Đề cương ôn tập tôpô mêtríc 2014

1. Khoảng cách

Định nghĩa. Trên tập hợp X, ánh xạ $d : X \times X \to R$ gọi là một *mêtríc* (hay *khoảng cách*) nếu nó thỏa ba tiên đề sau (cho $x, y, z \in X$)

a) Phân biệt dương: $d(x, y) \geq 0$. Nếu $d(x, y) = 0$ thì $x = y$

b) Đối xứng: $d(x, y) = d(y, x)$

c) Bất đẳng thức tam giác: $d(x, y) \leq d(x, z) + d(y, z)$

Bộ (X, d) gọi là một *không gian mêtríc*. Mỗi phần tử $x \in X$ gọi là *một điểm* trong X.

Định nghĩa. Trong không gian mêtric (X, d) cho tập hợp A, B và phần tử x. Ta định nghĩa $d(x, A) = \inf_{y \in A} d(x, y)$, $d(A, B) = \inf_{x \in A, y \in B} d(x, y)$ và $diam(A) = \sup_{x,y \in A} d(x, y)$.

Định nghĩa. Cho không gian mêtríc (X, d), cho $\{x_n\}, x$ trong X, ta nói $x_n \to x$ nếu $d(x_n, x) \to 0$ khi $n \to \infty$.

Mệnh đề. *Giới hạn của một dãy là duy nhất.*

Định nghĩa. Không gian vectơ X gọi là *không gian định chuẩn* nếu trên X tồn tại một ánh xạ $\| \,.\, \| : X \to R$ thỏa ba tiên đề sau với mọi $x, y \in X, \lambda \in R$

a)Phân biệt dương: $\|x\| \geq 0$. Nếu $\|x\| = 0$ thì $x = 0$.

b) Chuẩn vectơ bội: $\|\lambda x\| = |\lambda| \; \|x\|$.

c) Bất đẳng thức tam giác:$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

Ta nói $(X, \| \,.\, \|)$ là một không gian định chuẩn.

Mệnh đề. *Không gian định chuẩn $(X, \| \,.\, \|)$ là một không gian metric với metric $d(x, y) = \|x - y\|$.*

Mệnh đề (Bất đẳng thức tam giác dạng hiệu)

a) Nếu (X, d) là không gian metric, $x, y, u, v \in X$ thì ta có

$$\begin{aligned} |d(x, u) - d(y, u)| &\leq d(x, y), \\ |d(x, y) - d(u, v)| &\leq d(x, u) + d(y, v). \end{aligned}$$

b) Nếu X là không gian định chuẩn thì

$$|\|x\| - \|y\|| \leq \|x - y\|.$$

Định nghĩa. Trên một tập X, hai metric d_1, d_2 gọi là tương đương nếu tồn tại $0 < \alpha < \beta$ sao cho

$$\alpha d_1(x,y) \le d_2(x,y) \le \beta d_1(x,y).$$

Mệnh đề. *Cho $(X_1, d_1), ..., (X_n, d_n)$ là các không gian metric. Trên $X = X_1 \times ... \times X_n$, với $x = (x_1, ..., x_n), y = (y_1, ..., y_n)$ ta định nghĩa*

$$\begin{aligned} \delta_p(x,y) &= \left(d(x_1,y_1)^p + ... + d(x_n,y_n)^p\right)^{1/p}, \\ \delta_\infty(x,y) &= \max\{d(x_1,y_1), ..., d(x_n,y_n)\}. \end{aligned}$$

Khi đó δ_p là metric trên $X = X_1 \times ... \times X_n$ với $1 \le p \le \infty$ gọi là metric (hay khoảng cách) tích. Không gian này gọi là không gian metric tích. Nếu không nói gì thêm thì ta xét khoảng cách δ_p với $p = 2$.

Mệnh đề. *Cho các không gian metric $(X_1, d_1), ..., (X_k, d_k)$, xét không gian tích $X = X_1 \times ... \times X_k$ với khoảng cách tích δ_p. Cho $x_n = (\alpha_{1n}, ..., \alpha_{kn}) \in X$ và $x_0 = (\alpha_1, ..., \alpha_k) \in X$. Ta có $x_n \to x_0$ khi và chỉ khi $\alpha_{jn} \to \alpha_j$ $(1 \le j \le k)$ khi $n \to \infty$.*

Các không gian định chuẩn thông dụng

a) Trên $\mathbb{R}^n$ với $x = (x_1, ..., x_n)$ ta có các chuẩn $\|x\|_\infty = \max_{1 \le j \le n} |x_j|$ hay

$$\|x\|_p = \left(\sum_{j=1}^n |x_j|^p\right)^{1/p} \quad (1 \le p < \infty)$$

Khi $p = 2$ ta nói chuẩn này là *chuẩn Euclid*, khoảng cách tương ứng là *khoảng cách Euclid*.

b) Cho $a < b$, ta ký hiệu $C[a,b]$ là tập hợp các hàm liên tục $x = x(t)$ $(t \in [a,b])$ với *chuẩn sup* xác định bởi $\|x\|_{C[a,b]} := \sup_{a \le t \le b} |x(t)|$. Sự hội tụ theo chuẩn sup trong $C[a,b]$ được gọi là *sự hội tụ đều trên* $[a,b]$.

c) Cho $a < b$, $m \in \mathbb{N}$, ta ký hiệu $C^m[a,b]$ là tập hợp các hàm khả vi liên tục (tới cấp m) $x = x(t)$ $(t \in [a,b])$ với *chuẩn sup* xác định bởi

$$\|x\| := \sup_{a \le t \le b} |x(t)| + \sum_{j=1}^m \sup_{a \le t \le b} |x^{(j)}(t)|.$$

d) Không gian ℓ^p $(1 \le p < \infty)$ các dãy số $x = \{x_j\}$ với chuẩn

$$\|x\|_p = \left(\sum_{j=1}^{\infty} |x_j|^p\right)^{1/p} \quad (1 \le p < \infty).$$

e) Không gian ℓ^∞ các dãy số $x = \{x_j\}$ với chuẩn $\|x\|_\infty = \sup_{j\ge 1} |x_j|$.

