xạ g liên tục, g: $[0,1] \longmapsto E$ và $\begin{cases} g(0) = a \\ g(1) = b \end{cases}$ $(a, b) \in E.$

Từ đây, ta thấy ánh xạ fog liên tục (vì f, g liên tục) và:

$+fog(0) = f(a) = k \quad (k \in F).$

$+fog(1) = f(b) = l \quad (l \in F).$

Do vậy, với $h = fog$ thì h liên tục, h: $[0,1] \longmapsto F$ và $\begin{cases} h(0) = k \\ h(1) = l \end{cases}$ $(k, l \in F)$.

Suy ra F liên thông đường.

Chiều đảo: F liên thông đường $\Longrightarrow E$ liên thông đường.

(Tương tự chiều thuận)

2.10. Cho E và F là hai không gian mêtríc và f là một song ánh liên tục từ E vào F. Chứng minh rằng nếu E compắc thì f là một đồng phôi.

Bài giải:

Để chứng minh f là một đồng phôi, ta sẽ chứng minh f^{-1} liên tục trên F.

Thật vậy :

Xét $f^{-1} : F \to E$. Với X đóng trong E thì X compắc và do f liên tục nên $(f^{-1})^{-1}(X) = f(X)$ compắc và do đó đóng trong F.

Vậy f^{-1} liên tục trên F hay f là một đồng phôi.

2.11. Tìm các giới hạn :

a) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{2x}{2+3x^2+y^2}$

b) $\lim\limits_{(x,y)\to(1,1)} \ln(1+x^2y^2)$

c) $\lim\limits_{(x,y)\to(3,5)} \sqrt{x^2+y^2-1}$

d) $\lim\limits_{(x,y)\to(1,-2)} \dfrac{1}{x^2+y^2}$

e) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{e^y \sin x}{x}$

f) $\lim\limits_{(x,y)\to(1,1)} \sqrt[3]{|xy|-1}$

g) $\lim\limits_{(x,y)\to(\pi,0)} x\cos\dfrac{x-y}{4}$

h) $\lim\limits_{(x,y)\to(\infty,\infty)} \dfrac{x+y}{x^2-xy+y^2}$

i) $\lim\limits_{(x,y)\to(+\infty,+\infty)} (x^2+y^2)e^{-(x+y)}$

Bài giải:

a)

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2x}{2+3x^2+y^2} = \frac{2.0}{2+3.0+0} = 0$$

b)

$$\lim_{(x,y)\to(1,1)} \ln(1+x^2y^2) = \ln(1+1) = \ln 2$$

c)

$$\lim_{(X,y)\to(3,5)} \sqrt{x^2+y^2-1} = \sqrt{3^2+5^2-1} = \sqrt{33}$$

d)

$$\lim_{(x,y)\to(1,-2)} \frac{1}{x^2+y^2} = \frac{1}{1^2+(-2)^2} = \frac{1}{5}$$

e)

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{e^y \sin x}{x} = \lim_{y\to 0} e^x . \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = e^0 . 1 = 1$$

f)

$$\lim_{(x,y)\to(1,1)} \sqrt[3]{|xy|-1} = \sqrt[3]{1-1} = 0$$

g)

$$\lim_{(x,y)\to(\pi,0)} x\cos\frac{x-y}{4} = \pi\cos\frac{\pi-0}{4} = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$$

h)

$$\lim_{(x,y)\to(\infty,\infty)} \frac{x+y}{x^2-xy+y^2}$$

Trước hết ta tính:

$$\lim_{(x,y)\to(\infty,\infty)} \left|\frac{x+y}{x^2-xy+y^2}\right| = \lim_{(x,y)\to(\infty,\infty)} \frac{|x+y|}{x^2-xy+y^2}$$

Ta có:

$$|x+y| \le \sqrt{2(x^2+y^2)}$$

$$x^2-xy+y^2 \ge x^2+y^2-\frac{1}{2}(x^2+y^2) = \frac{1}{2}(x^2+y^2)$$

Suy ra:

$$0 \le \frac{|x+y|}{x^2-xy+y^2} \le \frac{2\sqrt{2(x^2+y^2)}}{x^2+y^2} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

Mà:

$$\lim_{(x,y)\to(\infty,\infty)} \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0$$

Nên:

$$\lim_{(x,y)\to(\infty,\infty)} \frac{|x+y|}{x^2-xy+y^2} = 0$$

Vậy:

Chương 2: Ánh xạ liên tục, tập compắc, tập liên thông đường

$$\lim_{(x,y)\to(\infty,\infty)} \frac{x+y}{x^2-xy+y^2} = 0$$

i)

$$\lim_{(\mathbf{x},\mathbf{y})\to(+\infty,+\infty)} (x^2+y^2)e^{-(\mathbf{x}+\mathbf{y})} = \lim_{(x,y)\to(+\infty,+\infty)} \frac{x^2+y^2}{e^{x+y}}$$

Khi $(x, y) \to (+\infty, +\infty)$, ta có:

$$\frac{(x+y)^2}{2e^{x+y}} \le \frac{x^2+y^2}{e^{x+y}} = \frac{(x+y)^2-2xy}{e^{x+y}} \le \frac{(x+y)^2}{e^{x+y}}$$

Đặt $t = x + y \xrightarrow[(x,y)\to(+\infty,+\infty)]{} +\infty$

Ta có:

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{t^2}{e^t} = \lim_{t\to+\infty} \frac{2t}{e^t} = \lim_{t\to+\infty} \frac{2}{e^t} = 0$$

Vậy:

$$\lim_{(x,y)\to(+\infty,+\infty)} (x^2+y^2)e^{-(x+y)} = 0$$

2.12. Các hàm số sau có giới hạn tại (0,0) không ?

a) $\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$

b) $-\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$

c) $\frac{x^4-y^2}{x^4+y^2}$

d) $\frac{x-y}{x+y}$

e) $\frac{x^2}{x^2-y}$

f) $\frac{xy^2}{(x^2+y^2)^{3/2}}$

g) $(x^2+y^2)\sin\frac{1}{\sqrt{(x^2+y^2}}$

h) $\frac{3xy^2}{x^2+y^2}$

i) $\left(\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\right)^2$

j) $\frac{x^2}{x^2+y^2}$

k) $\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$

l) $\frac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}$

<u>Bài giải:</u>

Không tồn tại giới hạn tại (0,0) ở các câu a), b), c), d), e), f), i), j), l).

Thật vậy, với mọi $n \in \mathbb{N}$, xét 2 dãy a_n và b_n cùng hội tụ về (0,0):

a) Với $a_n = \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)$ và $b_n = \left(0, \frac{1}{n}\right)$ nhưng $f(a_n) = 0 \neq f(b_n) = -1$.

b) Với a_n và b_n như câu a).

c) Với $a_n = \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n^2}\right)$ và $b_n = \left(0, \frac{1}{n}\right)$ nhưng $f(a_n) = 0 \neq f(b_n) = -1$.

d) Với a_n và b_n như câu a).

e) Với $a_n = \left(\frac{1}{n}, 0\right)$ và $b_n = (0, \frac{1}{n})$ nhưng $f(a_n) = 1 \neq f(b_n) = 0$.

f) Với a_n và b_n như câu a).

i) Với a_n và b_n như câu a).

j) Với a_n và b_n như câu a).

Xét các câu g), h), k):

g) Ta có:

$$-(x^2+y^2) \leq (x^2+y^2) sin \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \leq (x^2+y^2)$$

Mà:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} x^2+y^2 = 0$$

Nên:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} (x^2+y^2) sin \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0$$

h) Ta có:

$$0 \leq \frac{3|x|y^2}{x^2+y^2} \leq 3|x|$$

Mà:

$$\lim_{x\to 0} |x| = 0$$

Nên:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{3xy^2}{x^2+y^2} = 0$$

k) Ta có:

$$0 \leq \frac{|xy|}{\sqrt{x^2+y^2}} \leq \frac{1}{2}\sqrt{x^2+y^2}$$

Mà:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1}{2}\sqrt{x^2+y^2} = 0$$

Nên:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0$$

2.13. Cho $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ là hàm liên tục và $D_1 \subset D$. Chứng minh rằng hàm $f_1 : D_1 \to \mathbb{R}$ xác định bởi $f_1(x) = f(x)\ \forall x \in D_1$ cũng là hàm liên tục (f_1 được gọi là hàm thu hẹp của f trên D_1).

<u>Bài giải:</u>

Để chứng minh f_1 liên tục trên D_1, ta cần chứng minh :

Với mọi dãy $\{x_n\}$ trong D_1 hội tụ về x trong D_1 thì $f_1(x_n)$ hội tụ về $f_1(x)$.

Vì f liên tục trên D mà $D_1 \subset D$, nên $f(x_n)$ hội tụ về $f(x)$.

Suy ra: $f_1(x_n)$ hội tụ về $f(x)$, do đó: $f_1(x_n)$ hội tụ về $f_1(x)$. (vì $f_1(t) = f(t)$ $\forall t \in D_1$)

Vậy f_1 liên tục trên D_1.

2.14. Cho f, g là hai hàm xác định trên $D \subset \mathbb{R}^2$ và U là một tập mở chứa trong D. Chứng minh rằng nếu f liên tục tại mọi điểm của U và $f(x) = g(x)\ \forall x \in U$ thì g liên tục tại mọi điểm của U.

Bài giải:

Để chứng minh g liên tục tại mọi điểm của $(U \subset D)$:

- Trước hết ta lấy một dãy $\{x_n\}$ bất kì trong D hội tụ về x trong U, ta sẽ chứng minh tồn tại N sao cho: $\{x_n\} \subset U$ với mọi $n > N$.

Do U mở trong D và $x \in U$ nên tồn tại $\varepsilon_0 > 0$ sao cho $B(x, \varepsilon_0) \subset U$.
Do $\{x_n\}$ trong U hội tụ về x nên tồn tại N sao cho: $\delta(x_n, x) < \varepsilon_0$ với mọi $n > N$.
Suy ra $\{x_n\} \subset B(x, \varepsilon_0) \subset U$ với mọi $n > N$.

- Từ trên dẫn đến $\{y_n\} = \{x_n\}_{n>N}$ là dãy trong U hội tụ về x. Mà ta có f liên tục trên U nên $\{(f(y_n)\}$ hội tụ về $f(x)$,

Mặt khác $f(y_n) = g(y_n)$ với mọi $n \in \mathbb{N}$.

Vậy $\{g(y_n)\}$ hội tụ về $g(x)$ hay g liên tục tại mọi điểm của U. (đpcm)

2.15. Cho hàm liên tục $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Chứng minh rằng:

i. Nếu D là một tập mở thì với mọi $k \in \mathbb{R}$, $\{(x, y) | f(x, y) < k\}$ là một tập mở.

ii. Nếu D là một tập đóng thì với mọi $k \in \mathbb{R}$, các tập hợp $\{(x, y) | f(x, y) = k\}$ và $\{(x, y) | f(x, y) \le k\}$ là các tập đóng.

Bài giải:

i. Để chứng minh $U = \{(x, y) \mid f(x, y) < k\}$ là tập mở, ta sẽ chứng minh :

Với mọi $z = (x, y) \in U$, tồn tại $r > 0$ sao cho $B(z, r) \subset U$.
Trước hết, do D là tập mở và $z = (x, y) \in U \subset D$ nên tồn tại $s > 0$ sao cho $B(z, s) \subset D$.
Do $z = (x, y) \in U$ nên $f(z) = p < k$. Đặt $\varepsilon = k - p > 0$. Do đó f liên tục tại z , nên theo định nghĩa, tồn tại $\delta > 0$ sao cho:

$$|f(t) - f(z)| < \varepsilon \ \ \forall t \in B(z, \delta) \cap D.$$

Do đó suy ra: $f(t) < f(z) + \varepsilon = k \ \ \forall t \in B(z, \delta) \cap D$.

Chọn $r = \min(\delta, s)$ ta có : $r \leq \delta$ và $B(z, r) \subset B(z, s) \subset D$.

Nên suy ra : $f(t) < k \ \ \forall t \in B(z, r)$ hay $B(z, r) \subset U$.

Vậy ta có điều phải chứng minh.

ii. Để chứng minh $K = \{(x, y) \mid f(x, y) = k\}$ là tập đóng, ta sẽ chứng minh :

Với mọi dãy $\{z_n\}$ trong K hội tụ về z trong $\mathbb{R}^2$ thì $z \in K$.

Trước hết $K \subset D$ nên suy ra $\{z_n\}$ trong D hội tụ về z trong $\mathbb{R}^2$. Mà theo giả thiết, D là tập đóng. Suy ra $z \in D$. f liên tục trên D nên ta có:

$$k = \lim_{n \to \infty} f(z_n) = f(z).$$

Do vậy $z \in K$, ta có điều phải chứng minh.

Việc chứng minh $C = \{(x, y) \mid f(x, y) \leq k\}$ đóng là hoàn toàn tương tự.

2.16. Tìm $f(0,0)$ để f liên tục tại $(0,0)$

a) $f(x, y) = \frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2}$

b) $f(x, y) = \frac{x + y}{x^2 + y^2}$

<u>Bài giải:</u>

Điều kiện cần và đủ để f liên tục tại $(0,0)$ là :

$$\lim_{(x,y) \to (0,0)} f\,(x, y) = f(0,0)$$

Do đó trước hết ta sẽ tính :

$$\lim_{(x,y) \to (0,0)} f(x, y)$$

(a) $f(x,y) = \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}$

Ta có :

$$0 \leq \frac{|x^3+y^3|}{x^2+y^2} = |x+y|.\frac{x^2-xy+y^2}{x^2+y^2} \leq \frac{3}{2}|x+y|$$

(vì $x^2 - xy + y^2 \leq \frac{3}{2}(x^2+y^2)$ hay $\frac{1}{2}(x+y)^2 \geq 0$)

Mà :

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{3}{2}|x+y| = 0$$

Suy ra :

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2} = 0$$

Nên f liên tục tại (0,0) khi và chỉ khi $f(0,0) = 0$.

(b) $f(x,y) = \frac{x+y}{x^2+y^2}$

Xét dãy $u_n = (\frac{1}{n}, \frac{1}{n})$ hội tụ về (0,0) (khi $n \longrightarrow \infty$).

Khi đó $f(u_n) = n$ phân kì (khi $n \longrightarrow \infty$).

Do đó: **không tồn tại** $f(0,0)$ để f liên tục tại (0,0).

2.17. Xét sự liên tục của các hàm số

a) $f(x,y)=\begin{cases}(x^2+y^2)^{x^2y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 1, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$

b) $f(x,y)=\begin{cases}(x+y)\sin\frac{1}{x}\sin\frac{1}{y}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$

<u>Bài giải:</u>

a) $f(x,y)=\begin{cases}(x^2+y^2)^{x^2y^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 1 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$

Với mọi $(x,y)\neq$ (0,0)

Đặt $g(x,y)$ = ln $f(x,y)$ = x^2y^2 ln (x^2+y^2)

Thì: $0 \leq |g(x,y)| = x^2y^2\,|\ln(x^2+y^2)| \leq \left|\frac{(x^2+y^2)^2}{4}.\ln(x^2+y^2)\right|$

Đặt $t = x^2+y^2 \xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{} 0^+$

Ta tính :

$$\lim_{t-0^+} t^2.\ln t$$

Ta có :

$$\lim_{t\to0^+} t^2.\ln t=\lim_{t\to0^+}\frac{\ln t}{\frac{1}{t^2}}=\lim_{t\to0^+}\frac{\frac{1}{t}}{\frac{-2}{t^3}}=\lim_{t\to0^+}\frac{-1}{2}t^2=0$$

Suy ra :

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} g(x,y) = 0$$

Nên :

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = e^0 = 1 = f(0,0)$$

Vậy f liên tục tại (0,0).

b) $f(x,y) = \begin{cases} (x+y)\sin\frac{1}{x} sin\frac{1}{y} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$

Với mọi $x \neq 0$ và $y \neq 0$:

Ta có: $0 \leq |f(x,y)| = \left|(x+y)\sin\frac{1}{x} sin\frac{1}{y}\right| \leq |x+y| \xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{} 0$

Nên:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0 = f(0,0)$$

Vậy f liên tục tại (0,0).

2.18. Kiểm tra tính compắc của các tập sau trong $\mathbb{R}^2$

a) $\{(x,y)|2x^2 + 3y^2 \leq 1\}$

b) $\{(x,y)|2x^2 + 3y^2 < 1\}$

c) $\{(x,y)|2x^2 + 3y \leq 1\}$

<u>Bài giải:</u>

a) Để chứng minh tập $A = \{(x,y) \mid 2x^2 + 3y^2 \leq 1\}$ là tập compắc. Ta sẽ chứng minh A đóng và bị chặn.

- Chứng minh A đóng :

Lấy một dãy $\{(x_n, y_n)\}$ bất kỳ trong A sao cho $(x_n, y_n) \to (x,y) \in \mathbb{R}^2$. Ta sẽ chứng minh (x,y) chứa trong A.

Ta có $x_n \to x$, $y_n \to y$ nên $2x_n^2 + 3y_n^2 \to 2x^2 + 3y^2$.

Mặt khác, $\{(x_n, y_n)\} \subset A$ nên ta có $2x_n^2 + 3y_n^2 \leq 1 \ \forall n \in \mathbb{N}$.

Suy ra, $2x^2 + 3y^2 \leq 1$. Điều này chứng tỏ (x,y) chứa trong A.

- Chứng minh A bị chặn :

Lấy (x, y) bất kì trong A. Ta nhận thấy: $x^2 + y^2 \leq 2x^2 + 3y^2 \leq 1$.
Suy ra $(x, y) \in B'(0,1)$.
Nên $A \subset B'(0,1)$ và A bị chặn.

Vậy A là tập compắc.

b) Để chứng minh $B = \{(x, y) \mid 2x^2 + 3y^2 \leq 1\}$ không là tập compắc, ta sẽ chứng minh B không đóng.

Xét dãy $(x_n, y_n) = (0, \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{3n})$.

Với $n \in \mathbb{N}$, ta có $2x_n^2 + 3y_n^2 = 3\left(\frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{3n}\right)^2 < 3\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 = 1$. Do đó $\{(x_n, y_n)\} \subset B$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Cho $n \to \infty$, nhận thấy $(x_n, y_n) \to (\frac{1}{\sqrt{2}}, 0) \notin B$ (do $2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + 3.0^2 = 1$)

(x_n, y_n) là một dãy chứa trong B hội tụ về một phần tử không thuộc B. Điều này chứng tỏ B không phải là tập đóng nên không compắc.

c) Để chứng minh $C = \{(x_n, y_n) \mid 2x^2 + 3y \leq 1\}$ không là tập compắc, ta sẽ chứng minh C không bị chặn.

Xét dãy $(x_n, y_n) = (0, -n)$.

Với $n \in \mathbb{N}$, ta có $2x_n^2 + 3y_n = -3n < 1$. Do đó $(x_n, y_n) \in C$ $\forall n \in \mathbb{N}$

Cho $n \to \infty$, nhận thấy $y_n \to -\infty$, C chứa một dãy không bị chặn, do đó phải là tập không bị chặn và không compắc.

Bài Tập Mở Rộng

1. Xét tính liên tục các hàm:

a. $f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy(x+y)}{x^2+y^2} & ,(x,y) \neq (0,0) \\ 0 & ,(x,y) = (0,0) \end{cases}$

b. $f(x,y) = \begin{cases} \frac{e^{xy}-1}{2xy} & ,(x,y) \neq (0,0) \\ 0 & ,(x,y) = (0,0) \end{cases}$

c. $f(x,y) = \begin{cases} \frac{xsiny-ysinx}{x^2+y^2} & ,(x,y) \neq (0,0) \\ 0 & ,(x,y) = (0,0) \end{cases}$

2. Tìm giới hạn khi $(x,y) \to (0,0)$ của các hàm số sau:

a. $f(x,y) = \frac{xy}{x^2-xy+y^2}$

b. $f(x,y) = \frac{x^\alpha y^\beta}{x^2-xy+y^2}$ $,(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$

c. $f(x,y) = \frac{1+x^2+y^2}{y^2}(1-cosy)$

d. $f(x,y) = \frac{sinx-siny}{shx-shy}$ $,shx = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}), \forall x \in \mathbb{R}$

3. Cho $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa $f(x+y) = f(x) + f(y), \forall x, y \in \mathbb{R}$. Chứng minh nếu f liên tục tại 0 thì f liên tục.

4. Cho $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa $f(x+y) = f(x)f(y), \forall x, y \in \mathbb{R}$. Chứng minh nếu f liên tục tại 0 thì f liên tục.

5. Cho $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ liên tục. Chứng minh nếu A $\subset \mathbb{R}^n$ là tập bị chặn thì $f(A)$ là tập bị chặn.

6. Chứng minh hàm $f(x) = sin\frac{1}{x}$ liên tục và bị chặn nhưng không liên tục đều trên $(0,+\infty)$.

7. Cho $f : E \to \mathbb{R}$, E liên thông. Chứng minh nếu $f(x) \neq 0, \forall x \in E$ thì $f(x)$ luôn dương hay luôn âm $\forall x \in E$.

8. Cho (X, d) là không gian mêtríc compact và ánh xạ $X \to X$ thỏa mãn:

$$d\big(f(x), f(y)\big) < d(x, y), \forall x, y \in X, x \neq y$$

Chứng minh tồn tại duy nhất điểm $x_0 \in X$ thỏa mãn $x_0 = f(x_0)$.

9. Cho không gian mêtríc $(X, d), (Y, p)$ và ánh xạ $f: X \to Y$.Trên X x Y, xét mêtríc:

$$d_1\left((x, y), (x', y')\right) = d(x, x') + p(y, y'), (x, y), (x', y') \in X \text{ x } Y$$

Và xét tập hợp $G = \{\big(x, f(x)\big): x \in X\}$.

a. Giả sử f liên tục, chứng minh G là tập đóng.

b. Giả sử G là tập đóng và (Y, p) là không gian compact, chứng minh f liên tục.

10. Chứng minh các tập sau có tính compact :

a. $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 243^{x^2+2011y^2} \leq 9\}$

b. $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\} \mid \frac{x^2y^2}{(x^2+y^2)^2} \geq \frac{1}{4}\}$

c. $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid |x| + |y| + |z| + 36|xyz| \leq \sqrt[12]{3.12^{14}|x|^7y^8|z|^9}\}$

11. Chứng minh quan hệ "đồng phôi" là quan hệ tương đương.

12. Chứng minh rằng:

a. Nếu $f : X \to Y$ là một phép đồng phôi thì $f^{-1} : Y \to X$ cũng là một phép đồng phôi.

b. Nếu $f : X \to Y$ và $g : Y \to Z$ là những phép đồng phôi thì $gf : X \to Z$ cũng là một phép đồng phôi.

13. Chứng minh nếu A liên thông thì $\bar{A}$ cũng liên thông.

<u>Chương 3:</u>

KHÔNG GIAN MÊTRÍC ĐẦY ĐỦ VÀ KHÔNG GIAN BANACH

3.1. Cho X là một không gian mêtríc sao cho mọi quả cầu đóng thì compắc. Chứng minh rằng X đầy đủ.

<u>Bài giải:</u>

Chứng minh X đầy đủ :

Lấy dãy $\{x_n\}$ Cauchy trong X thì $\{x_n\}$ bị chặn.

Vậy $\exists\ r > 0$ sao cho $\{x_n\} \subset B'(x, r)$.

Theo giải thuyết mọi quả cầu đóng thuộc X thì compắc.

Suy ra $B'(x, r) \subset X$ là tập compắc.

Vậy $\{x_n\} \subset B'(x, r)$ nên $\exists\ \{x_{n_k}\}$ hội tụ về $x \in B'(x, r)$ suy ra $x \in X$.

Có nghĩa là cho $\varepsilon > 0$, $\exists\ n_0 > 0$ sao cho $d(x_{n_k}, x) < \frac{\varepsilon}{2}$ với $\forall\ n_k > n_0$.

Do $\{x_n\}$ là dãy Cauchy .

Cho $\varepsilon > 0$, $\exists\ n'_0 > 0$ sao cho $d(x_n, x_m) < \frac{\varepsilon}{2}$ với $\forall\ m \geq n > n'_0$.

Ta có :

Với $\varepsilon > 0$ Ta có : $d(x_n, x) \leq d(x_n, x_m) + d(x_m, x) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$

với $\forall\ n > max(n_0, n'_0)$.

Vậy $\{x_n\}$ hội tụ về $x \in X$.

Do đó X là không gian đầy đủ.

3.2. Cho f là một ánh xạ liên tục đều từ không gian mêtríc (X, δ_X) vào không gian mêtríc (X, δ_Y). Chứng minh rằng nếu $\{x_n\}$ là dãy Cauchy trong X thì $\{f(x_n)\}$ là dãy Cauchy trong Y.

Bài giải:

Giả sử $\{x_n\}$ là một dãy Cauchy trong không gian mêtríc X.

Ta cần chứng minh $\{f(x_n)\}$ là một dãy Cauchy trong không gian mêtríc Y.

Xét $\varepsilon > 0$ bất kì. Ta cần tìm một $N > 0$ sao cho với $\forall\, m, n > N$ ta đều có $\delta_Y(f(x_m), f(x_n)) < \varepsilon$

Trước hết vì f là một ánh xạ liên tục đều.

$\forall \varepsilon > 0, \exists\, \delta > 0, \forall x, x' \in X$ sao cho $\delta_X(x, x') < \delta$ thì $\delta_Y(f(x), f(x')) < \varepsilon$

Mặt khác $\{x_n\}$ là dãy Cauchy ta có :

$\forall \varepsilon' > 0, \exists\, N(\varepsilon') > 0$ sao cho $\delta_X(x_m, x_n) < \varepsilon'$ với $\forall\, m < n > N(\varepsilon')$

Cho $\varepsilon' = \delta$, chọn $N = N(\delta)$.

Khi đó, với $\forall\, m, n > N$ sao cho $\delta_X(x_m, x_n) < \delta$ thì $\delta_Y(f(x_m), f(x_n)) < \varepsilon$.

Vậy $\{f(x_n)\}$ là dãy Cauchy trong Y.

3.3. Cho (E, δ_E) và (F, δ_F) là các không gian mêtríc và f là một song ánh từ E vào F. Cho f là một đồng phôi, nghĩa là f và f^{-1} liên tục trên E và F. Nếu E đầy đủ thì F có đầy đủ không?

Bài giải:

Xét ánh xạ : $f: \mathbb{R} \to \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

$x \mapsto arctan(x)$

Với ánh xạ $f(x) = arctan(x)$ này là song ánh và là hàm liên tục trên $\mathbb{R}$.

Ánh xạ ngược : $f^{-1}:\ (-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})\ \to\ \mathbb{R}$

$x\quad \mapsto \tan x$

Ánh xạ ngược này là hàm liên tục trên $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ vậy f là một đồng phôi.

$E=\mathbb{R}$ là tập đầy đủ .

Chọn dãy $\{x_n\}$với $x_n=\frac{\pi}{2}-\frac{1}{n}$, do đó $\{x_n\}$ chứa trong $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$

Ta chứng minh $\{x_n\}$ là dãy Cauchy nhưng không hội tụ trong $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$

Ta có $|x_n\text{-}x_m|=\left|\frac{1}{n}-\frac{1}{m}\right|$

Cho $\varepsilon>0$, chọn $n_0>\frac{2}{\varepsilon}$ ta có$\left|\frac{1}{n}-\frac{1}{m}\right|\le\left|\frac{1}{n}\right|+\left|\frac{1}{m}\right|\le\frac{1}{n_0}<\varepsilon$

Vậy $\{x_n\}$ là dãy Cauchy.

Ta có $|x_n-\frac{\pi}{2}|=|\frac{1}{n}|\to 0$ khi $n\to\infty$ nên $\{x_n\}\to\frac{\pi}{2}$ không thuộc $(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$

Nên $F=(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$ không đầy đủ .

3.4. Cho f là một đẳng cự từ không gian mêtríc (E,δ_E) vào không gian mêtríc (E,δ_F) nghĩa là $(\delta_F(f(x),\left(f(y)\right)=\delta_E(x,y)$. Chứng minh rằng nếu E đầy đủ thì $f(E)$ đầy đủ.

Bài giải:

Xét một dãy bất kỳ $\{y_n\}$ trong $f(E)$ ta chứng minh $\{y_n\}$ hội tụ trong $f(E)$

Do y_n thuộc $f(E)$ nên tồn tại x_n thuộc E sao cho $y_n=f(x_n)$.

Theo giả thiết E đầy đủ nên mọi dãy Cauchy $\{x_n\}$ trong E đều hội tụ trong E .

Nghĩa là $\forall\varepsilon>0$,$\exists N_0>0$ sao cho $\delta_E(x_n,x_m)<\varepsilon$ với $\forall m,n>N_0$.(1)

Theo giả thiết ta có $\delta_E(x_n,x_m)=\ \delta_F(f(x_n),f(x_m))$ (2)

Từ (1) & (2) :

Ta có: $\forall \varepsilon > 0 , \exists N_0' > 0$ sao cho $\delta_F\big(f(x_n), f(x_m)\big) < \varepsilon$ với $\forall\, m, n > N_0$'

Vậy $\{y_n\} \subset f(E)$ là dãy Cauchy . $(*)$

Lại theo giả thiết $\{x_n\}$ là dãy hội tụ trong E nên $\exists x \in E$.

Nghĩa là :

$\forall \varepsilon > 0 , \exists N_0 > 0$ sao cho $\delta_E(x_n, x) < \varepsilon$ với $\forall n > N_0$ (3)

Theo giả thiết ta có $\delta_E(x_n, x) = \delta_F(f(x_n), f(x))$ (4)

Từ (3) & (4) :

Suy ra $\forall \varepsilon > 0 , \exists\, N_0'' > 0$ sao cho $\delta_F(f(x_n), f(x)) < \varepsilon$ với $\forall n > N_0$''

Suy ra $\{y_n\} = \{f(x_n)\}$ hội tụ về $f(x) \in f(E)$ $(**)$.

Từ $(*)$ & $(**)$

Ta có $f(E)$ là không gian đầy đủ .

3.5. Chứng minh rằng không gian mêtríc $X \times Y$ đầy đủ nếu và chỉ nếu X, Y là các không gian mêtríc đầy đủ.

Bài giải:

i)

Giả sử X, Y là các không gian mêtríc đầy đủ ta chứng minh $X \times Y$ đầy đủ.

X là không gian mêtríc đầy đủ với mọi dãy Cauchy $\{x_n\}$ trong X

Nghĩa là $\forall\, \varepsilon > 0 , \exists\, N_0 > 0$ sao cho $\delta_E(x_n, x_m) < \frac{\varepsilon}{2}$ với $\forall\, m, n > N_0$.

Y là không gian mêtríc đầy đủ với mọi dãy Cauchy $\{y_n\}$ trong Y

Nghĩa là $\forall\, \varepsilon > 0 , \exists\, N_0' > 0$ sao cho $\delta_F(y_n, y_m) < \frac{\varepsilon}{2}$ với $\forall\, m, n > N_0'$.

Xét dãy $a_n = (x_n , y_n)$ bất kỳ thuộc $X \times Y$

$\forall \varepsilon > 0 , \exists\, N_0'' = \max(N_0, N_0') > 0$ ta có :

$\delta_{E\times F}(a_n, a_m) \leq \delta_E(x_n, x_m) + \delta_F(y_n, y_m) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$ với $\forall\, m, n > N_0$''

Vậy $\{a_n\} \subset X \times Y$ là dãy Cauchy . $(*)$

X là không gian mêtríc đầy đủ nên dãy Cauchy $\{x_n\}$ hội tụ về $x \in X$

Nghĩa là $\forall\, \varepsilon > 0$, $\exists\, N_0 > 0$ sao cho $\delta_E(x_n, x) < \frac{\varepsilon}{2}$ với $\forall\, m, n > N_0$.

Y là không gian mêtríc đầy đù nên dãy Cauchy $\{y_n\}$ hội tụ về $y \in Y$

Nghĩa là $\forall\, \varepsilon > 0$, $\exists\, N_0 > 0$ sao cho $\delta_F(y_n, y) < \frac{\varepsilon}{2}$ với $\forall\, m, n > N_0$.

Xét dãy $a_n = (x_n, y_n)$ bất kỳ thuộc $X \times Y$.

$\forall \varepsilon > 0$, với $N_0'' = \max(N_0, N_0{}')> 0$ ta có

$\delta_{E\times F}(a_n, a) \leq \delta_E(x_n, x) + \delta_F(y_n, y) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$ với $\forall\, m, n > N_0{}'$

Vậy $\{a_n\} \subset X \times Y$ là dãy hội tụ về $a = (x, y) \in X \times Y$. $(**)$

Từ $(*)$ & $(**)$ suy ra không gian $X \times Y$ đầy đủ .

ii)

Giả sử $X \times Y$ đầy đủ, chứng minh X, Y đầy đủ.

Xét dãy $\{x_n\} \subset X$

Vì $X \times Y$ là không gian đầy đủ với mọi dãy Cauchy $a_n = (x_n, y_n) \subset X \times Y$

Nghĩa là $\forall\, \varepsilon > 0$, với $N_0 > 0$ sao cho $\delta_{E\times F}(a_n, a_m) < \varepsilon$ với $\forall\, m, n > N_0$.

Ta có: $\delta_E(x_n, x_m) \leq \delta_{E\times F}(a_n, a_m) < \varepsilon$ với $\forall\, m, n > N_0$.

Vậy $\{x_n\}$ là dãy Cauchy .(1)

Mặt khác $X \times Y$ là không gian đầy đủ nên $a_n = (x_n, y_n)$ hội tụ về $a = (x, y) \in X \times Y$

Nghĩa là $\forall\, \varepsilon > 0$, với $N_0{}' > 0$ sao cho $s_{E\times F}(a_n, a) < \varepsilon\ \forall\, n > N_0{}'$

Ta có: $\delta_E(x_n, x) \leq \delta_{E\times F}(a_n, a) < \varepsilon$ với $\forall n > N_0'$

Vậy $\{x_n\}$ là dãy hội tụ về $x \in X$ (2)

Từ (1) & (2) ta suy ra không gian X là đầy đủ .

Tương tự chứng minh Y đầy đủ.

3.6. Giả sử $\{p_n\}$ và $\{q_n\}$ là hai dãy Cauchy trong không gian mêtríc (X,δ). Chứng minh rằng $\{\delta(p_n,q_n)\}$ hội tụ.

<u>Bài giải:</u>

Để chứng minh $\{\delta(p_n,q_n)\}$ hội tụ, ta chứng minh $\{\delta(p_n,q_n)\}$ là dãy Cauchy trong $\mathbb{R}$, nghĩa là ta cần chứng minh :

$$\forall\ \varepsilon > 0, \exists N > 0 \text{ sao cho: } |\delta(p_n,q_n) - \delta(p_m,q_m)| < \varepsilon\ \ \forall n,m > N$$

Ta có 2 bất đẳng thức sau :

$$\begin{cases}\delta(p_n,q_n) \le \delta(p_n,p_m) + \delta(p_m,q_m) + \delta(q_m,q_n)\\ \delta(p_m,q_m) \le \delta(p_m,p_n) + \delta(p_n,q_n) + \delta(q_n,q_m)\end{cases}$$

Chuyển vế ta được : $\begin{cases}\delta(p_n,q_n) - \delta(p_m,q_m) \le \delta(p_n,p_m) + \delta(q_m,q_n)\\ \delta(p_m,q_m) - \delta(p_n,q_n) \le \delta(p_m,p_n) + \delta(q_n,q_m)\end{cases}$

Do đó, suy ra $|\delta(p_n,q_n) - \delta(p_m,q_m)| \le \delta(p_n,p_m) + \delta(q_n,q_m)$

Mặt khác, theo giả thiết, $\{p_n\}$ và $\{q_n\}$ là dãy Cauchy.

Cho $\varepsilon > 0$, $\exists K, M > 0$ sao cho: $\delta(p_n,p_m) < \frac{\varepsilon}{2}$ với $\forall n,m > K$.

$$\delta(q_n,q_m) < \frac{\varepsilon}{2} \text{ với } \forall n,m > M.$$

Chọn $N = \max(K,M)$, khi đó ta có: $\forall\ n,m > N$

$$|\delta(p_n,q_n) - \delta(p_m,q_m)| \le \delta(p_n,p_m) + \delta(q_n,q_m) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Suy ra $\{\delta(p_n,q_n)\}$ là dãy Cauchy trong $\mathbb{R}$.

Vậy dãy $\delta(p_n,q_n)\}$ hội tụ trong $\mathbb{R}$.

3.7. Chứng minh các toán tử tuyến tính sau liên tục và tính chuẩn của nó :

a) $A : C[0,1] \to C[0,1]; Ax(t) = \int_0^t x(s)ds$

b) $A : C[-1,1] \to C[0,1]$; $Ax(t) = \int_0^t x(s)ds$

c) $A : C[-1,1] \to C[0,1]$; $Ax(t) = x(t)$

d) $A : C[0,1] \to C[0,1]$; $Ax(t) = t^2 x(0)$

e) $A : C[0,1] \to C[0,1]$; $Ax(t) = x(t^2)$

f) $A : C^1[0,1] \to C[0,1]$; $Ax(t) = x(t)$

g) $A : C^1[0,1] \to C[0,1]$; $Ax(t) = x'(t)$

Bài giải:

a) $A : C[0,1] \to C[0,1]$; $Ax(t) = \int_0^t x(s)ds$

1. Chứng minh ánh xạ $Ax \in C[0,1]$:

Cho $x \in C[0,1]$. Chứng minh $Ax \in C[0,1]$

Chứng minh: $\int_0^t x(s)ds$ liên tục trên $[0,1]$

Ta có $\forall t_{1,} t_2 \in [0,1]$ $(t_1 < t_2)$, thì :

$|Ax(t_2) - Ax(t_1)| = \left|\int_0^{t_2} x(s)ds - \int_0^{t_1} x(s)ds\right| = \left|\int_{t_1}^{t_2} x(s)ds\right| \le \int_{t_1}^{t_2} |x(s)|ds \le \int_{t_1}^{t_2} \|x\|ds = \|x\|(t_2 - t_1)$.

(Vì $\|x\| = \sup|x(t)|, \forall t \in [0,1]$. Suy ra $\|x\| \ge |x(t)|, \forall t \in [0,1]$)

Vậy $\int_0^t x(s)ds$ liên tục trên $[0,1]$.

2. Chứng minh ánh xạ A tuyến tính :

Ta có : $\forall\, x(t), y(t) \in C[0,1]$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ thì :

$$A[x(t)+\alpha y(t)] = \int_0^t [x(t)+\alpha y(t)]\, ds = \int_0^t x(t)\, ds + \alpha \int_0^t y(t)\, ds$$

$= \int_0^t x(t)\, ds + \alpha \int_0^t y(t)\, ds = Ax(t) + \alpha Ay(t).$

Suy ra A là ánh xạ tuyến tính .

3. Tính liên tục :

Ta có : $\forall t \in [0,1]$ thì

$$|A(x)| = \left|\int_0^t x(s)ds\right| \le \int_0^t |x(s)|ds \le \int_0^t \|x\|ds = |t|\|x\|.$$

Từ đó : $||A(x)|| \le \sup|A(x)| \le \sup(|t|\|x\|) = \|x\|\sup|t| = \|x\|.$

Suy ra $||A(x)|| \le ||x||$. (∗)

Vậy A là ánh xạ liên tục.

4. Tính chuẩn :

Từ (∗), ta có $\frac{\|Ax\|}{\|x\|} \le 1 \quad \forall x \in C[0,1]$. Vì vậy nên : $||A|| \le 1.$ (1)

Chọn $x(t) = 1 \quad \forall t \in [0,1].$

Ta được :

$$\|Ax\| = \sup|Ax(t)|_{t\in[0,1]} = \sup\left|\int_0^t ds\right|_{t\in[0,1]} = \sup (t)_{t\in[0,1]} = 1$$

$$\|x\| = \sup|x(t)|_{t\in[0,1]} = 1$$

Nên $\|A\| = \sup_{t\in[0,1]} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} \ge 1$ (2)

Từ (1) & (2) ta có $||A|| = 1$.

b) $A : C[-1,1] \to C[0,1]$; $Ax(t) = \int_0^t x(s)ds$.

1. Chứng minh ánh xạ $Ax \in C[0,1]$:

Cho $x \in C[0,1]$. Chứng minh $Ax \in C[0,1]$

Chứng minh : $\int_0^t x(s)ds$ liên tục trên $[0,1]$

Ta có : $\forall t_{1,}t_2 \in [-1,1]$ $(t_1 < t_1)$, thì :

$|Ax(t_2) - Ax(t_1)| = \left|\int_0^{t_2} x(s)ds - \int_0^{t_1} x(s)ds\right| = \left|\int_{t_1}^{t_2} x(s)ds\right| \leq \int_{t_1}^{t_2}|x(s)|ds \leq \int_{t_1}^{t_2}\|x\|ds = \|x\|(t_2 - t_1).$

Suy ra Ax liên tục trên $[0,1]$.

Vậy $x \in C[0,1]$.

2. Chứng minh ánh xạ A tuyến tính :

Ta có $\forall\ x(t), y(t) \in C[-1,1]$, $\forall\alpha \in \mathbb{R}$ thì :

$A(x(t) + \alpha y(t)) = \int_0^t [x(t) + \alpha y(t)]\, ds = \int_0^t x(t)\, ds + \int_0^t \alpha y(t) = \int_0^t x(t)\, ds + \alpha \int_0^t y(t)\, ds = A(x) + \ \alpha A(y).$

Suy ra A là ánh xạ tuyến tính.

3. Tính liên tục :

Ta có : $\forall\ t \in [0,1]$ thì

$$|A(x)| = \left|\int_0^t x(s)ds\right| \leq \int_0^t |x(s)|ds \leq \int_0^t \|x\|ds\ = |t|\|x\|.$$

Từ đó : $\left||A(x)|\right| \leq \sup|A(x)| \leq \sup(|t|\|x\|) = \|x\|\sup|t| = \|x\|.$

Suy ra : $\|Ax\| \leq \|x\|.$ $(*)$

Vậy A là ánh xạ liên tục.

4. Tính chuẩn :

Từ $(*)$, ta có $\frac{\|Ax\|}{\|x\|} \leq 1$ $\quad \forall x(t) \in C[-1,1]$ suy ra $||A|| \leq 1$. (1)

Chọn $x(t) = 1\ \ \forall t \in [0,1]$.

Ta được :

$||x|| = 1.$

$||A(x)|| = \sup_{t\in[0,1]} \left|\int_0^t ds\right| = \sup_{t\in[0,1]} |t| = 1.$

Suy ra :

$$\frac{\|Ax\|}{\|x\|} = 1$$

Nên $\|A\| = \sup_{t\in[0,1]} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} \geq 1$ (2)

Từ (1) & (2) suy ra : $\|A\| = 1.$

c) $A : C[-1,1] \to C[0,1]\,; Ax(t) = x(t)$.

1. Chứng minh ánh xạ $Ax \in C[0,1]$:

Ta có : $\forall y(t), z(t) \in [-1,1]$ thì

$|Ay(t) - Az(t)| = |\, y(t) - z(t)\,| \leq ||y - z||$.

Suy ra Ax liên tục trên [0,1] .

Vậy $x \in C[0,1]$.

2. Chứng minh ánh xạ A tuyến tính :

Ta có: $\forall\, y(t), z(t) \in C[-1,1]$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ thì :

$$A[y(t) + \alpha z(t)] = y(t) + \alpha z(t) = Ay(t) + \alpha Az(t)$$

Suy ra A là ánh xạ tuyến tính .

3. Tính liên tục :

Ta có $\forall\, t \in [0,1]$.

$|A(x)| = |x(t)| \leq ||x||$. Suy ra : $||A|| \leq ||x||$. $(*)$

Vậy A là ánh xạ liên tục .

4. Tính chuẩn :

Từ $(*)$, ta có $\frac{\|Ax\|}{\|x\|} \leq 1 \quad \forall x(t) \in C[-1,1]$

Suy ra $||A|| \leq 1$. (1)

Chọn $x(t) = 1 \ \forall t \in [0,1]$.

Ta được :

$||Ax|| = 1$, $||x|| = 1$.

Nên $\|A\| = \sup_{t\in[0,1]} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} \geq \frac{\|Ax\|}{\|x\|} = 1$. (2)

Từ (1) & (2) suy ra : $||A|| = 1$.

d) $A: C[0,1] \to C[0,1]; Ax(t) = t^2x(0)$

1. Chứng minh ánh xạ $Ax \in C[0,1]$:

Ta có : $\forall x(t), y(t) \in C[0,1]$ thì :

$$\left|Ax(t) - Ay(t)\right| = |t^2x(0) - t^2y(0)| = t^2\left|x(0) - y(0)\right| \leq t^2\|x - y\| .$$

$$\forall t \in [0,1]$$

Suy ra Ax liên tục trên [0,1] .

Vậy $Ax \in C[0,1]$.

2. Chứng minh ánh xạ A tuyến tính :

Ta có: $\forall\, y(t), z(t) \in C[0,1]$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, thì

$$A[y(t) + \alpha z(t)] = t^2(y(0) + \alpha z(0)) = Ay(t) + \alpha Az(t).$$

Suy ra A là ánh xạ tuyến tính.

3. Tính liên tục :

Ta có: $|Ax| = t^2|x(0)| \leq ||x|| \sup_{t\in[0,1]} (t^2) \leq ||x||$.

Suy ra $||A(x)|| \leq ||x||$. $(*)$

Vậy A ánh xạ liên tục .

4. Tính chuẩn :

Từ $(*)$, ta có $\frac{\|Ax\|}{\|x\|} \leq 1$ với $\forall x(t) \in C[0,1]$

Suy ra $||A|| \leq 1$. (1)

Chọn $x(t) = 1 \ \forall t \in [0,1]$

Ta được :

$||x|| = 1$, $||A|| = ||x|| \sup_{t\in[0,1]}(t^2) = 1$.

Nên $\|A\| = \sup_{t\in[0,1]} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} \geq 1$. (2)

Từ (1) & (2) suy ra $||A|| = 1$.

e) $A : C[0,1] \to C[0,1]$; $Ax(t) = x(t^2)$.

1. Chứng minh ánh xạ $Ax \in C[0,1]$:

Ta có : $\forall\ x(t), y(t) \in C[0,1]$ thì :

$$|Ax(t) - Ay(t)| = |\ x(t^2) - y(t^2)\ | \leq ||x - y\ ||.$$

Suy ra Ax liên tục trên $[0,1]$.

Vậy $x \in C[0,1]$.

2. Chứng minh ánh xạ A tuyến tính :

Cho $\forall y(t^2), z(t^2) \in C[0,1]$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ thì :

$$A[y(t^2) + \alpha z(t^2)] = y(t^2) + \alpha z(t^2) = Ay(t) + \alpha Az(t)$$

Suy ra A là ánh xạ tuyến tính .

3. Tính liên tục :

Ta có : $\forall\ t \in [0,1]$ thì

$|Ax| = |x(t^2)| \leq ||x||$ suy ra $||A|| \leq ||x||$. $(*)$

Vậy A là ánh xạ liên tục .

4. Tính chuẩn :

Từ $(*)$, ta có : $\frac{\|Ax\|}{\|x\|} \leq 1\ \ \forall x(t^2) \in C[0,1]$,

Suy ra $||A|| \leq 1$. (1)

Chọn $x(t^2) = 1$ với $\forall t \in [0,1]$.

Ta được :

$||Ax|| = 1$, $||x|| = 1$.

Nên $\|A\| = \sup_{t\in[0,1]} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} \geq \frac{\|Ax\|}{\|x\|} = 1$ (2)

Từ (1) & (2) ta có $||A|| = 1$.

f) $A : C^1[0,1] \to C[0,1]$; $Ax(t) = x(t)$.

1. Chứng minh ánh xạ $Ax \in C[0,1]$:

Ta có $\forall x(t), y(t) \in C^1[0,1]$ thì :

$$|Ax(t) - Ay(t)| = |x(t) - y(t)| \leq ||x - y|| .$$

Suy ra Ax liên tục trên $[0,1]$.

Vậy $x \in C[0,1]$.

2. Chứng minh ánh xạ A tuyến tính :

Ta có $\forall x(t), y(t) \in C^1[0,1]$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ thì :

$$A[y(t) + \alpha z(t)] = y(t) + \alpha z(t) = Ay(t) + \alpha Az(t)$$

Suy ra A là ánh xạ tuyến tính .

3. Tính liên tục :

Ta có $\forall t \in [0,1]$ thì :

$|Ax| = |x(t)| \leq sup|x(t)|_{t\in[0,1]} + sup|x'(t)|_{t\in[0,1]} = ||x||$.

Suy ra $||Ax|| \leq ||x||$. $(*)$

Vậy Ax ánh xạ liên tục .

4. Tính chuẩn :

Từ $(*)$, ta có $\frac{\|Ax\|}{\|x\|} \leq 1 \quad \forall x(t) \in C^1[0,1]$, vì vậy $||A|| \leq 1$. (1)

Chọn $x(t) = 1 \quad \forall t \in [0,1]$

Ta được :

$\left|\left|x\right|\right| = 1, \left|\left|Ax\right|\right| = 1$

$\|A\| = \sup_{t\in[0,1]} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} \geq \frac{\|Ax\|}{\|x\|} = 1.$ (2)

Từ (1) & (2) ta có $||A|| = 1$.

g) $A : C^1[0,1] \to C[0,1]\,; Ax(t) = x'(t)$

1. Chứng minh ánh xạ $Ax \in C[0,1]$:

Ta có $\forall\ x(t), y(t) \in C^1[0,1]$ thì :

$$|Ax(t) - Ay(t)\,| = |x'(t) - y'(t)\,| = |(x(t) - y(t))'\,|$$

$$\leq \sup_{t\in[0,1]}|(x(t) - y(t))'| + \sup_{t\in[0,1]}|x(t) - y(t)| = ||x - y||$$

Suy ra Ax liên tục trên $[0,1]$.

Vậy $Ax \in C[0,1]$.

2. Chứng minh ánh xạ A tuyến tính :

Ta có $\forall\ x(t), y(t) \in C^1[0,1]$, $\forall\alpha \in \mathbb{R}$ thì :

$$A(y(t) + \alpha z(t)) = (y(t) + \alpha z(t))' = y'(t) + \alpha z'(t)$$
$$= Ay(t) + \alpha Az(t)$$

Suy ra A là ánh xạ tuyến tính .

3. Tính liên tục :

Ta có $\forall t \in [0,1]$ thì:

$$|Ax| = |x'(t)| \leq sup|x(t)|_{t\in[0,1]} + sup|x'(t)|_{t\in[0,1]} = ||x||.$$

Suy ra $||Ax|| \leq ||x||$. $(*)$

Vậy ánh xạ Ax liên tục .

4. Tính chuẩn :

Từ $(*)$, ta có $\frac{\|Ax\|}{\|x\|} \leq 1 \quad \forall x(t) \in C^1[0,1]$, vì vậy $||A|| \leq 1$. (1)

Chọn $x(t) = t^n \quad \forall\, t \in [0,1]\,, n \in \mathbb{N}$

Ta được:

$||x|| = \sup_{t\in[0,1]}|x(t)| + \sup_{t\in[0,1]}|x'(t)|$

$= \sup_{t\in[0,1]}|tn| + \sup_{t\in[0,1]}|n\, t^{n-1}| = 1 + n.$

$||Ax|| = \sup_{t\in[0,1]}|nt^{n-1}| = n$

Nên $\|A\| = \sup_{t\in[0,1]} \frac{||Ax||_{C[0,1]}}{||x||_{C[0,1]}} \geq \frac{||Ax||}{||x||} = \frac{n}{1+n} = 1 - \frac{1}{n+1} \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}$.

Vậy khi $n \to \infty$: $||A|| \geq 1$ (2)

Từ (1) & (2) ta có $||A|| = 1$.

3.8. Cho các ánh xạ $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ $(n = 1,2,3,4)$. Trên $\mathbb{R}^n$ trang bị $\|.\|p$. Chứng minh T là ánh xạ tuyến tính, tìm $\|T\|$.

a) $T(x_1, x_2) = 2x_1 + x_2\ ;\ p = 2$

b) $T(x_1, x_2) = 2x_1 + x_2\ ;\ p = 1$

c) $T(x_1, x_2) = 2x_1 + x_2\ ;\ p = \infty$

d) $T(x_1, x_2, x_3) = x_1 - 2x_2 + x_3\ ;\ p = 2$

e) $T(x_1, x_2, x_3) = 5x_1 + x_2 + 4x_3\ ;\ p = 1$

f) $T(x_1, x_2, x_3) = 2x_1 + 3x_2 + 4x_3\ ;\ p = \infty$

g) $T(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1 + 2x_2 - x_3 + 5x_4\ ;\ p = 2$

Bài giải:

a) $T(x_1, x_2) = 2x_1 + x_2$; $p = 2$.

1. Chứng minh ánh xạ tuyến tính :

Với mọi $x = (x_1, x_2),\ y = (y_1,\ y_2) \in \mathbb{R}^2$ và $\theta \in \mathbb{R}$ bất kỳ

Ta có : $T(x + \theta y) = T(x_1 + \theta y_1, x_2 + \theta y_2) = 2(x_1 + \theta y_1) + (x_2 + \theta y_2)$

$$= (2x_1 + x_2) + \theta(2y_1 + y_2) = T(x_1, x_2) + \theta\, T(y_1, y_2)$$

$$= T(x) + \theta\, T(y)$$

Vậy T là ánh xạ tuyến tính.

2. Tính chuẩn $||T||$:

Đặt $x = (x_1, x_2)$

Ta có : $\|T\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|T(x)\|}{\|x\|_2}$

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiakopxky ta có :

$|T(x_1, x_2)| = |2x_1 + x_2| \leq \sqrt{(2^2 + 1^2)(x_1^2 + x_2^2)}$

$= \sqrt{5}\ \|(x_1, x_2)\|_2 = \sqrt{5}\ \|x\|_2.\ \forall x \in \mathbb{R}^2$

Suy ra $||T(x)|| \leq \sqrt{5}\ \|x\|_2$

Hay

$$\frac{||T(x)||}{\|x\|_2} \leq \sqrt{5}$$

Do đó $\|T\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|T(x)\|}{\|x\|_2} \leq \sqrt{5}$

Mặt khác ta có : $\|T\| \geq \frac{\|T(2,1)\|}{\|(2,1)\|_2} = \frac{|2.2+1|}{\sqrt{2^2+1^2}} = \sqrt{5}$

Nên suy ra $\|T\| = \sqrt{5}$.

b) $T(x_1, x_2) = 2x_1 + x_2$; $p = 1$

1. Chứng minh ánh xạ tuyến tính :

Với mọi $x = (x_1, x_2),\ y = (y_1,\ y_2) \in \mathbb{R}^2$ và $\theta \in \mathbb{R}$ bất kỳ.

Ta có : $T(x + \theta y) = T(x_1 + \theta y_1, x_2 + \theta y_2) = 2(x_1 + \theta y_1) + (x_2 + \theta y_2)$

$$= (2x_1 + x_2) + \theta(2y_1 + y_2) = T(x_1, x_2) + \theta\, T(y_1, y_2)$$

$$= T(x) + \theta\, T(y)$$

Vậy T là ánh xạ tuyến tính.

2. Tính chuẩn $||T||$:

Đặt $x = (x_1, x_2)$

Ta có : $\|T\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|T(x)\|}{\|x\|_1}$

$|T(x)| = |2x_1 + x_2| \leq 2|x_1 + x_2| = 2\|x\|_1\ \forall\, x \in \mathbb{R}^2$

Suy ra $||T(x)|| \leq 2\|x\|_1$

Hay

$$\frac{||T(x)||}{\|x\|_1} \leq 2$$

Mặt khác ta có : $\|T\| \geq \frac{\|T(1,0)\|}{\|(1,0)\|_1} = \frac{|2.1+0|}{|1\,| + |0|} = 2$

Nên $||T|| = 2.$

c) $T(x_1, x_2) = 2x_1 + x_2$; $p = \infty$

1. Chứng minh ánh xạ tuyến tính :

Với mọi $x = (x_1, x_2),\ y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$ và $\theta \in \mathbb{R}$ bất kỳ, ta có :

$T(x + \theta y) = T(x_1 + \theta y_1, x_2 + \theta y_2) = 2(x_1 + \theta y_1) + (x_2 + \theta y_2)$

$$= (2x_1 + x_2) + \theta(2y_1 + y_2) = T(x_1, x_2) + \theta\, T(y_1, y_2)$$

$$= T(x) + \theta\, T(y)$$

Vậy T là ánh xạ tuyến tính.

2. Tính chuẩn $||T||$:

Ta có : $\|T\|$ = $\sup_{x\neq 0}\frac{\|T(x)\|}{\|x\|_\infty}$

$$|T(x)| = |2x_1 + x_2| \le 2|x_1| + |x_2| \le 2max(|x_1|,|x_2|) + max(|x_1|,|x_2|)$$
$$\le 3max(|x_1|,|x_2|) = 3||x||_\infty$$

Suy ra $||T(x)|| \le 3||x||_\infty$

Suy ra $\|T\| = \sup_{x\neq 0}\frac{\|T(x)\|}{\|x\|_\infty} \le 3$

Mặt khác: $\|T\| \ge \frac{\|T(1,1)\|}{\|(1,1)\|_\infty} = \frac{|2.1+1|}{1} = 3$

Nên suy ra $\|T\|$ = 3.

d) $T(x_1, x_2, x_3) = x_1 - 2x_2 + x_3$; $p = 2$

1. Chứng minh ánh xạ tuyến tính :

Xét : $x = (x_1, x_2, x_3),\ y = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3$ và $\theta \in \mathbb{R}$

Ta có : $T(x + \theta y) = T(x_1 + \theta y_1, x_2 + \theta y_2, x_3 + \theta y_3)$
$$= x_1 + \theta y_1 - 2(x_2 + \theta y_2) + x_3 + \theta y_3$$
$$= (x_1 - 2x_2 + x_3) + \theta(y_1 - 2y_2 + y_3) = T(x) + \theta T(y)$$

Vậy T là ánh xạ tuyến tính.

2. Tính chuẩn $||T||$:

Áp dụng bất đẳng thức Bunnhiakopxki

Ta có: $|\ T(x)\ | = |x_1 - 2x_2 + x_3| \le \sqrt{1^2 + (-2)^2 + 1^2}\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$
$$= \sqrt{6}\|(x_1, x_2, x_3)\|_2 = \sqrt{6}\|x\|_2.$$

Suy ra $||T(x)|| \le \sqrt{6}\|x\|_2$

Hay

$$\frac{\|T(x)\|}{\|x\|_2} \le \sqrt{6}$$

Suy ra $\|T\| = \sup_{x\neq 0} \frac{\|T(x)\|}{\|x\|_2} \leq \sqrt{6}$.

Mặt khác ta có : $\|T\| \geq \frac{\|T(1,-2,\ 1)\|}{\sqrt{1^2+(-2)^2+1^2}} = \frac{|1-2(-2)+1|}{\sqrt{6}} = \sqrt{6}$

Vậy $\|T\| = \sqrt{6}$.

e) $T(x_1, x_2, x_3) = 5x_1 + x_2 + 4x_3$; $p = 1$

1. Chứng minh ánh xạ tuyến tính :

Xét : $x = (x_1, x_2,\ x_3),\ y = (y_1, y_2,\ y_3) \in \mathbb{R}^3$ và $\theta \in \mathbb{R}$ bất kỳ.

Ta có : $T(x+\theta y) = T(x_1 + \theta y_1, x_2 + \theta y_2, x_3 + \theta y_3)$

$$= 5(x_1 + \theta y_1) + x_2 + \theta y_2 + 4(x_3 + \theta y_3)$$
$$= (5x_1 + x_2 + 4x_3) + \theta(5y_1 + y_2 + 4y_3)$$
$$= T(x_1, x_2, x_3) + \theta\, T(y_1, y_2, y_3) = T(x) + \theta T(y)$$

Vậy T là ánh xạ tuyến tính.

2. Tính chuẩn $||T||$:

Ta có : $|T(x)| = |5x_1 + x_2 + 4x_3| \leq 5|x_1| + |x_2| + 4|x_3|$

$$\leq 5(|x_1| + |x_2| + |x_3|) = 5\|x\|_1.$$

Suy ra $||T(x)|| \leq 5\big||x|\big|_1$.

Hay

$$\frac{\|T(x)\|}{\|x\|_1} \leq 5$$

Do đó $\|T\| = \sup_{x\neq 0} \frac{\|T(x)\|}{\|x\|_1} \leq 5$

Mặt khác : $\|T\| \geq \frac{\|T(1,0,0)\|}{\|(1,0,0)\|_1} = \frac{|5.1+0+4.0|}{|1\ |+|0|+|0|} = 5$

Vậy $\|T\| = 5$.

f) $T(x_1, x_2, x_3) = 2x_1 + 3x_2 + 4x_3\ ;\ p = \infty$

1. Chứng minh ánh xạ tuyến tính :

Xét: $x = (x_1, x_2,\ x_3),\ y = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3$ và $\theta \in \mathbb{R}$ bất kỳ.

Ta có : $T(x + \theta y) = T(x_1 + \theta y_1, x_2 + \theta y_2, x_3 + \theta y_3)$

$$= 2(x_1 + \theta y_1) + 3(x_2 + \theta y_2) + 4(x_3 + \theta y_3)$$

$$= (2x_1 + 3x_2 + 4x_3) + \theta(2y_1 + 3y_2 + 4y_3)$$

$$= T(x_1, x_2, x_3) + \alpha T(y_1, y_2, y_3) = T(x) + \theta T(y)$$

Vậy T là ánh xạ tuyến tính .

2. Tính chuẩn $||T||$:

Ta có: $|T(x)| = |2x_1 + 3x_2 + 4x_3| \leq 2|x_1| + 3|x_2| + 4|x_3|$

$\leq 2\max(|x_1|, |x_2|, |x_3|) + 3\max(|x_1|, |x_2|, |x_3|) + 4\max(|x_1|, |x_2|, |x_3|)$

$$= 9\max(|x_1|, |x_2|, |x_3|) = 9\|(x_1, x_2, x_3)\|_\infty = 9\|x\|_\infty.$$

Suy ra : $||T(x)|| \leq 9||x||_\infty$.

Hay

$$\frac{\|T(x)\|}{\|x\|_\infty} \leq 9$$

Do đó $\|T\| = \sup_{x\neq 0} \frac{\|T(x)\|}{\|x\|_\infty} \leq 9$

Mặt khác : $\|T\| = \sup_{x\neq 0} \frac{\|T(x)\|}{\|x\|_\infty} \geq \frac{\|T(1,1,1)\|}{\|(1,1,1)\|_\infty} = \frac{|2.1+3.1+4.1|}{1} = 9$

Vậy $\|T\| = 9$.

g) $T(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1 + 2x_2 - x_3 + 5x_4\ ;\ p = 2$

1. Chứng minh ánh xạ tuyến tính :

Xét : $x = (x_1, x_2,\ x_3, x_4),\ y = (y_1, y_2, y_3, y_4) \in \mathbb{R}^4$ và $\theta \in \mathbb{R}$ bất kỳ.

Ta có : $T(x+\theta y) = T(x_1+\theta y_1, x_2+\theta y_2, x_3+\theta y_3, x_4+\theta y_4)$

$$= (x_1+\theta y_1) + 2(x_2+\theta y_2) - (x_3+\theta y_3) + 5(x_4+\theta y_4)$$

$$= (x_1+2x_2-x_3+5x_4) + \theta(y_1+2y_2-y_3+5y_4)$$

$$= T(x_1,x_2,x_3,x_4) + \theta\, T(y_1,y_2,y_3,y_4) = T(x) + \theta T(y)$$

Vậy T là ánh xạ tuyến tính .

2. Tính chuẩn $||T||$:

Áp dụng bất đẳng thức Bunnhiakopxki ta có :

$$|T(x)| = |x_1+2x_2-x_3+5x_4| \le \sqrt{1^2+2^2+(-1)^2+5^2}\sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2}$$

$$\le \sqrt{31}\sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2}$$

$$= \sqrt{31}\|(x_1,x_2,x_3,x_4)\|_2 = \sqrt{31}\|x\|_2$$

Suy ra $||T(x)|| \le \sqrt{31}\|x\|_2$

Hay

$$\frac{\|T(x)\|}{\|x\|_2} \le \sqrt{31}$$

Do đó $\|T\| = \sup_{x\neq 0}\frac{\|T(x)\|}{\|x\|_2} \le \sqrt{31}$

Mặt khác : $\|T\| = \sup_{x\neq 0}\frac{\|T(x)\|}{\|x\|_2} \ge \frac{\|T(1,2,-1,5)\|}{\|(1,2,-1,5)\|_2} = \frac{|1+2.2-(-1)+5.5|}{\sqrt{1^2+2^2+(-1)^2+5^2}} = \sqrt{31}$

Vậy $\|T\| = \sqrt{31}$.

3.9. Chứng minh các phiếm hàm thuộc $(C[-1,1])^* = \mathcal{L}(C[-1,1], \mathbb{R})$, tìm chuẩn của nó

a) $f(x) = \frac{1}{3}[x(1) + x(-1)]$

b) $f(x) = 2[x(1) - x(0)]$

c) $f(x) = \frac{1}{2\varepsilon}[x(\varepsilon) + x(-\varepsilon) - 2x(0)],\ \varepsilon \in [-1,1]\backslash\{0\}$

d) $f(x) = \int_0^1 x(t)dt$

e) $f(x) = -x(0) + \int_{-1}^1 x(t)\,dt$

f) $f(x) = \int_{-1}^0 x(t)dt - \int_0^1 x(t)dt$

<u>Bài giải:</u>

a) $f(x) = \frac{1}{3}[x(1) + x(-1)]$

1. Ta chứng minh $f(x) \in (C[-1,1])^*$.

Chứng minh $f(x)$ liên tục :

- $f(x) = \frac{1}{3}[x(1) + x(-1)] \in \mathbb{R}$

- $|f(x) - f(y)| = \left|\frac{1}{3}[x(1) + x(-1)] - \frac{1}{3}[y(1) + y(-1)]\right|$

$$\leq \frac{1}{3}|x(1) - y(1)| + \frac{1}{3}|x(-1) - y(-1)|$$

$$\leq \frac{2}{3}\sup_{t\in[-1,1]}|x(t) - y(t)| = \frac{2}{3}||x - y||$$

Suy ra $|f(x) - f(y)| \leq \frac{2}{3}||x - y||$.

Nên $||f(x) - f(y)|| \leq \frac{2}{3}||x - y||$.

Vậy $f(x)$ liên tục .

Chứng minh $f(x)$ tuyến tính :

Ta có : $\forall x(t), y(t) \in C[-1,1]\ , \forall\theta \in \mathbb{R}$

$$
\begin{aligned}
f(x+\theta y) &= \frac{1}{3}[(x+\theta y)(1)+(x+\theta y)(-1)].\\
&= \frac{1}{3}[x(1)+\theta y(1)+x(-1)+\theta y(-1)].\\
&= \frac{1}{3}[x(1)+x(-1)]+\frac{1}{3}\theta[y(1)+y(-1)].\\
&= f(x)+\theta f(y).
\end{aligned}
$$

Suy ra $f(x)$ tuyến tính .

Vậy $f(x) \in (C[-1,1])^*$.

2. Tìm chuẩn $||f||$.

Xét $|f(x)| = \frac{1}{3}|x(1)+x(-1)| \le \frac{1}{3}(|x(1)|+|x(-1)|)$

$$\le \frac{2}{3}(\sup_{t\in[-1,1]}|x(t)|) \le \frac{2}{3}||x||.$$

Suy ra $||f(x)|| \le \frac{2}{3}||x||$.

Suy ra $\frac{||f(x)||}{||x||} \le \frac{2}{3}$.

Suy ra $||f|| = \sup_{t\in[-1,1]} \frac{||f(x)||_{\mathbb{R}}}{||x||_{C[-1,1]}} \le \frac{2}{3}$. $(*)$

Chọn $(t) = 1, \forall t \in [-1,1]$.

Suy ra $||x|| = 1$, $||f(x)|| = \frac{2}{3}$.

Mặc khác $||f|| \ge \frac{||f(x)||}{||x||} = \frac{2}{3}$. $(**)$

Từ $(*)$ & $(**)$ ta có $||f|| = \frac{2}{3}$.

b) $f(x) = 2[x(1) - x(0)]$.

1. Ta chứng minh $f(x) \in (C[-1,1])^*$.

Chứng minh $f(x)$ liên tục :

- $f(x) = 2[x(1) - x(0)] \in \mathbb{R}$
- $|f(x) - f(y)| = |2[x(1) - x(0)] - 2[y(1) - y(0)]|$

$$= |2\,[x(1) - y(1)] - 2[x(0) - y(0)]|$$
$$\leq 2|x(1) - y(1)| + 2|x(0) - y(0)|$$
$$\leq 4 \sup_{t\in[-1,1]} |x(t) - y(t)| = 4\left||x - y|\right|$$

Suy ra $|f(x) - f(y)| \leq 4\left||x - y|\right|$.

Suy ra $\left||f(x) - f(y)|\right| \leq 4\left||x - y|\right|$.

Vậy $f(x)$ liên tục.

Chứng minh $f(x)$ tuyến tính :

Ta có : $\forall x(t), y(t) \in C[-1,1]$, $\forall \theta \in \mathbb{R}$

$$f(x + \theta y) = 2[(x + \theta y)(1) - (x + \theta y)(0)]$$
$$= 2\left[x(1) - x(0) + \theta\big(y(1) - y(0)\big)\right]$$
$$= 2[x(1) - x(0)] + 2\theta[y(1) - y(0)]$$
$$= f(x) + \theta f(y) .$$

Suy ra $f(x)$ tuyến tính .

Vậy $f(x) \in (C[-1,1])^*$.

2. Tìm chuẩn $\left||f|\right|$.

Xét $|f(x)| \leq 2|x(1) - x(0)| \leq 2(|x(1)| + |x(0)|)$

$$\leq 4(\sup_{t\in[-1,1]}|x(t)|) \leq 4\left||x|\right|.$$

Suy ra $\left||f(x)|\right| \leq 4\left||x|\right|$.

Suy ra $\frac{\left||f(x)|\right|}{\left||x|\right|} \leq 4$.

Nên $\left||f|\right| = \sup_{t\in[-1,1]} \frac{\left||f(x)|\right|_{\mathbb{R}}}{\left||x|\right|_{C[-1,1]}} \leq 4.\ (*)$

Chọn $x(t) = \begin{cases} 2t-1, & 0 \le x \le 1 \\ -1, & -1 \le x \le 0 \end{cases}.$

Suy ra $||x|| = \sup_{t\in[-1,1]}|2t-1| = 1.$

Suy ra $||f(x)|| = \sup_{t\in[-1,1]} 2|x(1)-x(0)| = 4$

Suy ra $||f|| \ge \frac{||f(x)||}{||x||} = 4.$ $(**)$

Từ $(*)$ & $(**)$ ta có $||f|| = 4.$

c) $f(x) = \frac{1}{2\varepsilon}[x(\varepsilon) + x(-\varepsilon) - 2x(0)],\ \varepsilon \in [-1,1]\backslash\{0\}.$

1. Ta chứng minh $f(x) \in (C[-1,1])^*$.

Chứng minh $f(x)$ liên tục :

- $f(x) = \frac{1}{2\varepsilon}[x(\varepsilon) + x(-\varepsilon) - 2x(0)] \in \mathbb{R}$
- $|f(x) - f(y)|$

$$= \left|\frac{1}{2\varepsilon}[x(\varepsilon) + x(-\varepsilon) - 2x(0)] - \frac{1}{2\varepsilon}[y(\varepsilon) + y(-\varepsilon) - 2y(0)]\right|$$

$$= \left|\frac{1}{2\varepsilon}[x(\varepsilon) - y(\varepsilon)] + \frac{1}{2\varepsilon}[x(-\varepsilon) - y(-\varepsilon)] - \frac{1}{\varepsilon}[x(0) - y(0)]\right|$$

$$\le \frac{1}{2\varepsilon}|x(\varepsilon) - y(\varepsilon)| + \frac{1}{2\varepsilon}|x(-\varepsilon) - y(-\varepsilon)| + \frac{1}{\varepsilon}|x(0) - y(0)|$$

$$\le \frac{2}{\varepsilon}\sup_{t\in[-1,1]}|x(t) - y(t)| = \frac{2}{\varepsilon}||x - y||$$

Suy ra $|f(x) - f(y)| \le \frac{2}{\varepsilon}||x - y||.$

Suy ra $||f(x) - f(y)|| \le \frac{2}{\varepsilon}||x - y||.$

Vậy $f(x)$ liên tục.

Chứng minh $f(x)$ tuyến tính :

Ta có : $\forall\, x(t), y(t) \in C[-1,1]$, $\forall \theta \in \mathbb{R}$

$$f(x+\theta y)=\frac{1}{2\varepsilon[(x+\theta y)(\varepsilon)+(x+\theta y)(-\varepsilon)-\ 2(x+\theta y)(0)]}$$
$$=\frac{1}{2\varepsilon\left[\left(x(\epsilon)+x(-\varepsilon)-2x(0)\right)+\theta\left(y(\varepsilon)+y(-\varepsilon)-2y(0)\right)\right]}$$
$$=\ \frac{1}{2\varepsilon}[x(\varepsilon)+x(-\varepsilon)-2x(0)]+\frac{1}{2\varepsilon}\theta[y(\varepsilon)+y(-\varepsilon)-2y(0)]=\ f(x)\ +\ \theta f(y)$$

Suy ra $f(x)$ tuyến tính .

Vậy $f(x)\in(C[-1,1])^{*}$.

2. Tìm chuẩn $||f||$.

Ta có :

$$|f(x)|\ =\ \frac{1}{2|\varepsilon|}|x(\varepsilon)+x(-\varepsilon)-2x(0)|\leq\ \frac{2}{|\varepsilon|}\sup_{t\in[-1,1]}|x(t)|=\frac{2}{|\varepsilon|}||x||$$

Suy ra $||f||\leq\ \frac{2}{|\varepsilon|}||x||$

Suy ra $||f||=\sup_{t\in[-1,1]}\frac{||f(x)||_{\mathbb{R}}}{||x||_{C[-1,1]}}\leq\frac{2}{|\varepsilon|}$. (*)

Chọn

$$x(t)=\begin{cases}1, & t\leq-|\varepsilon|\\ -\dfrac{2}{|\varepsilon|}t-1, & -|\varepsilon|<t<0\\ \dfrac{2}{|\varepsilon|}t-1, & 0\leq t<|\varepsilon|\\ 1, & t\geq|\varepsilon|\end{cases}$$

Suy ra $||x||=\sup_{t\in[-1,1]}|x(t)|=1$.

Suy ra $||f(x)||=\sup_{t\in[-1,1]}|\frac{1}{2\varepsilon}[x(\varepsilon)+x(\varepsilon)-2x(0)]|=\frac{2}{|\varepsilon|}$

Suy ra $||f||\geq\frac{||f(x)||}{||x||}=\frac{2}{|\varepsilon|}$. (**)

Từ $(*)$ & $(**)$ suy ra $||f|| = \frac{2}{|\varepsilon|}$.

d) $f(x) = \int_0^1 x(t)dt$.

1. Ta chứng minh $f(x) \in (C[-1,1])^*$.

Chứng minh $f(x)$ liên tục :

- $f(x) = \int_0^1 x(t)dt \in \mathbb{R}$.
- $|f(x) - f(y)| = \left|\int_0^1 x(t)dt - \int_0^1 y(t)dt\right| \le \int_0^1 |x(t) - y(t)|dt$

$$\le \int_0^1 \sup_{t\in[-1,1]} |x(t) - y(t)|dt = ||x - y|| .$$

Suy ra $||f(x) - f(y)|| \le ||x - y||$.

Suy ra $||f(x) - f(y)|| \le ||x - y||$.

Vậy $f(x)$ liên tục .

Chứng minh $f(x)$ tuyến tính :

Ta có : $\forall x(t), y(t) \in C[-1,1]$, $\forall \theta \in \mathbb{R}$

Ta có : $f(x + \theta y) = \int_0^1 (x + \theta y)(t)dt = \int_0^1 x(t)dt + \theta \int_0^1 y(t)dt$

$$= f(x) + \theta f(y) .$$

Suy ra $f(x)$ tuyến tính .

Vậy $f(x) \in (C[-1,1])^*$.

2. Tìm chuẩn $||f||$.

Xét $|f(x)| = \left|\int_0^1 x(t)dt\right| \le \int_0^1 |x(t)|dt \le ||x|| \int_0^1 dt = ||x||$.

Suy ra $||f(x)|| \le ||x||$ nên $||f|| = \sup\limits_{t\in[-1,1]} \frac{||f(x)||_{\mathbb{R}}}{||x||_{C[-1,1]}} \le 1$. $(*)$

Chọn $x(t) = 1, \forall t \in [-1,1]$.

Được $||x|| = 1$, $||f(x)|| = 1$.

Suy ra $||f|| \geq \frac{||f(x)||}{||x||} = 1.\ (**)$

Từ $(*)$ & $(**)$ ta có $||f|| = 1$.

e) $f(x) = -x(0) + \int_{-1}^{1} x(t)\,dt$

1. Ta chứng minh $f(x) \in (C[-1,1])^*$.

Chứng minh $f(x)$ liên tục :

- $f(x) = -x(0) + \int_{-1}^{1} x(t)\,dt \in \mathbb{R}$

- $|f(x) - f(y)| = \left|\left(-x(0) + \int_{-1}^{1} x(t)\,dt\right) - \left(-y(0) + \int_{-1}^{1} y(t)\,dt\right)\right|.$

$$= \left|-[x(0) - y(0)] + \left[\int_{-1}^{1} x(t)\,dt - \int_{-1}^{1} y(t)\,dt\right]\right|.$$

$$\leq |x(0) - y(0)| + \int_{-1}^{1} |x(t) - y(t)|\,dt.$$

$$\leq \sup_{t\in[-1,1]} |x(t) - y(t)| + \int_{-1}^{1} \sup_{t\in[-1,1]} |x(t) - y(t)|\,dt$$

$$= \sup_{t\in[-1,1]} |x(t) - y(t)| + \sup_{t\in[-1,1]} |x(t) - y(t)|(1 + 1) = 3||\mathrm{x} - \mathrm{y}||$$

Suy ra $|f(x) - f(y)| \leq 3||x - y||$.

Nên $||f(x) - f(y)|| \leq 3||x - y||$.

Vậy hàm $f(x)$ liên tục .

Chứng minh $f(x)$ tuyến tính :

Ta có : $\forall\ x(t), y(t) \in C[-1,1]$, $\forall \theta \in \mathbb{R}$

$$f(x + \theta y) = -(x + \theta y)(0) + \int_{-1}^{1} (x + \theta y)(t)\,dt$$

$$= -x(0) + \int_{-1}^{1} x(t)dt + \theta\left(-y(0) + \int_{-1}^{1} y(t)dt\right) = f(x) + \theta f(y).$$

Suy ra $f(x)$ tuyến tính .

Vậy $f(x) \in (C[-1,1])^*$.

2. Tìm chuẩn $||f||$.

Xét $|f(x)| = \left|-x(0) + \int_{-1}^{1} x(t)\,dt\right| \leq |x(0)| + \left|\int_{-1}^{1} x(t)\,dt\right|$

$$\leq |x(0)| + \int_{-1}^{1}|x(t)|dt \leq ||x|| + ||x||\,(1+1) = 3||x||.$$

Suy ra $||f(x)|| \leq 3||x||$

Suy ra $||f|| = \sup_{t\in[-1,1]} \frac{||f(x)||_{\mathbb{R}}}{||x||_{C[-1,1]}} \leq 3.\ (*)$

Chọn

$$x_n(t) = \begin{cases} 1, & |t| \geq \frac{1}{n} \\ 2nt-1, & 0 \leq t \leq \frac{1}{n} \\ -2nt-1, & \frac{-1}{n} \leq t \leq 0 \end{cases}$$

Suy ra $||x_n|| = 1$, $x_n(0) = -1$

$f(x_n) = -x_n(0) + \int_{-1}^{1} x_n(t)dt$

$= 1 + \int_{-1}^{-\frac{1}{n}} 1dt + \int_{-\frac{1}{n}}^{0}(-2nt-1)dt + \int_{0}^{\frac{1}{n}}(2nt-1)dt + \int_{\frac{1}{n}}^{1} 1dt$

$= 1 + (-\frac{1}{n} + 1) + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n}\right) + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n}\right) + \left(1 - \frac{1}{n}\right) = 3 - \frac{2}{n}$

Suy ra :

$$\|f\| \geq \lim_{n\to\infty}\left|3 - \frac{2}{n}\right| = 3$$

Nên $||f|| \geq \frac{||f(x_n)||}{||x_n||} = 3\ .\ (**)$

Từ $(*)$ & $(**)$ ta có $||f|| = 3.$

f) $f(x) = \int_{-1}^{0} x(t)dt - \int_{0}^{1} x(t)dt$.

1. Ta chứng minh $f(x) \in (C[-1,1])^*$.

Chứng minh $f(x)$ liên tục :

- $f(x) = \int_{-1}^{0} x(t)dt \; - \; \int_{0}^{1} x(t)dt \in \mathbb{R}$
- $|f(x) - f(y)| = \left|\int_{-1}^{0} x(t)dt - \int_{0}^{1} x(t)dt - \left(\int_{-1}^{0} y(t)dt - \int_{0}^{1} y(t)dt\right)\right|$

$$= \left|\int_{-1}^{0}[x(t) - y(t)]dt - \int_{0}^{1}[x(t) - y(t)]dt\right|$$

$$\leq \left|\int_{-1}^{0}[x(t) - y(t)]\,dt\right| + \left|\int_{0}^{1}[x(t) - y(t)]\,dt\right|$$

$$\leq \int_{-1}^{0}|x(t) - y(t)|dt + \int_{0}^{1}|x(t) - y(t)|dt$$

$$\leq \;||x - y||\int_{-1}^{0} dt + ||x - y||\int_{0}^{1} dt$$

$$\leq 2||x - y|| \,.$$

Nên $\left||f(x) - f(y)|\right| \leq 2||x - y||$.

Vậy $f(x)$ liên tục.

Chứng minh $f(x)$ tuyến tính :

Ta có : $\forall x(t), y(t) \in C[-1,1]$, $\forall \theta \in \mathbb{R}$

$$f(x + \theta y) = \int_{-1}^{0}(\mathrm{x} + \theta y)(t)dt - \int_{0}^{1}(\mathrm{x} + \theta y)(t)dt$$

$$= \int_{-1}^{0} x(t)dt - \int_{0}^{1} x(t)dt + \theta(\int_{-1}^{0} y(t)dt - \int_{0}^{1} y(t)dt)$$

$$= \; f(x) \; + \theta f(y).$$

Suy ra $f(x)$ tuyến tính .

Vậy $f(x) \in (C[-1,1])^*$.

2. Tìm chuẩn $||f||$.

Xét $f(x) = \left|\int_{-1}^{0} x(t)dt - \int_{0}^{1} x(t)dt\right| \leq \left|\int_{-1}^{0} x(t)dt\right| + \left|\int_{0}^{1} x(t)dt\right|$

$$\leq ||x|| \int_{-1}^{0} dt + ||x|| \int_{0}^{1} dt = 2||x||.$$

Suy ra $||f(x)|| \leq 2||x||$ nên $||f|| = \sup_{t\in[-1,1]} \frac{||f(x)||_{\mathbb{R}}}{||x||_{C[-1,1]}} \leq 2.$ $(*)$

Chọn

$$x_n\,(\mathrm{t}) = \begin{cases} 1, & -1 \leq t \leq -\frac{1}{n} \\ -nt, & -\frac{1}{n} \leq t \leq \frac{1}{n} \\ -1, & \frac{1}{n} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

Suy ra $||x_n|| = 1.$

Ta có :

$$f(x_n) = \int_{-1}^{-\frac{1}{n}} 1dt + \int_{-\frac{1}{z}}^{0} (-nt)dt - \int_{0}^{\frac{1}{n}} (-nt)dt - \int_{\frac{1}{n}}^{1} (-1)dt$$

$$= -\frac{1}{n} + 1 + \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} + 1 - \frac{1}{n} = 2 - \frac{1}{n}$$

Suy ra :

$$\|f\| \geq \lim_{n\to\infty} \left|3 - \frac{2}{n}\right| = 3$$

Suy ra $||f|| \geq \frac{||f(x)||}{||x||} = 2$. $(**)$

Từ $(*)$ & $(**)$ ta có $||f|| = 2$.

Bài Tập Mở Rộng

1. Giả thuyết như ***bài 1.4*** - *Giáo trình Giải tích 2* .

a. Chứng minh $x_n \xrightarrow{d} x$ khi và chỉ khi $x_n \xrightarrow{\delta} x$.

b. Giả sử (E,δ) đầy đủ, chứng minh (E,d) đầy đủ.

2. Giả thuyết như ***bài 1a*** - *Bài Tập Mở Rộng Chương 1.*

a. Giả sử $x^n = (x_1^n, x_2^n), n \in \mathbb{N}, a = (a_1, a_2)$. Chứng minh:

$$x^n \xrightarrow{d} a \text{ khi và chỉ khi } \begin{cases} x_1^n \xrightarrow{d_1} a_1 \\ x_2^n \xrightarrow{d_2} a_2 \end{cases}.$$

b. Giả sử $(X_1, d_1), (X_2, d_2)$ đầy đủ. Chứng minh (X, d) đầy đủ.

3. Giả thuyết như ***bài 1b*** - *Bài Tập Mở Rộng Chương 1.*

a. Giả sử $x_n = \{a_k^n\}_k, n \in \mathbb{N}, x = \{a_k\}_k$. Chứng minh:

$$x^n \xrightarrow{d} x \text{ khi và chỉ khi } \lim_{n\to\infty} a_k^n = a_k, \forall k \in \mathbb{N}.$$

b. Chứng minh (S,d) đầy đủ.

4. Chứng minh rằng :

a. Nếu $f : X \to Y$ là một phép đẳng cự thì $f^{-1} : Y \to X$ cũng là một phép đẳng cự.

b. Nếu $f : X \to Y$ và $g : Y \to Z$ là những phép đẳng cự thì $gf : X \to Z$ cũng là một phép đẳng cự.

c. Nếu $f : X \to Y$ là một phép đẳng cự thì f là một phép đồng phôi và chiều đảo lại đúng hay sai?

5. Trên $C^1([a,b])$, ta định nghĩa :

- $p_1(x) = |x(a)| + \sup|x'(t)|$, $t \in [a,b]$.
- $p_2(x) = \sup|x(t)|$, $t \in [a,b]$.
- $p_3(x) = \sup(|x(t)| + |x'(t)|)$, $t \in [a,b]$.
  a. Chứng minh p_1 , p_2 , p_3 là các chuẩn trên $C^1([a,b])$.
  b. Chứng minh p_2 không tương đương p_3 .
  c. Chứng minh p_1 tương đương p_3 .

6. Cho $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ là ánh xạ tuyến tính . Chứng minh tồn tại M sao cho $\|T(h)\| \leq \|h\|$, $\forall h \in \mathbb{R}^n$.

7. Cho $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. Ta nói f thỏa ***điều kiện Lipschitz*** nếu :

$$\exists L > 0 : \left||f(x) - f(y)|\right| \leq L\left||x - y|\right|, \forall x, y \in A.$$

Chứng minh rằng: Nếu f thỏa ***điều kiện Lipschitz*** thì f liên tục đều.

Chương 4:

VI PHÂN HÀM NHIỀU BIẾN

4.1. Tìm các đạo hàm riêng cho các đạo hàm sau, viết ∇f .

a) $f(x,y,z) = x^y$

b) $f(x,y) = x^y$

c) $f(x,y) = \sin(x \sin y)$

d) $f(x,y,z) = x^{y^z}$

Bài giải:

a) $f(x,y,z) = x^y$

Ta thấy : $f(x,y,z) = x^y = e^{(lnx)y}$ $(x > 0, y \neq 0)$

Ta có :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial(x^y)}{\partial x} = yx^{y-1}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial(e^{(lnx)y})}{\partial y} = (lnx)x^y$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = 0$$

Như vậy: $\nabla f = (yx^{y-1}, (lnx)x^y, 0)$

b) $f(x,y) = x^y$

Ta thấy :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial(x^y)}{\partial x} = yx^{y-1}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial(e^{(lnx)y})}{\partial y} = (lnx)x^y$$

Như vậy: $\nabla f = (yx^{y-1}, (lnx)x^y)$

c) $f(x, y) = \sin(x \sin y)$

Ta có :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = sinycos(xsinx)$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = x(cosy)sin(xsiny)$$

Như vậy: $\nabla f = (\ sinycos(xsinx), x(cosy)\sin(xsiny))$

d) $f(x, y, z) = x^{y^z}$

Ta thấy : $f(x, y, z) = x^{y^z} = e^{(lnx)y^z} = e^{(lnx)e^{(lny)z}}$ $(x > 0, y > 0, z \neq 0)$

Ta có:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial(x^{y^z})}{\partial x} = y^z x^{(y^z-1)}$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial(e^{(lnx)y^z})}{\partial y} = x^{y^z}(lnx)zy^{z-1}$$
$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\partial\left(e^{(lnx)e^{(lny)z}}\right)}{\partial z} = x^{y^z}(lnx)y^z lny$$

Như vậy: $\nabla f = (y^z x^{(y^z-1)}, x^{y^z}(lnx)zy^{z-1}, x^{y^z}(lnx)y^z lny)$

4.2. Cho $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ là hàm liên tục .Tìm đạo hàm riêng của :

a) $f(x, y) = \int_a^{x+y^2} g(t)dt$

b) $f(x, y) = \int_y^x g(t)dt$

c) $f(x, y) = \int_a^{xy} g(t)dt$

d) $f(x, y) = \int_a^{\sin xy} g(t)dt$

e) $f(x, y) = \int_x^{\int_b^y g(s)ds} g(t)dt$

Bài giải:

a) $f(x,y) = \int_a^{x+y^2} g(t)dt$

Ta xét hai hàm G và u như sau :

$G(s) = \int_a^s g(t)dt$ (G là nguyên hàm của g).

$u(x,y) = x + y^2$.

Ta có : $f(x,y) = G(u(x,y))$. Nên áp dụng công thức hàm hợp :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = G'\big(u(x,y)\big).\frac{\partial u}{\partial x} = g(x+y^2).1 = g(x+y^2)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = G'\big(u(x,y)\big).\frac{\partial u}{\partial y} = g(x+y^2).2y = 2y.g(x+y^2)$$

b) $f(x,y) = \int_y^x g(t)dt$

Trước hết ta biến đổi $f(x,y)$ như sau :

$$f(x,y) = \int_y^x g(t)dt = \int_0^x g(t)dt - \int_0^y g(t)dt$$

Ta xét 3 hàm G, u, v:

$G(s) = \int_y^x g(t)dt$ (G là nguyên hàm của g).

$u(x,y) = x$.

$v(x,y) = y$.

Ta thấy $f(x,y) = G\big(u(x,y)\big) - G(v(x,y))$. Do vậy , áp dụng công thức đạo hàm hàm hợp ta có :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = G'\big(u(x,y)\big)\frac{\partial u}{\partial x} - G'\big(v(x,y)\big)\frac{\partial v}{\partial x} = g(x).1 - g(y).0 = g(x).$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = G'\big(u(x,y)\big).\frac{\partial u}{\partial y} - G'\big(v(x,y)\big).\frac{\partial v}{\partial y} = g(x).0 - g(y).1 = -g(y).$$

c) $f(x,y) = \int_a^{xy} g(t)dt$

Ta xét hai hàm G, u :

$G(s) = \int_a^s g(t)dt$ (G là nguyên hàm của g).

$u(x,y) = xy$.

Ta thấy $f(x,y) = G(u(x,y))$. Nên áp dụng công thức tính đạo hàm của hàm hợp ta có:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = G'\big(u(x,y)\big).\frac{\partial u}{\partial x} = g(xy).y$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = G'\big(u(x,y)\big).\frac{\partial u}{\partial y} = g(xy).x$$

d) $f(x,y) = \int_a^{\sin xy} g(t)dt$

Ta xét hai hàm G, u :

$G(s) = \int_a^s g(t)dt$ (G là nguyên hàm của g).

$u(x,y) = \sin xy$.

Ta thấy $f(x,y) = G(u(x,y))$. Ta có:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = G'\big(u(x,y)\big).\frac{\partial u}{\partial x} = g(sinxy).y.cosxy.$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = G'\big(u(x,y)\big).\frac{\partial u}{\partial y} = g(sinxy).x.cosxy.$$

e) $f(x,y) = \int_x^{\int_b^y g(s)ds} g(t)dt$

Trước tiên ta tính $\int_b^y g(s)ds$.

Đặt $h(x,y) = \int_b^y g(s)ds$.

Xét hai hàm K, v :

$K(z) = \int_b^z g(s)ds$ (K là nguyên hàm của g).

$v(x,y) = y.$

Ta có : $h(x,y) = K(v(x,y)).$

$$\frac{\partial h}{\partial x} = K'\big(v(x,y)\big).\frac{\partial v}{\partial x} = g(y).0 = 0.$$

$$\frac{\partial h}{\partial y} = K'\big(v(x,y)\big).\frac{\partial v}{\partial y} = g(y).1 = g(y).$$

Do đó, $\nabla h(x,y) = \big(0, g(y)\big).$

Ta có:

$$f(x,y) = \int_x^{\int_b^y g(s)ds} g(t)dt = \int_0^{\int_b^y g(s)ds} g(t)dt - \int_0^x g(t)dt.$$

Xét hàm :

$G(s) = \int_0^s g(t)dt.$

$u(x,y) = h(x,y) = K(v(x,y)).$

$l(x,y) = x.$

Ta thấy: $f(x,y) = G\big(u(x,y)\big) - G(l(x,y)).$

Nên :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = G'\big(u(x,y)\big).\frac{\partial u}{\partial x} - G'\big(l(x,y)\big).\frac{\partial l}{\partial x} = g\left(\int_b^y g(s)ds\right).0 - g(x)$$

$$= -g(x).$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = G'\big(u(x,y)\big).\frac{\partial u}{\partial y} - G'\big(l(x,y)\big).\frac{\partial l}{\partial y} = g\left(\int_b^y g(s)ds\right).g(y) - g(x).0$$

$$= g\left(\int_b^y g(s)ds\right).g(y)$$

4.3. Cho $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$f(x,y) = \begin{cases} xy\dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) \neq (0,0) \end{cases}$$

Chứng minh rằng $\frac{\partial f}{\partial y}(x,0) = x,\ \frac{\partial f}{\partial x}(0,y) = -y$.

<u>**Bài giải:**</u>

Ta có: $f(x,0) = f(0,y) = 0$

Trường hợp 1 : $x = 0$ hoặc $y = 0$

Xét thấy :

$$\frac{f(0,0+h) - f(0,0)}{h} = \frac{0}{h} = 0\ \forall h \neq 0$$

Suy ra tồn tại :

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(0,0+h) - f(0,0)}{h} \quad \text{và} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(0,0+h) - f(0,0)}{h} = 0$$

Tương tự :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(0+h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{\mathrm{h}\to 0}\frac{0}{\mathrm{h}} = 0$$

Trường hợp 2 : $x, y \neq 0$, ta có :

$$\frac{f(x,0+h) - f(x,0)}{h} = \frac{f(x,h)}{h} = \frac{1}{h}xh\frac{x^2 - h^2}{x^2 + h^2} = x\frac{x^2 - h^2}{x^2 + h^2}$$

Cho $h \to 0$, ta thấy:

$$x\frac{x^2 - h^2}{x^2 + h^2} \to x\frac{x^2 - 0^2}{x^2 + 0^2} = x$$

Vậy tồn tại $\lim_{h\to 0}\frac{f(x,0+h) - f(x,0)}{h}$ và theo định nghĩa của đạo hàm riêng:

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x,0+h) - f(x,0)}{h} = 0$$

Tương tự, ta cũng có:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,y) = \lim_{h\to 0}\frac{f(0+h,y)-f(0,y)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{f(h,y)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}hy\frac{h^2-y^2}{h^2+y^2}$$

$$= y\frac{0^2-h^2}{0^2+h^2} = -y$$

Vậy kết hợp hai trường hợp trên ta có điều phải chứng minh.

4.4. Tính df cho các hàm sau

a) $f(x,y) = xy^3$

b) $f(x,y) = arctg(\frac{y}{x})$

<u>Bài giải:</u>

a) $f(x,y) = xy^3$

Ta có :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y^3$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 3xy^2$$

Ta thấy các đạo hàm riêng này liên tục tại tại mọi điểm (x,y) thuộc $\mathbb{R}^2$. Suy ra f khả vi trên $\mathbb{R}^2$.

Và $f'(x,y) = \nabla f = (y^3, 3xy^2)$

Ta có: $df(x,y) = f'(x,y)(dx,dy) = (y^3,3xy^2)(dx,dy) = y^3dx + 3xy^2dy$.

b) $f(x,y) = arctg(\frac{y}{x})$

Ta có :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{y}{x^2+y^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{x}{x^2+y^2}$$

Ta thấy các đạo hàm riêng này liên tục tại mọi điểm (x, y) thuộc $\mathbb{R}^2$. Suy ra f khả vi trên $\mathbb{R}^2$.

Và:

$$df(x,y) = f'(x,y)(dx,dy) = \left(-\frac{y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}\right)(dx,dy) = \frac{-y}{x^2+y^2}dx + \frac{x}{x^2+y^2}dy.$$

4.5. Tìm đạo hàm riêng của f theo s và t bằng cách dùng đạo hàm hàm hợp:

a) $f(x,y,z) = x^2 + 4xyz, x = t + s, y = 3t - s, z = t^2$

b) $f(x,y) = x^3 \sin(xy), x = t\cos s, y = t\sin s$

<u>Bài giải:</u>

a) $f(x,y,z) = x^2 + 4xyz, x = t + s, y = 3t - s, z = t^2$

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial t}$$

$= (2x + 4xyz).1 + 4xz.3 + 4xy.2t$

$= 2(t+s) + 4(3t-s)t^2 + 12(t+s)t^2 + 4(t+s)(3t-s)2t$

$= 48t^3 + 24st^2 - 8ts^2 + 2t + 2s.$

$$\frac{\partial f}{\partial s} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial s}$$

$= (2x + 4yz).1 + 4xz(-1) + 4xy.0$

$= 2(t+s) + 4(3t-s)t^2 - 4(t+s)t^2$

$= 8t^3 - 8t^2s + 2t + 2s.$

b) $f(x,y) = x^3 \sin(xy), x = t\cos s, y = t\sin s$

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial t}$$

$= (3x^2\sin(xy) + yx^3\cos(xy))\cos s + tx^4\cos(xy)\cos s$

$$= 3t^2 \cos^3 s \sin(\frac{t^2}{2}\sin 2s) + t^4 \sin s \cos^4 s \cos(\frac{t^2}{2}\sin 2s)$$

$$+ t^5 \cos^5 s \cos(\frac{t^2}{2}\sin 2s)$$

$$\frac{\partial f}{\partial s} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial s}$$

$$= 3tx^2 \sin(xy) + yx^3 \cos(xy) \sin s + tx^4 \cos(xy) \cos s$$

$$= 3t^2 \cos^2 s \sin(\frac{t^2}{2}\sin 2s) + t^4 \cos^3 s \sin^2 s \cos(\frac{t^2}{2}\sin 2s)$$

$$+ t^4 \cos^4 s \cos(\frac{t^2}{2}\sin 2s)$$

4.6. Cho $u = f(v, w)$ với $v = x - y, w = y - x$. Chứng minh

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

<u>Bài giải:</u>

Ta có:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial x}, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial y} \quad (1)$$

Mà:

$$\frac{\partial v}{\partial x} = 1, \qquad \frac{\partial w}{\partial x} = -1, \qquad \frac{\partial v}{\partial y} = -1, \qquad \frac{\partial w}{\partial y} = 1 \qquad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial v}.1 + \frac{\partial f}{\partial w}.(-1) + \frac{\partial f}{\partial v}.(-1) + \frac{\partial f}{\partial w}.1 = 0$$

4.7. Cho $x = \text{r}\cos\theta$, $\text{y} = \text{r}\sin\theta$, $z = f(x, y)$. Chứng minh

$$\left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial z}{\partial \theta}\right)^2 = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2$$

<u>Bài giải:</u>

Ta có : $z = f(x, y)$, áp dụng công thức vi phân hàm hợp ta tính được :

$$\frac{\partial z}{\partial r} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r} = \frac{\partial f}{\partial x}\cos\theta + \frac{\partial f}{\partial y}\sin\theta$$

$$\frac{\partial z}{\partial \theta} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \theta} = \frac{\partial f}{\partial x}r(-\sin\theta) + \frac{\partial f}{\partial y}r\cos\theta$$

Vậy ta có:

$$(\frac{\partial \text{z}}{\partial \text{r}})^2 + \frac{1}{\text{r}^2}(\frac{\partial \text{z}}{\partial \theta})^2 = (\frac{\partial f}{\partial x}\cos\theta + \frac{\partial f}{\partial y}\sin\theta)^2 + \frac{1}{\text{r}^2}(\frac{\partial f}{\partial x}r(-\text{sin}\theta) + \frac{\partial f}{\partial y}r\text{cos}\theta)^2$$

$$= \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2(\cos^2\theta + \sin^2\theta) + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2(\cos^2\theta + \sin^2\theta)$$

$$= \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + (\frac{\partial f}{\partial y})^2$$

4.8. Cho

$$x = u\cos\ \theta - v sin\theta$$

$$y = u\sin\theta + v\cos\theta$$

với θ là một hằng số.Chứng minh

$$\left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)^2 = \left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)^2$$

Với $f(u, v) = g(x, y)$

Bài giải:

Ta có : $f(u,v) = g(x,y)$ nên :

$$\frac{\partial f}{\partial u} = \frac{\partial g}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial g}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u} = \frac{\partial g}{\partial x}\cos\theta + \frac{\partial g}{\partial y}\sin\theta$$

Và

$$\frac{\partial f}{\partial v} = \frac{\partial g}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial g}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v} = \frac{\partial g}{\partial x}(-\sin\theta) + \frac{\partial g}{\partial y}\cos\theta$$

Do vậy,

$$\left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)^2 = \left(\frac{\partial g}{\partial x}\cos\theta + \frac{\partial g}{\partial y}\sin\theta\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial x}(-sin\theta) + \frac{\partial g}{\partial y}cos\theta\right)^2$$

$$= \left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)^2 \cos^2\theta + \left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)^2 \sin^2\theta + \left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)^2 \sin^2\theta + \left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)^2 \cos^2\theta$$

$$= \left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)^2 (\cos^2\theta + \sin^2\theta) + \left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)^2 (\cos^2\theta + \sin^2\theta) = \left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)^2$$

4.9. Cho $i = (1,0,0), j = (0,1,0), k = (0,0,1), p = (x,y,z)$. Cho f khả vi, chứng minh

a) $D_i f(p) = \frac{\partial f}{\partial x}(p),\ \ D_j f(p) = \frac{\partial f}{\partial y}(p)$

b) $D_{\lambda a} f(p) = \lambda D_a f(p)$ với a=(a_1, a_2, a_3) là một vectơ bất kì.

Bài giải:

a) Theo định nghĩa, ta có:

$$D_i f(p) = i\nabla f(p) = 1.\frac{\partial f}{\partial x}(p) + 0.\frac{\partial f}{\partial y}(p) + 0.\frac{\partial f}{\partial z}(p) = \frac{\partial f}{\partial x}(p)$$

$$D_j f(p) = j\nabla f(p) = 0.\frac{\partial f}{\partial x}(p) + 1.\frac{\partial f}{\partial y}(p) + 0.\frac{\partial f}{\partial z}(p) = \frac{\partial f}{\partial y}(p)$$

$$D_k f(p) = k\nabla f(p) = 0.\frac{\partial f}{\partial x}(p) + 0.\frac{\partial f}{\partial y}(p) + 1.\frac{\partial f}{\partial z}(p) = \frac{\partial f}{\partial z}(p)$$

b) Tương tự như câu a, ta cũng có:

$$D_{\lambda a} f(p) = (\lambda a)\nabla f(p) = \lambda(a.\nabla f(p)) = \lambda D_a f(p)\ .$$

4.10. Tính các đạo hàm riêng cấp hai của f và kiểm tra rằng hai đạo hàm hỗn hợp $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ bằng nhau, với hàm $f(x, y)$ cho bởi

a) $x^3 y$

b) $3e^{xy^3}$

c) $\sin(x^2 + y^3)$

Bài giải:

a) $f(x, y) = x^3 y$

Ta có :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3yx^2, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = x^3$$

Vậy suy ra:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = 6xy\ , \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = 0$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = 3x^2, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = 3x^2$$

Vậy ta thấy : $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}$

b) $f(x,y) = 3e^{xy^3}$

Ta có:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3y^3e^{xy^3}, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = 9xy^2e^{xy^3}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = 3y^6e^{xy^3}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = 18xye^{xy^3} + 27x^2y^4e^{xy^3}$$

Và:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial(9xy^2e^{xy^3})}{\partial x} = 9y^2e^{xy^3} + 9xy^5e^{xy^3}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial\left(3y^3e^{xy^3}\right)}{\partial x} = 9y^2e^{xy^3} + 9xy^5e^{xy^3}$$

Vậy ta thấy: $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}$

c) $f(x,y) = \sin(x^2 + y^3)$

Ta có :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x\cos(x^2 + y^3), \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = 3y^2\cos(x^2 + y^3)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = 2\cos(x^2 + y^3) - 4x^2\sin(x^2 + y^3)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = 6y\cos(x^2 + y^3) - 9y^4\sin(x^2 + y^3)$$

Và:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = -6xy^2 \sin\,(x^2 + y^3)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = -6xy^2 \sin\,(x^2 + y^3)$$

Vậy ta thấy :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$

4.11. Tính các đạo hàm riêng cấp hai của hàm ba biến $f(x, y, z)$ với hàm này là

a) $\sin(xyz)$

b) $x^4y^2z^3$

<u>Bài giải:</u>

a) $f(x, y, z) = \sin(xyz)$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = yz\cos(xyz) \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = xz\cos(xyz) \qquad \frac{\partial f}{\partial z} = xy\cos(xyz)$$

Đạo hàm cấp hai :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = -y^2z^2 \sin(xyz)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = -xyz^2\ \sin(xyz) + z\cos(xyz)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = -xyz^2\ \sin(xyz) + z\cos(xyz)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = -xy^2\,z \sin(xyz) + y\cos(xyz)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = -x^2\,z^2 \sin(xyz)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = -xyz^2\ \sin(xyz) + z\cos(xyz)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = -x^2\, yz\sin(xyz) + x\cos(xyz)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right) = -x^2\, y^2\ \sin(xyz)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right) = -x\, y^2 z\sin(xyz) + y\cos(xyz)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right) = -x^2\, yz\sin(xyz) + x\cos(xyz)$$

b) $f(x, y, z) = x^4 y^2 z^3$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 4y^2 z^3 x^3 \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = 2x^4 z^3 y \qquad \frac{\partial f}{\partial z} = 3x^4 y^2 z^2$$

Đạo hàm cấp hai :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = 12y^2 z^3, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = 8yz^3 x^3$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = 12y^2 z^2, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = 2z^3 x^4$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = 8yz^3 x^3, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y} = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = 6x^4 yz^2$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right) = 6x^4 zy^2, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right) = 12x^3 y^2 z^2$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right) = 6x^4 yz^2$$

4.12. Hàm *f* được gọi là hàm **điều hoà** hai biến nếu

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$$

trên miền xác định của nó. Kiểm tra rằng các hàm sau là hàm điều hoà

a) $x^2 - y^2$

b) $artg\frac{y}{x}$

c) $\ln(x^2 + y^2)$

d) $(e^y + e^{-y})sinx$

e) $\sqrt{x + \sqrt{x^2 + y^2}}$

f) $\frac{x}{x^2+y^2}$

Bài giải:

a) $f(x, y) = x^2 - y^2$

Ta có :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = -2y$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = 2$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = -2$$

Suy ra :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$$

Vậy $f(x, y) = x^2 - y^2$ là hàm điều hoà.

b) $f(x, y) = arctg\left(\frac{y}{x}\right)$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{y}{x^2 + y^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{x}{x^2 + y^2}$$

Suy ra :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{-(-y).2x}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{-x.2y}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{-2xy}{(x^2 + y^2)^2}$$

Suy ra :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$$

Vậy hàm đã cho là hàm điều hoà.

c) $f(x, y) = \ln(x^2 + y^2)$

Ta có :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{2x}{x^2 + y^2}\ , \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{2y}{x^2 + y^2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{2y^2 - 2x^2}{(x^2 + y^2)^2}\ , \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{2x^2 - 2y^2}{(x^2 + y^2)^2}$$

Suy ra :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$$

Vậy hàm đã cho là hàm điều hoà.

d) $f(x, y) = (e^y + e^{-y}) \sin x$

Ta có :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = (e^y + e^{-y})cosx$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = (e^y - e^{-y})\sin x$$

Khi đó :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -(e^y + e^{-y})\sin x$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = (e^y + e^{-y})\sin x$$

Suy ra:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$$

Vậy hàm đã cho là hàm điều hoà.

e) $f(x,y) = \sqrt{x + \sqrt{x^2 + y^2}}$

Ta có :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1 + \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}}{2\sqrt{x + \sqrt{x^2+y^2}}} = \frac{\sqrt{x^2+y^2} + x}{2\sqrt{x^2+y^2}\sqrt{x+\sqrt{x^2+y^2}}} = \frac{1}{2}.\frac{\sqrt{x+\sqrt{x^2+y^2}}}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

Vậy ta được:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{1}{2}.\frac{\left(\dfrac{1 + \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}}{2\sqrt{x+\sqrt{x^2+y^2}}}\right).\sqrt{x^2+y^2} + \sqrt{x+\sqrt{x^2+y^2}}.\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}}{x^2+y^2}$$

$$= \frac{1}{2}.\frac{\frac{\left(x+\sqrt{x^2+y^2}\right)\sqrt{x^2+y^2}}{2\sqrt{x+\sqrt{x^2+y^2}}.\sqrt{x^2+y^2}}}{x^2+y^2} + \frac{x.\sqrt{x+\sqrt{x^2+y^2}}}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$= \frac{\sqrt{x+\sqrt{x^2+y^2}}}{x^2+y^2} + \frac{x.\sqrt{x+\sqrt{x^2+y^2}}}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$= \frac{\sqrt{x+\sqrt{x^2+y^2}}\left(x\sqrt{x^2+y^2}+1\right)}{x^2+y^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}}{2\sqrt{x+\sqrt{x^2+y^2}}} = \frac{y}{2.\sqrt{x^2+y^2}\sqrt{x+\sqrt{x^2+y^2}}}$$

Vậy ta được:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

$$= \frac{\sqrt{x^2+y^2}\sqrt{x+\sqrt{x^2+y^2}} + y\left(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\sqrt{x+\sqrt{x^2+y^2}} + \sqrt{x^2+y^2}\,\frac{\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}}{2\sqrt{x+\sqrt{x^2+y^2}}}\right)}{2(x^2+y^2)\left(x+\sqrt{x^2+y^2}\right)}$$

$$= \frac{\sqrt{x^2+y^2}\sqrt{x+\sqrt{x^2+y^2}} + \frac{2y^2\left(x+\sqrt{x^2+y^2}\right)\sqrt{x^2+y^2}}{2(x^2+y^2)\sqrt{x+\sqrt{x^2+y^2}}} + \frac{y^2}{2(x^2+y^2)\sqrt{x+\sqrt{x^2+y^2}}}}{2(x^2+y^2)\left(x+\sqrt{x^2+y^2}\right)}$$

Ta thấy:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \neq 0$$

nên hàm đã cho không là hàm điều hoà.

f) $f(x, y) = \frac{x}{x^2+y^2}$

Ta có:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{x^2 + y^2 - x.2x}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{-x.2y}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{-2xy}{(x^2 + y^2)^2}$$

Khi đó ta có:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{-2x.(x^2 + y^2)^2 - (y^2 - x^2).2(x^2 + y^2).2x}{(x^2 + y^2)^4}$$

$$= \frac{-2x^3 - 2xy^2 - 4xy^2 + 4x^3}{(x^2 + y^2)^3} = \frac{2x^3 - 6xy^2}{(x^2 + y^2)^3}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{-2x.(x^2 + y^2)^2 + 2xy.2(x^2 + y^2).2y}{(x^2 + y^2)^4} = \frac{-2x^3 - 2xy^2 + 8xy^2}{(x^2 + y^2)^3}$$

$$= \frac{-2x^3 + 6xy^2}{(x^2 + y^2)^3}$$

Suy ra:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$$

Vậy hàm đã cho là hàm điều hoà.

4.13. Hàm f gọi là hàm điều hòa ba biến nếu

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}=0$$

trên miền xác định của nó. Kiểm tra xem các hàm sau có là hàm điều hòa hay không

a) $x^2+y^2-2z^2$

b) $\ln(x^2+y^2+z^2)$

c) $\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$

d) $e^{3x+4y}\cos(5z)$

Bài giải:

a) $f(x,y,z)=x^2+y^2-2z^2$

Ta có :

$$\frac{\partial f}{\partial x}=2x \qquad \frac{\partial f}{\partial y}=2y \qquad \frac{\partial f}{\partial z}=-4z$$

Và :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)=2 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=\frac{\partial f}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)=2 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}=\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)=-4$$

Vậy ta thấy :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}=0$$

Suy ra, hàm $f(x,y,z)=x^2+y^2-2z^2$ là hàm điều hòa.

b) $f(x,y)=\ln(x^2+y^2+z^2)$

Ta có :

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{2x}{x^2+y^2+z^2} \qquad \frac{\partial f}{\partial y}=\frac{2y}{x^2+y^2+z^2} \qquad \frac{\partial f}{\partial z}=\frac{2z}{x^2+y^2+z^2}$$

Và :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{2(x^2+y^2+z^2) - 2x(2x)}{(x^2+y^2+z^2)^2} = \frac{-2x^2+2y^2+2z^2}{(x^2+y^2+z^2)^2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial f}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{2x^2-2y^2+2z^2}{(x^2+y^2+z^2)^2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right) = \frac{2x^2+2y^2-2z^2}{(x^2+y^2+z^2)^2}$$

Vậy ta có :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = \frac{2(x^2+y^2+z^2)}{(x^2+y^2+z^2)^2} = \frac{2}{x^2+y^2+z^2}$$

Suy ra, hàm $f(x,y) = \ln(x^2+y^2+z^2)$ không phải là hàm điều hòa ba biến.

c) $f(x,y,z) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = (x^2+y^2+z^2)^{-1/2}$

Ta có :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{1}{2}(x^2+y^2+z^2)^{-3/2}2x = -x(x^2+y^2+z^2)^{-3/2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{1}{2}(x^2+y^2+z^2)^{-3/2}2y = -y(x^2+y^2+z^2)^{-3/2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = -\frac{1}{2}(x^2+y^2+z^2)^{-3/2}2z = -z(x^2+y^2+z^2)^{-3/2}$$

Vậy ta được :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = -(x^2+y^2+z^2)^{-3/2} + \frac{3}{2}x(x^2+y^2+z^2)^{-5/2}2x$$

$$= -(x^2+y^2+z^2)^{-3/2} + 3x^2(x^2+y^2+z^2)^{-5/2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = -(x^2+y^2+z^2)^{-3/2} + 3y^2(x^2+y^2+z^2)^{-5/2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right) = -(x^2+y^2+z^2)^{-3/2} + 3z^2(x^2+y^2+z^2)^{-5/2}$$

Suy ra :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$
$$=-3(x^2+y^2+z^2)^{-3/2}+3(x^2+y^2+z^2)^{-5/2}(x^2+y^2+z^2)$$
$$=-3(x^2+y^2+z^2)^{-3/2}+3(x^2+y^2+z^2)^{-3/2}=0$$

Vậy: hàm $f(x,y,z)=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ là hàm điều hòa ba biến.

d) $f(x,y,z)=\ e^{3x+4y}\cos(5z)$

Ta có :

$$\frac{\partial f}{\partial x}=3e^{3x+4y}\cos(5z)$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}=4e^{3x+4y}\cos(5z)$$
$$\frac{\partial f}{\partial z}=-5e^{3x+4y}\sin(5z)$$

Vậy ta có :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)=9\cos(5z)e^{3x+4y}$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)=16\cos(5z)e^{3x+4y}$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}=\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)=-25e^{3x+4y}\cos(5z)$$

Suy ra :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}=25\cos(5z)\,e^{3x+4y}-25e^{3x+4y}\cos(5z)=0$$

Vậy hàm $f(x,y,z)=\ e^{3x+4y}\cos(5z)$ là hàm điều hòa ba biến.

4.14. Cho

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

a) Tính $f_x(x,y), f_y(x,y)$ tại $(x,y)=(0,0)$ và $(x,y)\neq(0,0)$. Suy ra biểu thức của $f_x(0,y), f_y(x,0)$.

b) Dùng câu a) để tính $f_{xy}(x,y), f_{yx}(x,y)$ với $(x,y)\neq(0,0)$ và tính $f_{xy}(0,0), f_{yx}(0,0)$. Từ đó suy ra $f_{xy}(0,0)\neq f_{yx}(0,0)$.

c) Giả thiết nào của định lí 4.1, chương 4 bị vi phạm trong ví dụ này? Chứng minh khẳng định của bạn.

Bài giải:

a) Xét $(x,y) = (0,0)$

Ta có:

$$\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h}=0\ \forall h\neq 0.$$

Tồn tại

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)\ và\ f_x(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h}=0$$

Hoàn toàn tương tự, ta cũng có : $f_y(0,0)=0$

Xét $(x,y)\neq(0,0)$ ta có :

$$f_x(x,y)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x^3y-xy^3}{x^2+y^2}\right)=\frac{(3x^2y-y^3)(x^2+y^2)-2x(x^3y-xy^3)}{(x^2+y^2)^2}$$

$$=\frac{x^4y+4x^2y^3-y^5}{(x^2+y^2)^2}$$

$$f_y\,(x,y)=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x^3y-xy^3}{x^2+y^2}\right)=\frac{(x^3-3xy^2)(x^2+y^2)-2y(x^3y-xy^3)}{(x^2+y^2)^2}$$

$$=\frac{x^5-4x^3y^2-xy^4}{(x^2+y^2)^2}$$

Nói riêng :

$$f_x\,(0,y)=\frac{-y^5}{(y^2)^2}=-y \text{ và } f_y\,(x,0)=\frac{x^5}{(x^2)^2}=x$$

b) Xét $(x,y)\neq(0,0)$

Ta có :

$$f_{xy}\,(x,y)=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x^4y+4x^2y^3-y^5}{(x^2+y^2)^2}\right)$$

$$=\frac{(x^4+12x^2y^2-5y^4)(x^2+y^2)^2-2(x^2+y^2)(2y)(x^4y+4x^2y^3-y^5)}{(x^2+y^2)^4}$$

$$=\frac{(x^6+9x^4y^2-9x^2y^4-y^6)}{(x^2+y^2)^3}\,(*)$$

$$f_{yx}\,(x,y)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x^5-4x^3y^2-xy^4}{(x^2+y^2)^2}\right)$$

$$=\frac{(5x^4-12x^2y^2-y^4)(x^2+y^2)^2-2(x^2+y^2)(2x)(x^5-4x^3y^2-xy^4)}{(x^2+y^2)^4}$$

$$=\frac{(x^6+9x^4y^2-9x^2y^4-y^6)}{(x^2+y^2)^3}$$

Xét $(x,y)\ =\ (0,0)$. Ta có :

$$\frac{f_x(x,y)-f_x(0,0)}{h}=\frac{-h-0}{h}=-1, \forall h\neq 0$$

Tồn tại

$$f_{xy}(0,0) \text{ và } f_{xy}(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{f_x(0,h)-f_x(0,0)}{h}=-1$$

Tương tự , ta có :

$$f_{yx}(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{f_y(h,0)-f_y(0,0)}{h}=1$$

Vậy $f_{xy}(0,0)\neq f_{yx}(0,0)$.

c) Trong ví dụ này $f_{xy}(0,0)\neq f_{yx}(0,0)$ do giả thiết liên tục của hai đạo hàm riêng f_{xy}, f_{yx} trong định lí 4.1, chương 4 bị vi phạm.

Thật vậy, ta sẽ chứng minh f_{xy} không liên tục tại (0,0).

Xét dãy $\left(\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right)\to(0,0)$. Thế vào $(*)$, ta thấy

$$f_{xy}\left(\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right)=0, \forall n\in\mathbb{N}$$

Do đó khi $n\to\infty$: $f_{xy}\left(\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right)\to 0\neq f_{xy}(0,0)=-1$

Điều này chứng tỏ f_{xy} không liên tục tại (0,0).

4.15. Cho :

a) $u=F\left(\frac{y-x}{xy},\frac{z-x}{xz}\right)$. Chứng minh

$$x^2\frac{\partial u}{\partial x}+y^2\frac{\partial u}{\partial y}+z^2\frac{\partial u}{\partial z}=0.$$

b) $u=x^3F\left(\frac{y}{x},\frac{z}{x}\right)$.Chứng minh $x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}+z\frac{\partial u}{\partial z}=3u$.

c) $z=y.f(x^2-y^2)$. Chứng minh $y\frac{\partial z}{\partial x}+x\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{xz}{y}$.

d) $z = xy + xF\left(\frac{y}{x}\right)$. Chứng minh $x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = xy + z$.

e) $u = f(r)$ với $r = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}$. Chứng minh

$$(\frac{\partial u}{\partial x})^2 + (\frac{\partial u}{\partial y})^2 + (\frac{\partial u}{\partial z})^2 = (\frac{\partial u}{\partial r})^2.$$

Bài giải:

a) $u = F\left(\frac{y-x}{xy}, \frac{z-x}{xz}\right)$

Đặt $p = \frac{y-x}{xy}$, $q = \frac{z-x}{xz}$

Khi đó: $u = F(p, q)$

Ta có:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial p}\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial q}\frac{\partial q}{\partial x}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial F}{\partial p}\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial q}\frac{\partial q}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial F}{\partial p}\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\partial F}{\partial q}\frac{\partial q}{\partial z}$$

Mà:

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{-(xy) - (y-x)y}{(xy)^2} = \frac{-1}{x^2} \qquad \frac{\partial q}{\partial x} = \frac{-(xz) - (z-x)z}{(xz)^2} = \frac{-1}{x^2}$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} = \frac{(xy) - (y-x)x}{(xy)^2} = \frac{1}{y^2} \qquad \frac{\partial q}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial p}{\partial z} = 0 \qquad \frac{\partial q}{\partial z} = \frac{(xz) - (z-x)x}{(xz)^2} = \frac{1}{z^2}$$

Do đó, ta suy ra :

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial p}.\frac{-1}{x^2} + \frac{\partial F}{\partial q}.\frac{-1}{x^2} = \frac{-1}{x^2}.\left(\frac{\partial F}{\partial p} + \frac{\partial F}{\partial q}\right)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial F}{\partial p}.\frac{1}{y^2} + \frac{\partial F}{\partial q}.0 = \frac{1}{y^2}.\frac{\partial F}{\partial p}$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial F}{\partial p}.0 + \frac{\partial F}{\partial q}.\frac{1}{z^2} = \frac{1}{z^2}.\frac{\partial F}{\partial q}$$

Khi đó, ta có :

$$x^2\frac{\partial u}{\partial x}+y^2\frac{\partial u}{\partial y}+z^2\frac{\partial u}{\partial z}=x^2.\frac{-1}{x^2}\left(\frac{\partial F}{\partial p}+\frac{\partial F}{\partial q}\right)+y^2.\frac{1}{y^2}.\frac{\partial F}{\partial p}+z^2.\frac{1}{z^2}.\frac{\partial F}{\partial q}=0$$

Vậy ta có điều phải chứng minh.

b) $u=x^3F\left(\frac{y}{x},\frac{z}{x}\right)$

Đặt $p=\frac{y}{x},q=\frac{z}{x}$

Khi đó ta có : $u=(x,y)=x^3F(p,q)$

Dùng công thức đạo hàm hàm hợp ta có :

$$\frac{\partial u}{\partial x}=3x^2F+x^3\left(\frac{\partial F}{\partial p}.\frac{\partial p}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial q}.\frac{\partial q}{\partial x}\right)$$

$$=3x^2F+x^3\left(\frac{\partial F}{\partial p}.\frac{-y}{x^2}+\frac{\partial F}{\partial q}.\frac{-z}{x^2}\right)=3x^2F-x\left(\frac{\partial F}{\partial p}.y+\frac{\partial F}{\partial q}.z\right)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=x^3\left(\frac{\partial F}{\partial p}.\frac{\partial p}{\partial y}+\frac{\partial F}{\partial q}.\frac{\partial q}{\partial y}\right)=x^3\left(\frac{\partial F}{\partial p}.\frac{1}{x}+\frac{\partial F}{\partial q}.0\right)=x^2\frac{\partial F}{\partial p}$$

$$\frac{\partial u}{\partial z}=x^3\left(\frac{\partial F}{\partial p}.\frac{\partial p}{\partial z}+\frac{\partial F}{\partial q}.\frac{\partial q}{\partial z}\right)=x^3\left(\frac{\partial F}{\partial p}.0+\frac{\partial F}{\partial q}.\frac{1}{x}\right)=x^2\frac{\partial F}{\partial q}$$

Do vậy ta có :

$$x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}+z\frac{\partial u}{\partial z}=3x^3F-x^2\left(y\frac{\partial F}{\partial p}+z\frac{\partial F}{\partial q}\right)+yx^2\frac{\partial F}{\partial p}+zx^2\frac{\partial F}{\partial q}=3x^3F$$

$$=3u$$

Ta có điều phải chứng minh.

c) $z=y.f(x^2-y^2)$

Đặt $t=x^2-y^2$

Khi đó : $z=y.f(t)$

Ta có :

$$\frac{\partial z}{\partial x} = y\left(\frac{\partial f}{\partial t}.\frac{\partial t}{\partial x}\right) = y\left(\frac{\partial f}{\partial(x^2 - y^2)}.\frac{\partial(x^2 - y^2)}{\partial x}\right) = 2xy\frac{\partial f}{\partial(x^2 - y^2)}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = f(x^2 - y^2) + y\left(\frac{\partial f}{\partial(x^2 - y^2)}.\frac{\partial(x^2 - y^2)}{\partial x}\right)$$

$$= f(x^2 - y^2) - 2y^2\frac{\partial f}{\partial(x^2 - y^2)}$$

$$y\frac{\partial z}{\partial x} + x\frac{\partial z}{\partial y} = 2xy^2\frac{\partial f}{\partial(x^2 - y^2)} + xf(x^2 - y^2) - 2xy^2\frac{\partial f}{\partial(x^2 - y^2)}$$

$$= xf(x^2 - y^2) = \frac{xz}{y}$$

Vậy ta có :

$$y\frac{\partial z}{\partial x} + x\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{xz}{y}$$

d) $z = xy + xF\left(\frac{y}{x}\right)$

Ta có :

Đặt $t = \frac{y}{x}$, khi đó $z = xy + xF(t)$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = y + F\left(\frac{y}{x}\right) + x\left(\frac{\partial F}{\partial t}.\frac{\partial t}{\partial x}\right) = y + F\left(\frac{y}{x}\right) + x\left(\frac{\partial F}{\partial t}.\frac{-y}{x^2}\right)$$

$$= y + F\left(\frac{y}{x}\right) + \frac{-y}{x}.\frac{\partial F}{\partial t}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = x + x\left(\frac{\partial F}{\partial t}.\frac{\partial t}{\partial y}\right) = x + x\left(\frac{\partial F}{\partial t}.\frac{1}{x}\right) = x + \frac{\partial F}{\partial t}$$

Suy ra :

$$x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = xy + xF\left(\frac{y}{x}\right) + x.\frac{-y}{x}.\frac{\partial F}{\partial t} + xy + y.\frac{\partial F}{\partial t} = 2xy + z - xy$$

$$= xy + z$$

Vậy

$$x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = xy + z.$$

e) $u = f(r)$ với $r = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}$

Ta có :

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{df}{dr}.\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{df}{dr}.\frac{x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{1}{2}}}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{df}{dr}.\frac{\partial r}{\partial y} = \frac{df}{dr}.\frac{y}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{1}{2}}}$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{df}{dr}.\frac{\partial r}{\partial z} = \frac{df}{dr}.\frac{z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{1}{2}}}$$

Do vậy ta có :

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2$$

$$= \left(\frac{df}{dr}\right)^2.\left(\frac{x^2}{x^2 + y^2 + z^2} + \frac{y^2}{x^2 + y^2 + z^2} + \frac{z^2}{x^2 + y^2 + z^2}\right) = \left(\frac{df}{dr}\right)^2$$

$$= \left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)^2$$

Vậy ta có điều phải chứng minh.

4.16. Nếu $u = f(r)$ với $r = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}$. Chứng minh

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{d^2 u}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{du}{dr}$$

<u>Bài giải:</u>

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{df}{dr}\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{df}{dr}\frac{x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}}$$

Suy ra :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{d^2 f}{dx^2}\left(\frac{x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}}\right)^2 + \frac{df}{dr}\left(\frac{1}{(x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}} - \frac{x^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}\right)$$

$$= \frac{d^2 f}{dx^2}\frac{x^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}} + \frac{df}{dr}\left(\frac{1}{(x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}} - \frac{x^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}\right)$$

Tương tự :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{d^2 f}{dr^2}\frac{y^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}} + \frac{df}{dr}\left(\frac{1}{(x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}} - \frac{y^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}\right)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{d^2 f}{dr^2}\frac{z^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}} + \frac{df}{dr}\left(\frac{1}{(x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}} - \frac{z^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}\right)$$

Suy ra :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

$$=\frac{d^2 f}{dr^2}\frac{x^2+y^2+z^2}{x^2+y^2+z^2}+\frac{df}{dr}\left(\frac{3}{(x^2+y^2+z^2)^{1/2}}-\frac{x^2+y^2+z^2}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\right)$$

$$=\frac{d^2 f}{dr^2}+\frac{2}{r}\frac{df}{dr}$$

4.17. Cho hàm $F(x,y)$. Giả sử $x=f(u,v)$, $y=g(u,v)$ và $G(u,v)=F(f(u,v),g(u,v))$. Chứng minh rằng ta có

$$\frac{\partial^2 G}{\partial u^2}+\frac{\partial^2 G}{\partial v^2}=\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\right)\left[\left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)^2\right]$$

Với

$$\frac{\partial f}{\partial u}=\frac{\partial g}{\partial v}\ ,\qquad \frac{\partial f}{\partial v}=-\frac{\partial g}{\partial u}$$

<u>Bài giải:</u>

Ta có :

$$\frac{\partial G}{\partial u}=\frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}$$

$$\frac{\partial^2 G}{\partial u^2}=\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u}\right)+\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}\right)$$

$$=\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)+\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)\frac{\partial y}{\partial u}+\frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)$$

$$=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)\frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial^2 x}{\partial u^2}+\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial u}+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)\frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial u}$$

$$+\frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial^2 y}{\partial u^2}$$

$$= \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)^2 + \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x}\frac{\partial g}{\partial u}\frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial^2 f}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial g}{\partial u} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\left(\frac{\partial g}{\partial u}\right)^2 + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial^2 g}{\partial u^2}$$

Tương tự ta có :

$$\frac{\partial^2 G}{\partial v^2}$$

$$= \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)^2 + \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}\frac{\partial g}{\partial v}\frac{\partial f}{\partial v} + \frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial^2 f}{\partial v^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}\frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial g}{\partial v} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\left(\frac{\partial g}{\partial v}\right)^2 + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial^2 g}{\partial v^2}$$

Suy ra :

$$\frac{\partial^2 G}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 G}{\partial v^2} = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\left[\left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)^2\right] + \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}\left(\frac{\partial g}{\partial u}\frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial g}{\partial v}\frac{\partial f}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial g}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial g}{\partial v}\right)$$

$$+ \frac{\partial F}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2}\right) + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\left[\left(\frac{\partial g}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial v}\right)^2\right] + \frac{\partial F}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 g}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial v^2}\right)$$

$$= \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\left[\left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)^2\right] + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\left[\left(\frac{\partial g}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial v}\right)^2\right]$$

$$= \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\left[\left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)^2\right] + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\left[\left(-\frac{\partial f}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)^2\right]$$

$$= \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\right)\left[\left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)^2\right]$$

Vì theo hệ thức Cauchy –Reimann ta có:

$$\frac{\partial f}{\partial u} = \frac{\partial g}{\partial v}, \qquad \frac{\partial f}{\partial v} = -\frac{\partial g}{\partial u}$$

$\dfrac{\partial^2 f}{\partial u^2} = \dfrac{\partial^2 g}{\partial u \partial v}$ và $\dfrac{\partial^2 f}{\partial v^2} = -\dfrac{\partial^2 g}{\partial u \partial v}$ nên $\dfrac{\partial^2 g}{\partial u^2} + \dfrac{\partial^2 g}{\partial v^2} = 0$ và $\dfrac{\partial^2 f}{\partial u^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial v^2} = 0$.

4.18. Cho hàm F có 2 biến x, y. Ta nói F là hàm thuần nhất cấp $\alpha > 1$ nếu

$$F(tu, tv) = t^{\alpha} F(u, v)$$

với mọi u, v, t.

Chứng minh rằng nếu F là hàm thuần nhất cấp α thì

a) $x\frac{\partial F}{\partial x} + y\frac{\partial F}{\partial y} = \alpha F(x, y)$

b) $x^2\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + 2xy\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} + y^2\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = \alpha(\alpha - 1)F(x, y)$

<u>Bài giải:</u>

a) Đặt $g(t) = F(tu, tv) = t^{\alpha} F(u, v)$

Khi đó :

$g'(t) = \alpha t^{\alpha-1}.F(u, v)$. (1)

Đặt $x(t) = tu, y(t) = tv$.

Lấy đạo hàm g theo biến t, ta có:

$g'(t) = \frac{\partial F}{\partial x}\big(x(t), y(t)\big).x'(t) + \frac{\partial F}{\partial y}\big(x(t), y(t)\big).y'(t) = u\frac{\partial F}{\partial x}(tu, tv) + v\frac{\partial F}{\partial y}(tu, tv)$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra :

$u\frac{\partial F}{\partial x}(tu, tv) + v\frac{\partial F}{\partial y}(tu, tv) = \alpha t^{\alpha-1}.F(u, v) \quad \forall t, u, v \in \mathbb{R}$

Cho $t = 1$, ta có $u\frac{\partial F}{\partial x}(u, v) + v\frac{\partial F}{\partial y}(u, v) = \alpha.F(u, v) \quad \forall u, v \in \mathbb{R}$

Hay $x\frac{\partial F}{\partial x}(x,y) + y\frac{\partial F}{\partial y}(x,y) = \alpha.F(x,y)$

Vậy ta có điều phải chứng minh.

b) Theo câu a ta có đạo hàm của g theo *t* là $g^{'}(t)$.

Lấy đạo hàm của $g^{'}(t)$ theo *t*, ta có :

$$g^{''}(t) = u\left[\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(tu,tv).x^{'}(t) + \frac{\partial^2 F}{\partial y\partial x}(tu,tv).y^{'}(t)\right]$$

$$+ v\left[\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y}(tu,tv).x^{'}(t) + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}(tu,tv).y^{'}(t)\right]$$

$$= u^2\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(tu,tv) + uv\frac{\partial^2 F}{\partial y\partial x}(tu,tv) + uv\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y}(tu,tv)$$

$$+ v^2\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}(tu,tv)$$

$$= u^2\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(tu,tv) + 2uv\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y}(tu,tv) + v^2\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}(tu,tv)$$

Theo (1) ta có :

$$g^{''}(t)=\alpha(\alpha-1)t^{\alpha-2}F(u,v)$$

Suy ra :

$$u^2\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(tu,tv) + 2uv\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y}(tu,tv) + v^2\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}(tu,tv) = \alpha(\alpha-1)t^{\alpha-2}F(u,v)$$

Cho $t = 1$

$$u^2\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(u,v)+2uv\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y}(u,v)+v^2\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}(u,v)=\ \alpha(\alpha-1)F(u,v)\ \ \forall u,v\ \in\mathbb{R}$$

Hay $x^2\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(x,y)+2xy\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y}(x,y)+y^2\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}(x,y)=\ \alpha(\alpha-1)F(x,y)$

Ta có điều phải chứng minh.

4.19. Cho F là hàm thuần nhất cấp hai. Đặt $u=r^mF(x,y)$ với $r^2=x^2+y^2$. Chứng minh rằng

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=r^m\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\right)+m(m+4)r^{m-2}F$$

<u>Bài giải:</u>

Đặt $R=r^2=x^2+y^2$

Suy ra :

$$u=r^mF=R^{\frac{m}{2}}F$$

Vậy ta có :

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{m}{2}R^{\frac{m}{2}-1}\frac{\partial R}{\partial x}F+R^{\frac{m}{2}}\frac{\partial F}{\partial x}=\frac{m}{2}R^{\frac{m}{2}-1}2xF+R^{\frac{m}{2}}\frac{\partial F}{\partial x}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{m}{2}\left(\frac{m}{2}-2\right)R^{\frac{m}{2}-2}\left(\frac{\partial R}{\partial x}\right)^2F+\frac{m}{2}R^{\frac{m}{2}-1}\frac{\partial^2 R}{\partial x^2}F+\frac{m}{2}R^{\frac{m}{2}-1}\frac{\partial R}{\partial x}\frac{\partial F}{\partial x}$$
$$+\frac{m}{2}R^{\frac{m}{2}-1}\frac{\partial R}{\partial x}\frac{\partial F}{\partial x}+R^{\frac{m}{2}}\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}$$
$$=\frac{m}{2}\left(\frac{m}{2}-2\right)R^{\frac{m}{2}-2}(2x)^2F+\frac{m}{2}R^{\frac{m}{2}-1}2F+\frac{m}{2}R^{\frac{m}{2}-1}2x\frac{\partial F}{\partial x}+\frac{m}{2}R^{\frac{m}{2}-1}2x\frac{\partial F}{\partial x}$$
$$+R^{\frac{m}{2}}\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}$$

$$= m(m-2)R^{\frac{m}{2}-2}x^2F + mR^{\frac{m}{2}-1}F + mR^{\frac{m}{2}-1}x\frac{\partial F}{\partial x} + mR^{\frac{m}{2}-1}x\frac{\partial F}{\partial x} + R^{\frac{m}{2}}\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}$$

$$= m(m-2)R^{\frac{m}{2}-2}x^2F + mR^{\frac{m}{2}-1}F + 2mR^{\frac{m}{2}-1}x\frac{\partial F}{\partial x} + R^{\frac{m}{2}}\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}$$

Tương tự :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = m(m-2)R^{\frac{m}{2}-2}y^2F + mR^{\frac{m}{2}-1}F + 2mR^{\frac{m}{2}-1}y\frac{\partial F}{\partial y} + R^{\frac{m}{2}}\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}$$

Vậy ta có :

$$= m(m-2)R^{\frac{m}{2}-2}(x^2+y^2)F + 2mR^{\frac{m}{2}-1}F + 2mR^{\frac{m}{2}-1}\left(x\frac{\partial F}{\partial x} + y\frac{\partial F}{\partial y}\right)$$

$$+ R^{\frac{m}{2}}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\right)$$

$$= m(m-2)R^{\frac{m}{2}-1}F + 2mR^{\frac{m}{2}-1}F + 4mR^{\frac{m}{2}-1}F + R^{\frac{m}{2}}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\right)$$

$$= R^{\frac{m}{2}-1}F(m^2+4m) + R^{\frac{m}{2}}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\right)$$

$$= r^m\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\right) + m(m+4)r^{m-2}F$$

4.20. Khảo sát tính khả vi của ánh xạ $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ xác định bởi

$$f(x) = |x_1| + |x_2|.$$

Bài giải:

Ta có :

$$\|h_1, h_2\|\varepsilon(h_1, h_2) = f(x_1+h_1, x_2+h_2) - f(x_1, x_2) - \nabla\mathrm{f}(x_1, x_2)(h_1, h_2)$$

$$= |x_1+h_1| + |x_2+h_2| - |x_1| - |x_2| - \nabla\mathrm{f}(x_1, x_2)(h_1, h_2).$$

Ta chia $\mathbb{R}^2$ ra làm 4 góc phần tư và các đường thẳng $x_1 = 0, x_2 = 0$.

Chọn góc phần tử thứ I là D_1:

Với $D_1 = \{(x_1, x_2) | x_1 > 0, x_2 > 0\}$

D_1 là tập mở nên $\exists r > 0$ sao cho $B(x,r) \subset D_1, \|h\| < r$.

Rõ ràng 4 tập đều mở nên ta chỉ chứng minh cho một tập, (ba tập còn lại hoàn toàn tương tự).

✶ Chứng minh f khả vi trên D_1:

Trên D_1 thì $F(x_1, x_2) = x_1 + x_2$

Ta có : $\dfrac{\partial f}{\partial x_1} = 1; \dfrac{\partial f}{\partial x_2} = 1.$

Do vậy $\nabla \mathrm{f}(x_1, x_2) = (1,1)$

Do D_1 mở và $(x_1, x_2) \in D_1$ với mọi $h \in \mathbb{R}^2$ thỏa $|h| < r$ có:

$\|h\|\varepsilon(h) = f(x_1 + h_1, x_2 + h_2) - f(x_1, x_2) - \nabla \mathrm{f}(x_1, x_2)(h_1, h_2)$

$= (x_1 + h_1) + (x_2 + h_2) - (x_1 + x_2) - (1,1)$

$= (x_1 + h_1) + (x_2 + h_2) - (x_1 + x_2) - (h_1 + h_2) = 0$

$\varepsilon(h) = 0\ \forall |h| < r$ nên $\lim_{|h| \to 0} \varepsilon(h) = 0$

Vậy f khả vi trên D_1. Suy ra f khả vi trên $\mathbb{R}^2$.

✶ Chứng minh f không khả vi trên hai đường thẳng $x_1 = 0$,$x_2 = 0$

Chỉ cần chứng minh f không khả vi tại $x_1 = 0$.

$$\lim_{x_1 \to 0^+} \frac{f(x_1, x_2) - f(0, x_2)}{x_1} = \lim_{x_1 \to 0^+} \frac{|x_1| + |x_2| - |x_2|}{x_1} = \lim_{x_1 \to 0^+} \frac{x}{x} = 1$$

$$\lim_{x_1 \to 0^-} \frac{f(x_1, x_2) - f(0, x_2)}{x_1} = \lim_{x_1 \to 0^-} \frac{|x_1| + |x_2| - |x_2|}{x_1} = \lim_{x_1 \to 0^-} -\frac{x}{x} = -1$$

$$\lim_{x_1 \to 0^+} \frac{f(x_1, x_2) - f(0, x_2)}{x_1} \neq \lim_{x_1 \to 0^-} \frac{f(x_1, x_2) - f(0, x_2)}{x_1}$$

Tương tự ta tính được tại

$$x_2 = 0, \lim_{x_2 \to 0^+} \frac{f(x_1, x_2) - f(x_1, 0)}{x_2} \neq \lim_{x_2 \to 0^-} \frac{f(x_1, x_2) - f(x_1, 0)}{x_2}$$

Vậy f không khả vi trên hai đường thẳng $x_1 = 0, x_2 = 0$.

4.21. Khảo sát tính khả vi của ánh xạ $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ xác định bởi

$$f(x) = \max_{i=1,2} x_i$$

Bài giải:

Đặt $U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 |\ x \neq y\}$

Ta chứng minh f khả vi trên U và không khả vi trên $(\mathbb{R}^2 \backslash U)$

Ta có :

$$U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 |\ x > y\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 |\ x < y\}$$

Xét $D_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 |\ x > y\}$. Lấy (u_0, v_0) bất kì trong D_1

$$\lim_{x \to u_0^+} \frac{\max(u_0, v_0) - \max(x, v_0)}{u_0 - x} = 1$$

$$\lim_{x \to u_0^-} \frac{\max(u_0, v_0) - \max(x, v_0)}{u_0 - x} = 1$$

$$\lim_{y \to v_0^+} \frac{\max(u_0, v_0) - \max(u_0, y)}{v_0 - y} = 0$$

$$\lim_{y \to v_0^-} \frac{\max(u_0, v_0) - \max(u_0, y)}{v_0 - y} = 0$$

Vậy f có đạo hàm riêng theo hướng x và y, $\forall (x, y) \in D_1$

Các đạo hàm riêng này liên tục trên D_1. Suy ra f khả vi trên D_1

Tương tự cho D_2, ta suy ra f khả vi trên U

Xét $\mathbb{R}^2\backslash U$, lấy $(t,t) \in \mathbb{R}^2\backslash U$

$$\lim_{x\to t^+} \frac{\max(t,t) - \max(x,t)}{t-x} = 1$$

$$\lim_{x\to t^-} \frac{\max(t,t) - \max(x,t)}{t-x} = 0$$

Suy ra f không khả vi trên $\mathbb{R}^2\backslash U$.

Vậy f khả vi trên U và không khả vi trên $\mathbb{R}^2\backslash U$.

4.22. Cho hàm $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ là hàm khả vi tại mọi điểm của $\mathbb{R}^n$. Chứng minh rằng nếu $\frac{\partial f}{\partial x_1}(x) = 0$ tại mọi x thì f không lệ thuộc vào biến thứ nhất.

Bài giải:

Ta cần chứng minh f không lệ thuộc biến thứ nhất, nghĩa là với $x_2, x_3, \dots, x_n$ cố định thì

$$f(t, x_2, x_3, \dots, x_n) = f(s, x_1, x_2, \dots, x_n) \text{ với mọi } t, s \in \mathbb{R}.$$

Mà ta có :

$f(t, x_2, x_3, \dots, x_n) - f(s, x_1, x_2, \dots, x_n) = \int_s^t \frac{\partial(x, x_2, \dots, x_n)}{\partial x_1} dx = \int_s^t 0 dx = 0$

Ta có điều phải chứng minh.

4.23. Cho $D \subset \mathbb{R}^2$ xác định bởi

$(x, y) \in D \Leftrightarrow (0 \leq x \leq 1$ và $-1 \leq y \leq 1)$ hay $\left(-1 \leq x < 0 \text{ và } \frac{1}{2} \leq |y| \leq 1\right)$

Xét $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ xác định bởi

$$f(x,y) = \begin{cases} x^2 & \text{khi } y > 0, x \leq 0 \\ 0 & \text{khi } \quad x \geq 0 \\ -x^2 & \text{khi } y \leq 0, x \leq 0 \end{cases}$$

Chứng tỏ rằng $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0$,với mọi $(x, y) \in D$. Chú ý rằng f thay đổi theo y.

<u>Bài giải:</u>

Xét f trên miền $0 < x < 1$ và $-1 < y < 1$

Ta có $f(x, y) = 0$ vì $x \geq 0$ nên $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0$

Xét f trên miền $-1 < x < 0$ và $\frac{1}{2} < y < 1$

Ta có $f(x, y) = x^2$ khi $y > 0, x \leq 0$ nên $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0$

Xét f trên miền $-1 < x < 0$ và $-1 < y < -\frac{1}{2}$

Ta có $f(x, y) = -x^2$ khi $y \leq 0, x \leq 0$ nên $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0$

Xét tại trục Oy:

Ta có :

$$f_y(0, y) = \lim_{h \to 0} \frac{f(0, y+h) - f(0, y)}{h} = \frac{0 - 0}{h} = 0$$

Tại (0,0):

$$\lim_{h \to 0^-} \frac{f(0, h) - f(0,0)}{h} = \frac{0 - 0}{h} = 0 = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(0, h) - f(0,0)}{h}$$

$f_y(0,0) = 0.$

Vậy $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0$, với mọi $(x, y) \in D$.

4.24. Cho hàm g liên tục trên đường tròn đơn vị $\{x \in \mathbb{R}^2 | \|x\| = 1\}$ *và* $g(0,1) = g(1,0) = 0, g(-x) = -g(x)$. Xét $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ xác định bởi

$$f(x) = \begin{cases} \|x\| g\left(\frac{x}{\|x\|}\right) & \text{khi } x \neq (0,0) \\ 0 & \text{khi } x = (0,0) \end{cases}$$

a. Chứng minh rằng hàm $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ xác định bởi đẳng thức $h(t) = f(tx)$ (trong đó $x \in \mathbb{R}^2$) là hàm khả vi.
b. Chứng minh rằng f không khả vi tại $(0,0)$ trừ khi $g = 0$.

Bài giải:

a. Theo đề bài ta có: $h(t) = f(tx)$ nên ta sẽ chứng minh

$$h(t) = t\|x\| g\left(\frac{x}{\|x\|}\right), \forall t \in \mathbb{R}.$$

Với $t > 0$, ta có $h(t) = f(tx) = \|tx\| g\left(\frac{tx}{\|tx\|}\right) = t\|x\| g\left(\frac{tx}{t\|x\|}\right) = t\|x\| g\left(\frac{x}{\|x\|}\right)$

Tương tự, với $t < 0$, ta có:

$$h(t) = f(tx) = \|tx\| g\left(\frac{tx}{\|tx\|}\right) = -t\|x\| g\left(\frac{tx}{-t\|x\|}\right) = -t\|x\|\left(-g\left(\frac{x}{\|x\|}\right)\right)$$
$$= t\|x\| g\left(\frac{x}{\|x\|}\right)$$

Khi $t = 0$ thì $h(0) = f(0) = 0$

Vậy ta đã có $h(t) = t\|x\| g\left(\frac{x}{\|x\|}\right), \forall t \in \mathbb{R}$.

Ta thấy h là hàm số bậc nhất theo t. Nên h khả vi và $h'(t) = \|x\| g\left(\frac{x}{\|x\|}\right), \forall t \in \mathbb{R}$.

b. Với mọi $u \in \mathbb{R}^2, \|u\| = 1$, ta sẽ chứng minh tồn tại $D_u f(0)$ và $D_u f(0) = g(u)$

Thật vậy, theo câu a ta có $f(tu) = t\|u\| g\left(\frac{u}{\|u\|}\right)$ $\forall t \in \mathbb{R}$.

Xét thấy:

$$\frac{f(tu) - f(0)}{t} = \frac{t\|u\| g\left(\frac{u}{\|u\|}\right)}{t} = g(u), \forall t \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$$

Do đó, tồn tại $\lim_{t\to 0} \frac{f(0+tu)-f(0)}{t}$ và theo định nghĩa đạo hàm theo hướng ta có:

$$D_u f(0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(0 + tu) - f(0)}{t} = g(u)$$

Xét $x \in \mathbb{R}^2, \|x\| = 1$ bất kì.

Đặt $i_1 = (1,0), i_2 = (0,1)$. Giả sử $x = (x_1, x_2)$.Ta thấy $x = x_1 i_1 + x_2 i_2$

Nếu f khả vi tại (0,0), ta có: $D_a f(0) = a\nabla f(0),\ \forall a \in \mathbb{R}^2$

Suy ra :

$$\begin{aligned} D_x f(0) = \ x\nabla f(0) &= (ci_1 + x_2 i_2)\nabla f(0) = x_1 i_1 \nabla f(0) + x_2 i_2 \nabla f(0) \\ &= x_1 D_{i_1} f(0) + x_2 D_{i_2} f(0) = x_1\, g(i_1) + x_2\, g(i_2) \\ &= 0, (do\ g(i_1) = g(i_2) = 0) \end{aligned}$$

Mặt khác, vì $D_x f(0) = g(x),$ ta suy ra $g(x) = 0$.

Đảo lại, nếu $g(x) = 0$,$\forall x \in \mathbb{R}^2, \|x\| = 1$, ta dễ thấy $f = 0$ và do đó khả vi tại (0,0).

Vậy f không khả vi tại (0,0) trừ khi $g = 0$.

4.25. Chứng minh rằng hàm

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x|y|}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{khi } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{khi } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

không khả vi tại (0,0).

Bài giải:

Ta có :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \lim_{h\to 0} \frac{f(0,h) - f(0,0)}{h} = 0$$

Vậy : $\nabla f(0,0) = (0,0)$ và

$$\varepsilon(h,k) = \frac{f(h,k) - f(0,0) - (h,k)\nabla f(0,0)}{\sqrt{h^2+k^2}} = \frac{h|k|}{\sqrt{h^2+k^2}\,\sqrt{h^2+k^2}} = \frac{h|k|}{h^2+k^2}$$

Chọn $(h,k) = \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)$

Ta thấy :

Với mọi $n \in \mathbb{N}$, $\varepsilon(h,k) \nrightarrow 0$ khi $(h,k) \to 0$ và do đó f cũng không khả vi tại (0,0).

4.26. Chứng minh rằng hàm $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ xác định bởi $f(x,y) = \sqrt{|xy|}$ không khả vi tại (0,0).

Bài giải:

Chứng minh f không khả vi theo hướng $h = (1,1)$ tại (0,0).

Ta lưu ý :

$f(0 + t.h) = f(t.h) = f\big(t.(1,1)\big) = f(t,t) = \sqrt{|t.t|} = |t|$.

Xét :

$$\lim_{t\to 0^+}\frac{f(t,h)-f(0)}{t}=\lim_{t\to 0^+}\frac{f(t,t)-f(0)}{t}=\lim_{t\to 0^+}\frac{|t|}{t}=\lim_{t\to 0^+}\frac{t}{t}=1$$

$$\lim_{t\to 0^-}\frac{f(t,h)-f(0)}{t}=\lim_{t\to 0^-}\frac{f(t,t)-f(0)}{t}=\lim_{t\to 0^+}\frac{|t|}{t}=\lim_{t\to 0^-}-\frac{t}{t}=-1.$$

Do đó $\lim_{t\to 0^+}\frac{f(t,h)-f(0)}{t} \neq \lim_{t\to 0^-}\frac{f(t,h)-f(0)}{t}$

Vậy f không khả vi theo hướng h tại $(0,0)$ nên f không khả vi tại $(0,0)$.

4.27. Chứng minh rằng hàm $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ sao cho $|f(x)|\le\|x\|^2$ khả vi tại $(0,0,\dots,0)$

<u>**Bài giải:**</u>

Ta có :

$|f(x)|\le\|x\|^2$. Như vậy với $x=0$ thì $|f(0)|\le|0|^2=0$ nên suy ra $f(0)=0$.

Ta sẽ chứng minh f khả vi tại 0 và $\nabla(0,0,\dots,0)=(0,0,\dots,0)$

Để đơn giản kí hiệu ta xét trường hợp $n=2$.

Khẳng định f có đạo hàm riêng tại $(0,0)$, thật vậy :

Xét :

$$\lim_{t\to 0}\frac{f(0+t,0)-f(0,0)}{t}$$

Ta có :

$$\left|\frac{f(t,0)}{t}\right|\le\frac{t^2}{|t|}=|t|\to 0$$

Suy ra : $\nabla f(0,0) = (0,0)$

Khi đó :

$$\varepsilon(h,k) = \frac{f(h,k) - f(0,0) - (h,k)\nabla f(0,0)}{\sqrt{h^2+k^2}} = \frac{f(h,k)}{\sqrt{h^2+k^2}}$$

Xét : $|\varepsilon(h,k)| = \left|\frac{f(h,k)}{\sqrt{h^2+k^2}}\right| \leq \frac{h^2+k^2}{\sqrt{h^2+k^2}} = \sqrt{h^2+k^2} \to 0$ khi $(h,k) \to (0,0)$

Vậy f khả vi tại (0,0). Tổng quát lên ta được điều phải chứng minh.

4.28. Cho $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ là hàm liên tục. Tìm f', với

a) $f(x,y) = \int_a^{x+y} g(t)dt$

b) $f(x,y) = \int_a^{xy} g(t)dt$

c) $f(x,y) = \int_{xy}^{\sin(x\sin(y\sin x))} g(t)dt$

<u>Bài giải:</u>

a) $f(x,y) = \int_a^{x+y} g(t)dt$

Ta xét hai hàm G, u như sau :

$G(s) = \int_a^b g(t)dt$ (G là nguyên hàm của g).

$u(x,y) = x + y$

Ta thấy $f(x,y) = G(u(x,y))$. Do vậy áp dụng công thức đạo hàm hàm hợp, ta có:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = G'\big(u(x,y)\big)\frac{\partial u}{\partial x} = g(x+y)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = G'\big(u(x,y)\big)\frac{\partial u}{\partial y} = g(x+y)$$

Vì g là hàm liên tục nên f khả vi nên ta có :

$f'(x,y) = \big(g(x+y), g(x+y)\big)$

b) $f(x,y) = \int_a^{xy} g(t)dt$

Ta xét hai hàm G, u như sau :

$G(s) = \int_a^b g(t)dt$ (G là nguyên hàm của g).

$u(x,y) = xy$

Ta thấy $f(x,y) = G(u(x,y))$. Do vậy áp dụng công thức đạo hàm hàm hợp, ta có:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = G'\big(u(x,y)\big)\frac{\partial u}{\partial x} = yg(xy)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = G'\big(u(x,y)\big)\frac{\partial u}{\partial y} = xg(xy)$$

Vì g là hàm liên tục nên f khả vi nên ta có :

$f'(x,y) = (yg(xy), xg(xy))$

c) $f(x,y,z) = \int_{xy}^{\sin(x\sin(y\sin z))} g(t)dt$

Ta có: $f(x,y) = \int_{xy}^{\sin(x\sin(y\sin z))} g(t)dt = \int_{xy}^{0} g(t)dt + \int_0^{\sin(x\sin(y\sin z))} g(t)dt$

$$= \int_{xy}^{0} g(t)dt - \int_{(\sin\ x\sin(y\sin z))}^{0} g(t)dt$$

Ta xét 3 hàm G, u, v như sau :

$G(s) = \int_a^b g(t)dt$ (G là nguyên hàm của g).

$u(x,y,z) = xy$

$v(x,y,z) = \sin\big(x\sin(y\sin z)\big)$

Ta thấy: $f(x,y,z) = G\big(u(x,y,z)\big) - G(v(x,y,z))$. Áp dụng công thức đạo hàm hàm hợp ta được :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = G'\big(u(x,y,z)\big)\frac{\partial u}{\partial x} - G'(v(x,y,z))\frac{\partial v}{\partial x}$$
$$= yg(xy) - g\big(\sin\big(xsin(ysinz)\big)\big)\sin(ysinz)\cos\big(xsin(ysinz)\big)$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = G'\big(u(x,y,z)\big)\frac{\partial u}{\partial y} - G'(v(x,y,z))\frac{\partial v}{\partial y}$$
$$= xg(xy) - g\big(\sin\big(xsin(ysinz)\big)\big)\text{xsinzcos(ysinz)}\cos\big(xsin(ysinz)\big)$$
$$\frac{\partial f}{\partial z} = G'\big(u(x,y,z)\big)\frac{\partial u}{\partial z} - G'(v(x,y,z))\frac{\partial v}{\partial z}$$
$$= -g\big(\sin\big(xsin(ysinz)\big)\big)\cos\big(xsin(ysinz)\big)xycos(z)cos(ysinz)$$

Đặt

$$m = yg(xy) - g\big(\sin\big(xsin(ysinz)\big)\big)\sin(ysinz)\cos\big(xsin(ysinz)\big)$$
$$n = xg(xy) - g\big(\sin\big(xsin(ysinz)\big)\big)\text{xsinzcos(ysinz)}\cos\big(xsin(ysinz)\big)$$
$$l = -g\big(\sin\big(xsin(ysinz)\big)\big)\cos\big(xsin(ysinz)\big)xycos(z)cos(ysinz)$$

Vì g là hàm liên tục nên f khả vi nên ta có :

Vậy $f'(x,y,z) = (m,n,l)$, $\forall m,n,l \in \mathbb{R}$

4.29. Biểu diễn các đạo hàm riêng của f qua các đạo hàm của các hàm g và h , nếu

a. $f(x,y) = g(x)h(y)$.
b. $f(x,y) = g(x)^{h(y)}$.
c. $f(x,y) = g(x)$.
d. $f(x,y) = g(y)$.
e. $f(x,y) = g(x+y)$.

Bài giải:

a. $f(x,y) = g(x)h(y)$.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\big(g(x)h(y)\big) = h(y).\frac{\partial g(x)}{\partial x}$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\big(g(x)h(y)\big) = g(x).\frac{\partial h(y)}{\partial y}$$

b. $f(x,y) = g(x)^{h(y)}$.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\big(g(x)^{h(y)}\big) = h(y)g(x)^{h(y)-1}.\frac{\partial g(x)}{\partial x}$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\big(g(x)^{h(y)}\big) = \frac{\partial h(y)}{\partial y}g(x)^{h(y)}\ln\,(g(x))$$

c. $f(x,y) = g(x)$.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial g(x)}{\partial x}, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial g(x)}{\partial y} = 0$$

d. $f(x,y) = g(y)$.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial g(y)}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial g(y)}{\partial y}$$

e. $f(x,y) = g(x+y)$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial g(x+y)}{\partial (x+y)}\frac{\partial (x+y)}{\partial x} = 1.\frac{\partial g(x+y)}{\partial (x+y)}\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial g(x+y)}{\partial (x+y)}\frac{\partial (x+y)}{\partial y}$$
$$= 1.\frac{\partial g(x+y)}{\partial (x+y)} = \frac{\partial f}{\partial y}$$

4.30. Cho g_1, g_2: $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ là các hàm liên tục.Xét hàm f: $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ xác định bởi

$$f(x,y) = \int_0^x g_1\ (t,0)dt + \int_0^y g_2\ (x,t)dt$$

a. Chứng minh rằng

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = g_2(x,y)$$

b. f có thể xác định thế nào để

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = g_1(x,y)$$

c. Tìm hàm f: $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sao cho $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = y\ và\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x$.

Bài giải:

a. Xét $\frac{\partial f}{\partial y}$ thì x cố định.

Đặt $G_2(t) = \int g_2\,(x,t)dt$

Theo định lí Newton- Leibnitz :

$$f(x,y) = \int_0^x g_1(t,0)dt + G_2(y) - G_2(0)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{dG_2}{dy} = g_2(x,y)$$

Vậy $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = g_2(x,y)$

b. Cố định $x \in \mathbb{R}$. Theo giả thiết, ta có đẳng thức $\frac{\partial f}{\partial y}(x,t) = g_1(x,t), \forall t \in \mathbb{R}$.

Suy ra $f(x,y) - f(x,0) = \int_0^y \frac{\partial f}{\partial y}(x,t)dt = \int_0^y g_1(x,t)dt$

Đặt $h(x) = f(x,0), \forall x \in \mathbb{R}$. Ta có $f(x,y) = h(x) + \int_0^y g_1(x,t)dt$.

c. Theo câu b, để $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x$, f sẽ có dạng

$$f(x,y) = h(x) + \int_0^y x dt = h(x) + xy$$

Mặt khác, do $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = y$ nên $\frac{\partial}{\partial x}(h(x) + xy) = h'(x) + y = y$

Suy ra $h'(x) = 0$ và $h = C$ với C là hằng số.

Vậy f thoả mãn điều kiện của đề sẽ có dạng $f(x,y) = xy + C$ với C là hằng số.

4.31. Chứng tỏ rằng hàm

$$f(x_1, x_2, \dots, x_3) = \frac{1}{(x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2)^{(n-2)/2}}$$

Thỏa phương trình

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} + \cdots + \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} = 0$$

Bài giải:

Ta có :

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = \frac{-\left(\frac{n-2}{2}\right)(x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2)^{(n-4)/2} 2x_1}{(x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2)^{n-2}}$$

$$= (2-n)x_1(x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2)^{-n/2}$$

Suy ra :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}$$

$$= (2-n)(x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2)^{-n/2} - (2-n)x_1(x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2)^{-(n+2)/2} 2x_1$$

$= (2-n)(x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2)^{-n/2}(1 - 2x_1^2(x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2)^{-1})$

Tương tự cho $\frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}, \frac{\partial^2 f}{\partial x_3^2} \dots \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}$

Vậy ta được :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} + \cdots + \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}$$

$$= (2-n)(x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2)^{-n/2}(1 - 2x_1^2(x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2)^{-1} + 1 - 2x_2^2(x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2)^{-1} + \cdots + 1 - 2x_n^2(x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2)^{-1})$$

$$= (2-n)(x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2)^{-n/2}[n - 2(x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2)^{-1}(x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2)]$$

$$= (2-n)(x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2)^{-n/2}(n-2) = 0 .$$

4.32. Chứng tỏ rằng mọi hàm có dạng

$$u(x,y,z) = \frac{f(t+r)}{r} + \frac{f(t-r)}{r}$$

trong đó $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$, đều thỏa phương trình

$$u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = u_{tt}.$$

Bài giải:

✶ Nếu $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{r}$$

$$\left(\frac{\partial r}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial r}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial r}{\partial z}\right)^2 = 1$$

$$\frac{\partial^2 r}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 r}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 r}{\partial z^2} = \frac{2}{r}$$

Đặt

$$\frac{1}{r} = r^{'} = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \ ; \qquad \frac{\partial r'}{\partial x} = -\frac{x}{\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)^3} = \frac{-x}{r^3}$$

Đặt $s = t + r; s^{'} = t - r.$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial r'}{\partial x}.[f(s) + g(s^{'})] + r'\left(\frac{\partial f}{\partial s}.\frac{\partial s}{\partial r}.\frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial s'}.\frac{\partial s'}{\partial r}.\frac{\partial r}{\partial x}\right)$$

$$= \frac{\partial r'}{\partial x}.[f(s) + g(s^{'})] + \ r'\left(\frac{\partial f}{\partial s}.\frac{\partial r}{\partial x} - \frac{\partial g}{\partial s'}.\frac{\partial r}{\partial x}\right)$$

$$= \frac{-x}{r^3}[f(s) + g(s^{'})] + r^{'}.\frac{x}{r}\left(\frac{\partial f}{\partial s} - \frac{\partial g}{\partial s'}\right) = \frac{x}{r^2}\left(\frac{\partial f}{\partial s} - \frac{\partial g}{\partial s'}\right) - \frac{x}{r^3}[f(s) + g(s^{'})]$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{r^2 - 2xr.\frac{x}{r}}{r^4}\left(\frac{\partial f}{\partial s} - \frac{\partial g}{\partial s'}\right) \ + \frac{x}{r^2}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial s^2}\frac{\partial s}{\partial x} - \frac{\partial^2 g}{\partial s'^2}\frac{\partial s'}{\partial x}\right)$$

$$- \frac{r^3 - 3xr^2.\frac{x}{r}}{r^6}[f(s) + g(s^{'})] - \frac{x}{r^3}\left(\frac{\partial f}{\partial s}.\frac{\partial s}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial s'}.\frac{\partial s'}{\partial x}\right)$$

$$= \frac{r^2 - 2x^2}{r^4}\left(\frac{\partial f}{\partial s} - \frac{\partial g}{\partial s^{'}}\right) + \frac{x}{r^2}\frac{x}{r}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial s^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial s^{'2}}\right) - \frac{r^2 - 3x^2}{r^5}[f(s) + g(s^{'})]$$

$$- \frac{x}{r^3}\frac{x}{r}\left(\frac{\partial f}{\partial s} - \frac{\partial g}{\partial s^{'}}\right)$$

$$= \left(\frac{1}{r^2} - \frac{2x^2}{r^4}\right)\left(\frac{\partial f}{\partial s} - \frac{\partial g}{\partial s'}\right) + \frac{x^2}{r^3}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial s^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial s^{'2}}\right) - \left(\frac{1}{r^3} - \frac{3x^2}{r^5}\right)[f(s) + g(s^{'})]$$

$$- \frac{x^2}{r^4}\left(\frac{\partial f}{\partial s} - \frac{\partial g}{\partial s^{'}}\right)$$

Tương tự cho $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$

Ta có :

$$u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

$$= \left(\frac{3}{r^2} - \frac{2r^2}{r^4}\right)\left(\frac{\partial f}{\partial s} - \frac{\partial g}{\partial s'}\right) + \frac{r^2}{r^3}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial s^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial s'^2}\right) - \left(\frac{3}{r^3} - \frac{3r^2}{r^5}\right)[f(s) + g(s')]$$

$$+ \frac{r^2}{r^4}\left(\frac{\partial f}{\partial s} - \frac{\partial g}{\partial s'}\right)$$

$$= \frac{1}{r}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial s^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial s'^2}\right)$$

Xét $u(x, y, z) = \frac{1}{r}[f(s) + g(s')]$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{r}\left(\frac{\partial f}{\partial s}.\frac{\partial s}{\partial t} + \frac{\partial g}{\partial s'}.\frac{\partial s'}{\partial t}\right) = \frac{1}{r}\left(\frac{\partial f}{\partial s} + \frac{\partial g}{\partial s'}\right)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{1}{r}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial s^2}.\frac{\partial s}{\partial t} + \frac{\partial^2 g}{\partial s'^2}.\frac{\partial s'}{\partial t}\right) = \frac{1}{r}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial s^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial s'^2}\right)$$

$$u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = u_{tt} \qquad (1)$$

✶ Nếu $r = -\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ Đặt $k = -r$.

$$u(x, y, z) = -\frac{1}{k}[f(t - k) + g(t + k)]$$

Đặt $v = t + k; v' = t - k;$

Hoàn toàn tương tự ta có :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = -\frac{1}{k}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial v'^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial v^2}\right)$$

Mà

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -\frac{1}{k}\left(\frac{\partial^2 g}{\partial v^2}\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial^2 f}{\partial v'^2}\frac{\partial v'}{\partial t}\right) == -\frac{1}{k}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial v'^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial v^2}\right)$$

$$u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = u_{tt} \qquad (2)$$

(1) và (2), ta có $u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = u_{tt}$ với $r = \ x^2 + y^2 + z^2$.

4.33. Chứng tỏ rằng nếu $f(x,y)$ thoả phương trình Laplace $f_{xx}+f_{yy}=0$, thì hàm

$$\varphi(x,y)=f\left(\frac{x}{x^2+y^2},\frac{y}{x^2+y^2}\right)$$

cũng thoả phương trình Laplace.

<u>Bài giải:</u>

Đặt $u=\frac{x}{x^2+y^2}, v=\frac{y}{x^2+y^2}$, khi đó :

$$\varphi(x,y)=f(u,v)$$

$\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}=0$ (theo giả thiết)

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\frac{\partial f}{\partial u}.\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2+\frac{\partial f}{\partial v}.\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+2\frac{\partial^2 f}{\partial u\partial v}.\frac{\partial u}{\partial x}.\frac{\partial v}{\partial x}$$

Tương tự, ta tính được :

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\frac{\partial f}{\partial u}.\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2+\frac{\partial f}{\partial v}.\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+2\frac{\partial^2 f}{\partial u\partial v}.\frac{\partial u}{\partial y}.\frac{\partial v}{\partial y}$$

Suy ra :

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)^2\right]+2\frac{\partial^2 f}{\partial u\partial v}.\frac{\partial u}{\partial x}.\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}\left[\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)^2\right]$$
$$+2\frac{\partial^2 f}{\partial u\partial v}.\frac{\partial u}{\partial y}.\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial u}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)+\frac{\partial f}{\partial v}\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right)$$

Xét :

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} = v^2 - u^2$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{-2xy}{(x^2 + y^2)^2} = -2uv$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{-2xy}{(x^2 + y^2)^2} = -2uv$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} = u^2 - v^2$$

Suy ra :

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\partial v}{\partial y}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \ (*)$$

Ta có :

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 = (u^2 + v^2)^2 = \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right] + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2}\left[\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2\right] = (u^2 + v^2)^2\left[\frac{\partial^2 f}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2}\right]$$
$$= 0$$

Và :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=2\left(v\frac{\partial v}{\partial x}-u\frac{\partial u}{\partial x}\right)-2\left(v\frac{\partial u}{\partial y}+u\frac{\partial v}{\partial y}\right)$$

Từ $(*)$ suy ra :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=2\left[v\left(\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}\right)-u\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right)\right]=0$$

Tương tự :

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}=2\left[u\left(\frac{\partial u}{\partial y}-\frac{\partial v}{\partial x}\right)-v\left(\frac{\partial v}{\partial y}-\frac{\partial u}{\partial x}\right)\right]=0$$

Vậy :

$$\frac{\partial f}{\partial u}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)+\frac{\partial f}{\partial v}\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right)=0$$

Ta lại có :

$$2\frac{\partial^2 f}{\partial u\partial v}.\frac{\partial u}{\partial x}.\frac{\partial v}{\partial x}=2\frac{\partial^2 f}{\partial u\partial v}.\frac{\partial u}{\partial y}.\frac{-\partial v}{\partial y}$$

Suy ra :

$$2\frac{\partial^2 f}{\partial u\partial v}.\frac{\partial u}{\partial x}.\frac{\partial v}{\partial x}+2\frac{\partial^2 f}{\partial u\partial v}.\frac{\partial u}{\partial x}.\frac{\partial v}{\partial x}=0$$

Suy ra :

$$\varphi_{xx}+\varphi_{yy}=0$$

Vậy hàm đã cho thoả phương trình Laplace.

4.34. Cho $f(x,y,z) = g(r)$, trong đó $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$

a. Tính $f_{xx} + f_{yy} + f_{zz}$

b. Chứng tỏ rằng nếu $f_{xx} + f_{yy} + f_{zz} = 0$, thì $f(x,y,z) = \frac{a}{r} + b$, trong đó a, b là các hằng số.

Bài giải:

a. Tính $f_{xx} + f_{yy} + f_{zz}$

Ta có :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{dg}{dr}\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{dg}{dr}\frac{x}{(x^2+y^2+z^2)^{1/2}}$$

Suy ra :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{d^2 g}{dr^2}\left(\frac{x}{(x^2+y^2+\cdots+z^2)^{1/2}}\right)^2 + \frac{dg}{dr}\left(\frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^{1/2}} - \frac{x^2}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\right)$$

Tương tự cho $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$

Vậy ta được :

$$f_{xx} + f_{yy} + f_{zz} = \frac{d^2 g}{dr^2} + \frac{dg}{dr}\left(\frac{3}{(x^2+y^2+z^2)^{1/2}} - \frac{x^2+y^2+z^2}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\right)$$

$$= \frac{d^2 g}{dr^2} + \frac{dg}{dr}\frac{2}{(x^2+y^2+z^2)^{1/2}}$$

b.

$$f_{xx} + f_{yy} + f_{zz} = 0 \Leftrightarrow \frac{d^2 g}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{dg}{dr} = 0 \Leftrightarrow \frac{2}{r}g'(r) + g''(r) = 0$$

$$\Leftrightarrow 2g'(r) + rg''(r) = 0 \Leftrightarrow \left(r^2 g'(r)\right)' = 0$$

$\Leftrightarrow r^2 g^{'}(r) = a \Leftrightarrow g^{'}(r) = ar^{-2} \Leftrightarrow g(r) = ar^{-1} + b$

(trong đó a, b là hằng số).

4.35. Cho $f(x_1, x_2, \dots \dots, x_n) = g(r)$, trong đó $r = \sqrt{{x_1}^2 + {x_2}^2 + \cdots + {x_n}^2}$

a. Tính $f_{x_1x_1} + f_{x_2x_2} + \cdots + f_{x_nx_n}$.

b. Giải phương trình $f_{x_1x_1} + f_{x_2x_2} + \cdots + f_{x_nx_n} = 0$.

Bài giải:

a.

$$f_{x_1} = \frac{\partial f}{\partial x_1} = \frac{\partial g}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x_1} = \frac{\partial g}{\partial r}\frac{x_1}{({x_1}^2 + {x_2}^2 + \cdots + {x_n}^2)^{1/2}}$$

$$f_{x_1x_1} = \frac{\partial^2 f}{\partial {x_1}^2} = \frac{d^2 g}{\partial r^2}.\left(\frac{x_1}{({x_1}^2 + {x_2}^2 + \cdots + {x_n}^2)^{1/2}}\right)^2$$

$$+\frac{\partial g}{\partial r}\left(\frac{1}{({x_1}^2 + {x_2}^2 + \cdots + {x_n}^2)^{1/2}} - \frac{{x_1}^2}{({x_1}^2 + {x_2}^2 + \cdots + {x_n}^2)^{3/2}}\right)$$

$$f_{x_1x_1} + f_{x_2x_2} + \cdots + f_{x_nx_n} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial {x_i}^2} = \frac{d^2 g}{\partial r^2} + \frac{\partial g}{\partial r}\frac{n-1}{r}$$

b.

Trường hợp $n = 1$, ta có :

$$f_{x_1x_1} + f_{x_2x_2} + \cdots + f_{x_nx_n} = \frac{d^2 g}{\partial r^2} = 0$$

Trường hợp $n \geq 2$

$$f_{x_1x_1} + f_{x_2x_2} + \cdots + f_{x_nx_n} = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial g}{\partial r}.\frac{n-1}{r} + \frac{d^2 g}{\partial r^2} = 0$$

$$\Leftrightarrow (n-1)g^{'}(x) + r.g^{''}(x) = 0$$

Mà ta có :

$$\left(r^{n-1}.g'(r)\right)' = (n-1)r^{n-2}.g'(r) + r^{n-1}g''(r)\ (\ast)$$

Thay $(n-1)g'(x) = -r.g''(x)$ vào $(\ast)$,ta được :

$$-r^{n-1}.g''(x) + r^{n-1}g''(r) = 0 \Leftrightarrow \left(r^{n-1}.g'(r)\right)' = 0.$$

Suy ra :

$$r^{n-1}.g'(r) = C \Leftrightarrow g'(r) = Cr^{-(n-1)}$$

Xét hai trường hợp :

Nếu $n = 2$ thì $g'(r) = C.r^{-1}$ nên $g(r) = Clnr + D$

Nếu $n > 2$ ta có :

$$g'(r) = Cr^{-(n-1)} \text{ nên } g(r) = -\frac{C}{2-n}.r^{-(n-2)} + D.$$

Bài Tập Mở Rộng

1. Chứng minh **tính chất Darboux** : Nếu f khả vi trên $[a, b]$, thì f' nhận mọi giá trị nằm giữa $f'(a), f'(b)$.

2. Tìm hàm số $f(x, y)$ biết rằng :

a. $f''_{xy} = 0$

b. $f'_x = x - 2xy, f'_y = y - x^2$

c. $f''_{xx} = 12x^2y + 2\,, f'_y = x^4 - 30xy^5, f(0,0) = 1, f(1,1) = -2$

3. Chứng minh h thỏa **phương trình sóng** : $\frac{\partial^2 h}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 h}{\partial x^2}$,

nếu $h = f(x - at) + g(x - at), f$ và g khả vi và a là hằng số .

4. Cho $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ khả vi liên tục và thỏa điều kiện **Cauchy-Riemann** :

$$\frac{\partial f_1}{\partial x} = \frac{\partial f_2}{\partial y}, \frac{\partial f_1}{\partial y} = -\frac{\partial f_2}{\partial x}$$

Chứng minh : $\det J_f(x, y) = 0$ khi và chỉ khi $f'(x) = 0$.

5. Cho $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ khả vi. Giả sử $|f'(x)| \leq L, \forall x$. Chứng minh f thỏa **điều kiện Lipschitz** : $|f(x) - f(y)| \leq L|x - y|, \forall x, y \in \mathbb{R}$.

Suy ra điều kiện để hàm khả vi $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ là **ánh xạ co** .

6. Cho $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ và $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ là các hàm khả vi. Giả sử $F\big(x, f(x)\big) = 0$ và $\frac{\partial F}{\partial y} \neq 0$. Chứng minh $f' = -\frac{\partial F/\partial x}{\partial F/\partial y}$, với $y = f(x)$.

7. Đúng hay sai khi hàm số $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ liên tục thì f khả vi Frechet ?

Chương 5:

CÔNG THỨC TAYLOR
HÀM ẨN - HÀM NGƯỢC – CỰC TRỊ

5.1. Cho $z = f(x,y)$ với $f(0,0) = 0$. Tìm $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$, $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ nếu $x + y + z - \sin xyz = 0$.

Bài giải:

Ta có : $F = x + y + z - \sin(xyz) = 0$ với $z = f(x,y)$

$$\frac{\partial F}{\partial z} = 1 - xy\cos(xyz)$$

Khi $x = y = z = 0$ thì $\frac{\partial F}{\partial z} = 1 \neq 0$

Lấy đạo hàm 2 vế lần lượt theo x, y. Ta có phương trình:

$$\begin{cases} 1 + 0 + \frac{\partial z}{\partial x} - \left(yz + xy\frac{\partial z}{\partial x}\right)\cos(xyz) = 0 \\ 0 + 1 + \frac{\partial z}{\partial y} - \left(xz + xy\frac{\partial z}{\partial y}\right)\cos(xyz) = 0 \end{cases}$$

Khi $x = y = 0$ thì:

$$\begin{cases} 1 + \frac{\partial z(0,0)}{\partial x} = 0 \\ 1 + \frac{\partial z(0,0)}{\partial y} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial f(0,0)}{\partial x} \equiv \frac{\partial z(0,0)}{\partial x} = -1 \\ \frac{\partial f(0,0)}{\partial y} \equiv \frac{\partial z(0,0)}{\partial y} = -1 \end{cases}$$

5.2. Cho $u = f(x,y), v = g(x,y)$ thoả $f(0,1) = 1$, $g(0,1) = -1$ và

$$u^3 + xv - y = 0$$

$$v^3 + yu - x = 0$$

Tìm $\frac{\partial u}{\partial x}(0,1)$, $\frac{\partial u}{\partial y}(0,1)$, $\frac{\partial v}{\partial x}(0,1)$, $\frac{\partial v}{\partial y}(0,1)$.

Bài giải:

Với $u = f(x,y), v = g(x,y)$ thoả $f(0,1) = 1,\ g(0,1) = -1$ và

$$F = u^3 + xv - y = 0$$

$$G = v^3 + yu - x = 0$$

Xét : $\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)} = \begin{bmatrix} \frac{\partial F}{\partial u} & \frac{\partial F}{\partial v} \\ \frac{\partial G}{\partial u} & \frac{\partial G}{\partial v} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3u^2 & x \\ y & 3v^2 \end{bmatrix}$

Khi $f(0,1) = 1,\ g(0,1) = -1$ thì $\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \neq 0$

Ta lấy đạo hàm 2 vế của 2 phương trình theo x, y. Ta được 2 hệ phương trình:

$$\begin{cases} 3u^2\dfrac{\partial u}{\partial x} + v + x\dfrac{\partial v}{\partial x} = 0 \\ 3u^2\dfrac{\partial u}{\partial y} + x\dfrac{\partial v}{\partial y} - 1 = 0 \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{cases} 3v^2\dfrac{\partial v}{\partial x} + y\dfrac{\partial u}{\partial x} - 1 = 0 \\ 3v^2\dfrac{\partial v}{\partial y} + u + y\dfrac{\partial u}{\partial y} = 0 \end{cases} \quad (2)$$

Khi $x = 0, y = 1$; $f(0,1) = 1,\ g(0,1) = -1$ thì

$$(1) \Rightarrow \begin{cases} 3\dfrac{\partial u(0,1)}{\partial x} - 1 = 0 \\ 3\dfrac{\partial u(0,1)}{\partial y} - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial u(0,1)}{\partial x} = \dfrac{1}{3} \\ \dfrac{\partial u(0,1)}{\partial y} = \dfrac{1}{3} \end{cases}$$

$$(2) \Rightarrow \begin{cases} 3\dfrac{\partial v(0,1)}{\partial x} + \dfrac{1}{3} - 1 = 0 \\ 3\dfrac{\partial v(0,1)}{\partial y} + 1 + \dfrac{1}{3} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial v(0,1)}{\partial x} = \dfrac{2}{9} \\ \dfrac{\partial v(0,1)}{\partial y} = -\dfrac{4}{9} \end{cases}$$

5.3. Tìm Jacobian trong các trường hợp sau

a) $\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}$ với $u = \frac{y}{\tan x}, v = \frac{y}{\sin x}, y > 0, 0 < x < \frac{\pi}{2}$

b) $\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}, \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}$ với $u = 2x - 3y, v = -x + 2y$

<u>Bài giải:</u>

a. Ta có :

$$u = \frac{y}{\tan x}, v = \frac{y}{\sin x}, y > 0, 0 < x < \frac{\pi}{2}$$

Do vậy :

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{y}{\sin^2 x}, \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{\tan x}, \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{ycosx}{\sin^2 x}, \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{1}{\sin x}$$

Suy ra :

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\frac{y}{\sin^2 x} & \frac{1}{\tan x} \\ -\frac{ycosx}{\sin^2 x} & \frac{1}{\sin x} \end{vmatrix} = -\frac{y}{\sin x}$$

b. Ta có : $u = 2x - 3y$ và $v = -x + 2y$

Do vậy :

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -3, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = -1, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = 2$$

Suy ra :

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 1$$

Do $\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = 1 \neq 0$ nên theo định lí hàm ngược ta có thể biểu diễn x, y theo u, v và đồng thời :

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}.\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = 1$$

Do đó, ta suy ra : $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = 1$

5.4. Các phương trình sau có thể đổi thành dạng $z = f(x,y)$ tại gần các điểm (x_0, y_0, z_0) không? Tính $z_x(x_0, y_0), z_y(x_0, y_0)$ nếu có biểu diễn thành dạng $z = f(x,y)$

a) $x + y + z - sinxyz = 0;\ (x_0, y_0, z_0) = (0,0,0)$

b) $x^3 + y^3 + z^3 = 3xyz; (1,-1,0)$

c) $x^2 + 2xy + z^2 - yz = 1; (0,0,1)$

Bài giải:

a) $F(x,y,z) = x + y + z - sinxyz$

Ta có : $F_z(x,y,z) = 1 - xycos(xyz)$

Tại $x = y = z = 0$ thì : $\frac{\partial F(0,0,0)}{\partial z} = 1 - 0.0.cos0 = 1 \neq 0$

Áp dụng định lí hàm ẩn, trong một lân cận đủ nhỏ của (0, 0, 0) thì :

$$\exists D \subset \mathbb{R}^2, (0,0) \in D$$

$$\exists I \subset \mathbb{R}, 0 \in D$$

$$f: \quad D \to I$$

sao cho $\begin{cases} F\big(x,y,f(x,y)\big) = 0 \\ f(0,0) = 0 \end{cases}$

$F\big(x,y,f(x,y)\big) = 0$ hay $x + y + z - \sin xyz = 0$

Lấy đạo hàm 2 vế lần lượt theo x, y. Ta có 2 phương trình :

$$\begin{cases} 1 + 0 + \dfrac{\partial z}{\partial x} + \left(yz + xy\dfrac{\partial z}{\partial x}\right)\cos(xyz) = 0 \\ 0 + 1 + \dfrac{\partial z}{\partial y} + \left(xz + xy\dfrac{\partial z}{\partial y}\right)\cos(xyz) = 0 \end{cases}$$

Khi $x = y = 0$ thì :

$$\begin{cases} 1 + \dfrac{\partial z(0,0)}{\partial x} = 0 \\ 1 + \dfrac{\partial z(0,0)}{\partial y} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial z(0,0)}{\partial x} = -1 \\ \dfrac{\partial z(0,0)}{\partial y} = -1 \end{cases}$$

b) $F(x,y,z) = x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$

Ta có : $F_z(x,y,z) = 3z^2 - 3xy$

Tại x $= 1, y = -1, z = 0$ thì : $\dfrac{\partial F(1,-1,0)}{\partial z} = 3.0^2 - 3.1.(-1) = 3 \neq 0$

Áp dụng định lí hàm ẩn, trong một lân cận đủ nhỏ của (1, -1, 0) thì :

$$\exists D \subset \mathbb{R}^2, (1,-1) \in D$$

$$\exists I \subset \mathbb{R}, 0 \in D$$

$$f: \quad D \to I$$

sao cho : $\begin{cases} F\big(x,y,f(x,y)\big) = 0 \\ f(1,-1) = 0 \end{cases}$

$F\big(x,y,f(x,y)\big) = 0$ hay $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = 0$

Lấy đạo hàm 2 vế lần lượt theo x, y. Ta có 2 phương trình :

$$\begin{cases} 3x^2 + 3z^2\dfrac{\partial z}{\partial x} - 3yz - 3xy\dfrac{\partial z}{\partial x} = 0 \\ 3y^2 + 3z^2\dfrac{\partial z}{\partial y} - 3xz - 3xy\dfrac{\partial z}{\partial y} = 0 \end{cases}$$

Khi $x = 1, y = -1, z = 0$ thì :

$$\begin{cases} 3 + 3\dfrac{\partial z(1,-1)}{\partial x} = 0 \\ 3 + 3\dfrac{\partial z(1,-1)}{\partial y} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial z(1,-1)}{\partial x} = -1 \\ \dfrac{\partial z(1,-1)}{\partial y} = -1 \end{cases}$$

c) $F(x,y,z) = x^2 + 2xy + z^2 - yz - 1$

Ta có : $F_z(x,y,z) = 2z - y$

Tại x $= 0, y = 0, z = 1$ thì: $\dfrac{\partial F(0,0,1)}{\partial z} = 2.1 - 0 = 2 \neq 0$

Áp dụng định lí hàm ẩn, trong một lân cận đủ nhỏ của (0, 0, 1) thì :

$$\exists D \subset \mathbb{R}^2, (0,0) \in D$$

$$\exists I \subset \mathbb{R}, 1 \in D$$

$$f: \quad D \to I$$

sao cho $\begin{cases} F\big(x,y,f(x,y)\big) = 0 \\ f(0,0) = 1 \end{cases}$

$F\big(x,y,f(x,y)\big) = 0$

hay $x^2 + 2xy + z^2 - yz - 1 = 0$

Lấy đạo hàm 2 vế lần lượt theo x, y. Ta có 2 phương trình :

$$\begin{cases} 2x + 2y + 2z\dfrac{\partial z}{\partial x} - y\dfrac{\partial z}{\partial x} = 0 \\ 2x + 2z\dfrac{\partial z}{\partial y} - z - y\dfrac{\partial z}{\partial y} = 0 \end{cases}$$

Khi $x = 0, y = 0, z = 1$ thì :

$$\begin{cases} 2\dfrac{\partial z(0,0)}{\partial x} = 0 \\ 2\dfrac{\partial z(0,0)}{\partial y} - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial z(0,0)}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial z(0,0)}{\partial y} = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

5.5. Cho u, v là trường vô hướng, xác định trên $D \subset \mathbb{R}^n$ và trường vectơ $F : D \to \mathbb{R}^n$. Chứng minh rằng :

a) $\nabla.(u\mathrm{F}) = \mathrm{F}.\nabla u + u\nabla.\mathrm{F}$

b) $\nabla.(u\nabla v) = u\Delta v + \nabla u.\nabla v$

<u>Bài giải:</u>

a. Ta viết $F = (f_1, f_2, \dots, f_n)$. Ta có :

$$\nabla.(uF) = \nabla.(uf_1, uf_2, \dots, uf_n) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial(uf_i)}{\partial x_i} = \sum_{i=1}^{n} u\frac{\partial f_i}{\partial x_i} + \sum_{i=1}^{n} f_i\frac{\partial u}{\partial x_i}$$

$$= u.\left(\frac{\partial f_1}{\partial x_1}, \frac{\partial f_2}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial f_n}{\partial x_n}\right) + (f_1, f_2, \dots, f_n).\left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n}\right)$$

$$= u\nabla.F + F.\nabla u$$

b. Với $F = \nabla v$. Áp dụng câu a, ta có :

$$\nabla.(u\nabla v) = u\nabla.(\nabla v) + \nabla u.\nabla v$$

Mặt khác :

$$\nabla.(\nabla v) = \nabla.\left(\frac{\partial v}{\partial x_1}, \frac{\partial v}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial v}{\partial x_n}\right) = \left(\frac{\partial\left(\frac{\partial v}{\partial x_1}\right)}{\partial x_1}, \frac{\partial\left(\frac{\partial v}{\partial x_2}\right)}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial\left(\frac{\partial v}{\partial x_n}\right)}{\partial x_n}\right)$$

$$= \left(\frac{\partial^2 v}{\partial {x_1}^2}, \frac{\partial^2 v}{\partial {x_2}^2}, \dots, \frac{\partial^2 v}{\partial {x_n}^2}\right) = \Delta v$$

Vậy $\nabla.(u\nabla v) = u\Delta v + \nabla u.\nabla v$

5.6. Trường tĩnh điện tạo bởi một đơn vị điện tích dương đặt tại gốc O là $E = \frac{1}{r^3}\overrightarrow{OP}$ với $\overrightarrow{OP} = (x, y, z), r = (x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{1}{2}}$. Chứng tỏ $divE = 0, rotE = 0$.

Bài giải:

Với $r = (x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{1}{2}}$ $, \overrightarrow{OP} = (x, y, z)$

Ta có :

$$E = \frac{1}{r^3}\overrightarrow{OP} = \left(\frac{x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}, \frac{y}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}, \frac{z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}\right)$$

Đặt

$$E_1 = \frac{x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}, E_2 = \frac{y}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}, E_3 = \frac{z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}$$

Khi đó :

$$\frac{\partial E_1}{\partial x} = \frac{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}} - \frac{3}{2}(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{1}{2}}.2xx}{(x^2 + y^2 + z^2)^3} = \frac{y^2 + z^2 - 2x^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{5}{2}}} \quad (1)$$

$$\frac{\partial E_1}{\partial y} = \frac{-\frac{3}{2}(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{1}{2}}.2yx}{(x^2 + y^2 + z^2)^3} = \frac{-3xy}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{5}{2}}} \quad (2)$$

$$\frac{\partial E_1}{\partial z} = \frac{-\frac{3}{2}(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{1}{2}}.2zx}{(x^2 + y^2 + z^2)^3} = \frac{-3xz}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{5}{2}}} \quad (3)$$

$$\frac{\partial E_2}{\partial x} = \frac{-\frac{3}{2}(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{1}{2}}.2xy}{(x^2 + y^2 + z^2)^3} = \frac{-3xy}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{5}{2}}} \quad (4)$$

$$\frac{\partial E_2}{\partial y} = \frac{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}} - \frac{3}{2}(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{1}{2}}.2yy}{(x^2 + y^2 + z^2)^3} = \frac{x^2 + z^2 - 2y^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{5}{2}}} \quad (5)$$

$$\frac{\partial E_2}{\partial z} = \frac{-\frac{3}{2}(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{1}{2}}.2zy}{(x^2 + y^2 + z^2)^3} = \frac{-3yz}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{5}{2}}} \ (6)$$

$$\frac{\partial E_3}{\partial x} = \frac{-\frac{3}{2}(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{1}{2}}.2xz}{(x^2 + y^2 + z^2)^3} = \frac{-3xz}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{5}{2}}} \ (7)$$

$$\frac{\partial E_3}{\partial y} = \frac{-\frac{3}{2}(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{1}{2}}.2yz}{(x^2 + y^2 + z^2)^3} = \frac{-3yz}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{5}{2}}} \ (8)$$

$$\frac{\partial E_3}{\partial z} = \frac{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}} - \frac{3}{2}(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{1}{2}}.2zz}{(x^2 + y^2 + z^2)^3} = \frac{x^2 + y^2 - 2z^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{5}{2}}} \ (9)$$

Suy ra :

$$divE = \frac{\partial E_1}{\partial x} + \frac{\partial E_2}{\partial y} + \frac{\partial E_3}{\partial z}$$

$$= \frac{y^2 + z^2 - 2x^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{5}{2}}} + \frac{x^2 + z^2 - 2y^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{5}{2}}} + \frac{x^2 + y^2 - 2z^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{5}{2}}} = 0$$

$$rotE = \left(\frac{\partial E_3}{\partial y} - \frac{\partial E_2}{\partial z}, \frac{\partial E_1}{\partial z} - \frac{\partial E_3}{\partial x}, \frac{\partial E_2}{\partial x} - \frac{\partial E_1}{\partial y}\right) = 0$$

Vì : $\frac{\partial E_3}{\partial y} - \frac{\partial E_2}{\partial z} = 0$ (theo (6) và (8)), $\frac{\partial E_1}{\partial z} - \frac{\partial E_3}{\partial x} = 0$ (theo (3) và (7)) ,

$\frac{\partial E_2}{\partial x} - \frac{\partial E_1}{\partial y} = 0$ (theo (4) và (2))

5.7.

a) Nếu $F = a \times \overrightarrow{OP}$ với a là vectơ hằng thì $divF = 0$.

b) Với $k = (0,0,1)$, đặt $V = k \times \overrightarrow{OP}$. Tìm $divV$.

Bài giải:

a. Với $a = (a_1, a_2, a_3)$ và $\overrightarrow{OP} = (x, y, z)$

Ta có :

$$F = a \times \overrightarrow{OP} = (a_2z - a_3y, a_3x - a_1z, a_1y - a_2x) = (F_1, F_2, F_3)$$

Mặt khác :

$$\frac{\partial F_1}{\partial x} = \frac{\partial(a_2z - a_3y)}{\partial \mathrm{x}} = 0, \frac{\partial F_2}{\partial y} = \frac{\partial(a_3x - a_1z)}{\partial \mathrm{y}} = 0, \frac{\partial F_3}{\partial z} = \frac{\partial(a_1y - a_2x)}{\partial \mathrm{z}} = 0$$

Suy ra :

$$divF = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z} = 0$$

b. Với $k = (0, 0, 1)$ và $\overrightarrow{OP} = (x, y, z)$

Ta có: $V = a \times \overrightarrow{OP} = (-y, x, 0)$

Suy ra :

$$divV = \frac{\partial(-y)}{\partial x} + \frac{\partial(x)}{\partial y} + \frac{\partial(0)}{\partial z} = 0$$

5.8. Cho E, F là hai trường vectơ, u là trường vô hướng xác định trên $D \subset \mathbb{R}^3$.
Chứng minh

a) $\nabla \times (\nabla u) = 0$

b) $\nabla.(\nabla \times F) = 0$

c) $\nabla \times (uF) = u(\nabla \times F) - F \times \nabla u$

d) $\nabla.(\mathrm{E} \times F) = \mathrm{F}.(\nabla \times E) - \mathrm{E}.(\nabla \times F)$

<u>Bài giải:</u>

a. Ta có $\nabla u = \left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}\right)$

Đặt $u_1 = \dfrac{\partial u}{\partial x}, u_2 = \dfrac{\partial u}{\partial y}, u_3 = \dfrac{\partial u}{\partial z}$. Khi đó :

$$\nabla \times (\nabla u) = \left(\frac{\partial u_3}{\partial y} - \frac{\partial u_2}{\partial z}, \frac{\partial u_1}{\partial z} - \frac{\partial u_3}{\partial x}, \frac{\partial u_2}{\partial x} - \frac{\partial u_1}{\partial y}\right)$$

$$= \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial y}, \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z}, \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z}\right) = 0$$

b. Ta có :

$$\nabla \times F = \left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z}, \frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x}, \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right)$$

Suy ra :

$$\nabla.(\nabla \times F) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right)$$

$$= \left(\frac{\partial^2 F_3}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 F_2}{\partial x \partial z}\right) + \left(\frac{\partial^2 F_1}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 F_3}{\partial y \partial x}\right) + \left(\frac{\partial^2 F_2}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 F_1}{\partial z \partial y}\right) = 0$$

c. Với $= (F_1, F_2, F_3)$, $uF = (uF_1, uF_2, uF_3)$

Ta có :

$$\nabla \times (uF) = \left(\frac{\partial (uF_3)}{\partial y} - \frac{\partial (uF_2)}{\partial z}, \frac{\partial (uF_1)}{\partial z} - \frac{\partial (uF_3)}{\partial x}, \frac{\partial (uF_2)}{\partial x} - \frac{\partial (uF_1)}{\partial y}\right)$$

$$= \left(u\frac{\partial F_3}{\partial y} + F_3\frac{\partial u}{\partial y} - u\frac{\partial F_2}{\partial z} - F_2\frac{\partial u}{\partial z}, u\frac{\partial F_1}{\partial z} + F_1\frac{\partial u}{\partial z} - u\frac{\partial F_3}{\partial x} - F_3\frac{\partial u}{\partial x}, u\frac{\partial F_2}{\partial x}\right.$$

$$\left. + F_2\frac{\partial u}{\partial x} u\frac{\partial F_1}{\partial y} - F_1\frac{\partial u}{\partial y}\right)$$

$$= u\left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z}, \frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x}, \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right)$$

$$+ \left(F_3\frac{\partial u}{\partial y} - F_2\frac{\partial u}{\partial z}, F_1\frac{\partial u}{\partial z} - F_3\frac{\partial u}{\partial x}, F_2\frac{\partial u}{\partial x} - F_1\frac{\partial u}{\partial y}\right)$$

$$= u\left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z}, \frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x}, \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right) - (F_1, F_2, F_3) \times \left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}\right)$$

$$= u(\nabla \times F) - F \times \nabla u$$

d. Ta có :

$$\nabla.(E \times F) = \nabla.(E_2F_3 - E_3F_2, E_3F_1 - E_1F_3, E_1F_2 - E_2F_1) = (F_1, F_2, F_3)$$

$$= \frac{\partial(E_2F_3 - E_3F_2)}{\partial x} + \frac{\partial(E_3F_1 - E_1F_3)}{\partial y} + \frac{\partial(E_1F_2 - E_2F_1)}{\partial z}$$

$$= \left(E_2\frac{\partial F_3}{\partial x} - E_3\frac{\partial F_2}{\partial x} + E_3\frac{\partial F_1}{\partial y} - E_1\frac{\partial F_3}{\partial y} + E_1\frac{\partial F_2}{\partial z} - E_2\frac{\partial F_1}{\partial z}\right)$$

$$+ \left(F_3\frac{\partial E_2}{\partial x} - F_2\frac{\partial E_3}{\partial x} + F_1\frac{\partial E_3}{\partial y} - F_3\frac{\partial E_1}{\partial y} + F_2\frac{\partial E_1}{\partial z} - F_1\frac{\partial E_2}{\partial z}\right)$$

$$= -(E_1, E_2, E_3) \cdot \left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z}, \frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x}, \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right)$$

$$+ (F_1, F_2, F_3)\left(\frac{\partial E_3}{\partial y} - \frac{\partial E_2}{\partial z}, \frac{\partial E_1}{\partial z} - \frac{\partial E_3}{\partial x}, \frac{\partial E_2}{\partial x} - \frac{\partial E_1}{\partial y}\right)$$

$$= -E(\nabla \times F) + F.(\nabla \times E)$$

5.9. Tìm $\nabla \times F$ nếu F là

a) $2xzi + 2yz^2j + (x^2 + 2y^2z - 1)k$

b) $axi + bj + czk$

c) (y, z, x)

d) $\frac{xi+yj}{x^2+y^2}$

Bài giải:

a. Với $F = +2xzi2yz^2j + (x^2 + 2y^2z - 1)k = (2xz, 2yz^2, x^2 + 2y^2z - 1)$

Ta có :

$$\nabla \times F = \left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z}, \frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x}, \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right)$$

$$= (4yz - 4yz, 2x - 2x, 0 - 0) = 0$$

b. Với $F = axi + bj + czk = (ax, b, cz) = (F_1, F_2, F_3)$

Ta có :

$$\nabla \times F = \left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z}, \frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x}, \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right) = (0, 0, 0) = 0$$

c. Với $F = (y, z, x) = (F_1, F_2, F_3)$

Ta có :

$$\nabla \times F = \left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z}, \frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x}, \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right) = (0 - 1, 0 - 1, 0 - 1)$$

$$= (-1, -1, -1)$$

d. Với F $= \frac{xi+yj}{x^2+y^2} = \left(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{y}{x^2+y^2}, 0\right) = (F_1, F_2, F_3)$

Ta có :

$$\frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{\partial F_2}{\partial x} = \frac{-2xy}{(x^2 + y^2)^2}$$

$$\frac{\partial F_1}{\partial z} = \frac{\partial F_2}{\partial z} = \frac{\partial F_3}{\partial x} = \frac{\partial F_3}{\partial y} = 0$$

Suy ra :

$$\nabla \times F = \left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z}, \frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x}, \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right)$$

$$= \left(0 - 0, 0 - 0, \frac{-2xy}{(x^2 + y^2)^2} - \frac{-2xy}{(x^2 + y^2)^2}\right) = 0$$

5.10. Cho a, b là hai vectơ hằng, $\overrightarrow{OP} = (x, y, z) = R$

a) $F = a \times \overrightarrow{OP}$, chứng minh rằng $\nabla \times F = 2a$

b) $\Phi: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, F = \Phi(r)R, r = (x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{1}{2}}$. Chứng minh rằng $\nabla \times F = 0$

c) Cho $E = R - a, F = R - b$. Chứng minh rằng

d) $div(E \times F) = 0, \nabla \times (E \times F) = 2(b - a), \nabla(E.F) = E + F$

e) Chứng minh rằng $\nabla.[(a.R)a] = 1, \nabla.[(a \times R) \times R] = 2$

f) Chứng minh rằng $\nabla \times [(a.R)a] = 0, \nabla \times [(a \times R) \times R] = 0$

<u>Bài giải:</u>

a. Với $a = (a_1, a_2, a_3)$ và $\overrightarrow{OP} = (x, y, z)$

Ta có :

$$F = a \times \overrightarrow{OP} = (a_2 z - a_3 y, a_3 x - a_1 z, a_1 y - a_2 x)$$

Suy ra :

$$\nabla \times F = \left(\frac{\partial(a_1 y - a_2 x)}{\partial y} - \frac{\partial(a_3 x - a_1 z)}{\partial z}, \frac{\partial(a_2 z - a_3 y)}{\partial z} - \frac{\partial(a_1 y - a_2 x)}{\partial x}, \frac{\partial(a_3 x - a_1 z)}{\partial x} - \frac{\partial(a_2 z - a_3 y)}{\partial y}\right)$$

$$= (2a_1, 2a_2, 2a_3) = 2a$$

b. Ta có : $F = \Phi(r)R = (\Phi(r)x, \Phi(r)y, \Phi(r)z) = (F_1, F_2, F_3)$

Khi đó :

$$\frac{\partial F_1}{\partial y} = \Phi'(r).\frac{1}{2}(x^2 + y^2 + y^2)^{-1/2}.2yx = \frac{xy.\Phi'(r)}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

$$\frac{\partial F_1}{\partial z} = \Phi'(r).\frac{1}{2}(x^2 + y^2 + y^2)^{-1/2}.2zx = \frac{xz.\Phi'(r)}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial x} = \Phi'(r).\frac{1}{2}(x^2 + y^2 + y^2)^{-1/2}.2xy = \frac{xy.\Phi'(r)}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial z} = \Phi'(r).\frac{1}{2}(x^2 + y^2 + y^2)^{-1/2}.2yz = \frac{yz.\Phi'(r)}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

$$\frac{\partial F_3}{\partial x} = \Phi'(r).\frac{1}{2}(x^2 + y^2 + y^2)^{-1/2}.2xz = \frac{xz.\Phi'(r)}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

$$\frac{\partial F_3}{\partial y} = \Phi'(r).\frac{1}{2}(x^2 + y^2 + y^2)^{-1/2}.2yz = \frac{yz.\Phi'(r)}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

Suy ra :

$$\nabla \times F = \left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z}, \frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x}, \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right) = 0 \text{ (đpcm)}$$

c. Với $a = (a_1, a_2, a_3)$, $b = (b_1, b_2, b_3)$ và $R = (x, y, z)$

Ta có :

$$E = R - a = (x - a_1, y - a_2, z - a_3) = (E_1, E_2, E_3)$$

$$F = R - b = (x - b_1, y - b_2, z - b_3) = (F_1, F_2, F_3)$$

* Chứng minh : $div(E \times F) = 0$

$$E \times F = (E_2F_3 - E_3F_2, E_3F_1 - E_1F_3, E_1F_2 - E_2F_1)$$

Với :

$E_2F_3 - E_3F_2 = (a_3 - b_3)y + (b_2 - a_2)z + a_2b_3 - a_3b_2$

$E_3F_1 - E_1F_3 = (b_3 - a_3)x + (a_1 - b_1)z + a_3b_1 - a_1b_3$

$E_1F_2 - E_2F_1 = (a_2 - b_2)x + (b_1 - a_1)y + a_1b_2 - a_2b_1$

Khi đó :

$$\frac{\partial(E_2F_3 - E_3F_2)}{\partial x} = 0, \frac{\partial(E_3F_1 - E_1F_3)}{\partial y} = 0, \frac{\partial(E_1F_2 - E_2F_1)}{\partial z} = 0$$

Suy ra :

$$div(F \times F) = \frac{\partial(E_2F_3 - E_3F_2)}{\partial x} + \frac{\partial(E_3F_1 - E_1F_3)}{\partial y} + \frac{\partial(E_1F_2 - E_2F_1)}{\partial z} = 0$$

- Chứng minh : $\nabla \times (E \times F) = 2(b - a)$

$$\nabla \times (E \times F) = \left(\frac{\partial(E_1F_2 - E_2F_1)}{\partial y} - \frac{\partial(E_3F_1 - E_1F_3)}{\partial z}, \frac{\partial(E_2F_3 - E_3F_2)}{\partial z} - \frac{\partial(E_1F_2 - E_2F_1)}{\partial x}, \frac{\partial(E_3F_1 - E_1F_3)}{\partial x} - \frac{\partial(E_2F_3 - E_3F_2)}{\partial y}\right)$$

$$= (b_1 - a_1 - a_1 + b_1, b_2 - a_2 - a_2 + b_2, b_2 - a_2 - a_2 + b_2)$$

$$= 2(b_1 - a_1, b_2 - a_2, b_3 - a_3) = 2(b - a)$$

- Chứng minh : $\nabla(E.F) = E + F$

$$E.F = (x - a_1)(x - b_1) + (y - a_2)(y - b_2) + (z - a_3)(z - b_3)$$

$$= x^2 - (a_1 - b_1)x + a_1b_1 + y^2 - (a_2 - b_2)y + a_2b_2 + z^2 - (a_3 - b_3)x + a_3b_3$$

$$\nabla(E.F) = \left(\frac{\partial(E.F)}{\partial x}, \frac{\partial(E.F)}{\partial y}, \frac{\partial(E.F)}{\partial z}\right)$$

$$= \big(2x - (a_1 + b_1), 2y - (a_2 + b_2), 2z - (a_3 + b_3)\big)$$

$$= (x - a_1 + x - b_2, y - a_2 + y - b_2, z - a_3 + z - b_3) = E + F$$

d.

- Chứng minh : $\nabla.[(a.R)a] = |a|^2$

Với $a = (a_1, a_2, a_3), R = (x, y, z)$

$$a.R = a_1x + a_2y + a_3z$$

$$(a.R)a = (a_1^2x + a_1a_2y + a_1a_3z, a_2a_1x + a_2^2y + a_2a_3z, a_3a_1x + a_3a_2y + a_3^2z)$$

$$\nabla.[(a.R)a] = \frac{\partial(A_1)}{\partial x} + \frac{\partial(A_2)}{\partial y} + \frac{\partial(A_3)}{\partial z} = a_1^2 + a_2^2 + a_3^3$$

$$= a_1.a_1 + a_2.a_2 + a_3.a_3 = a.a = |a|^2$$

- Chứng minh : $\nabla.[(a \times R) \times R] = 2\mathrm{R.a}$

$$a \times R = (a_2z - a_3y, a_3x - a_1z, a_1y - a_2x)$$

$$(a \times R) \times R = (a_3xz - a_1z^2 - a_1y^2 + a_2xy, -a_2z^2 + a_3yz + a_1xy - a_2x^2, a_2zy - a_3y^2 - a_3x^2 + a_1xz) = (A_1, A_2, A_3)$$

$$\nabla.[(a \times R) \times R] = \frac{\partial(A_1)}{\partial x} + \frac{\partial(A_2)}{\partial y} + \frac{\partial(A_3)}{\partial z}$$

$$= a_3z + a_2y + a_3z + a_1x + a_2y + a_1x$$

$$= 2(xa_1 + ya_2 + za_3) = 2R.a$$

e.

- Chứng minh : $\nabla \times [(a.R)a] = 0$

Ta có :

$$a.R = a_1x + a_2y + a_3z$$

$$A = (a.R)a = (a_1^2x + a_1a_2y + a_1a_3z, a_2a_1z + a_2^2y + a_2a_3z, a_3a_1x + a_3a_2y + a_3^2z)$$

$$= (A_1, A_2, A_3)$$

$$\nabla \times [(a.R)a] = \nabla \times A = \left(\frac{\partial A_3}{\partial y} - \frac{\partial A_2}{\partial z}, \frac{\partial A_1}{\partial z} - \frac{\partial A_3}{\partial x}, \frac{\partial A_2}{\partial x} - \frac{\partial A_1}{\partial y}\right)$$

$$= (a_3a_2 - a_2a_3, a_1a_3 - a_3a_1, a_2a_1 - a_1a_2) = 0$$

- Chứng minh : $\nabla \times [(a \times R) \times a] = 0$

Ta có:

$$a \times R = (a_2z - a_3y, a_3x - a_1z, a_1y - a_2x)$$

$$A = (a \times R) \times a$$

$$= (a_3^2x - a_1a_3z - a_1a_2y + a_2^2x, a_1^2y - a_1a_2x - a_2a_3z + a_3^2y, a_2^2z - a_2a_3y - a_1a_3x + a_1^2z)$$

$= (A_1, A_2, A_3)$

$\nabla \times [(a \times R)a] = \nabla \times \mathrm{A} = \left(\frac{\partial A_3}{\partial y} - \frac{\partial A_2}{\partial z}, \frac{\partial A_1}{\partial z} - \frac{\partial A_3}{\partial x}, \frac{\partial A_2}{\partial x} - \frac{\partial A_1}{\partial y}\right)$

$= (-a_2a_3 + a_2a_3, -a_1a_3 + a_1a_3, -a_1a_2 + a_1a_2) = 0$

5.11. Khảo sát cực trị của các hàm f với $f(x,y)$ là

a) $x^2 - 2xy + \frac{y^3}{3} - 3y$

b) $xy - x^2$

c) $x^2 + 2y^2 - 6x + 8y - 1$

d) $x^2y - 2xy + 2y^2 - 15y$

e) $x^3 - 6x^2 - 3y^2$

f) $x^3 + y^3 - 6xy$

g) $2x^3 - 24xy + 16y^3$

h) $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + xy$

i) $x^2 - e^{y^2}$

j) $(y-2)\ln xy$

k) e^{xy}

Bài giải:

a. $f(x,y) = x^2 - 2xy + \frac{y^3}{3} - 3y$

Suy ra : $\nabla f(x,y) = (2x - 2y, -2x + y^2 - 3)$

Ta có : $\nabla f(x,y) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 2y = 0 \\ -2x + y^2 - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y = 3 \\ x = y = -1 \end{cases}$

Mặt khác :

$f_{xx} = 2,\ f_{xy} = f_{yx} = -2,\ f_{yy} = 2y$

với $h = (h_1, h_2)$ thì $\varphi(h, h) = 2h_1^2 - 4h_1h_2 + 2yh_2^2$

* Tại $(3, 3)$:

$$\varphi(h, h) = 2h_1^2 - 4h_1h_2 + 6h_2^2 = 2(h_1^2 - 2h_1h_2 + h_2^2) + 4h_2^2 > 0,$$

$\forall (h, h) \neq (0, 0)$

Vậy f đạt cực tiểu tại (3,3).

* Tại $(-1, -1)$:

$$\varphi(h) = 2h_1^2 - 4h_1h_2 - 2h_2^2$$

Khi $h = (0, 1) \Longrightarrow \varphi(h, h) < 0, h = (1, 0) \Longrightarrow \varphi(h, h) > 0$

Vậy f không đạt cực trị tại $(-1, -1)$.

b. $f(x, y) = xy - x^2$

Suy ra : $\nabla f(x, y) = (y - 2x, x)$

Do đó : $\nabla f(x, y) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y - 2x = 0 \\ x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = y = 0$

Mặt khác :

$f_{xx} = -2,\ f_{xy} = f_{yx} = 1,\ f_{yy} = 0$

với $h = (h_1, h_2)$ thì $\varphi(h, h) = -2h_1^2 + 2h_1h_2$

Khi $h = (1, 0), \varphi(h, h) = -2 < 0$

$h = (1, 2), \varphi(h, h) = 2 > 0$

Vậy f không đạt cực trị tại $(0, 0)$.

c. $f(x, y) = x^2 + 2y^2 - 6x + 8y - 1$

Suy ra : $\nabla f(x, y) = (2x - 6{,}4y + 8)$

$\nabla f(x, y) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = -2 \end{cases}$

Mặt khác : $f_{xx} = 2, f_{xy} = 0, f_{yy} = 4$

Tại $(3, -2)$ với $h = (h_1, h_2)$ thì $\varphi(h) = 2h_1^2 + 4h_2^2 > 0$ với mọi $h \neq (0{,}0)$

Vậy f đạt cực tiểu tại $(3, -2)$, $f(3, -2) = -18$.

d. $f(x,y) = x^2y - 2xy + 2y^2 - 15y$

Suy ra : $\nabla f(x,y) = (2xy - 2y, x^2 - 2x + 4y - 15)$

$\nabla f(x,y) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 \\ y = 0 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} x = -3 \\ y = 0 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} x = 1 \\ y = 4 \end{cases}$

$f_{xx} = 2y, f_{yy} = 4, f_{xy} = 2x - 2$

$\varphi(h,h) = 2yh_1^2 - 2(2x-2)h_1h_2 + 4h_2^2$

Tại (5,0) thì $\varphi(h,h) = -16h_1h_2 + 4h_2^2$

Ta có $\varphi(0,1) = 4 > 0$ và $\varphi(1,1) = -12 < 0$ nên f không đạt cực trị tại $(5,0)$.

Tại $(-3,0)$ thì $\varphi(h,h) = 16h_1h_2 + 4h_2^2$

Ta có $\varphi(-1,1) = -12 < 0$ và $\varphi(0,1) = 4 > 0$ nên f không đạt cực trị tại $(-3,0)$.

Tại (1,4) thì $\varphi(h,h) = 8h_1^2 + 4h_2^2 > 0, \forall(h_1,h_2) \neq 0$ nên f đạt cực tiểu tại $(1,4)$.

e. $f(x,y) = x^3 - 6x^2 - 3y^2$

$\nabla f(x,y) = (3x^2 - 12x, -6y)$

$\nabla f(x,y) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} x = 4 \\ y = 0 \end{cases}$

$f_{xx} = 6x - 12, f_{xy} = 0, f_{yy} = -6$

$\varphi(h,h) = (6x - 12)h_1^2 - 6h_2^2$

Tại (0,0) thì $\varphi(h,h) = -12h_1^2 - 6h_2^2 < 0, \forall(h_1,h_2) \neq 0$ nên f đạt cực đại tại (0,0).

Tại (4,0) thì $\varphi(h,h) = 12h_1^2 - 6h_2^2$

Ta có $\varphi(0,1) = -6 < 0$ và $\varphi(1,0) = 12 > 0$ nên f không đạt cực trị tại $(4,0)$.

f. $f(x,y) = x^3 + y^3 - 6xy$

$\nabla f(x,y) = (3x^2 - 6y, 3y^2 - 6x)$

$\nabla f(x,y) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} x = 2 \\ y = 2 \end{cases}$

$f_{xx} = 6x, f_{xy} = -6, f_{yy} = 6y$

Tại (0,0) thì $\varphi(h,h) = -12h_1h_2$

Ta có $\varphi(1,1) = -12 < 0$ và $\varphi(1,-1) = 12 > 0$ nên f không đạt cực trị tại (0,0).

Tại (2,2) thì $\varphi(h,h) = 12h_1^2 - 12h_1h_2 + 12h_2^2 > 0, \forall(h_1,h_2) \neq 0$ nên f đạt cực tiểu tại (2,2).

g. $f(x,y) = 2x^3 - 24xy + 16y^3$

$\nabla f(x,y) = (6x^2 - 24y, 48y^2 - 24x)$

$\nabla f(x,y) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases}$

$f_{xx} = 12x, f_{xy} = -24\ , f_{yy} = 96y$

Tại (0,0) thì $\varphi(h,h) = -48h_1h_2$

Ta có : $\varphi(1,1) = -48 < 0$ và $\varphi(1,-1) = 48 > 0$ nên f không đạt cực trị tại (0,0).

Tại (2,1) thì $\varphi(h,h) = 24h_1^2 - 48h_1h_2 + 96h_2^2 = 24(h_1^2 - 2h_1h_2 + 4h_2^2) > 0, \forall(h_1,h_2) \neq 0$ nên f đạt cực tiểu tại (2,1).

h. $f(x,y) = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + xy$

$$\nabla f = \left(-\frac{1}{x^2} + y, -\frac{1}{y^2} + x\right)$$

$$\nabla f = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -\dfrac{1}{x^2} + y = 0 \\ -\dfrac{1}{y^2} + x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}$$

Ta có :

$f_{xx} = \frac{2}{x^3}, f_{xy} = f_{yx} = 1, f_{yy} = \frac{x}{y^3}$

$\varphi(h,h) = \frac{2}{x^3}h_1^2 + 2h_1h_2 + \frac{2}{y^3}h_2^2$

Tại (1,1) thì $\varphi(h,h) = 2h_1^2 + 2h_1h_2 + 2h_2^2 > 0, \forall h \neq (0,0)$

Vậy f đạt cực tiểu tại (1,1).

i. $f(x,y) = x^2 - e^{y^2}$

$\nabla f = \left(2x, -2ye^{y^2}\right)$

$\nabla f = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = 0 \\ -2ye^{y^2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$

Ta có :

$f_{xx} = 2, f_{xy} = f_{yx} = 0, f_{yy} = -\left(2e^{y^2} + 4y^2e^{y^2}\right)$

$\varphi(h,h) = 2h_1^2 - \left(2e^{y^2} + 4y^2e^{y^2}\right)h_2^2$

Tại (0,0) thì $\varphi(h,h) = 2h_1^2 - 2h_2^2$

Ta có $\varphi(0,1) = -2 < 0$ và $\varphi(1,0) = 2 > 0$

Vậy f không đạt cực trị tại (0,0).

j. $f(x,y) = (y-2).\ln xy$

$\nabla f = \left(\frac{y-2}{x}, \ln xy + 1 - \frac{2}{y}\right)$

$\nabla f = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{y-2}{x} = 0 \\ \ln xy + 1 - \frac{2}{y} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ y = 2 \end{cases}$

Ta có :

$f_{xx} = \frac{2-y}{x^2}, f_{xy} = f_{yx} = \frac{1}{x}, f_{yy} = \frac{1}{y} + \frac{2}{y^2}$

$\varphi(h,h) = \frac{2-y}{x^2}h_1^2 + \frac{2}{x}h_1h_2 + \left(\frac{1}{y} + \frac{2}{y^2}\right)h_2^2$

Tại $\left(\frac{1}{2}, 2\right)$ thì $\varphi(h,h) = 4h_1h_2 + h_2^2$

Ta có $\varphi(1,1) = 5 > 0$ và $\varphi(-1,1) = -3 < 0$

Vậy f không đạt cực trị tại $(\frac{1}{2}, 2)$.

k. $f(x, y) = e^{xy}$

Suy ra : $\nabla f(x, y) = (ye^{xy}, xe^{xy})$

Do đó : $\nabla f(x, y) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} ye^{xy} = 0 \\ xe^{xy} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = y = 0$

Mặt khác :

$f_{xx} = y^2e^{xy},\ f_{xy} = f_{yx} = e^{xy} + xye^{xy},\ f_{yy} = x^2e^{xy}$

với $h = (h_1, h_2)$ thì $\varphi(h, h) = y^2e^{xy}h_1^2 + 2(e^{xy} + xye^{xy})h_1h_2 + x^2e^{xy}h_2^2$

Tại $x = y = 0$ thì $\varphi(h, h) = 2h_1h_2$

Khi $h = (1, 1), \varphi(h, h) = 2 > 0$

$h = (1, -1), \varphi(h, h) = -2 < 0$

Vậy f không đạt cực trị tại $(0, 0)$.

5.12. Tìm cực trị, giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của các hàm với các ràng buộc được cho

a) $x + y$ với $x^2+y^2 = 1$.

b) $x^2+xy + y^2 + yz + z^2$ trên mặt $x^2+y^2 + z^2 = 1$.

c) $x + 2y + 3z$ trên $x^2+y^2 + z^2 = 1$.

d) $4\pi xyz$ với $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, a, b, c > 0$.

e) xyz với $x + y + z = 1$.

f) $(x + y + z)^2$ với $x^2+2y^2 + 3z^2 = 1$.

Bài giải:

a. Đặt $f(x,y) = x + y$ và $g(x,y) = x^2 + y^2 - 1$ và $\Phi = f + \lambda g$

Ta giải hệ

$$\begin{cases} \nabla f + \lambda \nabla g = 0 \\ g(x,y) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (1,1) + \lambda(2x, 2y) = 0 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y = -\dfrac{1}{2\lambda} \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = y = \dfrac{1}{\sqrt{2}}, \lambda = \dfrac{-1}{\sqrt{2}} \\ x = y = \dfrac{-1}{\sqrt{2}}, \lambda = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

Vậy f có 2 điểm dừng trên $g(x,y) = 0$ là $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \left(\frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{2}}\right)$

Đồng thời $f(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}) = \sqrt{2}$, $f(\left(\frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{2}}\right) = -\sqrt{2}$

Do tập hợp $D = \{(x,y) | g(x,y) = x^2 + y^2 - 1 = 0\}$ là tập compắc trong $\mathbb{R}^2$ và f liên tục trên $\mathbb{R}^2$ nên tồn tại min, max

Mà $f(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}) = \sqrt{2} > f(\left(\frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{2}}\right) = -\sqrt{2}$ .Do vậy

$$\max_{(x,y)\in D} f(x,y) = \mathrm{f}(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}) = \sqrt{2}$$

$$\min_{(x,y)\in D} f(x,y) = \mathrm{f}\left(\frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{2}}\right) = -\sqrt{2}$$

Suy ra f đạt cực đại tai $(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$,và cực tiểu tại $\left(\frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{2}}\right)$

b. Đặt $f(x,y,z) = x^2 + xy + y^2 + yz + z^2$ và $g(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1$ và $\Phi = f + \lambda g$

Ta giải hệ

$$\begin{cases} \nabla f + \lambda \nabla g = 0 \\ g(x,y,z) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (2x + y, 2y + z, 2z + y) + \lambda(2x, 2y, 2z) = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (2(1+\lambda)x + y, 2(1+\lambda)y + z + x, 2(1+\lambda)z + y) = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 1 \end{cases}$$

Ta xét 2 trường hợp :

$\lambda = -1$ khi đó hệ cho tương đương :

$$\begin{cases}(y, x+z, y) = 0 \\ x^2+y^2+z^2 = 1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -z \\ y = 0 \\ 2x^2 = 1\end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{1}{\sqrt{2}}, y = 0, z = \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ x = \frac{-1}{\sqrt{2}}, y = 0, z = \frac{1}{\sqrt{2}}\end{array}\right.$$

$\lambda \neq -1$ khi đó hệ đã cho tương đương :

$$\begin{cases}(2(1+\lambda)x + y, 2(1+\lambda)y + z + x, 2(1+\lambda)z + y) = 0 \\ x^2+y^2+z^2 = 1\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 1+\lambda = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \lambda = \dfrac{1}{\sqrt{2}} - 1 \\ x = z, y = -\sqrt{2}, 4x^2 = 1 \end{cases} \\ \begin{cases} 1+\lambda = \dfrac{-1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \lambda = \dfrac{-1}{\sqrt{2}} - 1 \\ x = z, y = \sqrt{2}, 4x^2 = 1 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \lambda = \dfrac{1}{\sqrt{2}} - 1, x = z = \dfrac{1}{2}, y = \dfrac{-1}{\sqrt{2}} \\ \lambda = \dfrac{1}{\sqrt{2}} - 1, x = z = \dfrac{-1}{2}, y = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ \lambda = \dfrac{-1}{\sqrt{2}} - 1, x = z = \dfrac{1}{2}, y = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ \lambda = \dfrac{-1}{\sqrt{2}} - 1, x = z = \dfrac{-1}{2}, y = \dfrac{-1}{\sqrt{2}} \end{array}\right.$$

Vậy f có 6 điểm dừng trên $g(x,y,z) = 0$

Mặt khác :

$$f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = f\left(\frac{-1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 1$$

$$f\left(\frac{1}{2}, \frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2}\right) = f\left(\frac{-1}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2}\right) = 1 - \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$f\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2}\right) = f\left(\frac{-1}{2}, \frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{2}\right) = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Do tập hợp $D = \{(x,y,z) | g(x,y,z) = x^2+y^2+z^2-1 = 0\}$ là tập compắc trong $\mathbb{R}^2$ và f liên tục trên $\mathbb{R}^2$ nên tồn tại min,max

$$\max_{(x,y,z)\in D} f(x,y,z) = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\min_{(x,y,z)\in D} f(x,y,z) = 1 - \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Suy ra f đạt cực đại tại $\left(\frac{-1}{2}, \frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{2}\right)$ và cực tiểu tại $\left(\frac{-1}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{2}\right)$

c. Đặt $f(x,y,z) = x + 2y + 3z$, $g(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1$ và $\phi = f + \lambda g$

Ta giải hệ :

$$\begin{cases} \nabla f + \lambda \nabla g = 0 \\ g(x,y,z) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (1,2,3) + \lambda(2x,2y,2z) = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (1,2,3) + \lambda(2x,2y,2z) = 0 \\ \dfrac{14}{\lambda^2} = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = \dfrac{-7}{\sqrt{14}} \\ x = \dfrac{1}{\sqrt{14}} \\ y = \dfrac{2}{\sqrt{14}} \\ z = \dfrac{3}{\sqrt{14}} \end{cases} \text{hoặc} \begin{cases} \lambda = \dfrac{7}{\sqrt{14}} \\ x = \dfrac{-1}{\sqrt{14}} \\ y = \dfrac{-2}{\sqrt{14}} \\ z = \dfrac{-3}{\sqrt{14}} \end{cases}$$

Vậy f có 2 điểm dừng trên $g(x,y,z) = 0$ là

$\left(\frac{1}{\sqrt{14}}, \frac{2}{\sqrt{14}}, \frac{3}{\sqrt{14}}\right)$, $\left(\frac{-1}{\sqrt{14}}, \frac{-2}{\sqrt{14}}, \frac{-3}{\sqrt{14}}\right)$

và $f\left(\frac{1}{\sqrt{14}}, \frac{2}{\sqrt{14}}, \frac{3}{\sqrt{14}}\right) = \sqrt{14}$,$f\left(\frac{-1}{\sqrt{14}}, \frac{-2}{\sqrt{14}}, \frac{-3}{\sqrt{14}}\right) = -\sqrt{14}$

Do tập hợp $D = \{(x,y,z) | g(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0\}$ là tập compắc trong $\mathbb{R}^2$ và f liên tục trên $\mathbb{R}^2$ nên tồn tại min,max

$$\max_{(x,y,z)\in D} f(x,y,z) = \sqrt{14}$$

$$\min_{(x,y,z)\in D} f(x,y,z) = -\sqrt{14}$$

Suy ra f đạt cực đại tại $\left(\frac{1}{\sqrt{14}}, \frac{2}{\sqrt{14}}, \frac{3}{\sqrt{14}}\right)$ và cực tiểu tại $\left(\frac{-1}{\sqrt{14}}, \frac{-2}{\sqrt{14}}, \frac{-3}{\sqrt{14}}\right)$

d. Đặt $f(x,y,z) = 4\pi xyz$, $g(x,y,z) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1, \phi = f + \lambda g, (a > 0, b > 0, c > 0)$

Ta giải hệ

$$\begin{cases} \nabla f + \lambda \nabla g = 0 \\ g(x,y,z) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (4\pi yz, 4\pi xz, 4\pi xy) + \lambda\left(\frac{2x}{a^2}, \frac{2y}{b^2}, \frac{2z}{c^2}\right) = 0 \\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0 \end{cases}$$

Nếu

$\lambda = 0$ thì $(x,y,z) \in \{(0,0,c),(0,0,-c),(0,b,0),(0,-b,0),(a,0,0),(-a,0,0)\}$

Với $\lambda \neq 0$, ta được

$$\lambda = \frac{-2abc\pi\sqrt{3}}{3}, (x,y,z) \in \left\{\left(\frac{a\sqrt{3}}{3}, \frac{b\sqrt{3}}{3}, \frac{c\sqrt{3}}{3}\right), \left(\frac{-a\sqrt{3}}{3}, \frac{-b\sqrt{3}}{3}, \frac{c\sqrt{3}}{3}\right), \left(\frac{a\sqrt{3}}{3}, \frac{-b\sqrt{3}}{3}, \frac{-c\sqrt{3}}{3}\right), \left(\frac{-a\sqrt{3}}{3}, \frac{b\sqrt{3}}{3}, \frac{-c\sqrt{3}}{3}\right)\right\} = D_1$$

$$\lambda = \frac{2abc\pi\sqrt{3}}{3}, (x,y,z) \in \left\{\left(\frac{-a\sqrt{3}}{3}, \frac{b\sqrt{3}}{3}, \frac{c\sqrt{3}}{3}\right), \left(\frac{a\sqrt{3}}{3}, \frac{-b\sqrt{3}}{3}, \frac{c\sqrt{3}}{3}\right), \left(\frac{a\sqrt{3}}{3}, \frac{b\sqrt{3}}{3}, \frac{-c\sqrt{3}}{3}\right), \left(\frac{-a\sqrt{3}}{3}, \frac{-b\sqrt{3}}{3}, \frac{-c\sqrt{3}}{3}\right)\right\} = D_2$$

Do tập hợp $D = \left\{(x,y,z)\middle| g(x,y,z) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0\right\}$ là tập compắc trong $\mathbb{R}^2$ và f liên tục trên $\mathbb{R}^2$ nên tồn tại min,max

$$\max_{(x,y,z)\in D} f(x,y,z) = \frac{4\pi abc}{3\sqrt{3}} \text{ khi } (x,y,z) \in D_1$$

$$\min_{(x,y,z)\in D} f(x,y,z) = \frac{-4\pi abc}{3\sqrt{3}} \text{ khi } (x,y,z) \in D_2$$

Vậy f đạt cực đại tại các điểm $(x, y, z) \in D_1$, đạt cực tiểu tại các điểm $(x, y, z) \in D_2$

e. Đặt $f(x, y, z) = xyz$, $g(x, y, z) = x + y + z - 1, \phi = f + \lambda g$

Ta giải hệ

$$\begin{cases} \nabla f + \lambda \nabla g = 0 \\ g(x, y, z) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (yz + \lambda, xz + \lambda, xy + \lambda) = 0 \\ x + y + z - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y = z = \dfrac{1}{3} \\ \lambda = \dfrac{-1}{9} \end{cases}$$

Vậy f có 1 điểm dừng trên $g(x, y, z) = 0$ là $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$ (1)

$$\phi_{xx} = 0 \quad \phi_{yx} = z \quad \phi_{zx} = y$$

$$\phi_{xy} = z \quad \phi_{yy} = 0 \quad \phi_{zy} = x$$

$$\phi_{xz} = y \quad \phi_{yz} = x \quad \phi_{zz} = 0$$

Ma trận Hesse

$$H_f(x, y, z) = \begin{pmatrix} 0 & z & y \\ z & 0 & x \\ y & x & 0 \end{pmatrix}$$

Với $h = (h_1, h_2, h_3) \neq (0,0,0)$,ta có

$\varphi(h, h) = 2zh_1h_2 + 2xh_2h_3 + 2yh_3h_1$ với (1) ta được

$$\varphi(h, h) = \frac{2}{3}(h_1h_2 + h_2h_3 + h_3h_1)$$

Với $h = (1,1,1)$ thì $\varphi(h, h) > 0$

Với $h = (1, -1,1)$ thì $\varphi(h, h) < 0$

Vậy f không có cực trị.

f. Đặt $f(x, y, z) = (x + y + z)^2, g(x, y, z) = x^2 + 2y^2 + 3z^3 - 1, \phi = f + \lambda g$

Ta giải hệ

$$\begin{cases} \nabla f + \lambda \nabla y = 0 \\ g(x,y,z) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (2x + 2y + 2z + 2\lambda x, 2x + 2y + 2z + 4\lambda y, 2x + 2y + 2z + 6\lambda z) = 0 \\ x^2 + 2y^2 + 3z^3 - 1 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda x = 2\lambda y = 3\lambda z \\ x^2 + 2y^2 + 3z^3 - 1 = 0 \end{cases}$$

Với $\lambda \neq 0$ ta được

$$\begin{cases} \lambda = \dfrac{-11}{6} \\ x = \dfrac{\sqrt{6}}{\sqrt{11}} \\ y = \dfrac{\sqrt{6}}{2\sqrt{11}} \\ z = \dfrac{\sqrt{6}}{3\sqrt{11}} \end{cases} \text{hoặc} \begin{cases} \lambda = \dfrac{11}{6} \\ x = \dfrac{-\sqrt{6}}{\sqrt{11}} \\ y = \dfrac{-\sqrt{6}}{2\sqrt{11}} \\ z = \dfrac{-\sqrt{6}}{3\sqrt{11}} \end{cases}$$

Vậy f có 2 điểm dừng trên $g(x,y,z) = 0$ là $\left(\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{11}}, \frac{\sqrt{6}}{2\sqrt{11}}, \frac{\sqrt{6}}{3\sqrt{11}}\right)$ và $\left(\frac{-\sqrt{6}}{\sqrt{11}}, \frac{-\sqrt{6}}{2\sqrt{11}}, \frac{-\sqrt{6}}{3\sqrt{11}}\right)$

Với $\lambda = 0$, hệ trên tương đương với

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ x^2 + 2y^2 + 3z^3 - 1 = 0 \end{cases}$$

Do tập hợp $D = \{(x,y,z) | g(x,y,z) = x^2 + 2y^2 + 3z^2 - 1 = 0\}$ là tập compắc trong $\mathbb{R}^2$ và f liên tục trên $\mathbb{R}^2$ nên tồn tại min,max

$$\max_{(x,y,z)\in D} f(x,y,z) = f\left(\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{11}}, \frac{\sqrt{6}}{2\sqrt{11}}, \frac{\sqrt{6}}{3\sqrt{11}}\right) = f\left(\frac{-\sqrt{6}}{\sqrt{11}}, \frac{-\sqrt{6}}{2\sqrt{11}}, \frac{-\sqrt{6}}{3\sqrt{11}}\right) = \frac{11}{6}$$

$\min\limits_{(x,y,z)\in D} f(x,y,z) = 0$ tại (x,y,z) thỏa hệ phương trình

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ x^2 + 2y^2 + 3z^3 - 1 = 0 \end{cases}$$

5.13. Chứng minh rằng tồn tại khoảng cách ngắn nhất từ một điểm đến một mặt (hay một đường) và tìm khoảng cách đó trong các trường hợp sau

a) $(3,0)$ đến $y = x^2$.

b) $(0,0,0)$ đến $x + 2y + 2z = 3$.

c) $(2,1,-2)$ đến $x^2+y^2 + z^2 = 1$.

d) $(0,0,0)$ đến $xyz^2 = 2$.

Bài giải:

Ta chứng minh tồn tại khoảng cách ngắn nhất từ một điểm đến một đường

Lấy một điểm $a = (a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2$.Khoảng cách từ a đến một điểm $x = (x_1, x_2) \in (C)$ được tính bởi công thức $d(x) = \sqrt{(a_1 - x_1)^2 + (a_2 - x_2)^2}$ Vậy để chứng minh tồn tại khoảng cách ngắn nhất từ điểm a đến đường (C) ta cần chứng minh tồn tại GTNN của $d(x) = \sqrt{(a_1 - x_1)^2 + (a_2 - x_2)^2}$ trên tập hợp

$$\Gamma = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 | f(x_1, x_2) = 0\}$$

Lấy $u = (u_1, u_2) \in (C)$ bất kỳ. Đặt $\delta = d(u)$ và $W = \Gamma \cap B'(\mathrm{a}, \delta)$

Dễ thấy $u \in W$,ta suy ra $W \neq \emptyset$

Vì f là ánh xạ liên tục nên $\Gamma = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 | f(x_1, x_2) = 0\}$ là một tập con đóng của $\mathbb{R}^2$.Do vậy W là một tập đóng và bị chặn

Ánh xạ d cũng liên tục nên ta có thể tìm được một w trong tập compắc W sao cho

$$d(w) = \min_{v \in W} d(v)$$

với w xác định như trên,ta có $d(w) = \ min_{v \in \Gamma} d(v)$

Thật vậy,vì nếu $v \ \in W$, theo định nghĩa ta có ngay $d(w) \leq d(v)$;còn trong trường hợp $v \in \ \Gamma. W$ thì $d(w) \ \leq d(u) = \delta < d(y)$

a. Ta cần tìm GTNN của hàm số $\sqrt{(x-3)^2 + y^2}$ trên tập hợp $\Gamma = \{x, y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 - y = 0\}$

Đặt $f(x,y) \ = \ (x-3)^2 + y^2$, $g(x,y) = \ x^2 - y$ và $\phi = f + \lambda g$

Ta giải hệ

$$\begin{cases}\nabla f + \lambda g = 0 \\ \mathrm{g(x,y)} = 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}(2x - 6{,}2y) + \lambda(2x, -1) = 0 \\ x^2 - y = 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}2(1+\lambda)x - 6{,}2y - \lambda) = 0 \\ x^2 - y = 0\end{cases}$$

Giải hệ ta được $x = 1, y = 1, \lambda = 2$

Vậy (1,1) là điểm dừng duy nhất của f trên Γ và $f(1{,}1) = 5$

$\min\limits_{(x,y)\in\Gamma} f(x,y) = 5$ đạt được tại $(x,y) = (1{,}1)$

Vậy khoảng cách nhỏ nhất từ (3,0) đến $x^2 - y = \sqrt{5}$, đạt được tại $(1{,}1)$

b. Điểm $O = (0{,}0{,}0)$. Khoảng cách từ O đến điểm $A(x,y,z) \in (C): x + 2y + 2z = 3$ là $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

Đặt $\begin{cases}f(x,y) = x^2 + y^2 + z^2 \\ \phi = f + \lambda g\end{cases}$ với $g(x,y,z) = x + 2y + 2z - 3$

Xét hệ

$$\begin{cases}\nabla f + \lambda g = 0 \\ \mathrm{g(x,y,z)} = 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}(2x, 2y, 2z) + \lambda(1{,}1{,}2) = 0 \\ \mathrm{x + 2y + 2z - 3 = 0}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x = \dfrac{-\lambda}{2} \\ y = z = -\lambda \\ \lambda = \dfrac{6}{7}\end{cases}$$

Vậy$\left(\frac{-3}{7}, \frac{-6}{7}, \frac{-6}{7}\right)$ là điểm dừng của f.

Và khoảng cách nhỏ nhất từ (0,0,0) đến $x + 2y + 2z = 3$ là $\frac{9}{7}$ đạt được tại $\left(\frac{-3}{7}, \frac{-6}{7}, \frac{-6}{7}\right)$

c. Khoảng cách ngắn nhất từ $(2{,}1{,}-2)$ đến $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ là

$$\sqrt{(x-2)^2 + (y-1)^2 + (z+2)^2}$$

Đặt $f(x,y,z) = (x-2)^2 + (y-1)^2 + (z+2)^2, g(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1, \phi = f + \lambda g$

Xét hệ

$$\begin{cases}\nabla f + \lambda g = 0 \\ \mathrm{g(x,y,z)} = 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}(2(x-2),2(y-1),2(z+2)) + \lambda(2x,2y,2z) = 0 \\ x^2+y^2+z^2 = 1\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}(1-\lambda)x = 2 \\ (1-\lambda)y = 1 \\ (1-\lambda)z = -1 \\ x^2+y^2+z^2 = 1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\lambda = 4 \\ x = \dfrac{-2}{3} \\ y = -\dfrac{1}{3} \\ z = \dfrac{2}{3}\end{cases} \text{hoặc} \begin{cases}\lambda = -2 \\ x = \dfrac{2}{3} \\ y = \dfrac{1}{3} \\ z = -\dfrac{2}{3}\end{cases}$$

f có 2 điểm dừng trên miền $x^2+y^2+z^2 = 1$

$$f\left(\frac{-2}{3},\frac{-1}{3},\frac{2}{3}\right) = 16$$

$$f\left(\frac{2}{3},\frac{1}{3},-\frac{2}{3}\right) = 4$$

Vậy khoảng cách nhỏ nhất từ $(2,-1,2)$ đến $x^2+y^2+z^2 = 1$ là 2, đạt được tại $\left(\frac{2}{3},\frac{1}{3},-\frac{2}{3}\right)$

d. Đặt $f(x,y,z) = x^2+y^2+z^2, g(x,y) = xyz^2 - 2\ và\ \phi = f + \lambda g$

Ta giải hệ

$$\begin{cases}\nabla f + \lambda g = 0 \\ \mathrm{g(x,y,z)} = 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}(2x,2y,2z) + \lambda(yz^2,xz^2,2xyz) = 0 \\ x^2+y^2+z^2 = 1\end{cases}$$

Giải hệ trên ta được

$$\begin{cases}x = 1 \\ y = 1 \\ z = \sqrt{2}\end{cases}, \begin{cases}x = -1 \\ y = -1 \\ z = \sqrt{2}\end{cases}, \begin{cases}x = 1 \\ y = 1 \\ z = -\sqrt{2}\end{cases}, \begin{cases}x = -1 \\ y = -1 \\ z = -\sqrt{2}\end{cases}$$

Với 4 điểm dừng trên f đều đạt giá trị bằng 4,nên khoảng cách nhỏ nhất từ (0,0,0) đến đường $xyz^2 - 2 = 0$ là bằng 2 ,tại các điểm

$(1,1,\sqrt{2}), (-1,-1,\sqrt{2}), (1,1,-\sqrt{2}), (-1,-1,-\sqrt{2})$

5.14. Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của các hàm số sau trên tập hợp được cho

a) x^2+y trong hình vuông với các đỉnh $(\pm1,\pm1)$.

b) $x^3y^2(1-x-y)$ trong miền $x\geq 0, y\geq 0, x+y\leq 1$.

c) $(x^2+3y^2)e^{-(x^2+y^2)}$ trên mặt phẳng.

d) $(x^2+y^2)^{-1}$ trong miền $(x-2)^2+y^2\leq 1$.

e) $x-x^2-y^2$ trong miền $0\leq x\leq 2, 0\leq y\leq 1$.

f) $\frac{x-y}{1+x^2+y^2}$ trong miền $y\geq 0$.

Bài giải:

a) Đặt $f(x,y)=x^2+y$. Miền $-1\leq x\leq 1, -1\leq y\leq 1$ là compắc trong $\mathbb{R}^2$.

Do đó f sẽ có GTLN và GTNN trong miền này.

Với điều kiện của biến x,y ở trên thì $f(x,y)=x^2+y\leq 1^2+1=2$

Hơn nữa đẳng thức xảy ra khi $x=\pm1, y=1$.

Do đó, GTLN của f trên miền $-1\leq x\leq 1, -1\leq y\leq 1$ là 2, đạt được khi $(x,y)=(\pm1,1)$

Ta cũng có $f(x,y)=x^2+y\geq 0^2-1=-1$ và đẳng thức xảy ra khi $x=0, y=-1$

Do đó GTNN của f trên miền $-1\leq x\leq 1, -1\leq y\leq 1$ là -1, đạt được khi $(x,y)=(0,-1)$

b) Đặt $f(x,y)=x^3y^2(1-x-y)$. Miền $x\leq 0, y\leq 0, x+y\leq 1$ là compắc trong $\mathbb{R}^2$.

Do đó f sẽ có GTLN và GTNN trong miền này.

Trước hết ta sẽ tìm điểm dừng của hàm f trên miền trong của miền $x\geq 0, y\geq 0, x+y\leq 1$.

Ta có

$$\begin{aligned}\nabla f &= (3x^2y^2-4x^3y^2-3x^2y^3, 2x^3y-2x^4y-3x^3y^2)\\ &= (x^2y^2(3-4x-3y), x^3y(2-2x-3y))\end{aligned}$$

Suy ra $\nabla f = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 3-4x-3y=0 \\ 2-2x-3y=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{1}{2} \\ y=\frac{1}{3} \end{cases}$

$$\left(\frac{1}{2},\frac{1}{3}\right) \in \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x>0, y>0, x+y<1\}$$

Nên sẽ là điểm dừng duy nhất của f trên miền này. Ta có

$$f\left(\frac{1}{2},\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{8}.\frac{1}{9}.\frac{1}{6} = \frac{1}{432}$$

Nếu (x,y) nằm trên biên thì hoặc $x=0$ hoặc $y=0$ hoặc $x+y=1$. Do vậy, $f(x,y)$ sẽ luôn bằng 0 nếu x,y nằm trên biên.

Từ đây, ta có thể kết luận rằng

GTLN của f là $\frac{1}{432}$ đạt được tại $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{3}\right)$

GTNN của f là 0 đạt được trên biên.

c) Đặt $f(x,y) = (x^2+3y^2)e^{-(x^2+y^2)}$

Ta có

$$\nabla f = \left(2x(1-x^2-3y^2)e^{-(x^2+y^2)}, 2y(3-x^2-3y^2)e^{-(x^2+y^2)}\right)$$

Do đó

$$\nabla f = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x(1-x^2-3y^2)e^{-(x^2+y^2)} = 0 \\ 2y(3-x^2-3y^2)e^{-(x^2+y^2)} = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} x=0 \\ y=\pm 1 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} x=\pm 1 \\ y=0 \end{cases}$$

Ta có

$$f(0,0)=0, f(0,\pm 1) = \frac{3}{e}, f(\pm 1,0) = \frac{1}{e}$$

Vậy GTLN của f là $\frac{3}{e}$ tại $(0,\pm 1)$ và GTNN của f là 0 tại $(0,0)$.

d) Đặt $f(x,y) = (x^2+y^2)^{-1}$ trong miền $(x-2)^2+y^2 \le 1$

Miền $(x-2)^2+y^2 \le 1$ là compắc trong $\mathbb{R}^2$ nên trong miền này f sẽ có GTLN, GTNN.

Ta tìm điểm dừng của f trong miền $(x-2)^2 + y^2 < 1$

Ta có

$$\nabla f = \left(-\frac{2x}{(x^2+y^2)^2}, -\frac{2y}{(x^2+y^2)^2}\right)$$

$$\nabla f = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

Ta có $(0,0) \notin \{(x,y)|(x-2)^2 + y^2 < 1\}$

Vậy trong miền $(x-2)^2 + y^2 < 1$ hàm f không có điểm dừng.

Ta khảo sát f trên D nghĩa là khi $(x-2)^2 + y^2 = 1$

Ta có $x^2 + y^2 = 4x - 3$ nên $f(x,y) = \frac{1}{4x-3}$. Ta có $(x-2)^2 \leq 1$ nên $1 \leq x \leq 3$, hay $1 \leq 4x - 3 \leq 9$. Suy ra :

$$\frac{1}{9} \leq f(x,y) \leq 1$$

Vậy GTLN của f là 1 tại (1,0) và GTNN của f là $\frac{1}{9}$ tại (3,0)

e) Đặt $f(x,y) = x - x^2 + y^2$ trên miền $0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 1$

Miền $0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 1$ là compắc trong $\mathbb{R}^2$ nên f có GTLN và GTNN.

Ta tìm điểm dừng của f trên miền $0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 1$. Ta có

$$\nabla f = (1 - 2x, 2y)$$

$$\nabla f = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{1}{2} \\ y = 0 \end{cases}$$

$$\left(\frac{1}{2}, 0\right) \in \{(x,y)|0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 1\}$$

Ta có $f\left(\frac{1}{2}, 0\right) = \frac{1}{4}$.

Ta khảo sát f trên biên $x = 0$ hoặc $x = 2$, $y = 0$ hoặc $y = 1$

$$f(0,0) = 0, f(0,1) = 1, f(2,0) = -2, f(2,1) = -1$$

Vậy GTLN của f là 1 tại $(0,1)$ và GTNN của f là -2 tại $(2,0)$.

f) Đặt $f(x,y) = \frac{x-y}{1+x^2+y^2}$.

Trước hết ta sẽ tìm điểm dừng của hàm f trên miền trong của miền $y \geq 0$

Ta có

$$\nabla f = \left(\frac{y^2 - x^2 + 2xy + 1}{(1+x^2+y^2)^2}, \frac{y^2 - x^2 - 2xy - 1}{(1+x^2+y^2)^2}\right)$$

$$\nabla f = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y^2 - x^2 + 2xy + 1 = 0 \\ y^2 + x^2 - 2xy - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2 - x^2 = 0 \\ 2xy + 1 = 0 \end{cases}$$

Kết hợp với điều kiện $y \geq 0$ ta tìm được điểm dừng duy nhất của f là $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

Ta có $f\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -\frac{1}{\sqrt{2}}$

Tiếp theo ta sẽ khảo sát f trên biên, tức là khi $y = 0$. Khi đó $f(x,y) = \frac{x}{1+x^2}$

Áp dụng bất đẳng thức $-(1+x^2) \leq 2x \leq 1 + x^2$ ta có $-\frac{1}{2} \leq \frac{x}{1+x^2} \leq \frac{1}{2}$

Ta có $\frac{x}{1+x^2} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = 1$ nên f đạt GTLN trên biên là $\frac{1}{2}$ tại $(1,0)$

$\frac{x}{1+x^2} = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow x = -1$ nên f đạt GTNN trên biên là $-\frac{1}{2}$ tại $(-1,0)$

Do miền xác định của f không bị chặn, để có thể khẳng định rằng $\frac{1}{2}$ là GTLN và $-\frac{1}{\sqrt{2}}$ là GTNN của f, ta cần chỉ ra thêm $-\frac{1}{\sqrt{2}} \leq \frac{x-y}{1+x^2+y^2} \leq \frac{1}{2}$ nếu $y \geq 0$

Thật vậy, khi $y \geq 0$

$$\frac{x-y}{1+x^2+y^2} \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2y + y^2 + (x-1)^2 \geq 0 \text{ (luôn đúng)}$$

Mặt khác

$$-\frac{1}{\sqrt{2}} \leq \frac{x-y}{1+x^2+y^2} \Leftrightarrow \left(x + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 \geq 0 \text{ (luôn đúng)}$$

Vậy, GTLN của f là $\frac{1}{2}$ đạt được tại $(0,1)$ và GTNN của f là $-\frac{1}{\sqrt{2}}$ tại $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

5.15. Chứng minh hàm $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mà $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0$ sẽ không phụ thuộc biến thứ hai và nếu $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0$ thì f là hằng số.

Bài giải:

Cố định x, để chứng minh f không phụ thuộc vào biến thứ hai ta chứng minh

$$f(x,y_1) = f(x,y_2) \quad \forall\, y_1 \neq y_2$$

$$f(x,y_1) - f(x,y_2) = \int_{y_2}^{y_1} \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} dy = \int_{y_2}^{y_1} 0 dy = 0$$

Nếu $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}$ =0 thì f là hằng số

Ta sẽ chứng minh $\forall (x,y) : f(x,y) = f(0,0)$

Ta có :

$$f(x,y) - f(x,0) = \int_0^{y} \frac{\partial f(x,t)}{\partial y} dt = \int_0^{x} 0 dt = 0$$

Suy ra $f(x,y) = f(x,0)$

$$f(x,0) - f(0,0) = \int_0^{x} \frac{\partial f(s,0)}{\partial x} ds = \int_0^{s} 0\, ds = 0$$

Suy ra $f(x,0) = f(0,0)$

Do đó $\forall (x,y) : f(x,y) = f(0,0)$. Suy ra f là hàm hằng.

5.16. Cho $A = \{(x,y) | x < 0 \text{ hay } x \geq 0\ và\ y \neq 0\}$.

a) Chứng minh rằng nếu hàm $f : A \to \mathbb{R}$ thoả $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0$ thì f là hằng số.

b) Tìm hàm $f : A \to \mathbb{R}$ sao cho $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0$ nhưng f lại phụ thuộc biến thứ hai.

Bài giải:

a. $A = \{(x, y)|x < 0$ hay $x \geq 0$ *và* $y \neq 0\} \equiv R^2 \backslash \{(0, x)|x \geq 0\}$

Ta chứng minh :

Nếu $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = 0$ trên A thì f là hằng số trên A.

Ta sẽ chứng minh $\forall (x, y) \in A: f(x, y) = f(-1,0)$

Ta có :

$$f(x, y) - f(-1, y) = \int_{-1}^{x} \frac{\partial f(1, y)}{\partial x} dt = \int_{-1}^{x} 0dt = 0$$

Suy ra $f(x, y) = f(-1, y)$

$$f(-1, y) - f(-1,0) = \int_{0}^{y} \frac{\partial f(-1, s)}{\partial y} ds = \int_{0}^{y} 0ds = 0$$

Suy ra $f(-1, y) = f(-1,0)$

Do đó $\forall (x, y) \in A : f(x, y) = f(-1,0)$. Suy ra f là hàm hằng trên A.

b. Ta xét hàm f như sau :

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ x & x \geq 0, y > 0 \\ -x & x \geq 0, y < 0 \end{cases}$$

Điều kiện : $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0, f$ phụ thuộc vào biến y

- Với $x < 0$:

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(0) = 0 \text{ (thỏa)}$$

- Với $x \geq 0, y > 0$:

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(x) = 0 \text{ (thỏa)}$$

- Với $x \geq 0, y < 0$:

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(-x) = 0 \text{ (thỏa)}$$

Vậy hàm f cần tìm là :

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ x & x \geq 0, y > 0 \\ -x & x \geq 0, y < 0 \end{cases}$$

5.17. Cho x và y là các hàm ẩn theo t xác định bởi phương trình $x^3 + e^x - t^2 - t = 0, yt^2 + y^2t - t + y = 0$ và xét hàm $z = e^x \cos y$. Tính $\frac{dz}{dt}$ tại $t = 0$.

<u>Bài giải:</u>

$F(x,t) = x^3 + e^x - t^2 - t = 0$

$G(y,t) = yt^2 + y^2t - t + y = 0$

Với $t = 0$ thế vào 2 phương trình trên ta được

$$\begin{cases} x^3 + e^x = 0 \ \ (1) \\ \qquad y = 0 \end{cases} (*)$$

Phương trình (1) có 1 nghiệm $x_0 \in (-1,0)$ vì $f(-1) = -1 + \frac{1}{e} < 0$ và $f(0) = 1 > 0$ nên $f(-1).f(0) < 0$

Vậy hệ trên có nghiệm là $(x_0, 0)$

Khi $t = 0$ thì ta có

$$\begin{cases} F_x = 3x_0^2 + e^{x_0} \neq 0 \\ \quad G_y = 1 \neq 0 \end{cases}$$

$F_x \neq 0$ vì nếu $F_x = 0$ thì

$$\begin{cases} x_0^3 + e^{x_0} = 0 \\ 3x_0^2 + e^{x_0} = 0 \end{cases} \Rightarrow x_0^3 = 3x_0^2 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x_0 = 0 \\ x_0 = 3 \end{array}\right.$$

Nhưng $x_0 = 0$ hay $x_0 = 3$ đều không thỏa $x_0^3 + e^{x_0} = 0$. Vậy $F_x \neq 0$

Lấy đạo hàm 2 vế theo t của $F \ và \ G$

$$\begin{cases} 3x^2.\dfrac{\partial x}{\partial t} + \dfrac{\partial x}{\partial t}.e^x - 2t - 1 = 0 \\ \dfrac{\partial y}{\partial t}.t^2 + 2yt + 2y.\dfrac{\partial y}{\partial t}.t + y^2 - 1 + \dfrac{\partial y}{\partial t} = 0 \end{cases}.$$

Với $y = t = 0$ và $x = x_0$, ta suy ra

$$\frac{\partial x}{\partial t} = \frac{1}{3x_0^2 + e^{x_0}}, \frac{\partial y}{\partial t} = 1$$

Xét hàm $z = e^x.\cos y$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = e^x.\cos y = e^x, \frac{\partial z}{\partial y} = -e^x.\sin y = 0$$

Ta có $z = z(x,y) = z\big(x(t), y(t)\big)$

Lấy đạo hàm của z theo t

$$\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial z}{\partial x}.\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial y}.\frac{\partial y}{\partial t} = e^{x_0}.\frac{1}{3x_0^2 + e^{x_0}} + 0.1 = \frac{e^{x_0}}{3x_0 + e^{x_0}}$$

5.18. Khai triển Taylor đến cấp n của $f(x,y)$ quanh (a,b)

a) $f(x,y) = \sin x \cos y, n = 1, (a,b) = (0,0)$

b) $f(x,y) = e^x \cos y\,, n = 3, (a,b) = (0,\pi)$

c) $(x,y) = \ln(xy)\,, n = 3, (a,b) = (1,1)$

<u>Bài giải:</u>

a) $f(x,y) = f(0,0) + xf_x(0,0) + yf_y(0,0) + \frac{1}{2!}(x^2 f_{xx}(\theta x, \theta y) + 2xyf_{xy}(\theta x, \theta y) + y^2 f_{yy}(\theta x, \theta y))$

Trong đó

$$f_x = \cos x \cos y$$

$$f_y = -\sin x \sin y$$

$$f_{xy} = -\cos x \sin y$$
$$f_{xx} = -\sin x \cos x$$
$$f_{yy} = -\sin x \cos y$$

Thế vào công thức trên, ta có :

$$f(x,y) = x - \frac{1}{2}(x^2 \sin \theta x \cos \theta y + 2xy \cos \theta x \,.\sin \theta y + y^2 \sin \theta x \,.\cos \theta y)$$

b)

$$\begin{aligned} f(x,y) &= f(0,\pi) + x f_x(0,\pi) + (y-\pi) f_y(0,\pi) + \frac{1}{2!} x^2 f_{xx}(0,\pi) \\ &+ x(y-\pi) f_{xy}(0,\pi) + \frac{1}{2!}(y-\pi)^2 f_{yy}(0,\pi) + \frac{1}{3!} x^3 f_{xxx}(0,\pi) \\ &+ \frac{1}{2!} x^2 (y-\pi) f_{xxy}(0,\pi) + \frac{1}{2!} x (y-\pi)^2 f_{xyy}(0,\pi) \\ &+ \frac{1}{3!}(y-\pi)^3 f_{yyy}(0,\pi) + \frac{1}{4!} x^4 f_{xxxx}\big(\theta x, \theta y + \pi(\theta - 1)\big) \\ &+ \frac{1}{3!} x^3 (y-\pi) f_{xxxy}\big(\theta x, \theta y + \pi(\theta - 1)\big) \\ &+ \frac{1}{2!\,2!} x^2 (y-\pi)^2 f_{xxyy}\big(\theta x, \theta y + \pi(\theta - 1)\big) \\ &+ \frac{1}{3!} x (y-\pi)^3 f_{xyyy}\big(\theta x, \theta y + \pi(\theta - 1)\big) \\ &+ \frac{1}{4!}(y-\pi)^4 f_{yyyy}\big(\theta x, \theta y + \pi(\theta - 1)\big) \end{aligned}$$

$$f_x(0,\pi) = f_{xx}(0,\pi) = f_{xxx}(0,\pi) = f_{xxxx}(0,\pi) = f(0,\pi) = -1$$

$$f_{xxxy} = f_{xxy} = f_{xy} = f_y = e^x siny \Rightarrow f_y(0,\pi) = 0$$

$$f_{xxyy} = f_{xyy} = f_{yy} = -e^x cosy \Rightarrow f_{yy}(0,\pi) = 1$$

$$f_{xyyy} = f_{yyy} = e^x siny \Rightarrow f_{yyy}(0,\pi) = 0$$

$$f_{yyyy} = e^x cosy \Rightarrow f_{yyyy}(0,\pi) = -1$$

$$f(x,y)=-1-x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}(y-\pi)^2-\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{2}x(y-\pi)^2$$
$$-\frac{1}{24}x^4e^{\theta x}\cos\big(\theta y+\pi(\theta-1)\big)$$
$$-\frac{1}{6}x^3(y-\pi)e^{\theta x}\sin\big(\theta y+\pi(\theta-1)\big)$$
$$-\frac{1}{4}x^2(y-\pi)^2e^{\theta x}\cos\big(\theta y+\pi(\theta-1)\big)+\frac{1}{6}x(y-\pi)^3e^{\theta x}sin\,\big(\theta y$$
$$+\pi(\theta-1)\big)+\frac{1}{24}(y-\pi)^4e^{\theta x}\cos\big(\theta y+\pi(\theta-1)\big)$$

c)

$$f(x,y)=f(1{,}1)+(x-1)f_x(1{,}1)+(y-1)f_y(1{,}1)+\frac{1}{2!}(x-1)^2f_{xx}(1{,}1)+(x$$
$$-1)(y-1)f_{xy}(0{,}1)+\frac{1}{2!}(y-1)^2f_{yy}(0{,}1)+\frac{1}{3!}(x-1)^3f_{xxx}(0{,}1)$$
$$+\frac{1}{2!}(x-1)^2(y-1)f_{xxy}(0{,}1)+\frac{1}{2!}(x-1)(y-1)^2f_{xyy}(0{,}1)$$
$$+\frac{1}{3!}(y-1)^3f_{yyy}(0{,}1)$$
$$+\frac{1}{4!}(x-1)^4f_{xxxx}(\theta(x-1)+1,\theta(y-1)+1)$$
$$+\frac{1}{3!}(x-1)^3(y-1)f_{xxxy}(\theta(x-1)+1,\theta(y-1)+1)$$
$$+\frac{1}{2!\,2!}(x-1)^2(y-1)^2f_{xxyy}(\theta(x-1)+1,\theta(y-1)+1)+\frac{1}{3!}(x$$
$$-1)(y-1)^3f_{xyyy}(\theta(x-1)+1,\theta(y-1)+1)$$
$$+\frac{1}{4!}(y-1)^4f_{yyyy}(\theta(x-1)+1,\theta(y-1)+1)$$

Ta có :

$$f_x=\frac{1}{x},f_{xx}=-\frac{1}{x^2},f_{xxx}=\frac{2}{x^3},f_{xxxx}=-\frac{6}{x^4}$$

Suy ra :

$$f_x(1,1) = 1, f_{xx}(1,1) = -1, f_{xxx}(1,1) = 2$$

Tương tự ta có :

$$f_y = \frac{1}{yy}, f_{yy} = -\frac{1}{y^2}, f_{yyy} = \frac{2}{y^3}, f_{yyyy} = -\frac{6}{y^4}$$

Suy ra :

$$f_y(1,1) = 1, f_{yy}(1,1) = -1, f_{yyy}(1,1) = 2$$

Các đạo hàm hỗn hợp bằng 0.

$$\begin{aligned} f(x,y) = (x-1) + (y-1) - \frac{1}{2}(x-1)^2 - \frac{1}{2}(y-1)^2 + \frac{1}{3}(x-1)^3 \\ + \frac{1}{3}(y-1)^3 - \frac{1}{4}(x-1)^4 \frac{1}{(\theta(x-1)+1)^4} \\ - \frac{1}{4}(y-1)^4 \frac{1}{(\theta(y-1)+1)^4} \end{aligned}$$

5.19. Cho $F(x,y) = e^{x^2y^3} + 1 + y^3$ và $a, b \in \mathbb{R}$ sao cho $F(a,b) = 0$. Chứng minh rằng tồn tại khoảng $I \ni a$ và hàm $g : I \to \mathbb{R}$ thuộc lớp C^1 sao cho $g(a) = b$ và $F\big(x, g(x)\big) = 0$ với mọi $x \in I$.

Bài giải:

Để chỉ ra sự tồn tại của khoảng I và hàm g, theo định lý hàm ẩn.

Ta cần chứng minh :

$$\frac{\partial F}{\partial y}(a,b) \neq 0$$

Giả sử ngược lại

$$\frac{\partial F}{\partial y}(a,b) = 0$$

Với $F(x,y) = e^{x^2y^3} + 1 + y^3$, ta có :

$$\frac{\partial F}{\partial y} = 3x^2y^2e^{x^2y^3} + 3y^2$$

Suy ra $3a^2b^2e^{a^2b^3} + 3b^2 = 0$.Vậy $b = 0$.

Tuy nhiên khi $b = 0$, ta có $F(a,b) = e^{a^2b^3} + 1 + 3b^2 = 2 \neq 0$ (trái với giả thiết)

Vậy bài toán được chứng minh.

5.20. Xét biến đổi $x = u - 2v, y = 2u + v$,

a. Viết công thức cho biến đổi đảo.

b. Tính Jacobi của hai phép biến đổi nêu trên.

Bài giải:

a. Ta có :

$$\begin{cases} x = u - 2v \\ y = 2u + v \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + 2y = 5u \\ y - 2x = 5v \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u = \dfrac{x + 2y}{5} \\ v = \dfrac{y - 2x}{5} \end{cases}$$

b. Ta có :

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = det\begin{pmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix} = det\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = 5$$

Nếu $\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \neq 0$ thì theo định lý hàm ngược u, v có thể biểu diễn theo x, y được và $\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = 1$ hay $\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = \left(\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right)^{-1}$ nên

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = \left(\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right)^{-1} = \frac{1}{5}$$

5.21. Xét phép biến đổi $x = f(u,v), y = g(u,v)$ với Jacobi $J = \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}$. Chứng minh rằng biến đổi đảo thoả

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{J}\frac{\partial y}{\partial v}, \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{J}\frac{\partial x}{\partial v}, \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{1}{J}\frac{\partial y}{\partial u}, \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{1}{J}\frac{\partial x}{\partial u}$$

Bài giải:

Theo giả thuyết, ta có $x = f(u,v)$

Lấy đạo hàm 2 vế theo biến x, suy ra

$$\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} = 1 \ (1)$$

Mặt khác ta lại có $y = y(u,v)$. Cũng lấy đạo hàm 2 vế theo biến x

$$\frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} = 0 \ (2)$$

Giải hệ phương trình (1) và (2), ta nhận được

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{1}{\left(\dfrac{\partial y}{\partial v}\dfrac{\partial x}{\partial u} - \dfrac{\partial x}{\partial v}\dfrac{\partial y}{\partial u}\right)}\dfrac{\partial y}{\partial v} \\ \dfrac{\partial v}{\partial x} = \dfrac{1}{\left(\dfrac{\partial y}{\partial u}\dfrac{\partial x}{\partial v} - \dfrac{\partial x}{\partial u}\dfrac{\partial y}{\partial v}\right)}\dfrac{\partial y}{\partial u} \end{cases} \text{hay} \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{1}{\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}}\dfrac{\partial y}{\partial v} = \dfrac{1}{J}\dfrac{\partial y}{\partial v} \\ \dfrac{\partial v}{\partial x} = \dfrac{1}{-\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}}\dfrac{\partial y}{\partial u} = -\dfrac{1}{J}\dfrac{\partial y}{\partial u} \end{cases}$$

Hoàn toàn tương tự, ta cũng tính được biểu thức của $\frac{\partial u}{\partial y}$ và $\frac{\partial v}{\partial y}$.

5.22. Xét biến đổi $x = f(u,v,w), y = g(u,v,w), z = h(u,v,w)$ với Jacobi $J = \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}$. Chứng minh rằng biến đổi đảo thoả

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{J}\frac{\partial(y,z)}{\partial(v,w)}, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{J}\frac{\partial(z,x)}{\partial(v,w)}, \qquad \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{1}{J}\frac{\partial(x,y)}{\partial(v,w)},$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{1}{J}\frac{\partial(y,z)}{\partial(w,u)}, \qquad \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{1}{J}\frac{\partial(z,x)}{\partial(w,u)}, \qquad \frac{\partial v}{\partial z} = \frac{1}{J}\frac{\partial(x,y)}{\partial(w,u)},$$

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{1}{J}\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}, \qquad \frac{\partial w}{\partial y} = \frac{1}{J}\frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}, \qquad \frac{\partial w}{\partial z} = \frac{1}{J}\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)},$$

<u>Bài giải:</u>

Ta có :

$$x = f(u,v,w)\ (1), y = g(u,v,w) (2), z = h(u,v,w)$$

Lấy đạo hàm 2 vế theo x, suy ra

$$\begin{cases} \frac{\partial x}{\partial u}.\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial x}{\partial v}.\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial x}{\partial w}.\frac{\partial w}{\partial x} = 1 \\ \frac{\partial y}{\partial u}.\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial v}.\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial w}.\frac{\partial w}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial z}{\partial u}.\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v}.\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{zf}{\partial w}.\frac{\partial w}{\partial x} = 0 \end{cases}$$

Giải hệ trên gồm 3 phương trình trên với ẩn là $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial w}{\partial x}$ ta được :

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\Delta_1}{\Delta}$$

Với

$$\Delta = \det\begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{pmatrix} = \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)} = J$$

$$\Delta_1 = \det\begin{pmatrix} 1 & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ 0 & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ 0 & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{pmatrix} = \frac{\partial(y,z)}{\partial(v,w)}$$

Suy ra

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{J}\frac{\partial(y,z)}{\partial(v,w)}$$

Tương tự ta cũng có

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{1}{J}\frac{\partial(y,z)}{\partial(w,u)}, \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{1}{J}\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}$$

Hoàn toàn tương tự từ hệ

$$\begin{cases} \frac{\partial x}{\partial u}.\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial x}{\partial v}.\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial x}{\partial w}.\frac{\partial w}{\partial y} = 1 \\ \frac{\partial y}{\partial u}.\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial y}{\partial v}.\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial y}{\partial w}.\frac{\partial w}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial z}{\partial u}.\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v}.\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{zf}{\partial w}.\frac{\partial w}{\partial y} = 0 \end{cases}$$

Và

$$\begin{cases} \dfrac{\partial x}{\partial u}.\dfrac{\partial u}{\partial z}+\dfrac{\partial x}{\partial v}.\dfrac{\partial v}{\partial z}+\dfrac{\partial x}{\partial w}.\dfrac{\partial w}{\partial z}=1 \\ \dfrac{\partial y}{\partial u}.\dfrac{\partial u}{\partial z}+\dfrac{\partial y}{\partial v}.\dfrac{\partial v}{\partial z}+\dfrac{\partial y}{\partial w}.\dfrac{\partial w}{\partial z}=0 \\ \dfrac{\partial z}{\partial u}.\dfrac{\partial u}{\partial z}+\dfrac{\partial z}{\partial v}.\dfrac{\partial v}{\partial z}+\dfrac{zf}{\partial w}.\dfrac{\partial w}{\partial z}=0 \end{cases}$$

Ta chứng minh được

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{1}{J}\frac{\partial(z,x)}{\partial(v,w)},\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{1}{J}\frac{\partial(z,x)}{\partial(w,u)},\frac{\partial w}{\partial y}=\frac{1}{J}\frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}$$

$$\frac{\partial u}{\partial z}=\frac{1}{J}\frac{\partial(x,y)}{\partial(v,w)},\frac{\partial v}{\partial z}=\frac{1}{J}\frac{\partial(x,y)}{\partial(w,u)},\frac{\partial w}{\partial z}=\frac{1}{J}\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}$$

Bài Tập Mở Rộng

1. Tìm cực trị của các hàm sau :

a. $f(x) = (x^2 + y^2)\left(e^{-x^2-y^2} - 1\right)$

b. $f(x) = \sqrt{(a-x)(a-y)(x+y-1)}$

Trong miền $x < a,\ \ y < a, x + y > a$ với a là hằng số dương.

c. Cực trị hàm ẩn $z = z(x, y)$ nếu biết

$$x^2 + y^2 + z^2 - xz - yz + 2x + 2y + 2z - 2 = 0.$$

2. Viết khai triển các hàm sau đây theo lũy thừa nguyên dương của biến x đến số hạng cấp cho trước (dùng Công Thức Taylor) :

a. $f(x) = e^{\sin x}$ đến x^3.

b. $f(x) = \frac{(1+x)^{100}}{(1-2x)^{40}(1+2x)^{60}}$ đến số hạng x^2.

c. $f(x) = \ln(\cos x)$ đến x^6.

d. $f(x) = \tan \mathrm{x}$ đến số hạng x^5.

3. Giả sử $f(x)$ tại $x = 0, x > 0$ chú ý $f^k(0) = 0\ \ \forall k = 0,1,2, \ldots$ và $f^k(x) \geq 0$ với $x > 0, k = 1,2, \ldots$ Chứng minh rằng : $f(x) = 0$ với $x > 0$.

4. Chứng minh tồn tại duy nhất hàm $y = f(x)$ trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn phương trình $y - \varepsilon siny = x, (0 \leq \varepsilon < 1)$. Tìm $y'(x)$.

5. Chứng tỏ rằng hàm $\sqrt{|xy|}$ có cả hai đạo hàm riêng $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ và $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$ nhưng $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$ và $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$ không bị chặn trong lân cận điểm (0,0).

Chương 6:

CHUỖI TRONG KHÔNG GIAN BANACH

6.1. Chứng minh rằng các chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ và $\sum_{n=m}^{\infty} a_n$ hoặc cùng hội tụ hoặc cùng phân kỳ. Khi chúng cùng hội tụ, xác định α sao cho $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \alpha + \sum_{n=m}^{\infty} a_n$.

Bài giải:

- Nếu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ hội tụ thì : Với mọi $k \geq m$,

Vì dãy tổng riêng phần $\sum_{n=1}^{k} a_n$ hội tụ và $\sum_{n=m}^{k} a_n = \sum_{n=1}^{k} a_n - \sum_{n=1}^{m-1} a_n$

Nên $\sum_{n=m}^{\infty} a_n$ hội tụ và $\sum_{n=m}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n - \sum_{n=1}^{m-1} a_n$ (1)

- Nếu $\sum_{n=m}^{\infty} a_n$ hội tụ thì : Với mọi $k \geq m$,

Vì dãy tổng riêng phần $\sum_{n=m}^{k} a_n$ hội tụ và $\sum_{n=1}^{k} a_n = \sum_{n=m}^{k} a_n + \sum_{n=1}^{m-1} a_n$

Nên $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ hội tụ và $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=m}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{m-1} a_n$ (2)

Từ (1) & (2) ta có điều phải chứng minh.

Hơn nữa, khi chúng cùng hội tụ thì :

$$\alpha = \sum_{n=1}^{m-1} a_n$$

Nhận xét: Như vậy, tính hội tụ hay phân kỳ của một chuỗi không thay đổi khi ta thay đổi chỉ số xuất phát, nhưng tổng (khi chuỗi hội tụ) có thể biến đổi. Do đó, thay vì khảo sát tính hội tụ của chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, ta có thể khảo sát tính hội tụ của chuỗi $\sum_{n=m}^{\infty} a_n$.

6.2. Chứng tỏ rằng, nếu chuỗi $\sum a_n$ hội tụ thì

$$\forall \varepsilon > 0\,, \exists n_0 \in \mathbb{N}\,, \forall n \geq n_0\,, \left|\sum_{k=n}^{\infty} a_k\right| < \varepsilon$$

<u>Bài giải:</u>

Theo **bài 6.1** , do chuỗi $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ hội tụ nên ta có :

- $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \sum_{k=1}^{n-1} a_k + \sum_{k=n}^{\infty} a_k$
- Dãy tổng riêng phần (s_{n-1}) hội tụ và $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n-1} a_k$.

Theo định nghĩa giới hạn, ta được :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0\,, \left|\sum_{k=1}^{\infty} a_k - \sum_{k=1}^{n-1} a_k\right| < \varepsilon$$

Vậy ta có điều phải chứng minh .

6.3. Cho hai chuỗi số hội tụ $\sum a_n$ và $\sum b_n$ có tổng lần lượt là a và b. Chứng minh rằng các chuỗi $\sum(a_n + b_n)$ và $\sum \alpha a_n$ với $\alpha \in \mathbb{R}$, cũng hội tụ có tổng lần lượt là $a + b$ và αa.

<u>Bài giải:</u>

Do chuỗi $\sum a_n$ hội tụ nên dãy tổng riêng phần (s_n) hội tụ và :

$$\sum a_n = \lim_{n\to\infty} s_n = a$$

Chuỗi $\sum b_n$ hội tụ nên dãy tổng riêng phần (t_n) hội tụ và :

$$\sum b_n = \lim_{n\to\infty} t_n = b$$

Suy ra :

$$\sum(a_n + b_n) = \sum a_n + \sum b_n = \lim_{n\to\infty}(s_n + t_n) = a + b$$

$$\sum \alpha a_n = \alpha \sum a_n = \alpha \lim_{n\to\infty} s_n = \alpha a$$

Khi đó dãy tổng riêng phần $(s_n + t_n)$ hội tụ nên $\sum(a_n + b_n)$ hội tụ và có tổng là $a + b$, $\sum \alpha a_n$ hội tụ và có tổng là αa .

6.4. Cho chuỗi số $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ và dãy tăng ngặt các số nguyên (n_k) sao cho $n_1 = 1$. Đặt $b_k = \sum_{i=n_k}^{n_{k+1}-1} a_i = a_{n_k} + a_{n_k+1} + \cdots + a_{n_{k+1}-1}$. Chứng minh rằng nếu $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ hội tụ và có tổng là a thì $\sum_{k=1}^{+\infty} b_k$ cũng hội tụ và có tổng là a.

Bài giải:

Do chuỗi $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ hội tụ và có tổng là a.

Xét dãy tổng riêng phần $\{s_n\}$: $s_n = \sum_{i=1}^{n} a_i$, $\forall n \in \mathbb{N}$ khi đó $\{s_n\}$ hội tụ và $a = \sum_{i=1}^{\infty} a_i = \lim_{n\to\infty} s_n$

Ta cần chứng minh $\sum_{i=1}^{\infty} b_i$ cũng hội tụ và cũng có tổng là a.

Xét dãy tổng riêng phần $\{t_k\}$: $t_k = \sum_{i=1}^{k} b_i$, $\forall k \in \mathbb{N}$. Ta có :

$$t_k = \sum_{i=1}^{k} b_i = b_i + b_2 + \dots + b_k$$

$$= \sum_{i=n_1}^{n_2-1} a_i + \sum_{i=n_2}^{n_3-1} a_i + \dots + \sum_{i=n_k}^{n_{k+1}-1} a_i$$

$= \sum_{n_1=1}^{n_{k+1}-1} a_i = s_{n_{k+1}-1}$ (do $n_1 = 1$).

Do vậy, với mọi k thì $t_k = s_{n_{k+1}-1}$

Do $\{n_k\}$ là dãy tăng ngặt các số tự nhiên nên $\{n_{k+1}-1\}$ cũng là dãy tăng ngặt các số tự nhiên.

Suy ra $\left\{s_{n_{k+1}-1}\right\}$ là dãy con của $\{s_n\}$. Mà $\{s_n\}$ hội tụ về a nên suy ra $\left\{s_{n_{k+1}-1}\right\}$ cũng hội tụ về a.

Do đó, $\{t_k\}$ hội tụ về a hay $\sum_{i=1}^{\infty} b_i$ cũng hội tụ và có tổng là a.

Ta có điều phải chứng minh.

6.5. Chứng minh rằng với $|x| < 1$ và $m \in \mathbb{N}$ thì ta có $\sum_{n=m}^{+\infty} x^n = \frac{x^m}{1-x}$.

Bài giải:

Ta có : $\sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \sum_{n=0}^{m-1} x^n + \sum_{n=m}^{+\infty} x^n$, suy ra $\sum_{n=m}^{+\infty} x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n - \sum_{n=0}^{m-1} x^n$.

Ta đặt :

$$s_n(x) = \sum_{k=0}^{n} x^k = \begin{cases} n+1 & \text{khi } x = 1 \\ \dfrac{1-x^{n+1}}{1-x} & \text{khi } x \neq 1 \end{cases}$$

Khi $|x| < 1$ ta có :

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \frac{1}{1-x}$$

Nên

$$\sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$$

Và ta có :

$$\sum_{n=0}^{m-1} x^n = \frac{1-x^m}{1-x}$$

Nên

$$\sum_{n=m}^{+\infty} x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n - \sum_{n=0}^{m-1} x^n = \frac{1}{1-x} - \frac{1-x^m}{1-x} = \frac{x^m}{1-x}$$

Vậy ta có điều phải chứng minh .

6.6. Dãy số (a_n) được gọi là một cấp số cộng khi tồn tại $\alpha \in \mathbb{R}$ sao cho $a_{n+1} = a_n + \alpha, \forall n \in \mathbb{N}$. Khi đó α được gọi là công sai của cấp số cộng (a_n). Chứng minh rằng nếu (a_n) là một cấp số cộng thì $\sum a_n$ phân kỳ trừ khi dãy (a_n) gồm toàn các số 0.

Dãy số (a_n) được gọi là một cấp số nhân khi tồn tại $q \in \mathbb{R}$ sao cho $a_{n+1} = a_n \times q, \forall n \in \mathbb{N}$. Khi đó q được gọi là công bội của cấp số nhân (a_n). Chứng minh rằng nếu (a_n) là một cấp số nhân có công bội là q thì $\sum a_n$ hội tụ nếu và chỉ nếu $|q| < 1$ và khi đó $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = \frac{a_1}{1-q}$.

<u>Bài giải:</u>

- Giả sử dãy $\{a_n\}$ là một cấp số cộng với công sai α.

Theo tính chất của cấp số cộng, ta thấy $a_2 = a_1 + \alpha, a_3 = a_2 + \alpha = (a_1 + \alpha) + \alpha = a_1 + 2\alpha$ ... Một cách tổng quát thì $a_n = a_1 + (n-1)\alpha$.

Suy ra, tổng riêng phần thứ n của chuỗi $\sum a_n$

$$s_n = \sum_{i=1}^{n} a_1 = \sum_{i=1}^{n} [a_1 + (i-1)\alpha]$$

$$= na_1 + \alpha \sum_{i=1}^{n} (i-1) = na_1 + \frac{n(n-1)}{2}\alpha = \frac{\alpha}{2} n^2 + (a_1 - \frac{\alpha}{2})n$$

Để chuỗi $\sum a_n$ hội tụ, ta phải có dãy $\{s_n\}$ hội tụ. Từ công thức xác định s_n như trên, ta nhận thấy $\{s_n\}$ hội tụ khi và chỉ khi $\frac{\alpha}{2} = a_1 - \frac{\alpha}{2} = 0 \Leftrightarrow a_1 = \alpha = 0$. Khi đó, do $a_n = a_1 + (n-1)\alpha \ \forall n$, $\{a_n\}$ sẽ là dãy gồm toàn các chứa số 0.

- Giả sử dãy $\{a_n\}$ là một cấp số nhân với công bội q.

Theo tính chất của cấp số nhân, ta thấy $a_2 = qa_1, a_3 = qa_2 = q(qa_1) = q^2 a_1$ ...Một cách tổng quát thì $a_n = q^{n-1} a_1$.

Ta có :

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} q^{n-1}\, a_1 = a_1 \sum_{n=1}^{\infty} q^{n-1}$$

Theo mệnh đề 1.3, chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} q^{n-1}$ sẽ hội tụ trong $\mathbb{R}$ khi và chỉ khi $|q| < 1$, và tổng của chuỗi này (nếu có) sẽ là $\frac{1}{1-q}$.

Vậy, chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sẽ hội tụ nếu và chỉ nếu $|q| < 1$. Khi đó : $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \frac{a_1}{1-q}$.

6.7. Xét tính hội tụ của các chuỗi sau

1) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln n}$
2) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1.5\ldots(4k-3)}$
3) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{k}{(2k+1)2^k}$
4) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n!}$
5) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^2+5}{3n^3+n+7}$
6) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^2+5}{3n^4+n+9}$
7) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n^2+n+5}{(2n^2+1)3^n}$
8) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{nln^2n}$
9) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{ln^3n}{n^4}$
10) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1.3\ldots(2n-1)}{1.5\ldots(4n-3)}$
11) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2 2^n}{(2n+2)!}$

Bài giải:

Lưu ý rằng tất cả các chuỗi số trong bài tập này đều là chuỗi số dương .

1) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\ln n}$

Xét chuỗi $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n}$

Vì $\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\ln n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1/n}=\lim_{n\to\infty}n=\infty$ và :

Theo định lí về chuỗi điều hòa thì $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n}$ là chuỗi phân kỳ .

Nên chuỗi $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\ln n}$ phân kỳ.

2) $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{1.5\ldots(4k-3)}$

Ta có : $a_k=\frac{1}{1.5\ldots(4k-3)}$

$$a_{k+1}=\frac{1}{1.5\ldots(4k-3)(4k+1)}$$

Suy ra $\lim_{n\to\infty}\frac{a_{k+1}}{a_k}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{4k+1}=0<1$

Vậy chuỗi $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{1.5\ldots(4k-3)}$ hội tụ.

3) $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k}{(2k+1)2^k}$

Ta có :

Với mọi k , $\frac{k}{(2k+1)2^k}<\frac{1}{2^k}$ và $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^k}$ là chuỗi hội tụ .

Nên chuỗi $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{k}{(2k+1)2^k}$ hội tụ.

4) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{n!}$

Ta có : $\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{2n+3}{(n+1)!}.\frac{n!}{2n+1}=\frac{2n+3}{(2n+1)}.\frac{1}{n+1}$

Suy ra $\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n+3}{(2n+1)}.\frac{1}{(n+1)}=0$

Nên chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{n!}$ hội tụ.

5) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n^2+5}{3n^3+n+7}$

Xét chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ phân kỳ .

Đặt $a_n=\frac{2n^2+5}{3n^3+n+7}$, $b_n=\frac{1}{n}$

Ta thấy :

$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n^3+5n}{3n^3+n+7}=\frac{2}{3}$

Vậy chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n^2+5}{3n^3+n+7}$ phân kỳ.

6) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n^2+5}{3n^4+n+9}$

Xét chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ hội tụ .

Đặt $a_n=\frac{2n^2+5}{3n^4+n+9}$, $b_n=\frac{1}{n^2}$

Ta thấy :

$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n^4+5n^2}{3n^4+n+9}=\frac{2}{3}$

Vậy chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n^2+5}{3n^4+n+9}$ hội tụ.

7) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3n^2+n+5}{(2n^2+1)3^n}$

Xét chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n}$ hội tụ .

Đặt $a_n=\frac{3n^2+n+5}{(2n^2+1)3^n}$, $b_n=\frac{1}{3^n}$

Ta thấy :

$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{3n^2+n+5}{(2n^2+1)}=\frac{3}{2}$

Vậy chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n^2+n+5}{(2n^2+1)3^n}$ hội tụ .

8) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\ln^2 n}$

Xét ánh xạ $f : [2,\infty) \to \mathbb{R}$ thỏa mãn $f(x) = \frac{1}{x\ln^2 x}$

Ta thấy f là ánh xạ liên tục,dương và giảm. Do đó theo tiêu chuẩn tích phân của Cauchy, chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\ln^2 n} = \sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ và tích phân suy rộng $\int_2^{\infty} f(x)$ sẽ cùng hội tụ hoặc cùng phân kỳ.

Ta có :

$\int_2^{\infty} f(x) = \int_2^{\infty} \frac{1}{x\ln^2 x} = \int_2^{\infty} \frac{d(\ln x)}{\ln^2 x} = \int_2^{\infty} \frac{dt}{t^2} = (-\frac{1}{t})|_{\ln 2}^{\infty} = \frac{1}{\ln 2}$ hội tụ.

Vậy chuỗi $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\ln^2 n}$ hội tụ .

9) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{ln^3 n}{n^4}$

Xét chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ hội tụ .

Đặt $a_n = \frac{\ln^3 n}{n^4}$, $b_n = \frac{1}{n^2}$

Ta thấy :

$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(\ln n)^3}{n^2} = 0$

Vậy chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ hội tụ .

10) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1.3\ldots(2n-1)}{1.5\ldots(4n-3)}$

Ta có : $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1.3\ldots(2n-1)(2n+1)}{1.5\ldots(4n-3)(4n+1)} . \frac{1.5\ldots(4n-3)}{1.5\ldots(2n-1)} = \frac{2n+1}{4n+1}$

Suy ra $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n+1}{4n+1} = \frac{1}{2}$.

Vậy chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1.3\ldots(2n-1)}{1.5\ldots(4n-3)}$ hội tụ .

11) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2 2^n}{(2n+2)!}$

Ta có : $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{((n+1)!)^2 2^{n+1}}{(2n+4)} . \frac{(2n+2)!}{(n!)2^n} = \frac{2(n+1)^2}{(2n+3).(2n+4)}$

Suy ra $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2(n+1)^2}{(2n+3).(2n+4)} = \frac{1}{2}$

Vậy chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n+2)}{(n!)2^n}$ hội tụ.

6.8. Chứng minh $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \lg \frac{(n+1)^2}{n(n+2)}$ hội tụ .

<u>Bài giải:</u>

Với mọi $n \in \mathbb{N}$ thì :

$$\frac{(n+1)^2}{n(n+2)} = \frac{n(n+2)+1}{n(n+2)} = 1 + \frac{1}{n(n+2)} > 1$$

Do đó :

$$\frac{1}{n} \lg \frac{(n+1)^2}{n(n+2)} > 0$$

Vậy đây là chuỗi số dương .

Xét : Với mọi $n \in \mathbb{N}$

$$\frac{1}{n} \lg \frac{(n+1)^2}{n(n+2)} = \frac{1}{n} \frac{\ln\left[\frac{(n+1)^2}{n(n+2)}\right]}{\ln 10} < \frac{1}{n} \ln\left[1 + \frac{1}{n(n+2)}\right] < \frac{1}{n} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) < \frac{1}{n} \ln e^{\frac{1}{n}}$$

Suy ra, với mọi $n \in \mathbb{N}$:

$$\frac{1}{n} \lg \frac{(n+1)^2}{n(n+2)} < \frac{1}{n^2}$$

Mà chuỗi $\sum \frac{1}{n^2}$ hội tụ .

Vậy ta có chuỗi trên cũng hội tụ .

6.9. Tìm p sao cho

1) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\ln^p n}$ hội tụ
2) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln^p n}$ hội tụ

Bài giải:

1) Ta xét các trường hợp :

- Với $p \leq 0$ thì với $n \geq 3$ ta có : $\ln^p n \leq 1$. Nên :

$$\frac{1}{n\ln^p n} \geq \frac{1}{n}$$

Mà chuỗi $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n}$ phân kỳ nên $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n\ln^p n}$ phân kỳ.

Theo **bài 6.1** ta có chuỗi $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\ln^p n}$ phân kỳ.

- Với $p > 0$:

Đặt $f(x) = \frac{1}{x\ln^p x}$, $x \in [2, \infty)$

$$f'(x) = -\frac{\ln^p x + px\ln^{p-1} x}{x^2 \ln^{2p} x} \leq 0 \text{ , } \forall x \in [2, \infty)$$

Suy ra f là hàm dương và giảm trên $[2, \infty)$.

Ta thấy : f liên tục trên $[2, \infty)$

Nên $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\ln^p n}$ hội tụ khi và chỉ khi $\int_2^{\infty} f(x)dx$ hội tụ .

Xét :

$$\int_2^{\infty} \frac{1}{x\ln^p x} dx$$

Đặt $t = \ln x$, suy ra : $e^t dt = dx$

Suy ra $\int_2^{\infty} f(x)dx$ hội tụ khi và chỉ khi $\int_{\ln 2}^{\infty} \frac{1}{t^p} dt$ hội tụ .

Khi đó : $p > 1$.

Vậy $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\ln^p n}$ hội tụ khi và chỉ khi $p > 1$.

2) Ta xét các trường hợp :

- Với $p \leq 0$ thì với $n \geq 3$ ta có : $\ln^p n \leq 1$. Nên :

$$\frac{1}{\ln^p n} \geq 1$$

Do chuỗi hằng $\sum_{n=2}^{\infty} 1$ phân kỳ .

Suy ra $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln^p n}$ phân kỳ .

- Với $p > 0$:

i. $p \leq 1$: Xét chuỗi $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ phân kỳ .

Vì

$$\frac{1}{\ln^p n} \geq \frac{1}{n^p}$$

Nên chuỗi $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln^p n}$ phân kỳ .

ii. $p > 1$: Xét chuỗi $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n}$ phân kỳ .

Do

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^{\frac{1}{p}}}{\ln n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{p} n^{\frac{1}{p}-1}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{p} n^{\frac{1}{p}} = \infty$$

Nên

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{\ln^{\mathrm{p}} n} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n^{\frac{1}{p}}}{\ln n} \right)^p = \infty$$

Suy ra $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln^p n}$ phân kỳ .

Vậy $\nexists p \in \mathbb{R} :\ \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln^p n}$ hội tụ .

6.10. Xét tính hội tụ của các chuỗi

1) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{n}{(n+1)^2}$
2) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \ln \frac{n+1}{n}$
3) $\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n \frac{\ln n}{\sqrt{n}}$
4) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln^n n}$
5) $\sum_{n=1}^{\infty}(1+\frac{1}{n})^{3n} e^{-n}$

Bài giải:

1) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{n}{(n+1)^2}$

Đặt $a_n = \frac{n}{(n+1)^2}$

Xét hàm $f(x) = \frac{x}{(x+1)^2}$, $x \geq 1$.

$$f'(x) = \frac{(x+1)^2 - 2(x+1)x}{(x+1)^4} = \frac{-x^2+1}{(x+1)^2} \leq 0 \text{ , } \forall x \geq 1$$

Suy ra f giảm trên $[1, \infty)$. Ta có : $a_n \geq a_{n+1}$, $\forall n \geq 1$.

Hay $\{a_n\}$ là dãy dương giảm.

Và

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{(n+1)^2} = 0$$

Vậy chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{n}{(n+1)^2}$ hội tụ .

2) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \ln \frac{n+1}{n}$

Đặt $a_n = \ln \frac{n+1}{n} = \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$

Xét hàm $f(x) = \ln(x+1) - \ln x$, $x \in \mathbb{N}$

$$f'(x) = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x} < 0\,, \forall x \in \mathbb{N}$$

Suy ra f giảm trên $\mathbb{N}$.

Suy ra $\{a_n\}$ là dãy số dương, giảm và $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Vậy chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \ln\frac{n+1}{n}$ hội tụ.

3) $\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\frac{\ln n}{\sqrt{n}}$

Đặt $a_n = \frac{\ln n}{\sqrt{n}}$

Xét chuỗi $\sum_{n=8}^{\infty}(-1)^n\frac{\ln n}{\sqrt{n}}$

Xét hàm $f(x) = \frac{\ln x}{\sqrt{x}}\,, x \geq 8$

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x}\sqrt{x} - \frac{\ln x}{2\sqrt{x}}}{x} = \frac{2 - \ln x}{2x\sqrt{x}} \leq 0\,, \forall x \geq 8$$

Suy ra f giảm trên $[8, \infty)$.

Suy ra $\{a_n\}$ với $n \geq 8$ là dãy dương giảm và :

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\ln n}{\sqrt{n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{(\ln n)'}{(\sqrt{n})'} = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{2\sqrt{n}}} = \lim_{n\to\infty}\frac{2}{\sqrt{n}} = 0\,, \forall n \geq 8$$

Ta được $\sum_{n=8}^{\infty}(-1)^n\frac{\ln n}{\sqrt{n}}$ hội tụ.

Vậy chuỗi $\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\frac{\ln n}{\sqrt{n}}$ hội tụ theo **bài 6.1** .

4) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\ln^n n}$

Đặt $a_n = \frac{1}{\ln^n n}$

Ta có : $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\ln n} = 0 < 1$

Vậy chuỗi $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\ln^n n}$ hội tụ .

5) $\sum_{n=1}^{\infty}(1+\frac{1}{n})^{3n}e^{-n}$

Đặt $a_n = (1+\frac{1}{n})^{3n}e^{-n}$

Ta có : $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^{3}e^{-1} = e^{-1} < 1$

Vậy chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty}(1+\frac{1}{n})^{3n}e^{-n}$ hội tụ .

6.11. Cho (a_n) là một dãy các chữ số thập phân, nghĩa là $a_n \in \{0,\dots,9\}, \forall n \in \mathbb{N}$. Chứng minh rằng chỗi số $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{a_n}{10^n}$ luôn luôn hội tụ và có tổng là x thoả điều kiện $0 \le x \le 1$. Hơn nữa, chứng tỏ rằng $x = 1$ nếu và chỉ nếu $a_n = 9, \forall n \in \mathbb{N}$.

<u>Bài giải:</u>

Ta có : $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{10^n}$ là chuỗi số dương $\frac{a_n}{10^n} \le \frac{9}{10^n}$ với mọi $n \in \mathbb{N}$.

Mà ta có : $0 < \frac{1}{10} < 1$ nên chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{10^n}$ hội tụ

Và

$$\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{10})^n = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{10^n} = \frac{1}{1-\frac{1}{10}} - \left(\frac{1}{10}\right)^0 = \frac{1}{9}$$

Do vậy chuỗi $9\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{10})^n = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{9}{10^n}$ hội tụ về 1.

Suy ra $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{10^n}$ hội tụ. Đồng thời, ta có :

$$0 \le \sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{10^n} \le \sum_{n=1}^{\infty}\frac{9}{10^n} = 1$$

- Chứng minh : $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{10^n} = 1$ khi và chỉ khi $a_n = 9, \forall n \in \mathbb{N}$.

Như ta đã chứng minh $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{9}{10^n} = 1$. Do vậy, ta chỉ cần chứng minh :

Nếu $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{10^n} = 1$ thì $a_n = 9,\ \forall n \in \mathbb{N}$.

Giả sử, tồn tại m sao cho $a_m < 9$. Lúc đó : $\frac{9-a_m}{10^m} > 0$.

Mặt khác với mọi n, $0 \le 9 - a_n \le 9$ nên theo chứng minh trên $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{9-a_m}{10^m}$ hội tụ.

Hơn nữa ta có :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{9-a_n}{10^n} \ge \frac{9-a_m}{10^m} > 0$$

Do vậy :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{10^n} < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{10^n} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{9-a_m}{10^m} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{9}{10^n} = 1 \text{ (Vô lí)}$$

Vậy ta có điều phải chứng minh .

6.12. Cho (a_n) và (b_n) là hai dãy các chữ số thập phân sao cho $\exists n_0 \in \mathbb{N}$,

i) $a_{n_0} \neq 0$ và $a_n = 0, \forall n > n_0$.

ii) $b_n = a_n$, $\forall n < n_0$, $b_{n_0} = a_{n_0} - 1$ và $b_n = 9, \forall n > n_0$.

Chứng tỏ rằng $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{10^n} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{b_n}{10^n}$.

Bài giải:

Ta có thể viết lại các dãy như sau :

$$(a_n) = (a_1, a_2, \dots, a_{n_0-1}, a_{n_0}, 0, \dots, 0, \dots)$$

$$(b_n) = (a_1, a_2, \dots, a_{n_0-1}, a_{n_0} - 1, 9, \dots, 9, \dots)$$

Đặt :

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{a^k}{10^k} = \frac{a_1}{10^1} + \frac{a_2}{10^2} + \cdots + \frac{a_{n_0-1}}{10^{n_0-1}} + \frac{a_{n_0}}{10^{n_0}}$$

Suy ra :

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \frac{a_1}{10^1} + \frac{a_2}{10^2} + \dots. + \frac{a_{n_0-1}}{10^{n_0-1}} + \frac{a_{n_0}}{10^{n_0}}$$

Đặt :

$$t_m = \sum_{k=1}^{m} \frac{b^k}{10^k}$$

$$= \frac{a_1}{10^1} + \frac{a_2}{10^2} + \cdots + \frac{a_{n_0-1}}{10^{n_0-1}} + \frac{a_{n_0} - 1}{10^{n_0}} + 9(\frac{1}{10^{n_0+1}} + \frac{1}{10^{n_0+2}} + \cdots + \frac{1}{10^m})$$

Xét :

$$\frac{1}{10^{n_0+1}} + \frac{1}{10^{n_0+2}} + \cdots + \frac{1}{10^m} = \frac{\frac{1}{10^{n_0+1}} - \frac{1}{10^m}}{1 - \frac{1}{10}} = \frac{\frac{1}{10^{n_0}} - \frac{1}{10^m}}{9}$$

(tổng cấp số nhân có công bội là 10^{-1})

Suy ra :

$$9(\frac{1}{10^{n_0+1}} + \frac{1}{10^{n_0+2}} + \cdots . + \frac{1}{10^m}) = \frac{1}{10^{n_0}} - \frac{1}{10^m}$$

$$\lim_{m\to\infty} t_m = \frac{a_1}{10^1} + \frac{a_2}{10^2} + \cdots + \frac{a_{n_0-1}}{10^{n_0-1}} + \frac{a_{n_0} - 1}{10^{n_0}} + \lim_{m\to\infty} (\frac{1}{10^{n_0}} - \frac{1}{10^m})$$

$$= \frac{a_1}{10^1} + \frac{a_2}{10^2} + \dots . + \frac{a_{n_0-1}}{10^{n_0-1}} + \frac{a_{n_0} - 1}{10^{n_0}} + \frac{1}{10^{n_0}} = \lim_{n\to\infty} s_n$$

Ta có điều phải chứng minh.

6.13. Cho $0 \le x < 1$. Chứng tỏ rằng tồn tại dãy số thập phân (x_n) sao cho

$$x = \sum_{1}^{+\infty} \frac{x_k}{10^k}$$

(ta còn gọi cách viết $0, x_1x_2x_3$ ... là một biểu diễn thập phân của x)

<u>Bài giải:</u>

Ta kí hiệu : $x = x_0, x_1x_2x_3 \dots x_n \dots$ và $x_0 = E(x)$.

Với mọi $n \in \mathbb{N}$, ta đặt : $u_n = 10^{-n}E(10^n x)$ và $v_n = 10^{-n}(E(10^n x) + 1)$.

Khi đó, ta có :

$$\begin{cases} u_n \leq x \leq v_n \\ 10^n u_n \in \mathbb{N} \text{ và } 10^n v_n \in \mathbb{N} \\ v_n - u_n = 10^{-n} \end{cases}$$

Do

$$\begin{cases} E(10^n x) \leq 10^n x < E(10^n x) + 1 \\ E(10^{n+1} x) \leq 10^{n+1} x < E(10^{n+1} x) + 1 \end{cases}$$

Nên

$$\begin{cases} 10E(10^n x) \leq 10^{n+1} x < E(10^{n+1} x) + 1 \\ E(10^{n+1} x) \leq 10^{n+1} x < 10(E(10^n x) + 1) \end{cases}$$

Vì $10E(10^n x), E(10^{n+1} x) + 1, E(10^{n+1} x),\ 10(E(10^n x) + 1) \in \mathbb{Z}$ nên suy ra :

$$\begin{cases} 10E(10^n x) \leq E(10^{n+1} x) \\ E(10^{n+1} x) \leq 10(E(10^n x) + 1) \end{cases}$$

Từ đó :

$$\begin{cases} u_n \leq u_{n+1} \\ v_{n+1} \leq v_n \end{cases}$$

Vậy hai dãy (u_n) và (v_n) kề nhau, do đó hội tụ về cùng một giới hạn l.

Hơn nữa :

Do $u_n \leq x \leq v_n$ nên ta được : $l = x$, và $u_n \xrightarrow{n\to\infty} x, v_n \xrightarrow{n\to\infty} x$.

Ta có :

- $u_n \leq u_{n+1}$, do đó : $10^n u_n \leq 10^n u_{n+1}$
- $u_{n+1} = 10^{-(n+1)} E(10^{n+1} x) < 10^{-n}(E(10^n x) + 1) = u_n + 10^{-n}$

Suy ra : $10^n u_{n+1} < 10^n u_n + 1$.

Như vậy : $10^n u_n \leq 10^n u_{n+1} < 10^n u_n + 1$, $10^n u_n \in \mathbb{N}$.

Như vậy chứng tỏ rằng :$E(10^n u_{n+1}) = 10^n u_n$.

Vì $10^n u_{n+1}$ là một số thập phân chỉ có $n + 1$ chữ số sau dấu phẩy , nên ta có thể kết luận được rằng u_n và u_{n+1} có cùng các chứ số thập phân cho đến hàng thứ n.

Khi đó, chọn $x_0 = 0$ và với mọi $n \in \mathbb{N}$, x_n là chữ số thập phân thứ n của u_n .
Ta có :

$$u_n = x_0, x_1 x_2 x_3 \dots x_n = \sum_{k=0}^{n} x_k 10^{-k}$$

Như vậy : Tồn tại dãy chữ số thập phân (x_n) sao cho

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x_k}{10^k}$$

Vậy ta có điều phải chứng minh.

6.14. Cho $0 \le x < 1$. Chứng minh rằng x là một số vô tỉ nếu và chỉ nếu x có một biểu diễn thập phân tuần hoàn, nghĩa là tồn tại dãy $(x_n) \subset \{0,1,\dots,9\}$ sao cho tồn tại $n_0, k \in \mathbb{N}$ sao cho $x_{n+k} = x_n, \forall n \ge n_0$ và $x = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x_n}{10^n}$.

<u>**Bài giải:**</u>

- Ta chứng minh nếu x có một biểu diễn thập phân tuần hoàn thì nó là một số hữu tỷ.

Thật vậy, giả sử tồn tại dãy $(x_n) \subset \{0,1,\dots 9\}$ và $n_0, k \in \mathbb{N}$ sao cho $x = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x_n}{10^n}$.
Và $x_{n+k} = x_n$, $\forall\, n > n_0$.
Đặt $n_1 = 1, n_i = n_0 + (i-2)k$,$\forall i \ge 2$
Và

$$a_m = \sum_{i=n_m}^{n_{m+1}-1} \frac{x_i}{10^i}$$

Với $m \geq 3$, ta có :

$$a_m = \sum_{i=n_m}^{n_{m+1}-1} \frac{x_i}{10^i} = \sum_{i=n_m}^{n_{m+1}-1} \frac{x_{i-k}}{10^i} = \frac{1}{10^k} \sum_{i=n_m-k}^{n_{m+1}-k-1} \frac{x_i}{10^i} = \frac{1}{10^k} \sum_{i=n_{m-1}}^{n_m-1} \frac{x_i}{10^i}$$

$$= \frac{1}{10^k} a_{m-1}$$

Từ đánh giá trên, bằng quy nạp, ta suy ra :

$$a_m = a_2 (\frac{1}{10^k})^{m-2}, \forall m \geq 2$$

Theo **bài 6.4**, ta có :

$$x = \sum_{m=1}^{\infty} a_m$$

Do vậy

$$x = a_1 + \sum_{m=2}^{\infty} a_m = a_1 + \sum_{m=2}^{\infty} a_2 (\frac{1}{10^k})^{m-2}$$

$$= a_1 + a_2 \sum_{m=2}^{\infty} (\frac{1}{10^k})^{m-2} = a_1 + \frac{a_2}{1 - \frac{1}{10^k}} = a_1 + \frac{10^k a_2}{10^k - 1}$$

Với nhận xét rằng a_1 và a_2 đều là các số hữu tỉ, ta suy ra x hữu tỉ.

- Ta chứng minh nếu x hữu tỉ thì có một biểu diễn thập phân tuần hoàn.

Trước hết, ta có : Cho $n \in \mathbb{N}$ sao cho $(n, 10) = 1$. Khi đó, tồn tại một số tự nhiên gồm toàn chữ số 9 là bội số của n. $(*)$

Chứng minh :

Giả sử : Không tìm được số tự nhiên gồm toàn chữ số 9 chia hết cho n.

Xét $9, 99, 999, \dots, \underbrace{99\dots9}_{n \text{ lần}}$. Theo điều giả sử, n số này đều không phải là bội số của n. Do đó, khi thực hiện phép chia chúng cho n, ta chỉ có thể thu được nhiều nhất $n-1$ số dư là $1, 2, \dots, n-1$. Theo nguyên lí Dirichlet, tồn tại ít nhất hai trong n số này sẽ cho ra cùng số dư khi chia cho n. Hiệu của chúng khi đó sẽ chia hết cho n.

Ta có $\underbrace{99\dots9}_{k \text{ lần}} - \underbrace{99\dots9}_{l \text{ lần}}$ chia hết cho n. Do đó $\underbrace{99\dots9}_{k-l \text{ lần}}\underbrace{00\dots0}_{l \text{ lần}}$ chia hết cho n.

Mà $(\mathrm{n}, 10) = 1$, suy ra $\underbrace{99\dots9}_{k-l \text{ lần}}$ chia hết cho n

Mâu thuẫn giả sử. Do vậy $(*)$ đúng.

Do x là một số hữu tỉ thuộc $[0,1)$, tồn tại $m < n \in \mathbb{N}$ sao cho $x = \frac{m}{n}$

Giả sử : $n = 2^s 5^t q$ trong đó $(q, 10) = 1$, theo $(*)$ ta tìm được $p \in \mathbb{N}$ sao cho tích của p và q sẽ là một số tự nhiên gồm toàn chữ số 9. Ta có :

$$x = \frac{m}{n} = \frac{m}{2^s 5^t q} = \frac{2^t 5^s pm}{10^{s+t} pq} = \frac{2^t 5^s pm}{10^{s+t}\underbrace{99\dots9}_{k \text{ lần}}}$$

Như vậy, x có thể được viết dưới dạng $x = \frac{i}{10^j.\underbrace{99\dots9}_{k \text{ lần}}}$

Thực hiện phép chia i cho $\underbrace{99\dots9}_{k \text{ lần}}$: $i = \underbrace{99\dots9}_{k\ lần}.b + r$

Vì : $x < 1$ nên $i < 10^j.\underbrace{99\dots9}_{k \text{ lần}}$. Suy ra, $b < 10^j$ hay b có nhiều nhất là j chữ số.

Vì r là số dư trong phép chia nên $r < \underbrace{99\dots9}_{k \text{ lần}}$. Vậy r có nhiều nhất là k chữ số. Ta viết lại : $\quad i = \underbrace{99\dots9}_{k \text{ lần}}.\overline{b_1 b_2 \dots b_j} + \overline{r_1 r_2 \dots r_k}$

Thế vào x ta có :

$$x = \frac{\underbrace{99\dots9}_{k\text{ lần}}.\overline{b_1b_2\dots b_J} + \overline{r_1r_2\dots r_k}}{10^j.\underbrace{99\dots9}_{k\text{ lần}}}$$

$$= \frac{\overline{b_1b_2\dots b_J}}{10^j} + \frac{1}{10^j}.\frac{\frac{\overline{r_1r_2\dots r_k}}{10^k}}{1-\frac{1}{10^k}}$$

$$= \frac{\overline{b_1b_2\dots b_J}}{10^j} + \frac{1}{10^j}.\frac{\overline{r_1r_2\dots r_k}}{10^k}\sum_{h=0}^{\infty}\frac{1}{10^{hk}} = \sum_{l=1}^{j}\frac{b_l}{10^l} + \frac{1}{10^j}.\left(\sum_{l=1}^{k}\frac{r_l}{10^l}\right).\left(\sum_{h=0}^{\infty}\frac{1}{10^{hk}}\right)$$

$$= \sum_{l=1}^{j}\frac{b_l}{10^l} + \frac{1}{10^j}\sum_{h=0}^{\infty}\sum_{l=1}^{k}\frac{r_1}{10^{l+hk}} = \sum_{l=1}^{j}\frac{b_l}{10^l} + \sum_{h=0}^{\infty}\sum_{l=1}^{k}\frac{r_l}{10^{j+l+hk}} = \sum_{l=1}^{\infty}\frac{x_l}{10^l}$$

Trong đó :

$$x_l = b_l \text{ nếu } 1 \le l \le j$$

$$x_{j+hk+l} = r_l, \forall l \in \{1,2,\dots,k\}.$$

Ta nhận xét rằng : $x_n = x_{n+k}, \forall n > j$.

Suy ra x có một biểu diễn thập phân tuần hoàn .

Ta có điều phải chứng minh .

6.15. Chứng tỏ rằng 0,1010010001000010…, trong đó chữ số 0 giữa hai chữ số 1 liên tiếp tăng 1 sau mỗi lần xuất hiện, biểu diễn một số vô tỷ.

<u>Bài giải:</u>

Đặt $A = 0{,}1010010001000010\dots$, ta sẽ chứng minh A vô tỷ.

- Giả sử A hữu tỉ, theo **bài 6.14**, A có dạng

$$0, a_1a_2a_3\dots a_{T-1}(a_1\dots a_{T+k})(a_T\dots a_{T+k})\dots$$

Trong đó, $a_T\dots a_{T+k}$ là phần tuần hoàn và không thể toàn bằng 0.

- Gọi M là độ dài lớn nhất mà chuỗi con toàn 0 trong $a_1a_2 \dots a_{T+k}$ có thể đạt được.
- Gọi N là độ dài lớn nhất mà chuỗi con toàn 0 trong $a_Ta_{T+1} \dots a_{T+k}$ có thể đạt được.
- Ta suy ra độ dài lớn nhất mà chuỗi con toàn 0 trong biểu diễn của $A \leq$ $\max\{M, N\} < \max\{T+k, 2(k+1)\}$

Điều này mâu thuẫn vì A có thể chứa một chuỗi con toàn 0 với độ dài tuỳ ý.

Vậy $A \notin \mathbb{Q}$.

6.16. Chứng tỏ rằng $0, x_1x_2x_3 \dots$, trong đó $x_n = 1$ nếu n là số nguyên tố, $x_n = 0$ nếu n không là số nguyên tố biểu diễn một số vô tỷ.

<u>Bài giải:</u>

Giả sử $0, x_1x_2x_3 \dots$ có một biểu diễn thập phân tuần hoàn, nghĩa là tồn tại $(x_n) \subset \{0,1\}$ sao cho tồn tại $n_0, k \in \mathbb{N}$ sao cho $x_{n+k} = x_n, \forall n \geq n_0$.

Nếu $n_0, n_0 + k, n_0 + 2k$ là các số nguyên tố.

Do tập hợp các số nguyên tố là vô hạn, ta được $n_0 + n_0k$ sẽ là số nguyên tố.

(vô lí vì : $n_0 + n_0k = n_0(1 + k)$ chia hết cho $1, n_0, n_0(1 + k), 1 + k$)

Suy ra $0, x_1x_2x_3 \dots$ biểu diễn một số vô tỷ.

Vậy ta có điều phải chứng minh.

6.17. Cho $a, b > 0$. Chứng minh $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{a+nb}$ phân kỳ.

<u>Bài giải:</u>

Xét chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ phân kỳ .

Ta có :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{a+nb}}{\frac{1}{n}} = \frac{1}{b}$$

Mà $0 < \frac{1}{b} < +\infty$ nên $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{a+nb}$ phân kỳ.

Theo **bài 6.1**, ta có điều phải chứng minh .

6.18. Chứng minh rằng dãy tổng riêng phần của một chuỗi số dương là một dãy tăng.

<u>Bài giải:</u>

Xét chuỗi số dương $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$, $a_k > 0, \forall k \in \mathbb{N}$ có dãy tổng riêng phần là (s_n)

Với $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$, $a_k > 0, \forall k \in \mathbb{N}$.

Ta có :

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$$

$$s_{n+1} = \sum_{k=1}^{n+1} a_k$$

$s_{n+1} - s_n = a_{n+1} > 0$

Hay $s_{n+1} > s_n$.

Suy ra (s_n) là dãy tăng.

6.19. Cho $(a_i)_{i\in I}$ là một họ không rỗng các số ≥ 0. Xét A là tập hợp các tổng hữu hạn các phần tử của $(a_i)_{i\in I}$, nghĩa là

$$A = \{a_{i_1} + a_{i_2} + \cdots + a_{i_n} | \{i_1, i_2, \dots, i_n\} \subset I\}$$

Chứng minh rằng nếu sup $A < \infty$ thì tập các chỉ số $i \in I$ sao cho $a_i \neq 0$ là tập quá lắm đếm được. Khi đó, ta đặt $\sum_{i\in I} a_i = \sup A$. Hơn nữa, chứng tỏ rằng khi I đếm được, nghĩa là có song ánh

$$\begin{aligned} i : \mathbb{N} &\to I \\ n &\mapsto i_n \end{aligned}$$

Thì chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} a_{i_n}$ hội tụ và có tổng cũng là sup A.

<u>Bài giải:</u>

Ta có mệnh đề sau : Một tập hợp I gọi là quá lắm đếm được khi và chỉ khi tồn tại một dãy tăng $(J_n)_{n\in\mathbb{N}}$ các tập con hữu hạn của I mà hợp bằng I.

Chứng minh :

- Chiều thuận : Do I quá lắm đếm được nên tồn tại một tập con P của $\mathbb{N}$ và một song ánh $f : P \to I$.

Nếu P hữu hạn thì I hữu hạn, nên ta chọn $J_n = I$, với $n \in \mathbb{N}$.

Nếu P vô hạn thì tồn tại một song ánh tăng ngặt :

$$\varphi : \mathbb{N} \to P$$

Với $n \in \mathbb{N}$, ta kí hiệu $J_n = fo\varphi(\{1,2,\dots,n\})$, khi đó : với mọi $n \in \mathbb{N}$, J_n là một tập con hữu hạn của I và $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} J_n = fo\varphi(\mathbb{N}) = f(P) = I$.

- Chiều đảo :

Nếu tồn tại $n_0 \in \mathbb{N}$ sao cho $J_n = J_{n_0}$, với mọi $n \geq n_0$ thì $I = J_{n_0}$, do đó I hữu hạn.

Nếu ngược lại khi loại đi những phần tử lặp lại có thể có trong $(J_n)_{n\in\mathbb{N}}$ thì ta lại quy về trường hợp một dãy $(J_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tăng ngặt. Khi đó chỉ cần đánh số phần tử thuộc $J_0, J_1\setminus J_0, J_2\setminus J_1$ ... để thu được một song ánh từ $\mathbb{N} \to I$.

Ta kí hiệu tập hợp các tập con hữu hạn của I (không rỗng) là $\mathfrak{I}(I)$.

Do $\sup A < \infty$ nên tồn tại $M > 0$ sao cho :

$$\forall J \in \Im(I), \sum_{i \in J} a_i \leq M$$

Với mọi $n \in \mathbb{N}$, đặt $I_n = \left\{ i \in I; a_i \geq \frac{M+1}{n} \right\}$

Giả sử tồn tại $n \in \mathbb{N}$ sao cho I_n vô hạn. Khi đó tồn tại $i_1, \dots, i_n \in I$, từng đôi một khác nhau sao cho $\forall k \in \{1, \dots, n\}, a_{i_k} \geq \frac{M+1}{n}$. Từ đó với $J_n = \{i_1, \dots, i_n\}$ ta có :

$$\sum_{i \in J_n} a_i = \sum_{k=1}^{n} a_{i_k} \geq n \frac{M+1}{n} > M$$

Điều này mâu thuẫn.

Do vậy I_n hữu hạn với mọi $n \in \mathbb{N}$.

Mặt khác : Với mọi $i \in I$ sao cho $a_i > 0$, tồn tại $n \in \mathbb{N}$ thỏa $a_i \geq \frac{M+1}{n}$. Do đó $i \in I_n$.

Ta được :

$$\{i \in I; a_i > 0\} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} I_n$$

Theo mệnh đề trên, ta kết luận rằng tập $\{i \in I; a_i > 0\}$ quá lắm đếm được.

Hơn nữa, do $\sup A < \infty$, I đếm được và $\{i_k; 1 \leq k \leq n\}$ là tập con hữu hạn của I, với mọi $n \in \mathbb{N}$, ta có :

$$\sum_{k=1}^{n} a_{i_n} \leq \sum_{i \in I} a_i$$

Và suy ra rằng $\sum_{n=1}^{\infty} a_{i_n}$ hội tụ và

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{i_n} \leq \sum_{i \in I} a_i$$

Mặt khác : Cho J là một tập con hữu hạn của I. Khi đó $i^{-1}(J)$ là một tập con hữu hạn của $\mathbb{N}$ và do đó tồn tại $N \in \mathbb{N}$ sao cho $i^{-1}(J) \subset \{1, \dots, N\}$. Suy ra :

$$\sum_{i\in J} a_i \leq \sum_{n=1}^{N} a_{i_n} \leq \sum_{n=1}^{\infty} a_{i_n}$$

Từ đó ta có :

$$\sum_{i\in I} a_i \leq \sum_{n=1}^{\infty} a_{i_n}$$

Vậy ta được $\sum_{n=1}^{\infty} a_{i_n}$ hội tụ và $\sum_{n=1}^{\infty} a_{i_n} = \sum_{i\in I} a_i = \sup A$.

6.20. Cho $(a_i)_{i\in I}$ là một họ không rỗng các số ≥ 0 với tổng $\sum_{i\in I} a_i < \infty$ và $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ làm một phân hoạch của I, nghĩa là $I_n \neq \emptyset\ , \forall n \in \mathbb{N}; I_m \cap I_n = \emptyset$ khi $m \neq n$ và $\bigcup_{n=1}^{\infty} I_n = I$. Chứng minh rằng chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i\in I_n} a_i$ hội tụ và có tổng là $\sum_{i\in I} a_i$.

<u>Bài giải:</u>

Cho J là một tập con hữu hạn của I. Tồn tại một tập con hữu hạn A của $\mathbb{N}$ sao cho $J \subset \bigcup_{n\in A} I_n$, ta có :

$$\sum_{i\in J} a_i \leq \sum_{i\in \bigcup_{n\in A} I_n} a_i = \sum_{n\in A} \sum_{i\in I_n} a_i \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \sum_{i\in I_n} a_i$$

Suy ra :

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \sum_{i\in I_n} a_i \geq \sum_{i\in I} a_i$$

Mặt khác ta có :

Cho B là một tập con hữu hạn của $\mathbb{N}$. Vì $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} I_n = I$ và các I_n đôi một rời nhau nên $\bigcup_{n\in B} I_n$ là một tập con hữu hạn của I. Và :

$$\sum_{n\in B} \sum_{i\in I_n} a_i = \sum_{i\in \bigcup_{n\in B} I_n} a_i \leq \sum_{i\in I} a_i$$

Do đó :

$$\sum_{n\in\mathbb{N}}\sum_{i\in I_n} a_i \le \sum_{i\in I} a_i$$

Như vậy ta được :

$$\sum_{n\in\mathbb{N}}\sum_{i\in I_n} a_i = \sum_{i\in I} a_i$$

Vì

$$\sum_{i\in I} a_i < \infty$$

Nên chuỗi

$$\sum_{n\in\mathbb{N}}\sum_{i\in I_n} a_i$$

hội tụ và có tổng là $\sum_{i\in I} a_i$.

Vậy ta có điều phải chứng minh.

6.21. Xét hai chuỗi số dương $\sum a_n$ và $\sum b_n$. Chứng minh,

a) Nếu $\sum b_n$ hội tụ và $\lim_{n\to\infty}\sup\frac{a_n}{b_n} < \infty$ thì $\sum a_n$ hội tụ.

b) Nếu $\sum b_n$ phân kỳ và $\lim_{n\to\infty}\inf\frac{a_n}{b_n} > 0$ thì $\sum a_n$ phân kỳ.

<u>Bài giải:</u>

a) Vì $\lim_{n\to\infty}\sup\frac{a_n}{b_n} < \infty$ nên chọn $t \in (0,\infty)$ sao cho $\lim_{n\to\infty}\sup\frac{a_n}{b_n} \le t$.

Do đó : tồn tại $n_0 \in \mathbb{N}$ sao cho $\frac{a_n}{b_n} \le t$, với mọi $n \ge n_0$.

Suy ra $a_n \le tb_n$.

Mà $\sum b_n$ hội tụ nên ta có $\sum a_n$ hội tụ.

b) Vì $\lim_{n\to\infty}\inf\frac{a_n}{b_n} > 0$ nên chọn p sao cho $0 < p < \infty$ tồn tại $n_0 \in \mathbb{N}$ sao cho $\frac{a_n}{b_n} \geq p$ với mọi $n \geq n_0$.

Suy ra $a_n \geq pb_n$.

Vì $\sum b_n$ phân kì nên $\sum a_n$ phân kỳ.

6.22. Cho $0 < a < b < 1$. Chứng minh rằng:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} u_n = a + b + a^2 + b^2 + a^3 + b^3 + \cdots$$

là chuỗi hội tụ, trong đó $u_{2n} = b^n$ và $u_{2n-1} = a^n, \forall n \in \mathbb{N}$.

<u>Bài giải:</u>

Ta có :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} u_n = a + b + a^2 + b^2 + a^3 + b^3 \ldots = a + a^2 + a^3 + \cdots + b + b^2 + b^3 \ldots$$

$$= \sum_{n=1}^{+\infty} u_{2n-1} + \sum_{n=1}^{+\infty} u_{2n}$$

Xét chuỗi $\sum_{n=1}^{+\infty} u_{2n-1} = \sum_{n=1}^{+\infty} a^n$

Ta có $|a| < 1$ nên $\sum_{n=1}^{+\infty} a^n$ hội tụ (chuỗi hình học).

Suy ra $\sum_{n=1}^{+\infty} u_{2n-1}$ hội tụ . (1)

Xét chuỗi $\sum_{n=1}^{+\infty} u_{2n} = \sum_{n=1}^{+\infty} b^n$

Ta có $|b| < 1$ nên $\sum_{n=1}^{+\infty} b^n$ hội tụ (chuỗi hình học).

Suy ra $\sum_{n=1}^{+\infty} u_{2n}$ hội tụ . (2)

Từ (1) & (2) ta có $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ hội tụ.

6.23. Chứng minh rằng các hằng số α trong tiêu chuẩn tỉ số của d'Alembert và tiêu chuẩn căn số của Cauchy có thể lần lượt thay bằng $\alpha = \lim_{n\to\infty} \sup \frac{a_{n+1}}{a_n}$ và $\alpha = \lim_{n\to\infty} \sup \sqrt[n]{a_n}$.

Bài giải:

i) Thay hằng số α trong tiêu chuẩn tỉ số của d'Alembert bằng $\alpha = \lim_{n\to\infty} \sup \frac{a_{n+1}}{a_n}$ thì :

- Nếu $\alpha < 1$:

$\lim_{n\to\infty} \sup \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$ nên ta chọn $q : \alpha < q < 1$ thì $\exists n_{0,} \forall n \geq n_0$, ta có : $\frac{a_{n+1}}{a_n} < q$

Suy ra $\frac{a_{n+1}}{a_n} < \frac{q^{n+1}}{q^n} \leq \frac{a_{n_0}}{q^{n_0}}$ $\forall n \geq n_0$.

Do đó: $a_n \leq q^n \frac{a_{n_0}}{q^{n_0}}$ $\forall n \geq n_0$,

Mà chuỗi $\sum_{n=n_0}^{\infty} q^n$ hội tụ với $\alpha < q < 1$ nên ta có $\sum a_n$ hội tụ.

- Nếu $\alpha > 1$:

$\lim_{n\to\infty} \sup \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$, suy ra tồn tại dãy con $\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)_k$ của $(\frac{a_{n+1}}{a_n})$ sao cho $\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)_k >$ 1.

Suy ra $\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)_k$ là dãy dương và tăng nên không thể hội tụ về 0 .

Nên $\frac{a_{n+1}}{a_n} \nrightarrow 0$ khi $n \to \infty$.

Nếu (a_n) là dãy hằng thì hiển nhiên chuỗi hằng và dương $\sum a_n$ phân kỳ.

Nếu (a_n) là dãy tăng thì (a_n) không thể hội tụ về 0.

Vậy $\sum a_n$ phân kỳ.

ii) Thay hằng số α của tiêu chuẩn căn số của Cauchy bằng $\alpha = \lim_{n\to\infty} \sup \sqrt[n]{a_n}$ thì :

- Nếu $\alpha < 1$:

$\lim_{n\to\infty} \sup \sqrt[n]{a_n} < 1$ nên chọn $\beta : \ \alpha < \beta < 1$ thì $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ sao cho $\sqrt[n]{a_n} < \beta$, $\forall n \geq n_0$.

Suy ra $a_n < \beta^n, \forall n \geq n_0$.

Mà chuỗi $\sum \beta^n$ hội tụ (với $\alpha < \beta < 1$) nên $\sum a_n$ hội tụ.

- Nếu $\alpha > 1$:

$\lim_{n\to\infty} \sup \sqrt[n]{a_n} > 1$, suy ra tồn tại dãy con $(\sqrt[n_k]{a_{n_k}})$ của $(\sqrt[n]{a_n})$ sao cho $\sqrt[n_k]{a_{n_k}} > 1$ với k đủ lớn.

Do đó : $a_{n_k} > 1$ với k đủ lớn.

Nên $a_n \nrightarrow 0$ khi $n \to \infty$.

Vậy $\sum a_n$ phân kỳ.

6.24. (Định lý Albel hay Pringsheim) Nếu (a_n) là một dãy số dương giảm và $\sum a_n$ hội tụ thì $\lim_{n\to\infty} na_n = 0$.

<u>Bài giải:</u>

Theo **bài 6.2**, ta có thể thấy :

Chuỗi $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ hội tụ dẫn đến dãy số $\{r_n\}$ thoả $r_n = \sum_{i=n}^{\infty} a_i$ hội tụ về 0.

Do $\{a_n\}$ là các dãy số dương và giảm nên ta có :

$r_n = \sum_{i=n}^{\infty} a_i \geq \sum_{i=n}^{2n-1} a_i \geq \sum_{i=n}^{2n-1} a_{2n} = na_{2n}$.

Do vậy : $r_n \geq na_{2n} > 0$ hay $2r_n \geq 2na_{2n} > 0$.

Mà $\lim_{n\to\infty} r_n = 0$ nên suy ra $\lim_{n\to\infty}(2na_{2n}) = 0$ (1)

Vì thế ta chỉ cần chứng minh $\lim_{n\to\infty}((2n+1)a_{2n+1}) = 0$

Do $\{a_n\}$ là dãy các số dương và giảm nên ta có :

$$0 < (2n+1)a_{2n+1} < (2n+1)a_{2n} = \frac{2n+1}{2n}(2na_{2n})$$

Mà ta có : $\lim_{n\to\infty}(2na_{2n}) = 0$ và $\lim_{n\to\infty} \frac{2n+1}{2n} = 1$

Nên suy ra $\lim_{n\to\infty} \frac{2n+1}{2n}(2na_{2n}) = 0$

Khi đó dẫn tới $\lim_{n\to\infty}((2n+1)a_{2n+1}) = 0$ (2)

Từ (1) & (2) ta suy ra $\lim_{n\to\infty} na_n = 0$.

6.25. Cho $p, q, a > 0$. Khảo sát theo p, q sự hội tụ của chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^p}{n^q+a}$.

<u>Bài giải:</u>

Ta xét các trường hợp sau :

- Nếu $q > p + 1$ thì ta có : Với mọi $n \in \mathbb{N}$:

$$\frac{n^p}{n^q + a} < \frac{n^p}{n^q} = \frac{1}{n^{q-p}}$$

Mà $q - p > 1$ nên chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{q-p}}$ hội tụ .

Do vậy, chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^p}{n^q+a}$ hội tụ .

- Nếu $q \le p + 1$ thì ta có $q - p \le 1$. Do vậy chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{q-p}}$ phân kỳ.

Mà ta có :

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n^p}{n^q + a} \Big/ \frac{1}{n^{q-p}}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{n^p . n^{q-p}}{n^q + a} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^q}{n^q + a} = 1$$

Vậy chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^p}{n^q+a}$ phân kỳ.

6.26. Cho (a_n) là một dãy các số dương, giảm và $k \in \mathbb{N}$. Chứng minh rằng các chuỗi $\sum a_n$ và $\sum k^n a_{k^n}$ hoặc cùng hội tụ hoặc cùng phân kỳ.

<u>Bài giải:</u>

Ta cần chứng minh chuỗi $\sum a_n$ hội tụ khi và chỉ khi chuỗi $\sum k^n a_{k^n}$ hội tụ .

- Chứng minh chuỗi $\sum_{i=1}^{\infty} k^i a_{k^i}$ hội tụ dẫn đến chuỗi $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ hội tụ.

Do $\{a_k\}$ là dãy số dương giảm nên ta có, với mọi n :

$$(k-1)k^n a_{k^n} \geq a_{k^n} + a_{k^n+1} + \cdots + a_{k^{n+1}-1} = \sum_{i=k^n}^{k^{n+1}-1} a_i$$

Dẫn đến

$$(k-1)\sum_{i=1}^{\infty} k^i a_{k^i} \geq \sum_{i=k^1}^{k^2-1} a_i + \sum_{i=k^2}^{k^3-1} a_i + \cdots + \sum_{i=k^n}^{k^{n+1}-1} a_i = \sum_{i=k^1}^{k^{n+1}-1} a_i$$

Như vậy :

$$(k-1)\sum_{i=1}^{\infty} k^i a_{k^i} \geq (k-1)\sum_{i=1}^{n} k^i a_{k^i} \geq \sum_{i=k^1}^{k^{n+1}-1} a_i$$

Hay

$$\sum_{i=k^1}^{k^{n+1}-1} a_i \leq (k-1)\sum_{i=1}^{\infty} k^i a_i, \forall n \in \mathbb{N}$$

Ta chứng minh : Với mọi $m > k$

$$\sum_{i=k^1}^{m} a_i \leq (k-1)\sum_{i=1}^{\infty} k^i a_{k^i}$$

Thật vậy , với mọi $m > k$ tồn tại n sao cho $k^{n+1} - 1 > m$. Do đó :

$$\sum_{i=k^1}^{m} a_i \leq \sum_{i=k^1}^{k^{n+1}-1} a_i \leq (k-1)\sum_{i=1}^{\infty} k^i a_{k^i}$$

Từ đây suy ra chuỗi $\sum_{i=k^1}^{\infty} a_i$ hội tụ. Theo **bài 6.1** , suy ra $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ hội tụ .

- Chứng minh chuỗi $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ hội tụ dẫn đến chuỗi $\sum_{i=1}^{\infty} k^i a_{k^i}$ hội tụ.

Do $\{a_n\}$ là dãy các số dương giảm nên ta có, với mọi n :

$$\frac{k-1}{k} k^n a_{k^n} = (k-1)k^{n-1} a_{k^n} \leq a_{k^n-1} + a_{k^n-2} + \cdots + a_{k^{n-1}} = \sum_{i=k^{n-1}}^{k^n-1} a_i$$

Như vậy :

$$\frac{k-1}{k}\sum_{i=1}^{n}k^i a_{k^i} \le \sum_{i=1}^{k^1-1} a_i + \sum_{i=k^1}^{k^2-1} a_i + \sum_{i=k^{n-1}}^{k^n-1} a_i = \sum_{i=1}^{k^n-1} a_i$$

Do đó :

$$\frac{k-1}{k}\sum_{i=1}^{n}k^i a_{k^i} \le \sum_{i=1}^{k^n-1} a_i \le \sum_{i=1}^{\infty} a_i \,, \forall n \in \mathbb{N}$$

Từ đây suy ra chuỗi $\frac{k-1}{k}\sum_{i=1}^{\infty} k^i a_{k^i}$ hội tụ hay chuỗi $\sum_{i=1}^{\infty} k^i a_{k^i}$ hội tụ.

Vậy ta có điều phải chứng minh.

6.27. Xét chuỗi số dương $\sum a_n$. Chứng minh rằng nếu $\sum a_n$ hội tụ thì các chuỗi $\sum a_n^2$, $\sum \frac{a_n}{1+a_n}$ và $\sum \frac{a_n}{n}$ cũng hội tụ.

<u>Bài giải:</u>

(a) Do $\sum a_n$ là chuỗi hội tụ, ta có $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Tìm được một $N \in \mathbb{N}$ sao cho $\forall n > N$, ta đều có $0 \le a_n < 1$

Vậy $0 \le a_n^2 \le a_n$, $\forall n > N$

Suy ra chuỗi $\sum a_n^2$ hội tụ.

(b) Do $\sum a_n$ là chuỗi hội tụ, ta có $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Nên $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{1+a_n}.\frac{1}{a_n} = 1$

Suy ra chuỗi $\sum \frac{a_n}{1+a_n}$ hội tụ.

(c) Nhận xét rằng : $\frac{a_n}{n} \le a_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Vì $\sum a_n$ hội tụ, ta suy ra chuỗi $\sum \frac{a_n}{n}$ hội tụ.

6.28. Chứng minh rằng nếu $\sum |a_n|$ hội tụ thì $|\sum a_n| \leq \sum |a_n|$ và đẳng thức chỉ xảy ra khi mọi a_n là cùng dấu.

Bài giải:

Ta có : $\sum |a_n|$ hội tụ nên dãy tổng riêng phần (s_k) bị chặn trên, nghĩa là :

$$\exists M > 0, \forall k \in \mathbb{N}, s_n = \sum_{n=1}^{k} |a_n| \leq M$$

$|\sum a_n|$ có dãy tổng riêng phần (z_k) là :

$$z_k = \left|\sum_{n=1}^{k} a_n\right| = |a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_k| \leq |a_1| + |a_2| + |a_3| + \cdots |a_k|$$

Hay

$$\left|\sum_{n=1}^{k} a_n\right| \leq \sum_{n=1}^{k} |a_n| \leq M$$

Suy ra chuỗi $|\sum a_n|$ hội tụ .

Suy ra $|\sum a_n| \leq \sum |a_n|$.

Đẳng thức xảy ra khi

$$|a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_k| = |a_1| + |a_2| + |a_3| + \cdots |a_k|$$

khi và chỉ khi mọi a_n là cùng dấu .

6.29. Chứng tỏ rằng chuỗi $\sum \frac{(-1)^n}{(n+a)^p}$, với $a > 0$, hội tụ tuyệt đối khi $p > 1$, hội tụ có điều kiện khi $0 < p \leq 1$ và phân kì khi $p \leq 0$.

Bài giải:

1) Khi $p > 1$ thì chuỗi hội tụ tuyệt đối . Thật vậy :

Xét chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+a)^p}$

Vì với mọi $n \in \mathbb{N}$, $\frac{1}{(n+a)^p} < \frac{1}{n^p}$

Mà $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ hội tụ .

Nên chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+a)^p}$ hội tụ hay chuỗi tổng quát trên hội tụ tuyệt đối .

2) Khi $0 < p \leq 1$ thì chuỗi hội tụ có điều kiện .

Theo chứng minh trên thì chuỗi $\sum \frac{(-1)^n}{(n+a)^p}$ hội tụ tuyệt đối khi $p > 1$.

Như vậy, ta chỉ cần chứng minh $\sum \frac{(-1)^n}{(n+a)^p}$ hội tụ khi $0 < p \leq 1$.

Đặt $a_n = \frac{1}{(n+a)^p}$

Xét hàm $f(x) = \frac{1}{(x+a)^p}$, $x \in \mathbb{N}$.

$$f'(x) = \frac{-p}{(x+a)^{-p-1}} < 0 \text{ }, \forall x \in \mathbb{N}, 0 < p \leq 1$$

Suy ra f giảm trên $\mathbb{N}$. Ta được (a_n) là dãy dương giảm và :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{(n+a)^p} = 0$$

Vậy chuỗi $\sum \frac{(-1)^n}{(n+a)^p}$ hội tụ có điều kiện .

3) Khi $p \leq 0$ thì chuỗi phân kỳ .

Xét chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+a)^p}$

Vì với mọi $n \in \mathbb{N}$, $\frac{1}{(n+a)^p} > \frac{1}{n^p}$

Mà $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ phân kỳ .

Nên chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+a)^p}$ phân kỳ .

Vậy chuỗi $\sum \frac{(-1)^n}{(n+a)^p}$ phân kỳ .

6.30. Chứng minh rằng các chuỗi $\sum \cos n\theta$ và $\sum \sin n\theta$ có dãy tổng riêng phần bị chặn trừ trường hợp θ là bội số của 2π ($\theta = 2k\pi$) trong chuỗi thứ nhất.

<u>Bài giải:</u>

- $\theta \neq k2\pi$

Ta xét :

$$\sum_{n=0}^{m} \cos n\theta + i \sum_{n=0}^{m} \sin n\theta = \sum_{n=0}^{m} \left(e^{i\theta}\right)^n = \frac{1 - \left(e^{i\theta}\right)^{m+1}}{1 - e^{i\theta}}$$

$$= \frac{1 - e^{-i\theta} - \left(e^{i\theta}\right)^{m+1} + \left(e^{i\theta}\right)^{m}}{(1 - e^{i\theta})(1 - e^{-i\theta})}$$

$$= \frac{1 - \cos\theta + i\sin\theta - \cos(m+1)\theta - i\sin(m+1)\theta + \cos m\theta + i\sin m\theta}{2(1 - \cos\theta)}$$

Như vậy, ta được :

$$\sum_{n=0}^{m} \cos n\theta = \frac{1 - \cos\theta - \cos(m+1)\theta + \cos m\theta}{2(1 - \cos\theta)}$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{\cos m\theta - \cos m\theta \cos\theta + \sin m\theta \sin\theta}{2(1 - \cos\theta)}$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{\cos m\theta}{2} + \frac{\sin m\theta \sin\theta}{2(1 - \cos\theta)}$$

Suy ra :

$$\left|\sum_{n=0}^{m} \cos n\theta\right| \leq \frac{1}{2} + \left|\frac{\cos m\theta}{2}\right| + \left|\frac{\sin m\theta \sin\theta}{2(1 - \cos\theta)}\right| \leq 1 + \frac{|\sin\theta|}{2(1 - \cos\theta)}$$

Và :

$$\sum_{n=0}^{m} \sin n\theta = \frac{\sin\theta - \sin(m+1)\theta + \sin m\theta}{2(1-\cos\theta)}$$

$$= \frac{\sin m\theta\,(1-\cos\theta) + \sin\theta\,(1-\cos m\theta)}{2(1-\cos\theta)}$$

$$= \frac{\sin m\theta}{2} + (1-\cos m\theta)\frac{\sin\theta}{2(1-\cos\theta)}$$

Suy ra :

$$\left|\sum_{n=0}^{m} \sin n\theta\right| \leq \left|\frac{\sin m\theta}{2}\right| + |(1-\cos m\theta)|\frac{|\sin\theta|}{2(1-\cos\theta)} \leq \frac{1}{2} + \frac{|\sin\theta|}{1-\cos\theta}$$

Vậy ta có điều phải chứng minh.

6.31. Xét $\sum\frac{\cos n\theta}{n^p}$ và $\sum\frac{\sin n\theta}{n^p}$. Chứng tỏ rằng, tổng quát các chuỗi này hội tụ tuyệt đối khi $p > 1$, hội tụ có điều kiện khi $0 < p \leq 1$ và phân kỳ khi $p < 0$. Khảo sát theo θ các trường hợp ngoại lệ.

Bài giải:

- $p > 1$

Vì

$$\left|\frac{\cos n\theta}{n^p}\right| \leq \frac{1}{n^p} \text{ và } \sum\frac{1}{\mathrm{n^p}} \text{ phân kỳ.}$$

Nên

$$\sum\left|\frac{\cos n\theta}{n^p}\right| \text{hội tụ}$$

Suy ra các chuỗi trên hội tụ tuyệt đối .

- $0 < p \leq 1$

Vì $\left(\frac{1}{n^p}\right)$ là dãy dương, giảm và hội tụ về 0 và chuỗi $\sum \cos n\theta$ có tổng riêng phần bị chặn khi $\theta \neq k2\pi$ (theo **bài 6.30**) nên $\sum \frac{\cos n\theta}{n^p}$ hội tụ . Chứng minh tương tự đối với $\sum \frac{\sin n\theta}{n^p}$.

Xét chuỗi

$$\sum \left|\frac{\sin n\theta}{n^p}\right|$$

Ta chỉ cần khảo sát $\theta \in [0;\frac{\pi}{2})$.

Với $\theta = 0$: Chuỗi $\sum \left|\frac{\cos n\theta}{n^p}\right|$ phân kỳ vì khi đó sự hội tụ của chuỗi phụ thuộc vào p.

Với $\theta \neq 0$:

Với mọi k, chọn $n_k \in \mathbb{Z}$ sao cho $n_k\theta \leq 2k\pi < (n_k + 1)\theta$.

Do đó : $0 < \cos\theta \leq \cos n_k\theta \leq 1$ và $n_k \leq \frac{2k\pi}{\theta}$.

Suy ra :

$$\frac{|\cos n_k\theta|}{n_k^p} \geq \frac{\theta^p \cos\theta}{(2k\pi)^p}$$

Do đó :

$$\sum \frac{|\cos n\theta|}{n^p} \geq \sum \frac{\theta^p \cos\theta}{(2k\pi)^p}$$

Vậy chuỗi $\sum \left|\frac{\cos n\theta}{n^p}\right|$ phân kỳ .

- $p < 0$

Với $\theta \neq k\pi$.

Giả sử : $\sin n\theta \xrightarrow{n\to\infty} l \in \mathbb{R}$.

Ta có : Với mọi $n \in \mathbb{N}$: $\sin(n+1)\theta = \sin n\theta \cos\theta + \sin\theta \cos n\theta$

Suy ra :

$$\cos n\theta = \frac{\sin(n+1)\theta - \sin n\theta \cos\theta}{\sin\theta} \xrightarrow{n\to\infty} l' = l\frac{1-\cos\theta}{\sin\theta}$$

Ta lại giả sử : $\cos n\theta \xrightarrow{n\to\infty} l' \in \mathbb{R}$. Sử dụng : $\cos(n+1)\theta = \cos n\theta \cos\theta - \sin n\theta \sin\theta$. Ta được :

$$\sin n\theta \xrightarrow{n\to\infty} l = l'\frac{\cos\theta - 1}{\sin\theta}$$

Đặt $t = \frac{1-\cos\theta}{\sin\theta}$. Ta có :

$$\begin{cases} l' = lt \\ l = -l't \end{cases}$$

Suy ra $l = l' = 0$.

Mặt khác : $\cos^2 n\theta + \sin^2 n\theta = 1$ nên $l^2 + l'^2 = 1$ khi $n \to \infty$, mâu thuẫn với $l = l' = 0$.

Như vậy, ta có : $(\cos n\theta)$ và $(\sin n\theta)$ phân kỳ .

Suy ra với $p < 0$: $(\frac{\cos n\theta}{n^p})$ và $(\frac{\sin n\theta}{n^p})$ đều không hội tụ về 0 khi $n \to \infty$.

Vậy các chuỗi trên phân kỳ .

- $\theta = k\pi$. Chuỗi trên trở thành :

$$\sum \frac{(-1)^n}{n^p} \text{ và } \sum 0$$

Chuỗi $\sum 0$ hội tụ .

Xét chuỗi $\sum \frac{(-1)^n}{n^p}$

- $p > 0$: Vì $\left(\frac{1}{n^p}\right)$ là dãy dương, giảm và hội tụ về 0 nên chuỗi đan dấu trên hội tụ. (hội tụ có điều kiện khi $0 < p \le 1$, hội tụ tuyệt đối khi $p > 1$)
- $p < 0$: Vì $\lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^n}{n^p} = \pm\infty$ nên chuỗi đan dấu phân kỳ .

6.32. Chứng minh rằng nếu chuỗi $\sum \frac{a_n}{n^p}$ hội tụ hay có tổng riêng phần bị chặn thì $\sum \frac{a_n}{n^q}$ hội tụ khi $q > p$.

Bài giải:

Ở bài này ta hiểu $q \neq p$

1) Ta chứng minh $\sum \frac{a_n}{n^p}$ hội tụ thì $\sum \frac{a_n}{n^q}$ hội tụ.

Xét : $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{n^p} . \frac{n^q}{a_n} = \lim_{n\to\infty} n^{q-p} = \alpha$

Nên chuỗi $\sum \frac{a_n}{n^q}$ hội tụ khi $\alpha = \infty$ hay $q > p$.

2) Ta chứng minh $\sum \frac{a_n}{n^p}$ có tổng riêng phần bị chặn thì $\sum \frac{a_n}{n^q}$ hội tụ.

Ta có :

Với $q > p$: $a_n = \frac{n^p}{n^q} = \frac{1}{n^{q-p}}$ là dãy dương giảm và hội tụ về 0 khi $n \to \infty$.

Và $\sum \frac{a_n}{n^p}$ có tổng riêng phần bị chặn .

Nên $\sum \frac{a_n}{n^p} . \frac{n^p}{n^q} = \sum \frac{a_n}{n^q}$ hội tụ theo **tiêu chuẩn Dirichlet**.

6.33.

1) Chứng minh rằng nếu $A_n \to A$ và $B_n \to B$ khi $n \to \infty$ thì

$$D_n = \frac{A_1 B_n + A_2 B_{n-1} + \cdots + A_n B_1}{n} \to AB$$

Hơn nữa, nếu $(A_n), (B_n)$ là các dãy dương giảm thì (D_n) cũng dương giảm.

2) Chứng minh rằng với $c_n = a_1 b_n + a_2 b_{n-1} + \cdots + a_n b_1, A_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$, $B_n = b_1 + b_2 + \cdots + b_n$, $C_n = c_1 + c_2 + \cdots + c_n$, thì $C_n = a_1 B_n + a_2 B_{n-1} + \cdots + a_n B_1 = b_1 A_n + b_2 A_{n-1} + \cdots + b_n A_1$ và $C_1 + C_2 + \cdots + C_n = A_1 B_n + A_2 B_{n-1} + \cdots + A_n B_1$.

Suy ra rằng nếu $\sum a_n$, $\sum b_n$ hội tụ và có tổng là A, B thì

$$\frac{C_1 + C_2 + \cdots + C_n}{n} \to AB$$

3) (Định lý Abel về chuỗi tích) Cho $\sum c_n$ là chuỗi tích của hai chuỗi hội tụ $\sum a_n$ và $\sum b_n$. Nếu $\sum c_n$ hội tụ thì,

$$\sum c_n = \left(\sum a_n\right)\left(\sum b_n\right)$$

Bài giải:

1) Đặt $\begin{cases} u_n = A_n - A \\ v_n = B_n - B \end{cases}$. Khi đó : $\begin{cases} u_n \xrightarrow{n\to\infty} 0 \\ v_n \xrightarrow{n\to\infty} 0 \end{cases}$

Và :

$$D_n = AB + \frac{A(v_1 + v_2 + \cdots + v_n)}{n} + \frac{B(u_1 + u_2 + \cdots + u_n)}{n} + \frac{u_1 v_n + u_2 v_{n-1} + \cdots + u_n v_1}{n}$$

Do (v_n) hội tụ nên $|v_n|$ bị chặn trên, nghĩa là $\exists M > 0: |v_n| \le M, \forall n \in \mathbb{N}$. Khi đó :

$$\left|\frac{u_1 v_n + u_2 v_{n-1} + \cdots + u_n v_1}{n}\right| \le M.\frac{|u_1| + |u_2| + \cdots + |u_n|}{n}$$

Theo **bài 5.6.2.5** (Giáo Trình Giải Tích I) thì :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_1 + u_2 + \cdots + u_n}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{v_1 + v_2 + \cdots + v_n}{n} = 0$$

Hơn nữa, do $u_n \xrightarrow{n\to\infty} 0$ nên $|u_n| \xrightarrow{n\to\infty} 0$. Áp dụng kết quả trên, ta được :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|u_1| + |u_2| + \cdots + |u_n|}{n} = 0$$

Như vậy, ta có : $D_n \xrightarrow{n\to\infty} AB$.

- Do (A_n), (B_n) là hai dãy dương giảm nên ta chỉ cần chứng minh :

$$D_{n+1} \le D_n$$

Ta có : Với mọi $n \ge k \ge 1$:

$$\begin{aligned} nA_k B_{n+2-k} &= (n+1-k)A_k B_{n+2-k} + (k-1)A_k B_{n+2-k} \\ &\le (n+1-k)A_k B_{n+1-k} + (k-1)A_{k-1} B_{n+2-k} \end{aligned}$$

Từ đó , ta lấy tổng theo k từ 1 đến $n+1$, ta được :

$$n\sum_{k=1}^{n+1} A_k B_{n+2-k} \leq (n+1)\sum_{k=1}^{n} A_k B_{n+1-k}$$

Hay $D_{n+1} \leq D_n$

Vậy ta có điều phải chứng minh.

2)

- Ta có :

$C_n = c_1 + c_2 + \cdots + c_n$

$$= a_1b_1 + a_1b_2 + a_2b_1 + \cdots + a_1b_n + a_2b_{n-1} + \cdots + a_{n-1}b_2 + a_nb_1$$

$$= \begin{cases} a_1(b_1 + b_2 + \cdots + b_n) + a_2(b_1 + b_2 + \cdots + b_{n-1}) + \cdots + a_nb_1 \\ b_1(a_1 + a_2 + \cdots + a_n) + b_2(a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1}) + \cdots + b_na_1 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} a_1B_n + a_2B_{n-1} + \cdots + a_nB_1 \\ b_1A_n + b_2A_{n-1} + \cdots + b_nA_1 \end{cases}$$

Khi đó :

$$\sum_{k=1}^{n} C_k = a_1B_1 + a_1B_2 + a_2B_1 + \cdots + a_1B_n + a_2B_{n-1} + \cdots + a_{n-1}B_2 + a_nB_1$$

$$= B_1(a_1 + a_2 + \cdots + a_n) + B_2(a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1}) + \cdots + B_na_1$$

$$= A_nB_1 + A_{n-1}B_2 + \cdots + A_1B_n$$

- Ta có : $\sum a_n$, $\sum b_n$ hội tụ và có tổng là A, B nên $A_n \to A$ và $B_n \to B$ khi $n \to \infty$. Áp dụng kết quả ở câu trên, ta được :

$$\frac{C_1 + C_2 + \cdots + C_n}{n} \to AB$$

Vậy ta có điều phải chứng minh.

3) Đặt

$$A_n = \sum_{k=1}^{n} a_k \to A\ , B_n = \sum_{k=1}^{n} b_k \to B \text{ khi } n \to \infty$$

Ta có : $\sum c_n$ hội tụ và $C_n = c_1 + c_2 + \cdots + c_n$

Nên tồn tại $X \in \mathbb{R}$ sao cho $C_n \xrightarrow{n\to\infty} X$

Mà ở câu trên ta đã có, khi $n \to \infty$:

$$\frac{C_1 + C_2 + \cdots + C_n}{n} \to AB$$

Mặt khác :

$$X = \lim_{n\to\infty} C_n = \lim_{n\to\infty} \frac{C_1 + C_2 + \cdots + C_n}{n}$$

Nên $X = AB$.

Suy ra :

$$\lim_{n\to\infty} C_n = AB$$

Nên

$$\sum c_n = \left(\sum a_n\right)\left(\sum b_n\right)$$

Vậy ta có điều phải chứng minh.

6.34. Cho $\sum a_n$,$\sum b_n$ với $a_n = b_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$.

1) Chứng minh rằng chuỗi tích $\sum c_n$ với số hạng tổng quát

$$c_n = (-1)^n \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\sqrt{(k+1)(n+1-k)}}$$

2) Khảo sát sự hội tụ của $\sum c_n$.

Bài giải:

1) Ta có :

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k+1}} . \frac{(-1)^{n-k}}{\sqrt{n-k+1}} = (-1)^n \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\sqrt{(k+1)(n+1-k)}}$$

2) Ta có :

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\sqrt{(k+1)(n+1-k)}}$$

Ta có :

$$\sqrt{(k+1)(n+1-k)} \leq \frac{n+2}{2}$$

Suy ra :

$$|c_n| = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\sqrt{(k+1)(n+1-k)}} \geq \frac{2(n+1)}{n+2}$$

Vì

$$\frac{2(n+1)}{n+2} \to 2 \text{ khi } n \to \infty$$

Nên

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n \text{ phân kỳ}$$

6.35. Cho chuỗi $\sum a_n$ hội tụ có điều kiện. Chứng tỏ rằng với mọi $a \in \overline{\mathbb{R}}$, có một chuỗi hoán vị $\sum a_{n(i)}$ của $\sum a_n$ sao cho $\sum a_{n(i)}$ hội tụ và có tổng là a.

<u>**Bài giải:**</u>

Ta kí hiệu : $P = \{n \in \mathbb{N}; u_n > 0\}$ và $N = \{n \in \mathbb{N}; u_n \leq 0\}$.

Vậy ta có $P \cap N = \emptyset$ và $P \cup N = \mathbb{N}$.

Do $\sum a_n$ hội tụ có điều kiện, các tập hợp P và N đều vô hạn, do đó tồn tại hai song ánh $f : \mathbb{N} \to P$ và $g : \mathbb{N} \to N$ đồng biến ngặt .

Với $p \in P$, kí hiệu $v_p = u_{f(p)} > 0$

Với $n \in N$, $w_n = -u_{g(n)} \geq 0$

Vì $\sum a_n$ hội tụ có điều kiện nên các chuỗi $\sum v_p$ và $\sum w_n$ phân kỳ (và có các số hạng ≥ 0).

Do đó các tổng riêng phần của chúng có giới hạn ∞ .

Ta kí hiệu p_1 là số nguyên không âm nhỏ nhất sao cho :

$$\sum_{p=0}^{p_1} v_p > a$$

Và n_1 là số nguyên không âm nhỏ nhất sao cho :

$$\sum_{p=0}^{p_1} v_p - \sum_{n=0}^{n_1} w_n < a$$

Sau đó, ta kí hiệu :

p_2 là số nguyên không âm nhỏ nhất sao cho $p_2 > p_1$:

$$\sum_{p=0}^{p_1} v_p - \sum_{n=0}^{n_1} w_n + \sum_{p=p_1+1}^{p_2} v_p > a$$

Và n_2 là số nguyên không âm nhỏ nhất sao cho $n_2 > n_1$:

$$\sum_{p=0}^{p_1} v_p - \sum_{n=0}^{n_1} w_n + \sum_{p=p_1+1}^{p_2} v_p - \sum_{n=n_1+1}^{n_2} w_n > a$$

Cứ như vậy, ta xây dựng được hai chuỗi $(p_k)_{k\geq 1}$ và $(n_k)_{k\geq 1}$ là những số nguyên không âm nhỏ nhất tăng ngặt, sao cho khi ta kí hiệu :

$$t_0 = \sum_{p=0}^{p_1} v_p \ , s_0 = \sum_{n=0}^{n_1} w_n \ , t_1 = \sum_{p=p_1+1}^{p_2} v_p \ , s_1 = \sum_{n=n_1+1}^{n_2} w_n \ , \dots$$

Thì ta có với mọi $k \in \mathbb{N}$:

$$\begin{cases} t_0 - s_0 + \cdots + t_{k-1} - s_{k-1} + \displaystyle\sum_{p=p_k+1}^{p_{k+1}-1} v_p \leq a \\ t_0 - s_0 + \cdots + t_{k-1} - s_{k-1} + t_k > a \end{cases}$$

Và :

$$\begin{cases} t_0 - s_0 + \cdots + t_{k-1} - s_{k-1} - \displaystyle\sum_{n=n_k+1}^{n_{k+1}-1} w_n \geq a \\ t_0 - s_0 + \cdots + t_{k-1} - s_{k-1} + t_k - s_k < a \end{cases}$$

Khi đó, với mọi $k \in \mathbb{N}$, ta có :

$$\begin{cases} 0 < (t_0 - s_0 + \cdots + t_{k-1} - s_{k-1} + t_k) - a \leq v_{p_k+1} \\ w_{n_k+1} \leq (t_0 - s_0 + \cdots + t_{k-1} - s_{k-1} + t_k - s_k) - a < 0 \end{cases}$$

Do $\sum a_n$ hội tụ nên $a_n \xrightarrow{n\to\infty} 0$

Do đó : $v_p \xrightarrow{n\to\infty} 0$ và $w_n \xrightarrow{n\to\infty} 0$

Suy ra $v_{p_{k+1}} \xrightarrow{k\to\infty} 0$ và $w_{n_{k+1}} \xrightarrow{k\to\infty} 0$

Như vậy, ta được :

$$\begin{cases} t_0 - s_0 + \cdots + t_{k-1} - s_{k-1} + t_k \xrightarrow{k\to\infty} a \\ t_0 - s_0 + \cdots + t_{k-1} - s_{k-1} + t_k - s_k \xrightarrow{k\to\infty} a \end{cases}$$

Khi đó, ta kí hiệu $\varphi(n) = n(i)$ là hoán vị của $\mathbb{N}$ cho bởi :

$$\varphi(0) = f(0), \dots, \varphi(p_1) = f(p_1), \varphi(p_1+1) = g(0), \dots, \varphi(p_1+n_1) = g(n_1), \varphi(p_1+n_1+1) = f(p_1+1), \dots$$

Vì các số hạng t_k và s_k đều không âm

Nên mọi tổng riêng phần $\sum_{n=0}^{M} a_{\varphi(n)}$ của chuỗi hoán vị $\sum a_{\varphi(n)}$ đều bao gồm giữa hai tổng kiểu

$$t_0 - s_0 + \cdots + t_{k-1} - s_{k-1} + t_k \text{ và } t_0 - s_0 + \cdots + t_{k-1} - s_{k-1} + t_k - s_k$$

Do đó :

$$\sum_{n=0}^{M} a_{\varphi(n)} \xrightarrow{M\to\infty} a$$

Vậy chuỗi hoán vị $\sum a_{\varphi(n)}$ hay $\sum a_{n(i)}$ hội tụ và có tổng là a .

Bài tập mở rộng

1. Chuỗi **Bertrand**:

Với mọi $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ cho trước, chuỗi $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha \ln^\beta n}$ hội tụ khi và chỉ khi :

$$\alpha > 1 \text{ hay } (\alpha = 1 \ v\text{à } \beta > 1).$$

2. Cho $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ là ánh xạ liên tục thỏa mãn :

$$\forall(\alpha, x, y) \in \mathbb{R}^3, f(\alpha x, \alpha y) = \alpha f(x, y).$$

Cho chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} x_n^2$ và $\sum_{n=1}^{\infty} y_n^2$ hội tụ.

Chứng minh rằng $\sum_{n=1}^{\infty} \left(f(x_n, y_n)\right)^2$ hội tụ.

3. (**Định lí Mertens**) Cho $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ là chuỗi hội tụ tuyệt đối, $\sum_{n=0}^{\infty} v_n$ là chuỗi hội tụ. Với $n \in \mathbb{N}$, ta kí hiệu :

$$w_n = \sum_{k=0}^{n} u_k v_{n-k} \ , U_n = \sum_{k=0}^{n} u_k \ , V_n = \sum_{k=0}^{n} v_k \ , W_n = \sum_{k=0}^{n} w_k$$

Với $(p, q) \in \mathbb{N}^2$ sao cho $p < q$, ta kí hiệu :

$$V_{p,q} = \sum_{k=p+1}^{q} v_k$$

a. Chứng minh : $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$U_n V_n - W_n = \sum_{k=1}^{n} u_k V_{n-k,n}$$

b. Từ đó suy ra : $U_n V_n - W_n \to 0$ khi $n \to \infty$

4. Chứng minh rằng: Nếu $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ và $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ hội tụ tuyệt đối, thì với mọi $\alpha \in \mathbb{R}$, chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty}(u_n + \alpha v_n)$ hội tụ tuyệt đối .

5. Cho $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ là chuỗi số dương thỏa mãn :

$$\forall n \geq 1, \sum_{k=n+1}^{2n} u_k \leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} u_k.$$

Chứng minh rằng $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ hội tụ.

6. Chứng minh rằng: Nếu $\sum_{k=1}^{\infty} u_{2k}$ hội tụ và $\sum_{k=1}^{\infty} u_{2k+1}$ phân kì, thì $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ phân kì.

7. Cho chuỗi số dương $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ và với mọi $n \in \mathbb{N}$, $v_n = \frac{u_n}{1+u_n^2}$.

a. Chứng minh rằng: Nếu $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ hội tụ thì $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ hội tụ .

b. Chứng minh rằng: Nếu $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ phân kì và (u_n) bị chặn trên thì $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ phân kì.

8. Cho $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ và $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ là hai chuỗi số dương sao cho tồn tại $N \in \mathbb{N}$ thỏa mãn :

$$\forall n \geq N, \frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{v_{n+1}}{v_n}$$

Chứng minh rằng: Nếu $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ hội tụ thì $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ hội tụ .

9.

Vì $\mathbb{R}$ và $\mathbb{C}$ là những không gian mêtríc đầy đủ nên mọi chuỗi hội tụ tuyệt đối thì hội tụ. Nhưng nếu E không đầy đủ thì điều trên sai. Ta có ví dụ sau:

Cho $E = C([0,1], \mathbb{R})$ với chuẩn $\|x\| = \int_0^1 |x(t)|dt$. $\{f_n\}$ là dãy những phần tử của E xác định bởi :

$$\begin{cases} \forall x \in [0,1] \backslash [\frac{1}{2^n}, \frac{1}{2^{n-1}}], f_n(x) = 0 \\ f_n \ \textbf{affine} \text{ trên hai nửa khoảng của } [\frac{1}{2^n}, \frac{1}{2^{n-1}}] \\ f_n\left(\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2^n}, \frac{1}{2^{n-1}}\right)\right) = n \end{cases}$$

Chứng minh rằng $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ hội tụ tuyệt đối nhưng phân kì.

- Ánh xạ f gọi là **affine** nếu :

$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x_1, x_2, \dots, x_n \in K, \forall \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \geq 0$ mà $\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n = 1$

Thì $f(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_n x_n) = \alpha_1 f(x_1) + \alpha_2 f(x_2) + \cdots + \alpha_n f(x_n)$.

<u>Chương 7:</u>

DÃY HÀM VÀ CHUỖI HÀM

7.1. Đặt $f_n(x) = \frac{x^{2n}}{1+x^{2n}}$ và $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$.

Tìm $f(x)$. Chứng minh rằng f_n không hội tụ đều về f trên $\mathbb{R}$.

<u>Bài giải:</u>

Đầu tiên ta đi tìm $f(x)$.

Ta có :

$$f_n(x) = \frac{x^{2n}}{1+x^{2n}}$$

Nên

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{x^{2n}}{1+x^{2n}}.$$

Vậy $f(x) = 0 \ \forall\, x^2 < 1, f(x) = \frac{1}{2}$ khi $x^2 = 1$ và $f(x) = 1\ \forall x^2 > 1$

Tóm lại hàm số f được xác định như sau :

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{nếu } |x| < 1 \\ \dfrac{1}{2} & \text{nếu } |x| = 1 \\ 1 & \text{nếu } |x| > 1 \end{cases}$$

Chứng minh f_n không hội tụ về f trên $\mathbb{R}$.

Lấy dãy số $\{x_n\}$ trong $(0,1)$ được xác định như sau:

$$x_n = \frac{1}{\sqrt[2n]{2}}\ \forall n \in \mathbb{N}$$

Ta có :

$$f(x_n) = 0 \text{ và } f_n(x_n) = f_n\left(\frac{1}{\sqrt[2n]{2}}\right) = \frac{\frac{1}{2}}{1+\frac{1}{2}} = \frac{1}{3}\ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Suy ra :

$$d(f_n, f) = \sup_{x\in\mathbb{R}} |f_n(x) - f(x)| \geq |f_n(x_n) - f(x_n)| = \frac{1}{3}\ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Do $d(f_n, f)$ không hội tụ về 0 nên $\{f_n\}$ không hội tụ đều về f trên $\mathbb{R}$.

7.2. Tìm miền hội tụ của chuỗi và tính tổng chuỗi đó?

1) $\sum_{n=0}^{\infty} ax^{2n+1}$, $(a \neq 0)$.
2) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{x^k}$
3) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a}{(2+x)^n}$, $(a \neq 0)$
4) $\sum_{k=0}^{\infty} 3\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^k$
5) $\sum_{k=0}^{\infty} e^{kx}$
6) $\sum_{k=0}^{\infty} \ln^k(x)$

<u>Bài giải :</u>

1) $\sum_{n=0}^{\infty} ax^{2n+1}$ $(a \neq 0)$

Ta có :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} ax^{2n+1} = \sum_{n=0}^{+\infty} ax^{2n}x = \sum_{n=0}^{+\infty} ax(x^2)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} by^n$$

Với $b = ax, y = x^2$

Nếu $x = 0$ thì $b = 0$, chuỗi đã cho hội tụ.

Xét khi $x \neq 0$, lúc đó $b \neq 0$. Theo **Mệnh đề 1.3** chương 6 trang 139 thì

$$\sum_{n=0}^{+\infty} by^n \text{ hội tụ} \Leftrightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} y^n \text{ hội tụ} \Leftrightarrow |y| < 1 \Leftrightarrow -1 < x < 1$$

Vậy trong cả hai trường hợp trên chuỗi đã cho hội tụ khi và chỉ khi $-1 < x < 1$.

Khi đó :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} ax^{2n+1} = \sum_{n=0}^{+\infty} by^n = \frac{b}{1-y} = \frac{ax}{1-x^2}.$$

2) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{x^k}$

Ta có :

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{x^k} \text{ hội tụ} \Leftrightarrow \left|\frac{1}{x}\right| < 1 \Leftrightarrow x > 1 \text{ hoặc } x < -1$$

Chuỗi đã cho hội tụ khi và chỉ khi $x > 1$ hoặc $x < -1$. Khi đó

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{x^k} = \frac{1}{1-\frac{1}{x}} - 1 = \frac{1}{x-1}$$

3) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a}{(2+x)^n}$, $(a \neq 0)$

Ta có :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a}{(2+x)^n} \text{ hội tụ} \Leftrightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2+x)^n} \text{hội tụ} \Leftrightarrow \left|\frac{1}{2+x}\right| < 1$$

$$\Leftrightarrow x > -1 \text{ hoặc } x < -3$$

Khi đó :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a}{(2+x)^n} = a\left(\frac{1}{1-\frac{1}{2+x}}\right) = \frac{a(2+x)}{(2+x)-1} = \frac{a(x+2)}{x+1}$$

4) $\sum_{k=0}^{\infty} 3\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^k$

Ta có :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} 3\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^k \text{ hội tụ} \Leftrightarrow \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{1+x}{1-x}\right)^k \Leftrightarrow \left|\frac{1+x}{1-x}\right| < 1 \Leftrightarrow x < 0$$

Chuỗi đã cho hội tụ với $x < 0$ khi đó :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} 3\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^k = \frac{3}{1-\frac{1+x}{1-x}} = \frac{3(1-x)}{1-x-(1+x)} = \frac{3(x-1)}{2x}$$

5) $\sum_{k=0}^{\infty} e^{kx}$

Ta có :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} e^{kx} = \sum_{k=0}^{+\infty} (e^x)^k$$

Nên

$$\sum_{k=0}^{+\infty} (e^x)^k \text{ hội tụ} \Leftrightarrow |e^x| < 1 \Leftrightarrow x < 0$$

Vậy chuỗi hội tụ khi và chỉ khi $x < 0$. Khi đó:

$$\sum_{k=0}^{+\infty} (e^x)^k = \frac{1}{1-e^x}.$$

6) $\sum_{k=0}^{\infty} \ln^k(x)$

Ta có

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \ln^k(x) \text{ hội tụ} \Leftrightarrow |\ln(x)| < 1 \Leftrightarrow \frac{1}{e} < x < e$$

Vậy chuỗi chỉ hội tụ khi và chỉ khi $\frac{1}{e} < x < e$. Khi đó

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \ln^k(x) = \frac{1}{1-\ln(x)}.$$

7.3. Chứng minh $f_n(x) = nxe^{-nx}, x \geq 0$ hội tụ đều trên $[a, +\infty)$ với $a > 0$ nhưng không hội tụ đều trên $[0, a]$.

Bài giải:

Chứng minh $\{f_n\}$ hội tụ đều về f trên $[a, +\infty)$.

Đặt $f(x) = \lim\limits_{n \to \infty} f_n(x)$.

Ta thấy $f_n(0) = 0$ suy ra

$$f(0) = \lim_{n \to \infty} f_n(0) = 0$$

Theo quy tắc L'Hopital ta có :

$$\lim_{y \to +\infty} yxe^{-yx} = \lim_{y \to +\infty} \frac{(yx)'}{(e^{yx})'} = \lim_{y \to +\infty} \frac{x}{xe^{yx}} = \lim_{y \to +\infty} \frac{1}{e^{yx}} = 0.$$

Với $x > 0$ thì ta có :

$$f(x) = \lim_{n \to \infty} f_n(x) = \lim_{n \to \infty} nxe^{-nx} = \lim_{y \to +\infty} yxe^{-yx} = 0$$

Tóm lại $f(x) = \lim_{n \to \infty} f_n(x) = 0 \ \forall x \geq 0$.

Với $a > 0$ ta cần chứng minh $\{f_n\}$ hội tụ đều về f trên $[a, +\infty)$.

Ta có: $f_n(x) = nxe^{-nx} \ \forall x \geq a$. Xét $f_n'(x) = ne^{-nx} - n^2xe^{-nx} = (1 - nx)ne^{-nx} \leq (1 - na)ne^{-nx} \ \forall x \geq a$.

Có $N \in \mathbb{N}$ đủ lớn sao cho $1 - Na < 0$. Khi đó với $n \geq N$, ta có

$$f_n'(x) \leq ne^{-nx}(1 - na) < 0 \ \forall x \geq a.$$

Suy ra với $n \geq N$ thì f_n là hàm nghịch biến trên $[a, +\infty)$. Khi đó ta có :

$$d\left(f_n|_{[a,+\infty)}, f|_{[a,+\infty)}\right) = \sup_{n \in [a,+\infty)} |f_n(x) - 0| = \sup_{n \in [a,+\infty)} f_n(x) = f_n(a)$$

Vậy $\forall n > N$, $d(f_n, f) = f_n(a)$. Mà $f_n(a) \longrightarrow 0$ (chứng minh trên) nên $\{f_n\}$ hội tụ đều về f trên $[a, +\infty)$.

Chứng minh: với $a > 0$ thì $\{f_n\}$ không hội tụ đều về f trên $[0, a]$.

Lấy dãy $\{x_n\}$ trong $[0, a]$ xác định bởi :

$$x_n = \frac{a}{n}, \forall n \in \mathbb{N}$$

Ta thấy :

$$f_n(x_n) = f_n\left(\frac{a}{n}\right) = n.\frac{a}{n}.e^{-n.\frac{a}{n}} = ae^{-a}.$$

Mà

$$d\left(f_n|_{[0,a]}, f|_{[0,a]}\right) = \sup_{x\in[0,a]} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x\in[0,a]} f_n(x) \geq f_n(x_n) = ae^{-a}$$

Vậy $d\left(f_n|_{[0,a]}, f|_{[0,a]}\right)$ không hội tụ về 0 nên f_n không hội tụ đều về f trên đoạn $[0, a]$.

7.4. Chứng minh rằng

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2x}{n^2 - x^2}$$

Hội tụ đều trên khoảng đóng bất kỳ không chứa ±1,±2,…

<u>Bài giải:</u>

Xét khoảng đóng $[a, b]$ không chứa ±1,±2,…

Có $C > 0$ sao cho $|x| < C \ \forall x \in [a, b]$.

Do $n^2 - n^{\frac{3}{2}} \to +\infty$ khi $n \to +\infty$, có $N \in \mathbb{N}$ sao cho $n^2 - n^{\frac{3}{2}} > C^2 \ \forall n \geq N$

Ta có :

$$\frac{|x|}{n^2 - x^2} - \frac{C}{n^2 - C^2} = \frac{(n^2 + |x|C)(|x| - C)}{(n^2 - x^2)(n^2 - C^2)} \leq 0 \ \forall x \in [a, b], n \geq N$$

Lúc đó :

$$\left|\frac{2x}{n^2 - x^2}\right| = \frac{2|x|}{n^2 - x^2} \leq \frac{2C}{n^2 - C^2} \leq \frac{2C}{n^{\frac{3}{2}}} \ \forall x \in [a, b], n \geq N$$

Ta có chuỗi

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2C}{n^{\frac{3}{2}}}$$

là chuỗi hội tụ nên theo **định lý 1.3** trang 164 chuỗi hàm

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2x}{n^2 - x^2}$$

hội tụ đều trên $[a, b]$.

Ta có điều phải chứng minh.

Bài 7.5

Chứng minh

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$$

Hội tụ đều trên $[p, +\infty)$ nếu $p > 1$.

<u>**Bài giải:**</u>

Với mọi $x \in [p, +\infty)$ ta có:

$$\frac{1}{n^x} \leq \frac{1}{n^p}.$$

Với $p > 1$ thì

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$$

là một chuỗi số hội tụ (**Mệnh đề 1.3** Chương 6 trang 139). Suy ra chuỗi hàm

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$$

hội tụ đều trên $[p, \infty)$ (theo **Định lý 1.3** Chương 7 trang 164).

7.6. Xét chuỗi

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^2(1+x^n)}$$

a) Chứng minh rằng chuỗi trên hội tụ đều trên $[0,+\infty)$
b) Chứng minh rằng chuỗi trên hội tụ đều trên $[-a,a]$ trong đó $0<a<1$
c) Chứng minh rằng chuỗi trên hội tụ đều trên $[b,+\infty)$ trong đó $b>-1$
d) Chứng minh rằng chuỗi trên hội tụ đều trên $(-\infty,-c]$ trong đó $c>1$

Bài giải:

a) Với mọi $x\in[0,+\infty)$ ta có

$$\frac{x^n}{n^2(1+x^n)}<\frac{1}{n^2}$$

Mà chuỗi $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}$ hội tụ nên theo **Định lý 1.3** trang 164 ta có chuỗi $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{n^2(1+x^n)}$ hội tụ đều trên $[0,+\infty)$.

b) Với mỗi $n\in\mathbb{N}$, ta có

$$|1+x^n|\geq 1-|x^n|=1-|x|^n\geq 1-a^n>0\ \ \forall x\in[-a,a]\subset(-1,1)$$

Do $a^n\to 0$ nên có $N\in\mathbb{N}$ sao cho với mọi $n\geq N, a^n<\frac{1}{2}$ hay $0<\frac{a^n}{1-a^n}<1$.

Nên

$$\left|\frac{x^n}{n^2(1+x^n)}\right|=\frac{|x|^n}{n^2|1+x^n|}\leq\frac{a^n}{n^2(1-a^n)}\leq\frac{1}{n^2},\forall x\in[-a,a],n\geq N$$

Do chuỗi $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}$ hội tụ nên theo **Định lý 1.3** trang 164 ta có $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{n^2(1+x^n)}$ hội tụ đều trên $[-a,a]$.

c) Đặt

$$S_m(x) = \sum_{n=1}^{m} \frac{x^n}{n^2(1+x^n)}, S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2(1+x^n)} \text{ với } x \in [b, +\infty)$$

$S(x)$ hoàn toàn xác định theo câu a) và câu b).

Với một $\varepsilon > 0$.

Theo câu a) ta có một $L \in \mathbb{N}$ sao cho

$$\sup_{x\in[0,+\infty)} |S_m(x) - S(x)| < \frac{\varepsilon}{2} \ \forall m \geq L$$

hay nói cách khác

$$|S_m(x) - S(x)| < \frac{\varepsilon}{2} \ \forall x \in [0, +\infty), m \geq L \ \ (1)$$

Theo câu b) ta có một $M \in \mathbb{N}$ sao cho

$$\sup_{x\in[b,0)} |S_m(x) - S(x)| < \frac{\varepsilon}{2} \ \forall m \geq M$$

hay nói cách khác

$$|S_m(x) - S(x)| < \frac{\varepsilon}{2} \ \forall x \in [b, 0), m \geq M \ (2)$$

Từ $(1), (2)$ suy ra

$$\sup_{x\in[b,+\infty)} |S_m(x) - S(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon \ \forall m \geq \max\{M, L\}$$

d) Với mỗi $n \in \mathbb{N}$, ta có $|1 + x^n| \geq |x^n| - 1 \geq c^n - 1 > 0$

Do $c^n \to +\infty$ nên có $N \in \mathbb{N}$ sao cho với mọi $n \geq N, c^n > 2$ nghĩa là $\dfrac{c^n}{c^n - 1} < 2$.

Nên

$$\left|\frac{x^n}{n^2(1+x^n)}\right| = \frac{|x|^n}{n^2|1+x^n|} \leq \frac{|x|^n}{n^2(|x|^n - 1)} = \frac{1}{n^2} \cdot \left(1 + \frac{1}{|x|^n - 1}\right)$$

$$\leq \frac{1}{n^2} \cdot \left(1 + \frac{1}{c^n - 1}\right) = \frac{c^n}{n^2(c^n - 1)} \leq \frac{2}{n^2}, \forall x \in [-\infty, -c], n \geq N$$

Do chuỗi $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{n^2}$ hội tụ nên theo **Định lý 1.3** trang 164 ta có $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n^2(1+x^n)}$ hội tụ đều trên $(-\infty, -c]$.

7.7. Nếu

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2}$$

Chứng minh rằng

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3}$$

<u>**Bài giải:**</u>

Xét :

$$f_n(x) = \frac{\cos nx}{n^2}$$

Ta có :

$$|f_n(x)| = \left|\frac{\cos nx}{n^2}\right| \leq \frac{1}{n^2}, \forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$$

Và chuỗi

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

hội tụ nên suy ra chuỗi

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2}$$

hội tụ đều về hàm f trên $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

Đồng thời

$$f_n(x) = \frac{\cos nx}{n^2}$$

khả tích trên $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

Do đó :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} f_n(x)dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos nx}{n^2} dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin\ nx}{n^3} \Big|_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{1}{1^3} - \frac{1}{3^3} + \frac{1}{5^3} - \frac{1}{7^3} + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^3}$$

7.8. Nếu $f_n(x) = nxe^{-nx^2}$ và

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$$

Chứng minh rằng dãy hàm trên không hội tụ đều trên [0,1] và

$$\int_0^1 f(x)dx \neq \lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)dx$$

<u>Bài giải :</u>

Trước hết ta tính $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$, ta xét 2 trường hợp:

- Với $x = 0$ thì $f_n(0) = 0, \forall n \in \mathbb{N}$. Nên $f(0) = \lim_{n\to\infty} f_n(0) = 0$.
- Với $x > 0$ thì theo quy tắc L'Hopital, ta có :

$$\lim_{y\to\infty} y.x.e^{-yx^2} = \lim_{y\to\infty} \frac{yx}{e^{yx^2}} = \lim_{y\to\infty} \frac{(yx)'}{\left(e^{yx^2}\right)'} = \lim_{y\to\infty} \frac{x}{x^2.e^{yx^2}} = \lim_{y\to\infty} \frac{1}{x.e^{yx^2}} = 0$$

Do đó $\lim_{n\to\infty} n.x.e^{-nx^2} = 0$ nên $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$. Vậy ta có :

$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$ nên $f(x) \equiv 0, \forall x \in [0,1]$.

Chứng minh $\{f_n\}$ không hội tụ đều về f trên $[0,1]$.

Ta xét dãy $\{x_n\}$: $x_n = \frac{1}{\sqrt{n}}, \forall n \in \mathbb{N}$. Khi đó rõ ràng $x_n \in [0,1]$ và

$$f_n(x_n) = f_n\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) = n.\frac{1}{\sqrt{n}}.e^{-n.\frac{1}{n}} = \sqrt{n}.e^{-1} \xrightarrow{n\to\infty} \infty$$

Do đó ta có :

$$d(f_n, f) = \sup_{x\in[0,1]} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x\in[0,1]} f_n(x) \geq f_n(x_n) = \sqrt{n}.e^{-1} \xrightarrow{n\to\infty} \infty$$

Suy ra $\{f_n\}$ không hội tụ đều về f trên $[0,1]$.

Chứng minh $\int_0^1 f(x)dx \neq \lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)dx$

Thật vậy, do $f \equiv 0$ nên

$$\int_0^1 f(x)dx = 0$$

Mặt khác,

$$\int_0^1 f_n(x)dx = \int_0^1 nx.e^{-nx^2}dx = -\frac{1}{2}\left(\int e^{-nx^2}d(-nx^2)\right)\Big|_0^1 = -\frac{1}{2}e^{-nx^2}\Big|_0^1$$

$$= \frac{1}{2}(1 - e^{-n})$$

Mà ta có :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}(1 - e^{-n}) = \frac{1}{2} \neq 0$$

Vậy ta có điều phải chứng minh.

7.9. Nếu $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ và $f_n(x) = \frac{2nx}{1+n^2x^4}$.

Tìm $\int_0^1 f(x)dx$ và $\lim\limits_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)dx$

Dãy f_n có hội tụ đều về f trên $[0,1]$ không?

Bài giải:

Tìm $\int_0^1 f(x)dx$:

Với $x = 0$ thì $f_n(x) = 0$ nên

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$$

Với $x \neq 0$ thì

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{2nx}{1+n^2x^4} = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{\frac{1}{nx} + nx^3} = 0$$

Vậy $f(x) = 0$.

Vì $f \equiv 0$ nên

$$\int_0^1 f(x)dx = 0$$

Tìm $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)dx$:

Ta có :

$$\int_0^1 f_n(x)dx = \int_0^1 \frac{2nx}{1+n^2x^4}dx = \int_0^1 \frac{d(nx^2)}{1+(nx^2)^2} = \arctan nx^2\Big|_0^1 = \arctan n$$

Vì $\arctan n \xrightarrow{n\to\infty} \frac{\pi}{2}$

Do đó :

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)dx = \frac{\pi}{2}$$

Dãy $\{f_n\}$ không hội tụ đều về f trên [0,1].

Thật vậy.

Ta xét dãy $\{x_n\}$: $x_n = \frac{1}{\sqrt{n}}, \forall n \in \mathbb{N}$. Khi đó rõ ràng $x_n \in [0,1]$ và

$$f_n(x_n) = f_n\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) = \frac{2n.\frac{1}{\sqrt{n}}}{1 + n^2.\frac{1}{n^2}} = \sqrt{n} \xrightarrow{n\to\infty} \infty$$

Do đó ta có :

$$d(f_n, f) = \sup_{x\in[0,1]} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x\in[0,1]} f_n(x) \geq f_n(x_n) = \sqrt{n} \xrightarrow{n\to\infty} \infty$$

Suy ra $\{f_n\}$ không hội tụ đều về f trên [0,1].

7.10. Chứng minh rằng nếu $|x| < 1$ thì

$$\frac{1}{(1-x)^2} = 1 + 2x + 3x^2 + \cdots + (n+1)x^n + \cdots$$

$$\frac{2}{(1-x)^3} = 2 + 3.2x + 4.3x^2 + \cdots + (n+2)(n+1)x^n + \cdots$$

<u>Bài giải:</u>

Ta xét chuỗi lũy thừa

$$\sum_{n=1}^{\infty} x^n$$

Chuỗi này hội tụ với mọi $x \in (-1,1)$.

Đặt

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x^n$$

Khi đó

$$f(x) = \frac{1}{1-x}, \forall x \in (-1,1)$$

Theo **Hệ quả 3.4** thì f khả vi trên $(-1,1)$ và

$$f^{'}(x) = \frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} = 1 + 2x + 3x^2 + \cdots + (n+1)x^n + \cdots \ \forall x \in (-1,1)$$

Tiếp tục áp dụng **Hệ quả 3.4**, ta có f' khả vi trên $(-1,1)$ và

$$f^{''}(x) = \frac{2}{(1-x)^3} = \sum_{n=1}^{\infty} n(n-1)x^{n-2}$$
$$= 2 + 3.2x + 4.3x^2 + \cdots + (n+1)nx^{n-1} + \cdots$$

với mọi $x \in (-1,1)$.

7.11. Cho

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2(\ln n)^2}, -1 \le x \le 1$$

Tính $f^{'}(x)$ nếu có .

Bài giải:

Xét chuỗi lũy thừa $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ trong đó $a_n = \dfrac{1}{n^2(\ln n)^2}$.

Trước hết ta chứng minh $f(x)$ xác định.

Ta có :

$$\left|\frac{x^n}{n^2(\ln n)^2}\right| \leq \frac{1}{n^2} \ \forall x \in [-1,1], n \geq 3$$

mà chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ hội tụ, từ đó ta có $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^2(ln\, n)^2}$ hội tụ đều trên $[-1,1]$.

Tính $f^{'}(x)$.

Ta có :

$$\alpha = \lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{(n+1)^2}\cdot\frac{(\ln n)^2}{(\ln(n+1))^2} = \lim_{n\to\infty}\frac{(\ln n)^2}{(\ln(n+1))^2}$$

Theo quy tắc L'Hopital, ta có :

$$\lim_{x\to\infty}\frac{(\ln x)^2}{(\ln(x+1))^2} = \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{2\ln\ x}{x}}{\frac{2\ln(x+1)}{x+1}} = \lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{\ln(x+1)}\cdot\frac{x+1}{x}$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{\ln(x+1)} = \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{1+x}} = \lim_{x\to\infty}\frac{x+1}{x} = 1$$

Do đó $\alpha = 1$.

Nên suy ra chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ Có bán kính hội tụ là $R = 1$.

Do đó theo **hệ quả $\mathbf{3.4}$**, f khả vi trên $(-1,1)$ và

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{n(\ln n)^2}$$

7.12. Cho

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{2n+1}, -1 < x < 1$$

Tính $f'(x)$ nếu có .

<u>Bài giải:</u>

Xét chuỗi lũy thừa $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ trong đó $a_n = 0$ nếu n lẻ và $a_n = \frac{1}{n+1}$ nếu n chẵn.

Khi đó :

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_{2n} x^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{2n+1}, \forall x \in \mathbb{R}$$

Vì $\alpha = \lim_{n\to\infty} \sup \sqrt[n]{\frac{1}{2n+1}} = \lim_{n\to\infty} \sup \frac{1}{\sqrt[n]{2} . \sqrt[n]{n+\frac{1}{2}}} = 1$

Nên suy ra chuỗi $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ có bán kính hội tụ là 1.

Do đó theo **hệ quả $\mathbf{3.4}$**, f khả vi trên $(-1,1)$ và

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$$

Do đó :

$$f'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2k}{2k+1} x^{2k-1}$$

7.13. Tìm bán kính hội tụ và miền hội tụ của

1) $\sum_{n=0}^{\infty}\left(1+\sin\frac{n\pi}{2}\right)^n\frac{x^n}{2^n}$

2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^n}x^n$

3) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n)^n}{(n+1)^{n+1}}x^n$

4) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^n}$

5) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{n.3^n\ln n}$

6) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-3)^n}{n.5^n}$

7) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x+3)^n}{n^2}$

8) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!(x+3)^n}{n^n}$

9) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(x-5)^n}{n.3^n}$

Bài giải:

1) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\left(1+\sin\frac{n\pi}{2}\right)^n\frac{x^n}{2^n}$

Ta có :

$$\lim_{n\to\infty}\sup\sqrt[n]{\left|\left(1+\sin\frac{n\pi}{2}\right)^n\frac{1}{2^n}\right|}=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\sup\left(1+\sin\frac{n\pi}{2}\right)=1$$

+ Bán kính hội tụ $R=1$.

+ Miền hội tụ . Xét :

- $x=1$. Chuỗi trở thành

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(1+\sin\frac{n\pi}{2}\right)^n\frac{1}{2^n}$$

Ta có

$$\frac{\left(1+\sin\frac{n\pi}{2}\right)^n}{2^n}=\frac{\left(1+2\sin\frac{n\pi}{4}\cos\frac{n\pi}{4}\right)^n}{2^n}=\frac{\left(1+2\sin\frac{n\pi}{4}\cos\frac{n\pi}{4}\right)^n}{2^n}$$

$$=\frac{\left(\left(\sin\frac{n\pi}{4}\right)^2+\left(\cos\frac{n\pi}{4}\right)^2+2\sin\frac{n\pi}{4}\cos\frac{n\pi}{4}\right)^n}{2^n}$$

$$=\frac{\left(\sin\frac{n\pi}{4}+\cos\frac{n\pi}{4}\right)^{2n}}{2^n}=\left(\sin\frac{(n+1)\pi}{4}\right)^{2n}$$

Nên $\frac{\left(1+\sin\frac{n\pi}{2}\right)^n}{2^n}$ không hội tụ về 0.

Vậy $\sum_{n=0}^{\infty}\left(1+\sin\frac{n\pi}{2}\right)^n\frac{1}{2^n}$ phân kì.

- $x=-1$. Chuỗi trở thành

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(1+\sin\frac{n\pi}{2}\right)^n\frac{1}{2^n}$$

Theo trên ta có $(-1)^n\frac{\left(1+\sin\frac{n\pi}{2}\right)^n}{2^n}$ không hội tụ về 0.

Vậy $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{\left(1+\sin\frac{n\pi}{2}\right)^n}{2^n}$ phân kì.

Miền hội tụ của chuỗi đã cho: $(-1,1)$.

2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^n}x^n$

Ta có :

$$\lim_{n\to\infty}\sup\left|\frac{\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{n!}{n^n}}\right| = \lim_{n\to\infty}\sup\left|\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}\right| = \frac{1}{e}$$

+ Bán kính hội tụ $R = e$.

+ Miền hội tụ:

- $x = e$ .Chuỗi trở thành

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!\,e^n}{n^n}$$

Ta có :

$$\frac{\frac{(n+1)!\,e^{n+1}}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{n!\,e^n}{n^n}} = \frac{e}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} > 1 \forall n \in \mathbb{N}$$

Nên $\frac{n!e^n}{n^n}$ là dãy tăng nên không hội tụ về 0.

Vậy $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!\,e^n}{n^n}$ phân kì.

- Chuỗi trở thành

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n.\frac{n!\,e^n}{n^n}$$

Ta có :

$(-1)^n \cdot \frac{n!\,e^n}{n^n}$ không hội tụ về 0 cũng do $\frac{n!\,e^n}{n^n}$ là dãy tăng.

Nên $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n.\frac{n!\,e^n}{n^n}$ phân kì.

Vậy miền hội tụ : $(-e, e)$.

3) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)^n}{(n+1)^{n+1}} x^n$

Ta có

$$\lim_{n\to\infty} \sup \sqrt[n]{\left|\frac{(2n)^n}{(n+1)^{n+1}}\right|} = \lim_{n\to\infty} \sup \frac{2n}{n+1} \cdot \frac{1}{\sqrt[n]{n+1}} = 2$$

+ Bán kính hội tụ $R = \frac{1}{2}$.

+ Miền hội tụ :

- Xét $x = \frac{1}{2}$. Chuỗi trở thành

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{(n+1)^{n+1}}$$

Ta có :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n^n}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{1}{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} = \frac{1}{e}$$

Mà

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1}$$

phân kì nên theo tiêu chuẩn so sánh ta có :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{(n+1)^{n+1}}$$

phân kì.

- Xét $x = -\frac{1}{2}$. Chuỗi trở thành

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{n^n}{(n+1)^{n+1}}$$

Ta có :

Vì hàm $\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$ nghịch biến trên $(0,\infty)$ nên

$$n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) < n\ln\left(1+\frac{1}{n+1}\right) < (n+1)\ln\left(1+\frac{1}{n+1}\right)$$

Suy ra :

$$(n+1)\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < (n+1)\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}$$

$$< (n+2)\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} \ \forall n$$

hay

$$\frac{n^n}{(n+1)^{n+1}} > \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+2)^{n+2}} \ \forall n$$

Nên $\left\{\frac{n^n}{(n+1)^{n+1}}\right\}$ là dãy dương giảm và

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^n}{(n+1)^{n+1}} = \lim_{n\to\infty}\frac{n^n}{(n+1)^n}\cdot\frac{1}{n+1} = \frac{1}{e}\cdot 0 = 0$$

Suy ra $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{n^n}{(n+1)^{n+1}}$ hội tụ.

Vậy miền hội tụ $\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$.

4) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^n}$

Ta có :

$$\lim_{n\to\infty}\sup\sqrt[n]{\left|\frac{1}{n^n}\right|}=\lim_{n\to\infty}\sup\frac{1}{n}=0$$

Vậy miền hội tụ là $\mathbb{R}$.

5) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{n.3^n\ln n}$

Ta có

$$\lim_{n\to\infty}\sup\sqrt[n-1]{\left|\frac{1}{n.3^n.\ln n}\right|}=\frac{1}{3}.\lim_{n\to\infty}\sup\frac{1}{\sqrt[n-1]{n}\sqrt[n-1]{\ln n}}=\frac{1}{3}$$

+ Bán kính hội tụ $R=3$.

+ Miền hội tụ :

- Xét $x=3$. Chuỗi trở thành

$$\frac{1}{3}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n.\ln n}$$

Đặt $f(x)=\dfrac{1}{x.\ln x}$, $x\in[2,\infty)$.

Có $f(x)>0\ \forall x\in[2,\infty)$, f là hàm giảm và

$$\int_{2}^{+\infty}\frac{1}{x.\ln x}dx=\int_{\ln 2}^{+\infty}\frac{1}{u}du$$

Vậy $\displaystyle\frac{1}{3}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n.\ln n}$ phân kì theo tiêu chuẩn tích phân.

- Xét $x=-3$.Chuỗi trở thành

$$\frac{1}{3}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n.\ln n}$$

Chuỗi này hội tụ theo tiêu chuẩn Leibnitz.

Vậy miền hội tụ : $[-3,3)$.

6) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-3)^n}{n.5^n}$

Ta có :

$$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{(x-3)^n}{n.5^n} = \sum_{n=3}^{\infty} \frac{\left(\frac{x-3}{5}\right)^n}{n}$$

Ta có :

$$\lim_{n\to\infty} \sup \sqrt[n]{\left|\frac{1}{n}\right|} = 1$$

+Xét khi $\frac{x-3}{5} = 1$.

Lúc đó chuỗi trở thành $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$, chuỗi này phân kì.

+Xét khi $\frac{x-3}{5} = -1$.

Lúc đó chuỗi trở thành $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \cdot \frac{1}{n}$, chuỗi này hội tụ theo tiêu chuẩn Leibnitz.

Vậy chuỗi đã cho hội tụ khi và chỉ khi $-1 \leq \frac{x-3}{5} < 1$ hay $-2 \leq x < 8$.

Vậy miền hội tụ: $[-2,8)$.

7) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+3)^n}{n^2}$

Ta có :

$$\lim_{n\to\infty} \sup \sqrt[n]{|n^2|} = \lim_{n\to\infty} \sup\left(\sqrt[n]{n}\right)^2 = 1$$

Mặt khác $-1 < x+3 < 1$ tương đương với $-4 < x < -2$.

- Khi $x = -4$. Chuỗi trở thành

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$$

Chuỗi này hội tụ theo tiêu chuẩn Leibnitz.

- Khi $x = -2$. Chuỗi trở thành

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

hội tụ theo định lý chuỗi điều hòa (trang 145).

Vậy miền hội tụ : $(-4, -2)$.

8) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!\,(x+3)^n}{n^n}$

Theo câu 2, chuỗi

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!\,(x+3)^n}{n^n}$$

Hội tụ khi và chỉ khi $-e < x + 3 < e$ hay $-e - 3 < x < e - 3$.

Vậy miền hội tụ $(-e - 3, e - 3)$.

9) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(x-5)^n}{n.3^n}$

Tương tự câu 6. Ta có:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(x-5)^n}{n.3^n} = \sum_{n=1}^{\infty} -\frac{\left(\frac{5-x}{3}\right)^n}{n}$$

Chuỗi hội tụ khi và chỉ khi $-1 \le \frac{5-x}{3} < 1$ hay $2 < x \le 8$.

Vậy miền hội tụ : $(2,8]$.

7.14. Cho $f_n(x) = n^2x(1-x^2)^n$, $0 \leq x \leq 1$. Chứng tỏ rằng (f_n) hội tụ từng điểm về hàm 0. Tính

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)dx$$

<u>Bài giải:</u>

Chứng tỏ (f_n) hội tụ từng điểm về hàm 0.

Ta có $f_n(0) = 0$ và $f_n(1) = 0$ với mọi $n \in \mathbb{N}$. Nên (f_n) hội tụ từng điểm về hàm 0 tại 0 và 1.

Xét $0 < x < 1$. Đặt

$$\frac{1}{1-x^2} - 1 = c > 0$$

Lúc đó :

$$1 - x^2 = \frac{1}{1+c}$$

Ta có :

$$n^2(1-x^2)^n = \frac{n^2}{(1+c)^n} \leq \frac{n^2}{1 + nc + \frac{n(n-1)c^2}{2} + \frac{n(n-1)(n-2)c^3}{6}}$$

$$\leq \frac{n^2}{\frac{n(n-1)(n-2)c^3}{6}} \ \forall n \geq 3$$

Cho $n \to \infty$ ta có :

$$\frac{n^2}{\frac{n(n-1)(n-2)c^3}{6}} \to 0$$

Nên theo nguyên lý kẹp ta có $n^2(1-x^2)^n \to 0$ khi $n \to \infty$.

Vậy ta có (f_n) hội tụ điểm về hàm 0.

Tính $\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)dx$:

Đặt $1 - x^2 = u$. Dùng kĩ thuật đổi biến, ta có :

$$\int_0^1 n^2 x(1-x^2)^n dx = \frac{n^2}{2}\int_0^1 u^n du = \frac{n^2}{2}\left(\frac{u^{n+1}}{n+1}\right)\Big|_0^1 = \frac{n^2}{2(n+1)}$$

Suy ra :

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)dx = \infty$$

7.15. Cho (f_n) là một dãy hàm hội tụ đều về hàm f trên D, $x \in D'$. Giả sử

$$a_n = \lim_{t\to x} f_n(t)$$

tồn tại với mọi $n \in \mathbb{N}$.

Chứng minh rằng (a_n) là dãy hội tụ và

$$\lim_{t\to x} f(t) = \lim_{t\to x} a_n$$

<u>Bài giải:</u>

Chứng minh (a_n) hội tụ.

Ta sẽ chứng minh (a_n) Cauchy. Thật vậy, với $\varepsilon > 0$, có $N \in \mathbb{N}$ sao cho

$$\sup_{t\in D}|f_n(t) - f_m(t)| < \frac{\varepsilon}{2}\ \forall m, n > N$$

Xét $m, n > N$ bất kì, do

$$\lim_{t\to x} f_m(t) = a_m \text{ và } \lim_{t\to x} f_n(t) = a_n$$

Nên

$$|a_m - a_n| \le \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$

Từ điều trên, ta có (a_n) là dãy Cauchy nên hội tụ về a.

Chứng minh $\lim_{t\to x} f(t) = a$

Với $\varepsilon > 0$, tồn tại $N \in \mathbb{N}$ sao cho

$$\sup_{t\in D}|f_n(t) - f(t)| < \frac{\varepsilon}{3}\ \forall n > N$$

Có $M \in \mathbb{N}$ sao cho

$$|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{3}\ \forall n > M$$

Gọi $l = \max\{M, N\} + 1$

Có $\delta > 0$ sao cho $|f_l(t) - a_l| < \frac{\varepsilon}{3}\ \forall t \in D \cap B(x,\delta)$

Lấy $t \in D$, và $t \in B(x,\delta)$. Ta có :

$$|f(t) - a| \le |f(t) - f_l(t)| + |f_l(t) - a_l| + |a_l - a| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$$

Ta có điều phải chứng minh.

7.16. (Định lý Dini) Cho (f_n) là một dãy hàm liên tục, hội tụ từng điểm về hàm số liên tục f trên $[a,b]$. Chứng tỏ rằng nếu $f_n(x) > f_{n+1}(x)$, $\forall x \in [a,b]$, $n \in \mathbb{N}$, thì (f_n) hội tụ đều trên $[a,b]$.

<u>**Bài giải:**</u>

Ta chứng minh bằng phản chứng.

Giả sử f_n không hội tụ đều về f, thì $\exists \varepsilon > 0$, $\forall N \in \mathbb{N}$, $\exists n > N$ sao cho $d(f_n, f) \ge \varepsilon$.

Nên $\exists \varepsilon > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$, tồn tại một $N > n$ và một $x \in [a,b]$ sao cho $f_N(x) - f(x) \ge \varepsilon$

Ta xây dựng dãy số như sau:

$n = 1$ có số n_1 và $x_1 \in [a,b]$ sao cho $f_{n_1}(x_1) - f(x_1) \ge \varepsilon$

$n = n_1$ có số $n_2 > n_1$ và $x_2 \in [a, b]$ sao cho $f_{n_2}(x_2) - f(x_2) \geq \varepsilon$

…

$n = n_{k-1}$ có số $n_k > n_{k-1}$ và $x_k \in [a, b]$ sao cho $f_{n_k}(x_k) - f(x_k) \geq \varepsilon$

...

Dãy (x_k) trong $[a, b]$ nên có dãy con $\left(x_{k_l}\right)$ hội tụ về $x \in [a, b]$

Do $f_n(x) \to f(x)$ khi $n \to \infty$ nên có N đủ lớn sao cho $\forall n \geq N$, $f_n(x) - f(x) < \frac{\varepsilon}{2}$.

Ta có $n_{k_N} \geq N$ nên

$$f_{n_{k_N}}(x) - f(x) < \frac{\varepsilon}{2} \ (1)$$

Mặt khác ta lại có $f_{n_{k_N}}\left(x_{k_l}\right) - f\left(x_{k_l}\right) \geq f_{n_{k_l}}\left(x_{k_l}\right) - f\left(x_{k_l}\right) \geq \varepsilon$. Cho $l \to +\infty$, ta có :

$$f_{n_{k_N}}(x) - f(x) \geq \varepsilon \ (2)$$

Rõ ràng (1) và (2) mâu thuẫn nhau nên ta có điều phải chứng minh.

7.17. Cho $\phi: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ là hàm tuần hoàn với chu kỳ 2 sao cho $\phi(x) = x$ khi $0 \leq x \leq 1$ và $\phi(x) = 2 - x$ khi $1 \leq x \leq 2$.

Đặt

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n \phi(4^n x)$$

Chứng minh rằng f là hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ nhưng không khả vi tại mọi điểm trên $\mathbb{R}$.

<u>Bài giải:</u>

Nhận thấy $\phi(x) = 1 - |1 - x|$ $\forall x \in [0,2]$ nên liên tục trên $[0,2]$. Mặt khác f là hàm tuần hoàn chu kỳ 2 nên ta có f liên tục trên $\mathbb{R}$.

Xét dãy các hàm:

$$f_n = \left(\frac{3}{4}\right)^n \phi(4^n x)$$

liên tục trên $\mathbb{R}$, ta có $\left||f_n|\right| \le \left(\frac{3}{4}\right)^n = a_n$, $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = 4$ nên $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ hội tụ đều về f. Suy ra f cũng là hàm liên tục trên $\mathbb{R}$.

Ta chứng minh tại mọi $x \in \mathbb{R}$ thì f đều không khả vi. Thật vậy, giả sử tồn tại $x \in \mathbb{R}$ sao cho:

$$\lim_{y \to x} \frac{f(y) - f(x)}{y - x} = L$$

Đầu tiên ta chứng minh bất đẳng thức sau:

$$|\phi(x) - \phi(y)| \le |x - y|$$

Thật vậy, vì $0 \le \phi(t) \le 1\ \forall t \in \mathbb{R}$ nên nếu $|x - y| \ge 1$ thì bất đẳng thức hiển nhiên đúng. Ta xét khi $|x - y| < 1$. Giả sử $x \le y$ và ta có $y - 1 < x \le y$.

Vì luôn tồn tại $T \in \mathbb{Z}$ sao cho $2T \le x < 2T + 2$ (chọn $T = \left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor \in \mathbb{Z}$) nên ta đặt $a = x - 2T, b = y - 2T$ ($a \in [0,2]$ và $b - 1 < a \le b$), bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với:

$$|\phi(a) - \phi(b)| \le |a - b|\ \forall a \in [0,2], b \in [a, a + 1) \subset [a, 2] \cup [2,3)$$

- Nếu $b \le 2$, ta có

  $|\phi(a) - \phi(b)| = |(1 - |1 - a|) - (1 - |1 - b|)| = \left||1 - a| - |1 - b|\right|$
  $= \max\{|1 - a| - |1 - b|, |1 - b| - |1 - a|\} \le |a - b|$

- Nếu $b \in (2,3)$ thì $a \in (1,2)$, ta có $\phi(b) = \phi(b - 2) = b - 2$ và $\phi(a) = 2 - a$.

  Suy ra $|\phi(a) - \phi(b)| \le \phi(a) + \phi(b) = b - 2 + 2 - a = |b - a|$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh.

Xét dãy

$$y_n = x + \frac{t_n}{2^{2n+1}}$$

Với $t_n = \pm 1$ được xác định như sau:

(i) $t_n = 1$ nếu $\{4^n x\} \leq \frac{1}{2}$

(ii) $t_n = -1$ nếu $\{4^n x\} > \frac{1}{2}$

(Ký hiệu $\{x\}$ chỉ phần lẽ của số thực x, được tính bằng: $\{x\} = x - \lfloor x \rfloor$)

Ta sẽ chứng minh với cách chọn t_n như trên thì điều sau được thỏa mãn:

$$\left|\phi\left(4^n x + \frac{t_n}{2}\right) - \phi(4^n x)\right| = \frac{1}{2}$$

Thật vậy, ta có :

Trường hợp 1: $\{4^n x\} \leq \frac{1}{2}$

Khả năng (1.a): $\lfloor 4^n x \rfloor = 2d$ với $d \in \mathbb{Z}$

Vì $0 \leq \{4^n x\} \leq \frac{1}{2}$ nên ta có :

$$\phi(4^n x) = \phi(4^n x - 2d) = \phi(\{4^n x\}) = \{4^n x\}$$

Và

$$\phi\left(4^n x + \frac{t_n}{2}\right) = \phi\left(4^n x + \frac{1}{2} - 2d\right) = \phi\left(\{4^n x\} + \frac{1}{2}\right) = \{4^n x\} + \frac{1}{2}$$

Suy ra

$$\left|\phi\left(4^n x + \frac{t_n}{2}\right) - \phi(4^n x)\right| = \frac{1}{2}$$

Khả năng (1.b): $\lfloor 4^n x \rfloor = 2d + 1$ với $d \in \mathbb{Z}$

Vì $0 \leq \{4^n x\} < \frac{1}{2}$ nên ta có :

$$\phi(4^n x) = \phi(4^n x - 2d) = \phi(\{4^n x\} + 1) = 1 - \{4^n x\}$$

Và

$$\phi\left(4^n x + \frac{t_n}{2}\right) = \phi\left(4^n x + \frac{1}{2} - 2d\right) = \phi\left(\{4^n x\} + \frac{3}{2}\right) = 2 - \left(\{4^n x\} + \frac{3}{2}\right)$$
$$= \frac{1}{2} - \{4^n x\}$$

Suy ra

$$\left|\phi\left(4^n x + \frac{t_n}{2}\right) - \phi(4^n x)\right| = \frac{1}{2}$$

Trường hợp 2: $\{4^n x\} > \frac{1}{2}$

Khả năng (2.a): $\lfloor 4^n x \rfloor = 2d$ với $d \in \mathbb{Z}$

Vì $\frac{1}{2} \leq \{4^n x\} \leq 1$ nên ta có

$$\phi(4^n x) = \phi(4^n x - 2d) = \phi(\{4^n x\}) = \{4^n x\}$$

Và

$$\phi\left(4^n x + \frac{t_n}{2}\right) = \phi\left(4^n x - \frac{1}{2} - 2d\right) = \phi\left(\{4^n x\} - \frac{1}{2}\right) = \{4^n x\} - \frac{1}{2}$$

Suy ra

$$\left|\phi\left(4^n x + \frac{t_n}{2}\right) - \phi(4^n x)\right| = \frac{1}{2}$$

Khả năng (2.b): $\lfloor 4^n x \rfloor = 2d + 1$ với $d \in \mathbb{Z}$

Vì $\frac{1}{2} \leq \{4^n x\} < 1$ nên ta có :

$$\phi(4^n x) = \phi(4^n x - 2d) = \phi(\{4^n x\} + 1) = 1 - \{4^n x\}$$

Và

$$\phi\left(4^n x + \frac{t_n}{2}\right) = \phi\left(4^n x - \frac{1}{2} - 2d\right) = \phi\left(\{4^n x\} + \frac{1}{2}\right) = 2 - \left(\{4^n x\} + \frac{1}{2}\right)$$
$$= \frac{3}{2} - \{4^n x\}$$

Suy ra

$$\left|\phi\left(4^n x + \frac{t_n}{2}\right) - \phi(4^n x)\right| = \frac{1}{2}$$

Vậy ta có :

$$\left|\phi\left(4^n x + \frac{t_n}{2}\right) - \phi(4^n x)\right| = \frac{1}{2}\ \forall n \in \mathbb{N}$$

Mặt khác ta cũng có $|y_n - x_n| \leq \frac{1}{2^{2n+1}}$. Suy ra $\lim_{n\to\infty} y_n = x$.

Ta có phép biến đổi sau:

$$\left|\frac{f(y_n) - f(x)}{y_n - x}\right| = 2^{2n+1}.\left|\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^k\left(\phi(4^k x + t_n.2^{2k-2n-1}) - \phi(4^k x)\right)\right|$$

$$= 2^{2n+1}\left|\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{3}{4}\right)^k\left(\phi(4^k x + t_n 2^{2k-2n-1}) - \phi(4^k x)\right)\right.$$

$$\left. + \left(\frac{3}{4}\right)^n\left(\phi\left(4^n x + \frac{t_n}{2}\right) - \phi(4^n x)\right)\right|$$

(Vì với $k \geq n+1$ thì

$\phi(4^k x + t_n 2^{2k-2n-1}) - \phi(4^k x) = \phi\left(4^k x + 2.t_n 2^{2(k-n-1)}\right) - \phi(4^k x) = 0$ do ϕ tuần hoàn chu kỳ 2)

$$\geq 2^{2n+1}\left(\left|\left(\frac{3}{4}\right)^n\left(\phi\left(4^n x + \frac{t_n}{2}\right) - \phi(4^n x)\right)\right|\right.$$

$$\left. - \left|\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{3}{4}\right)^k\left(\phi(4^k x + t_n 2^{2k-2n-1}) - \phi(4^k x)\right)\right|\right)$$

$$\geq 2^{2n+1}\left(\left(\frac{3}{4}\right)^n.\frac{1}{2} - \sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{3}{4}\right)^k\left|t_n 2^{2k-2n-1}\right|\right) = 2^{2n+1}\left(\frac{3^n}{2^{2n+1}} - \sum_{k=0}^{n-1} 3^k 2^{-(2n+1)}\right)$$

$$= 2^{2n+1}\left(\frac{3^n}{2^{2n+1}} - 2^{-(2n+1)}\frac{3^n - 1}{2}\right) = \frac{3^n + 1}{2}\ (*)$$

Đặt $u_n = \frac{f(y_n)-f(x)}{y_n - x}$ thì do f khả vi tại x nên dãy $\{u_n\}$ hội tụ về $L \in \mathbb{R}$. Nhưng $(*)$ lại cho thấy u_n không bị chặn. Điều này gây mâu thuẫn và kết thúc chứng minh.

7.18. Cho (f_n) và (g_n) là hai dãy hàm hội tụ đều trên D. Chứng minh rằng $(f_n + g_n)$ cũng hội tụ đều trên D.

Hơn nữa, giả sử thêm rằng (f_n) và (g_n) là hai dãy hàm bị chặn. Chứng tỏ rằng dãy hàm $(f_n g_n)$ cũng hội tụ đều trên D.

Bài giải:

Chứng minh $(f_n + g_n)$ hội tụ đều trên D.

Cho $\varepsilon > 0$, có $N \in \mathbb{N}$ sao cho

$$\sup_{x\in D}|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{4} \text{ và } \sup_{x\in D}|g_n(x) - g(x)| < \frac{\varepsilon}{4} \ \forall n > N$$

Với mọi $n > N$, ta có :

$$|(f_n + g_n)(x) - (f + g)(x)| \le |f_n(x) - f(x)| + |g_n(x) - g(x)| < \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4}$$
$$= \frac{\varepsilon}{2} \ \forall x \in D$$

Suy ra

$$\sup_{x\in D}|(f_n + g_n)(x) - (f + g)(x)| \le \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$

Chứng tỏ rằng dãy hàm $(f_n g_n)$ cũng hội tụ đều trên D.

Do (f_n) và (g_n) là hai dãy hàm bị chặn nên có $C_1 > 0$ sao cho

$$\sup_{x\in D}|\, f_n(x)| < C_1 \text{ và } \sup_{x\in D}|\, g_n(x)| < C_1 \ \forall n \in \mathbb{N}$$

Cho $\varepsilon > 0$, có $N \in \mathbb{N}$ sao cho

$$\sup_{x\in D}|\, g_n(x) - g(x)| < \frac{\varepsilon}{4C_1} \ \forall n \ge N$$

Lúc đó, ta có :

$$\sup_{x\in D}|g(x)| \le \sup_{x\in D}|g_N(x) - g(x)| + \sup_{x\in D}|g_N(x)| < \frac{\varepsilon}{4C_1} + C_1$$

Nên có $C_2 > 0$ sao cho $\sup_{x\in D}|g(x)| < C_2$

Có $M \in \mathbb{N}$ sao cho

$$\sup_{x\in D}|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{4C_2} \ \forall n \ge M$$

Đặt $\max\{M, N\} = L$. Với mọi $n > L$ ta có :

$$\begin{aligned}|f_n(x)g_n(x) - f(x)g(x)| &= \left|f_n(x)\big(g_n(x) - g(x)\big) + g(x)\big(f_n(x) - f(x)\big)\right| \\ &\le |f_n(x)||g_n(x) - g(x)| + |g(x)||f_n(x) - f(x)| < C_1\frac{\varepsilon}{4C_1} + C_2\frac{\varepsilon}{4C_2} \\ &= \frac{\varepsilon}{2} \forall x \in D\end{aligned}$$

Nên ta có $\sup_{x\in D}|f_n(x)g_n(x) - f(x)g(x)| \le \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$

Vậy $(f_n.g_n)$ hội tụ đều về $f.g$ trên D.

7.19. Xét

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{khi } x < \dfrac{1}{n+1} \\ \sin^2\dfrac{\pi}{x} & \text{khi } \dfrac{1}{n+1} \le x \le \dfrac{1}{n} \\ 0 & \text{khi } \dfrac{1}{n} < x \end{cases}$$

Chứng tỏ rằng (f_n) hội tụ từng điểm nhưng không hội tụ đều về một hàm liên tục.

Bài giải:

Chứng minh (f_n) hội tụ từng điểm :

Với $f_n(0) = 0\ \forall n \in \mathbb{N}$ nên $\big(f_n(0)\big)$ hội tụ.

Với $x \neq 0$, có $N \in \mathbb{N}$ sao cho $\frac{1}{N} < x$

Lúc đó, $\forall n > N$ ta có $\frac{1}{n} < \frac{1}{N} < x$ nên $f_n(x) = 0$ nên ta cũng có $\big(f_n(x)\big)$ hội tụ.

Chứng minh (f_n) không hội tụ đều về hàm 0.

Ta có :

$$d(f_n, 0) \geq \left|f_n\left(\frac{1}{n+\frac{1}{2}}\right)\right| = \left|\sin^2\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi\right)\right| = 1\ \forall n \in \mathbb{N}$$

Điều này suy ra (f_n) không hội tụ đều về hàm 0.

7.20. Chứng tỏ rằng chuỗi

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n(x^2+n)}{n^2}$$

không hội tụ tuyệt đối tại mọi điểm $x \in \mathbb{R}$ nhưng là chuỗi hàm hội tụ đều trên mọi khoảng bị chặn $[a, b]$.

<u>Bài giải:</u>

Chứng tỏ chuỗi đã cho không hội tụ tuyệt đối tại mọi điểm $x \in \mathbb{R}$.

Cho $x \in \mathbb{R}$

Ta có :

$$\sum_{n=1}^{m} \frac{(x^2+n)}{n^2} \geq \sum_{n=1}^{m} \frac{1}{n}$$

Mà chuỗi

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty$$

Nên

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n(x^2+n)}{n^2}$$

không hội tụ tuyệt đối tại mọi điểm $x \in \mathbb{R}$

Chứng minh chuỗi hàm hội tụ đều trên mọi khoảng bị chặn $[a, b]$.

Gọi $S_m(x) = \sum_{n=1}^{m} \frac{(-1)^n(x^2+n)}{n^2}, x \in \mathbb{R}$

Ta có $S_m(x) = \sum_{i=1}^{m} \frac{(-1)^n}{n^2} x^2 + \sum_{i=1}^{m} \frac{(-1)^n}{n} = x^2 \left(\sum_{i=1}^{m} \frac{(-1)^n}{n^2} \right) + \sum_{i=1}^{m} \frac{(-1)^n}{n}$

Đặt

$$u_m = \sum_{i=1}^{m} \frac{(-1)^n}{n^2}, v_m = \sum_{i=1}^{m} \frac{(-1)^n}{n}$$

Thì theo tiêu chuẩn Leibnitz $u_m \to u, v_m \to v$ khi $m \to +\infty$ và $S_m(x) = u_m x^2 + v_m$. Đặt $S(x) = ux + v$. Do tồn tại $C > 0$ sao cho $x^2 < C\ \forall x \in [a, b]$ nên ta có

$$d(S_m, S) = \sup_{x \in [a,b]} |(u_m - u)x^2 + (v_m - v)| \leq |u_m - u|C + |v_m - v|$$

Nên $d(S_m, S) \to 0$ khi $m \to +\infty$, nghĩa là chuỗi số đã cho hội tụ đều trên $[a, b]$.

7.21. Khai triển thành chuỗi Fourier các hàm $f(x) = x^2$, $g(x) = x$ và $h(x) = |x|$ trên đoạn $[-\pi, \pi]$.

<u>**Bài giải:**</u>

Khai triển hàm $g(x) = x$ trên đoạn $[-\pi, \pi]$.

Ta có :

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x \cos 0x\, dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x dx = 0$$

và với $n \geq 1$,

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x \cos nx\, dx \text{ và } b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x \sin nx\, dx$$

Dùng tích phân từng phần ta có :

$$\int_{-\pi}^{\pi} x\cos nx\,dx = \frac{x}{n}\sin nx\Big|_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{n}\sin nx dx = \frac{1}{n^2}\cos nx\Big|_{-\pi}^{\pi} = 0$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} x\sin nx\,dx = -\frac{x}{n}\cos nx\Big|_{-\pi}^{\pi} + \int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{n}\cos nx dx = -\frac{2\pi}{n}\cos n\pi$$

Vậy suy ra:

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\cos nx\,dx = 0$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\sin nx\,dx = -\frac{2}{n}\cos n\pi$$

Nên

$$g(x) = -\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2}{n}\cos n\pi\,.\sin nx$$

Khai triển hàm $f(x) = x^2$ trên đoạn $[-\pi, \pi]$.

Ta có:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2\cos 0x\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2\,dx = \frac{2\pi^2}{3}$$

và với $n \geq 1$,

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2\cos nx\,dx \text{ và } b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2\sin nx\,dx$$

Dùng tích phân từng phần ta có:

$$\int_{-\pi}^{\pi} x^2 \cos nx\, dx = \frac{x^2}{n}\sin nx \Big|_{-\pi}^{\pi} - \frac{2}{n}\int_{-\pi}^{\pi} x \sin nx\, dx = \frac{4\pi}{n^2}\cos n\pi$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} x^2 \sin nx\, dx = -\frac{x^2}{n}\cos nx \Big|_{-\pi}^{\pi} + \frac{2}{n}\int_{-\pi}^{\pi} x \cos nx\, dx = 0$$

Vậy suy ra :

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2 \cos nx\, dx = \frac{4}{n^2}\cos n\pi$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2 \sin nx\, dx = 0$$

Nên

$$f(x) = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4}{n^2}\cos n\pi \,.\cos nx$$

Khai triển hàm $h(x) = |x|$ trên đoạn $[-\pi, \pi]$.

Ta có:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |x| \cos 0x\, dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} -x\, dx + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} x\, dx = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi$$

và với $n \geq 1$,

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |x| \cos nx\, dx$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |x| \sin nx\, dx$$

Dùng kết quả tính toán hàm $g(x)$, ta suy ra :

$$\int_{-\pi}^{\pi} |x| \cos nx \, dx = \int_{-\pi}^{0} -x \cos nx \, dx + \int_{0}^{\pi} x \cos nx \, dx$$

$$= 2\int_{0}^{\pi} x \cos nx \, dx - \int_{-\pi}^{\pi} x \cos nx \, dx = 2\left(\frac{x}{n}\sin nx + \frac{1}{n^2}\cos nx\right)\Big|_0^{\pi}$$

$$= \frac{2(\cos n\pi - 1)}{n^2}$$

Và $\int_{-\pi}^{\pi} |x| \sin nx \, dx = \int_{-\pi}^{0} -x \sin nx \, dx + \int_{0}^{\pi} x \sin nx \, dx$

$$= 2\int_{0}^{\pi} x \sin nx \, dx - \int_{-\pi}^{\pi} x \sin nx \, dx = 2\left(-\frac{x}{n}\cos nx + \frac{\sin nx}{n^2}\right)\Big|_0^{\pi} + \frac{2\pi}{n}\cos n\pi$$

$$= 0$$

Vậy suy ra:

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |x| \cos nx \, dx = \frac{2(\cos n\pi - 1)}{n^2} \text{ và } b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |x| \sin nx \, dx = 0$$

Nên

$$h(x) = \frac{\pi}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2(\cos n\pi - 1)}{n^2} . \cos nx$$

7.22. Chứng tỏ rằng hàm

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$$

liên tục trên miền $x > 1$ và có đạo hàm mọi cấp trên miền này.

<u>**Bài giải:**</u>

Theo bài **7.5** ta thấy rằng chuỗi

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$$

hội tụ đều trên mỗi khoảng $[x_0, \infty)$, $x_0 > 1$ (*). Nên $f(x)$ liên tục trên $(1, \infty)$.

Đặt $f_n = \dfrac{1}{n^x}$, ta có: $f_n' = \dfrac{-\ln n}{n^x}$.

Xét chuỗi $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{-\ln n}{n^x} = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^x}$

Xét một $x_0 > 1$.

Ta có :

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\ln t}{t^\alpha} = \lim_{t\to\infty} \frac{\frac{1}{t}}{\alpha t^{\alpha-1}} = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{\alpha t^\alpha} = 0 \text{ (Do } \alpha > 1 \text{ áp dụng quy tắc L'Hopital)}$$

Nên

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{n^{\frac{x_0-1}{2}}} = 0$$

Vậy có số $N \in \mathbb{N}$ sao cho $\ln n < n^{\frac{x_0-1}{2}}$ với mọi $n \geq N$

Ta có :

$$\frac{\ln n}{n^x} < \frac{n^{\frac{x_0-1}{2}}}{n^{x_0}} = \frac{1}{n^{\frac{x_0+1}{2}}} \ \forall x \geq x_0, n \geq N$$

Mà $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{x_0+1}{2}}}$ hội tụ nên $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{-\ln n}{n^x}$hội tụ đều trên mọi khoảng $[x_0, \infty), x_0$

$> 1(**)$

Từ (*) và (**), áp dụng **Mệnh đề 2.3** (trang 169), ta được f có đạo hàm liên tục trên $(1, \infty)$ và

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-\ln n}{n^x} \ \forall x \in (0, \infty)$$

Giả sử hàm số có đạo hàm liên tục cấp k,

$$f^{(k)}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n^{(k)}(x) = (-1)^k \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln^k(n)}{n^x}$$

và $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln^k(n)}{n^x}$hội tụ đều trên mỗi khoảng $[x_0, \infty), x_0 > 1$.

Ta có :

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n^{(k+1)}(x) = (-1)^{k+1} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln^{k+1}(n)}{n^x}$$

Tương tự như trên, xét một $x_0 > 1$.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln^{k+1}(n)}{n^{\frac{x_0-1}{2}}} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{\ln n}{n^{\frac{x_0-1}{2(k+1)}}} \right)^{k+1} = 0$$

Nên có số $M \in \mathbb{N}$ sao cho $\ln^{k+1}(n) < n^{\frac{x_0-1}{2}}$ với mọi $n \geq M$

$$\frac{\ln^{k+1}(n)}{n^x} < \frac{n^{\frac{x_0-1}{2}}}{n^{x_0}} = \frac{1}{n^{\frac{x_0+1}{2}}} \ \forall x \geq x_0, n \geq M$$

Mà $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{x_0+1}{2}}}$là chuỗi hội tụ nên$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{ln^{k+1}(n)}{n^x}$hội tụ đều trên mọi khoảng $[x_0, \infty)$, $x_0 > 1$.

Vậy f có đạo hàm liên tục cấp $k+1$ trên $(1,\infty)$ và

$$f^{(k+1)}(x) = (-1)^{k+1}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln^{k+1}(n)}{n^x}\ \forall x \in (0,\infty)$$

Ta có điều phải chứng minh.

7.23. Chứng tỏ rằng hàm

$$f(x) = \sum_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi n^2 x}$$

xác định và thuộc lớp C^∞ trên miền $x > 0$.

<u>**Bài giải:**</u>

Thực ra ta chỉ cần chứng minh cho hàm

$$g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-n^2 x}\ \forall x > 0$$

Vì $f(x) = 2g(\pi x) - 1\ \forall x > 0$.

Đầu tiên ta chứng minh g xác định.

Với một $x > 0$. Có số $N \in \mathbb{N}$ sao cho $Nx \geq 1$. Ta có

$$\frac{1}{e^{n^2 x}} \leq \frac{1}{e^{nNx}} \leq \frac{1}{e^n}\ \forall n \geq N$$

Chuỗi $\sum_{n=0}^{+\infty} e^{-n}$ hội tụ nên $\sum_{n=0}^{+\infty} e^{-n^2 x}$ hội tụ.

Vậy g xác định.

Đặt $g_n(x) = e^{-n^2 x}$, thì $g_n^{(k)}(x) = (-n^2)^k e^{-n^2 x}$.

Tượng tự bài trên ta chỉ cần chứng minh với một $k \in \mathbb{N}$ thì

$$\sum_{n=0}^{\infty} g_n^{(k)}(x)$$

hội tụ tuyệt đối trên mỗi khoảng $[x_0, \infty)$, $x_0 > 0$.

Thật vậy, với một $x_0 > 0$, có $N \in \mathbb{N}$ sao cho $Nx_0 \geq 2$.

Ta có $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^{2k}}{e^n} = 0$ (có thể chứng minh bằng quy tắc L'Hopital cho $\lim\limits_{y\to\infty} \dfrac{y^{2k}}{a^y}, a > 1$).

Nên có $M \in \mathbb{N}$ sao cho $\dfrac{n^{2k}}{e^n} \leq 1\ \forall n \geq M$.

Đặt $\max\{M, N\} = L$ ta có

$$\left|g_n^{(k)}(x)\right| = \frac{n^{2k}}{e^{n^2x}} \leq \frac{n^{2k}}{e^{nNx}} \leq \frac{n^{2k}}{e^{2n}} \leq \frac{1}{e^n}\ \forall n \geq L$$

Mà chuỗi $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} e^{-n}$ hội tụ nên $\sum\limits_{n=0}^{\infty} g_n^{(k)}(x)$ hội tụ tuyệt đối trên $[x_0, \infty), x_0 > 0$.

Ta có điều phải chứng minh.

7.24. Với những giá trị nào của α thì

a) Dãy hàm $f_n(x) = n^\alpha x e^{-nx}$ hội tụ từng điểm trên [0,1]

b) Dãy hàm $f_n(x) = n^\alpha x e^{-nx}$ hội tụ đều trên [0,1]

<u>**Bài giải:**</u>

a) Ta chứng minh với mọi $\alpha \in \mathbb{R}$ thì dãy hàm f_n hội tụ từng điểm trên [0,1]. Thật vậy.

Với $x = 0$ thì $f_n(0) = 0$

Với $x > 0$, ta có

$$f_n(x) = \frac{n^\alpha x}{e^{nx}}$$

- Nếu $\alpha \leq 0$ thì hiển nhiên

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$$

- Nếu $\alpha > 0$, ta có $e^x > 1$ và

$$0 \leq \frac{n^\alpha x}{e^{nx}} \leq \frac{n^{[\alpha]+1}}{(e^x)^n}$$

Mà $\frac{n^{[\alpha]+1}}{(e^x)^n} \to 0$ khi $n \to +\infty$ nên theo nguyên lý kẹp thì $\frac{n^\alpha x}{e^{nx}} \to 0$ khi $n \to +\infty$.

Do đó :

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0, \forall x \in [0,1]$$

Vậy với mọi $\alpha \in \mathbb{R}$ thì f_n hội tụ từng điểm trên [0,1].

b) Ta chứng minh dãy hàm f_n hội tụ đều trên $[0,1]$ khi và chỉ khi $\alpha < 1$.

Bởi vì với $\alpha \geq 1$ thì ta chọn $x_n = \frac{1}{n} \in [0,1]$. Suy ra $f_n(x_n) = n^{\alpha-1}e^{-1} \geq e^{-1}$.

Do đó :

$$d(f_n, f) = \sup_{x\in[0,1]} f_n(x) \geq f_n(x_n) \geq e^{-1}$$

Nên f_n không hội tụ đều trên $[0,1]$ khi $\alpha \geq 1$.

Bây giờ ta chứng minh với $\alpha < 1$ thì dãy hàm f_n hội tụ đều trên $[0,1]$. Tức là chứng minh

$$d(f_n, f) = \sup_{x\in[0,1]} f_n(x) = \sup_{x\in[0,1]} \frac{n^\alpha x}{e^{nx}} \to 0$$

khi $n \to \infty$.

Ta khẳng định $f_n(x) \leq \frac{1}{n^{1-\alpha}}\ \forall x \in [0,1], n \in \mathbb{N} (*)$

Thật vậy, $(*)$ tương đương với

$$\frac{n^\alpha x}{e^{nx}} \leq \frac{1}{n^{1-\alpha}} \Leftrightarrow nx \leq e^{nx}$$

Xét hàm $g(t) = e^t - t,\ t \in \mathbb{R}$. Ta có

$$g'(t) = e^t - 1 \geq 1 - 1 = 0\ \forall t \geq 0$$

Do đó hàm $g(t)$ đồng biến trên $[0, +\infty)$. Suy ra $g(t) \geq g(0) = 1 > 0$.

Nên ta có $nx \leq e^{nx}\ \forall x \in [0,1], n \in \mathbb{N}$.

Ta đã chứng minh $f_n(x) \leq \dfrac{1}{n^{1-\alpha}}\ \forall x \in [0,1], n \in \mathbb{N}$.

Nên khi $n \to +\infty$ thì $d(f_n, f) \leq \dfrac{1}{n^{1-\alpha}} \to 0, \forall \alpha < 1$.

Vậy với mọi $\alpha < 1$ thì dãy hàm $f_n(x) = n^{\alpha} x e^{-nx}$ hội tụ đều trên $[0,1]$.

7.25. Cho $0 \leq a_n \leq 1, \forall n \geq 0$. Chứng minh rằng $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ hội tụ khi $0 \leq x < 1$ và có tổng $\leq \frac{1}{1-x}$.

Hơn nữa, nếu $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ hội tụ, chứng minh rằng $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$hội tụ khi $0 \leq x \leq 1$ và có tổng $\leq \min\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n, \frac{1}{1-x}\right)$.

<u>Bài giải:</u>

Khi $0 \leq a_n \leq 1$:

Ta có $|a_n x^n| \leq x^n\ \forall n$

Mà chuỗi $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ là chuỗi hình học hội tụ do $0 \leq x < 1$.

Nên chuỗi $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ cũng hội tụ theo tiêu chuẩn so sánh.

Ngoài ra ,

$$\sum_{n=0}^{m} a_n x^n \leq \sum_{n=0}^{m} x^n \quad \forall m \geq 0$$

Cho $m \to \infty$ thì ta có :

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \leq \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-n}$$

Khi $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ hội tụ :

Ta có $|a_n x^n| = a_n x^n \leq a_n \ \forall n \geq 0$.

Nên $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$hội tụ theo tiêu chuẩn so sánh do $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ hội tụ.

Khi $x = 1$, ta có :

$$\sum_{n=0}^{m} a_n x^n = \sum_{n=0}^{m} a_n \quad \forall m \geq 0$$

Cho $m \to \infty$ thì ta có :

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \leq \sum_{n=0}^{\infty} a_n \ \forall 0 \leq x \leq 1$$

Với $0 < x < 1$, theo chứng minh phần trên thì

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \leq \frac{1}{1-x} \ \forall 0 \leq x < 1$$

Nên ta có :

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \leq \min\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n , \frac{1}{1-x}\right)$$

7.26. Cho chuỗi số dương hội tụ $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$. Chứng minh rằng $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^n$ hội tụ tuyệt đối khi $|x| \leq 1$.

Bài giải:

Ta có $|a_n x^n| \leq a_n \ \forall x \in [-1,1], n \in \mathbb{N}$.

Nên chuỗi $\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n x^n|$ hội tụ theo tiêu chuẩn so sánh do $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ hội tụ.

Vậy $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^n$ hội tụ tuyệt đối khi $|x| \leq 1$.

7.27. Chứng minh rằng

$$\ln(x+1) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} \ , \qquad |x| < 1,$$

Và

$$(1+x)^m = 1 + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{m(m-1)\dots(m-k+1)}{k!} x^k \, , m > 0, m \notin \mathbb{N}, |x| < 1.$$

Bài giải:

Chứng minh:

$$\ln(x+1) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} \ \ |x| < 1,$$

Xét chuỗi số sau:

$$f(x) = \frac{1}{x+1} = \sum_{n=1}^{\infty} (-x)^{n-1}$$

Ta thấy $f(x)$ hội tụ với mọi x thỏa $|x| < 1$

Nên ta cũng có :

$$F(x)=\ln(x+1)=\int_0^x f(t)dt=\int_0^x\sum_{n=1}^{\infty}(-t)^{n-1}\,dt$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^x(-t)^{n-1}\,dt=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{-(-x)^n}{n}=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}$$

Ta có điều phải chứng minh

Chứng minh :

$$(1+x)^m=1+\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{m(m-1)\dots(m-k+1)}{k!}x^k\,,m>0,m\notin\mathbb{N},|x|<1.$$

Đầu tiên ta chứng minh chuỗi số đã cho hội tụ. Thật vậy, với $k>m$, ta có:

$$\left|\frac{m(m-1)\dots(m-k+1)}{k!}\right|$$

$$=\left|\frac{m(m-1)\dots(m-\lfloor m\rfloor)(m-\lfloor m\rfloor-1)\dots\big(m-(\lfloor m\rfloor+k-\lfloor m\rfloor-1)\big)}{(k-\lfloor m\rfloor-1)!\,(k-\lfloor m\rfloor)\dots k}\right|$$

$$=\frac{(\lfloor m\rfloor+1-m)\dots\big((\lfloor m\rfloor+k-\lfloor m\rfloor-1)-m\big)}{(k-\lfloor m\rfloor-1)!}.\frac{m(m-1)\dots(m-\lfloor m\rfloor)}{(k-\lfloor m\rfloor)\dots k}$$

$$<1.\frac{m(m-1)\dots(m-\lfloor m\rfloor)}{(k-\lfloor m\rfloor)\dots k}<1$$

Nên chuỗi đã cho hội tụ khi $|x|<1$

Đặt

$$f(x)=1+\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{m(m-1)\dots(m-k+1)}{k!}x^k\,,|x|<1$$

Ta có :

$$(1+x)f'(x)$$
$$=\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{m(m-1)\dots(m-k+1)}{(k-1)!}x^{k-1}$$
$$+\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{m(m-1)\dots(m-k+1)}{(k-1)!}x^{k}$$
$$=m+\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{m(m-1)\dots(m-k)}{k!}x^{k}+\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{m(m-1)\dots(m-k+1)}{(k-1)!}x^{k}$$
$$=m+\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{m(m-1)\dots(m-k+1)(k+m-k)}{k!}x^{k}$$
$$=m+m(f(x)-1)=mf(x)$$

Vậy ta có $mf(x)=(1+x)f'(x)$. Đặt $g(x)=f(x).(1+x)^{-m}$, ta có :

$$g'(x)=(1+x)^{-(\square+1)}\big(f'(x)(1+x)-mf(x)\big)=0$$

Suy ra $g(x)=g(0)=f(0)=1\ \forall x\in(-1,1)$, nghĩa là $f(x)=(1+x)^m$

Ta có điều phải chứng minh.

7.28. Cho

$$E(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!},C(x)=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\cdots,S(x)=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\cdots$$

Chứng minh rằng

a) $E(x)E(y)=E(x+y)$

b) $C(x+y)=C(x)C(y)-S(x)S(y)$

c) $S(x+y)=S(x)C(y)+C(x)S(y)$

d) $\big(C(x)\big)^2+\big(S(x)\big)^2=1$

Bài giải:

Vì $\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{n!}}=0$ nên ta nhận thấy $E(x), C(x), S(x)$ hội tụ đều.

a) Gọi $E_M(x)$ là tổng riêng phần của chuỗi $E(x)$, ta có :

$$E_M(x)=\sum_{n=0}^{M}\frac{x^n}{n!}, E_M(y)=\sum_{n=0}^{M}\frac{y^n}{n!}$$

$$E_M(x).E_M(y)=\sum_{n=0}^{M}\frac{x^n}{n!}.\sum_{m=0}^{M}\frac{y^m}{m!}$$

$$=\sum_{n=0}^{M}\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}.\frac{y^{n-k}}{(n-k)!}+\sum_{n=M+1}^{2M}\sum_{k=n-M}^{M}\frac{x^k}{k!}.\frac{y^{n-k}}{(n-k)!}$$

$$=\sum_{n=0}^{M}\frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n}C_n^k x^k y^{n-k}+\sum_{n=M+1}^{2M}\sum_{k=n-M}^{M}\frac{x^k}{k!}.\frac{y^{n-k}}{(n-k)!}$$

$$|E_M(x).E_M(y)-E_M(x+y)|=\left|\sum_{n=M+1}^{2M}\sum_{k=n-M}^{M}\frac{x^k}{k!}.\frac{y^{n-k}}{(n-k)!}\right|$$

$$\leq\left|\sum_{n=M+1}^{2M}\frac{(|x|+|y|)^n}{n!}\right|<\left|\sum_{n=M+1}^{+\infty}\frac{|x|+|y|^n}{n!}\right|$$

Suy ra $|E_M(x).E_M(y)-E_M(x+y)|\to 0$ khi $M\to+\infty$

Vậy $E(x)E(y)=E(x+y)$

b) Đặt $C_M(x)$ và $S_M(x)$ là các tổng riêng phần của $C(x)$ và $S(x)$

$$C_M(x)=\sum_{k=0}^{M}(-1)^k\frac{x^{2k}}{(2k)!}, S_M(x)=\sum_{k=0}^{M}(-1)^k\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

Ta có :

$$C_M(x)C_M(y)-S_M(x)S_M(y)$$

$$= \sum_{k=0}^{M}(-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}.\sum_{h=0}^{M}(-1)^h \frac{x^{2h}}{(2h)!} - \sum_{k=0}^{M}(-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}.\sum_{h=0}^{M}(-1)^h \frac{x^{2h+1}}{(2h+1)!}$$

$$= \sum_{n=0}^{M}\sum_{k=0}^{n}(-1)^n \frac{x^{2k}y^{2n-2k}}{(2k)!\,(2n-2k)!} + \sum_{n=M+1}^{2M}\sum_{k=n-M}^{M}(-1)^n \frac{x^{2k}y^{2n-2k}}{(2k)!\,(2n-2k)!}$$

$$- \sum_{n=0}^{M}\sum_{k=0}^{n}(-1)^n \frac{x^{2k+1}y^{2n-2k+1}}{(2k+1)!\,(2n-2k+1)!}$$

$$- \sum_{n=M+1}^{2M}\sum_{k=n-M}^{M}(-1)^n \frac{x^{2k+1}y^{2n-2k+1}}{(2k+1)!\,(2n-2k+1)!}$$

$$= \sum_{n=0}^{M}\sum_{k=0}^{n}(-1)^n \frac{x^{2k}y^{2n-2k}}{(2k)!\,(2n-2k)!} - \sum_{n=1}^{M+1}\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^{n-1} \frac{x^{2k+1}y^{2n-2k-1}}{(2k+1)!\,(2n-2k-1)!}$$

$$+ \sum_{n=M+1}^{2M}\sum_{k=n-M}^{M}(-1)^n \frac{x^{2k}y^{2n-2k}}{(2k)!\,(2n-2k)!}$$

$$- \sum_{n=M+1}^{2M}\sum_{k=n-M}^{M}(-1)^n \frac{x^{2k+1}y^{2n-2k+1}}{(2k+1)!\,(2n-2k+1)!}$$

$$= 1 + \sum_{n=1}^{M}\sum_{k=0}^{n}(-1)^n \left(\frac{x^{2k}y^{2n-2k}}{(2k)!\,(2n-2k)!} - \frac{x^{2k+1}y^{2n-2k-1}}{(2k+1)!\,(2n-2k-1)!}\right)$$

$$- \sum_{k=0}^{M}(-1)^M \frac{x^{2k+1}y^{2M-2k+1}}{(2k+1)!\,(2M-2k+1)!}$$

$$+ \sum_{n=M+1}^{2M}\sum_{k=n-M}^{M}(-1)^n \frac{x^{2k}y^{2n-2k}}{(2k)!\,(2n-2k)!}$$

$$- \sum_{n=M+1}^{2M}\sum_{k=n-M}^{M}(-1)^n \frac{x^{2k+1}y^{2n-2k+1}}{(2k+1)!\,(2n-2k+1)!}$$

Đặt

$$A = 1 + \sum_{n=1}^{M}\sum_{k=0}^{n}(-1)^n\left(\frac{x^{2k}y^{2n-2k}}{(2k)!\,(2n-2k)!} - \frac{x^{2k+1}y^{2n-2k-1}}{(2k+1)!\,(2n-2k-1)!}\right)$$

$$= 1 + \sum_{n=1}^{M}\sum_{k=0}^{2n}(-1)^n\frac{1}{(2n)!}C_{2n}^{k}\,x^k y^{2n-k}$$

$$= 1 + \sum_{n=1}^{M}(-1)^n\frac{1}{(2n)!}.(x+y)^{2n} = C_M(x+y)$$

Và

$$B = -\sum_{k=0}^{M}(-1)^M\frac{x^{2k+1}y^{2M-2k+1}}{(2k+1)!\,(2M-2k+1)!}$$

$$+ \sum_{n=M+1}^{2M}\sum_{k=n-M}^{M}(-1)^n\frac{x^{2k}y^{2n-2k}}{(2k)!\,(2n-2k)!}$$

$$- \sum_{n=M+1}^{2M}\sum_{k=n-M}^{M}(-1)^n\frac{x^{2k+1}y^{2n-2k+1}}{(2k+1)!\,(2n-2k+1)!}$$

Thì

$$|B| \le \frac{(|x|+|y|)^{2M+2}}{(2M+2)!} + \sum_{n=M+1}^{2M}\frac{(|x|+|y|)^{2n+2}}{(2n+2)!} + \sum_{n=M+1}^{2M}\frac{(|x|+|y|)^{2n+2}}{(2n+2)!}$$

$$< \frac{(|x|+|y|)^{2M+2}}{(2M+2)!} + \sum_{n=M+1}^{+\infty}\frac{(|x|+|y|)^{2n+2}}{(2n+2)!} + \sum_{n=M+1}^{+\infty}\frac{(|x|+|y|)^{2n+2}}{(2n+2)!}$$

Ta có :

$$|C_M(x)C_M(y) - S_M(x)S_M(y) - C_M(x+y)| = |B|$$

$$< \frac{(|x|+|y|)^{2M+2}}{(2M+2)!} + \sum_{n=M+1}^{+\infty}\frac{(|x|+|y|)^{2n+2}}{(2n+2)!} + \sum_{n=M+1}^{+\infty}\frac{(|x|+|y|)^{2n+2}}{(2n+2)!}$$

Nên $|C_M(x)C_M(y) - S_M(x)S_M(y) - C_M(x+y)| \to 0$ khi $M \to +\infty$ và ta có điều phải chứng minh.

c) Theo câu b) ta có $C(x) = C(x+y)C(-y) - S(x+y)S(-y)$ (*). Mặt khác nhận thấy $C(-t) = C(t)$ và $S(-t) = -S(t)$ $\forall t \in \mathbb{R}$ nên (*) thành:

$$\begin{aligned} C(x) &= C(x+y)C(y) + S(x+y)S(y) \\ &= \big(C(x)C(y) - S(x)S(y)\big)C(y) + S(x+y)S(y) \\ &= C(x)C^2(y) - S(x)S(y)C(y) + S(x+y)S(y) \end{aligned}$$

Mặt khác, theo câu d) , ta có $C(x) = C(x)\big(C^2(y) + S^2(y)\big)$. Suy ra:

$$C(x)C^2(y) + C(x)S^2(y) = C(x)C^2(y) - S(x)S(y)C(y) + S(x+y)S(y)$$

$$\Leftrightarrow S(y)\big(S(x+y) - S(x)C(y) - C(x)S(y)\big) = 0 \ (1)$$

Chứng minh tương tự, ta có $S(x)\big(S(x+y) - S(x)C(y) - C(x)S(y)\big) = 0$ (2)

Với $x, y \in \mathbb{R}$ bất kỳ, nếu $S(x), S(y)$ có một số khác 0, (1) hoặc (2), ta suy ra ngay điều phải chứng minh.

Ngược lại, nếu $S(x) = S(y) = 0$, theo câu d) ta có $|C(x)| = |C(y)| = 1$ nên $|C(x+y)| = |C(x).C(y) - S(x)S(y)| = 1$, nghĩa là $S(x+y) = 0$. Vậy ta cũng đã có $S(x+y) = C(x)S(y) + S(x)C(y)$.

Trong cả 2 trường hợp, khẳng định của đề bài đều được chứng minh.

d) Từ đẳng thức b) ta cho $y = -x$ thì do $C(-x) = C(x)$ và $S(-x) = -S(x)$ nên

$$\big(C(x)\big)^2 + \big(S(x)\big)^2 = C(0) = 1\ .$$

7.29. Tìm miền hội tụ của chuỗi hàm

a) $\sum_{n=1}^{\infty} n^n(x+3)^n$

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$

c) $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \sin\frac{x}{3^n}$

d) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos nx}{2^n}$

e) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos nx}{e^{nx}}$

f) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin(2n-1)x}{(2n-1)^2}$

Bài giải:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} n^n(x+3)^n$

Ta có $\lim_{n\to\infty} \sup \sqrt[n]{|n^n|} = \lim_{n\to\infty} \sup n = \infty$

Vậy chuỗi hội tụ khi và chỉ khi $x+3=0$ hay $x=-3$.

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$

Theo **Định lý chuỗi điều hòa** (trang 145), chuỗi số trên hội tụ khi và chỉ khi $x>1$.

c) $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \sin\frac{x}{3^n}$

Khi $x=0$, hiển nhiên chuỗi số hội tụ

Xét $x\neq 0$. Ta có :

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|2^n.\sin\frac{x}{3^n}\right|} = \lim_{n\to\infty} 2.\sqrt[n]{\left|\frac{\sin\frac{x}{3^n}}{\frac{x}{3^n}}\right|\left|\frac{x}{3^n}\right|} = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{3}\sqrt[n]{\left|\frac{\sin\frac{x}{3^n}}{\frac{x}{3^n}}\right||x|} = \frac{2}{3} < 1$$

Nên chuỗi đã cho hội tụ với mọi $x\neq 0$.

Vậy miền hội tụ của chuỗi số là $\mathbb{R}$.

d) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos nx}{2^n}$

Ta có $\left|\frac{\cos nx}{2^n}\right| \leq \frac{1}{2^n}\ \forall n \in \mathbb{N}, x \in \mathbb{R}$.

Do $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ hội tụ nên theo tiêu chuẩn so sánh, ta được $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos nx}{2^n}$ hội tụ với mọi $x \in \mathbb{R}$.

e) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos nx}{e^{nx}}$

- Với $x = 0$ thì

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos nx}{e^{nx}} = \sum_{n=0}^{\infty} 1$$

Nên chuỗi này không hội tụ.

- Với $x < 0$, đặt $x = -t$ với $t > 0$, ta có

$$\sum_{n=0}^{\infty} e^{nt}.\cos(-nt) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{nt}.\cos nt$$

Ta chứng minh chuỗi này không hội tụ. Thật vậy, giả sử chuỗi trên hội tụ thì

$$\lim_{n\to\infty} e^{nt}.\cos nt = 0$$

Mà $|e^{nt}\cos nt| > |\cos nt|$ nên ta cũng có $\cos nt \to 0$ khi $t \to +\infty$

Mặt khác $\cos(n+1)t = \cos nt\,.\cos t - \sin nt\,.\sin t$

Nên ta có $\sin t\,.\sin nt \to 0$ khi $n \to +\infty$ (1)

Mặt khác, vì $\lim_{n\to\infty} \cos nt = 0$. Nên $\lim_{n\to\infty} |\sin nt| = 1$ (2)

Từ (1) và (2), ta phải có $\sin t = 0$, suy ra $t = k\pi$. Như vậy $\sin nt = \sin nk\pi = 0$, mâu thuẫn với (2).

Vậy với $x < 0$ thì chuỗi trên không hội tụ.

- Với $x > 0$ thì ta có

$$\left|\frac{\cos nx}{e^{nx}}\right| \le \frac{1}{e^{nx}}\ \forall n \in \mathbb{N}, x > 0$$

Mà $\frac{1}{e^x} < 1.$

Nên chuỗi $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{e^{nx}}$ hội tụ. Do đó theo tiêu chuẩn so sánh ta suy ra chuỗi $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos nx}{e^{nx}}$ cũng hội tụ.

Vậy miền hội tụ của chuỗi đã cho là $(0, +\infty)$.

f) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sin(2n-1)x}{(2n-1)^2}$

Ta có :

$$\left|\frac{\sin(2n-1)x}{(2n-1)^2}\right| \le \frac{1}{(2n-2)^2} = \frac{1}{4(n-1)^2}\ \forall n \ge 2, x \in \mathbb{R}$$

Ta có chuỗi $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{4(n-1)^2}$ hội tụ nên theo tiêu chuẩn so sánh chuỗi $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sin(2n-1)x}{(2n-1)^2}$ hội tụ với mọi $x \in \mathbb{R}$.

Bài Tập Mở Rộng

1. Cho (f_n) hội tụ đều về f trên $\mathbb{R}$.

a. Chứng minh rằng nếu f liên tục trên $\mathbb{R}$ thì $f_n o f \to f o f$.

b. Chứng minh rằng nếu f liên tục đều trên $\mathbb{R}$ thì $f_n o f_n \rightrightarrows f o f$.

2. Chứng minh rằng dãy $(\sin n^2)$ không hội tụ về 0. Từ đó, suy ra bán kính của

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n \sin n^2$$

3. Cho $f(x)$ có đạo hàm liên tục $f'(x)$ trên (a, b) và

$$f_n(x) = n\left[f\left(x + \frac{1}{n}\right) - f(x)\right]$$

Chứng minh $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f'(x),\ (\alpha \leq x \leq \beta)$ với $a < \alpha < \beta < b$.

4. Định nghĩa hàm sai số :

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt$$

Và hàm

$$\operatorname{Si}(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{t}\,dt$$

Biểu diễn các hàm trên dưới dạng chuỗi lũy thừa. Dựa vào chuỗi trên tính xấp xỉ giá trị $\operatorname{erf}(1)$; $\operatorname{Si}(1)$.

5. Xác định miền hội tụ của các chuỗi lũy thừa sau :

a. $\sum (\ln n)^n x^n$

b. $\sum \frac{n!}{a^{n^2}} x^n \ , \ (a > 0)$

c. $\sum \frac{(x+5)^{2n-1}}{n^2 4^n}$

d. $\sum \frac{(-1)^n}{2n} (x-2)^{2n}$

e. $\sum \frac{(x+2)^{n^2}}{n^n}$

f. $\sum \frac{(x-2)^{2n+1}}{(n+1)!}$

g. $\sum \frac{x^{n-1}}{n 3^n \ln n}$

6. Tính tổng của các chuỗi hàm sau :

a. $\sum n x^n$

b. $\sum (n+1)(n+2) x^n$

c. $\sum \frac{(-x)^n}{n(n+1)}$

d. $\sum \frac{x^{2n+2}}{(2n+1)(2n+2)}$

Tài liệu tham khảo

1. Đặng Đình Áng, *Nhập môn giải tích*, NXBGD, 1998.
2. Đặng Đức Trọng - Đinh Ngọc Thanh - Phạm Hoàng Quân, *Giáo trình giải tích 2*, NXBĐHQGTP.HCM, 2008.
3. Nguyễn Đình Trí - Tạ Văn Đĩnh - Nguyễn Hồ Quỳnh, *Toán học cao cấp (Tập ba)*, NXBGDVN, 2009.
4. Dương Minh Đức, *Giáo trình toán giải tích I*, 2002.
5. Tạ Lê Lợi, *Giải tích 2 (Giáo trình)*, 2008.
6. Lê Thị Thiên Hương - Nguyễn Anh Tuấn - Lê Anh Vũ, *Bài tập toán cao cấp (Tập I)*, NXBGD, 1999.
7. Nguyễn Bích Huy, *Giải tích (Cơ Sở)*, 2004.
8. Jean - Marie Monier, *Giải tích 3-4 (Bản dịch)*, NXBGDVN, 2010.
9. Robert A. Adamsm, *Culeulus, Acomplete cousse*, 1990.
10. E. Kreszig, *Advanced Enginnering Mathematics*, 1988.

Tiểu luận GIẢI TÍCH A2

Võ Anh Khoa – Vũ Trần Minh Khương – Nguyễn Thanh Hoài

Đặng Phước Nhật – Trương Hồng Kha

ĐẠI HỌC QUỐC GIA TP HỒ CHÍ MINH

ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN

KHOA TOÁN – TIN HỌC

NHÓM 5 K10

***

Chịu trách nhiệm xuất bản

Võ Anh Khoa

Sửa bản in

Võ Anh Khoa

Vũ Trần Minh Khương

Nguyễn Thanh Hoài

Đặng Phước Nhật

Trương Hồng Kha

Trình bài bìa

Võ Anh Khoa

Trương Hồng Kha

Nguyễn Thanh Hoài

In tại Tiệm in Thanh Phong – Quận Tân Phú – TP. Hồ Chí Minh, nộp lưu chiểu tháng 6 năm 2011.