Mệnh đề. *Cho $C[a,b]$ với khoảng cách sup. Với $f, g \in C[a,b]$, ta có $|f(x) - g(x)| \le d(f,g)$ và $|f(x)| \le \|f\|$ với mọi $x \in [a,b]$.*

BÀI TẬP

1. Làm các bài tập định nghĩa về khoảng cách sau:

   (a) Trong định nghĩa của metric ta có thể bỏ điều kiện nào để d vẫn là metric.

   (b) Nếu bất đẳng thức dạng hiệu đúng thì các bất đẳng thức tam giác có đúng không?

   (c) Trên tập X, d_1, d_2 là hai metric. Ta nói $d_1 \sim d_2$ nếu d_1 tương đương d_2. CM quan hệ $\sim$ là một quan hệ tương đương.

   (d) Cho $(X_1, d_1), ..., (X_n, d_n)$ là các không gian metric. CM rằng các khoảng cách tích δ_p đều tương đương nhau.

   (e) Cho (X, d) là không gian metric. Ta định nghĩa

   $$\delta(x,y) = \frac{\delta(x,y)}{1+\delta(x,y)}, \delta_1(x,y) = \min\{1, d(x,y)\}.$$

   CM δ, δ_1 là các metric. Nếu $\delta'(x,y) = \frac{\delta(x,y)}{\alpha+\beta\delta(x,y)}$, $\delta'_1 = \min\{\alpha, d(x,y)\}$ $(\alpha, \beta \in \mathbb{R})$ thì với điều kiện nào của α, β, các hàm δ', δ'_1 là các metric?

2. Làm các bài tập về khoảng cách dãy sau:

   (a) Trên $\mathbb{R}^3$, tìm khoảng cách d_∞, d_2 của $x_n = (0, \sin n, \frac{n+1}{n})$ tới $x_0 = (0, 0, 1)$. Dãy x_n có hội tụ tới x_0 hay không?

   (b) Trên $C[0,1]$, cho $f_n = nx(1-x)^n$. Tính $d(f_n, 0)$. Dãy f_n có hội tụ tới 0: tại từng điểm không? trong $C[0,1]$ hay không?

(c) Trên $C(\mathbb{R})$, cho $f_n(x) = \frac{x}{1+nx^2}$. Tính $d(f_n, 0)$. Dãy f_n có hội tụ tới 0: tại từng điểm không? trong $C(\mathbb{R})$ hay không?

3. Làm các bài tập chứng minh về hội tụ dãy sau:

   (a) Cho (X, d) là không gian metric, $x_n, x, y_n, y \in X$. Gỉa sử $x_n \to x$, $y_n \to y$ khi $n \to \infty$. CM $\lim_{n\to\infty} d(x_n, y_n) = d(x, y)$.

   (b) Cho (f_n) và (g_n) là hai dãy hàm hội tụ đều trên $C[a, b]$ $(a, b \in \mathbb{R}, a < b$. CM $f_n + g_n$ và $f_n g_n$ cũng hội tụ đều trong $C[a, b]$. Chứng minh này có thể áp dụng trên không gian hàm nào rộng hơn?

   (c) Cho (x_n) là một dãy trong không gian metric (X, d). CM dãy (x_n) hội tụ nếu và chỉ nếu mọi dãy con (x_{n_k}) hội tụ tới cùng một giới hạn.

   (d) Cho (x_n) là một dãy trong không gian metric (X, d). CM dãy (x_n) hội tụ nếu và chỉ nếu ba dãy $(x_{2n}), (x_{2n+1}), (x_{3n})$ hội tụ. Có thể tổng quát hóa được kết quả này không?

4. Cho A, B là tập con của không gian metric (X, d), $u, v, x, y \in X$. Chứng minh một số tính chất của khoảng cách sau đây:

   (a) $|d(u, v) - d(x, y)| \le d(u, x) + d(v, y)$.

   (b) $d(x_1, x_n) \le \sum_{i=1}^{n-1} d(x_i, x_{i+1})$ $(n \ge 2)$.

   (c) $|d(x, A) - d(y, A)| \le d(x, y)$.

   (d) $A \subset B$ suy ra $diamA \le diamB$.

   (e) $diam(A \cup B) \le diam\ A + diam\ B$ nếu $A \cap B \ne \emptyset$.

   (f) $d(A, B) \le d(x, y) \le diam(A \cup B)$ nếu $x \in A,\ y \in B$.

   (g) $diam(A \cup B) \le diam\ A + d(A, B) + diam\ B$.

2. Đóng mở

Định nghĩa. Trong không gian mêtric (X, d).

a) Với mỗi $r > 0, x \in X$ ta định nghĩa $B(x, r) = \{y \in X : d(x, y) < r\}$. Ta nói $B(x, r)$ là *quả cầu mở* tâm x, bán kính r.

b) Điểm x gọi là một *điểm dính* của một tập hợp A nếu với mọi $r > 0$ ta có $B(x, r) \cap A \ne \emptyset$. Tập hợp các điểm dính của A gọi là *bao đóng* của A, ký hiệu là $\overline{A}$.

c) Điểm x gọi là một *điểm tụ* của tập A nếu với mọi $r > 0$ ta có $(B(x,r) \setminus \{x\}) \cap A \neq \emptyset$. Tập hợp các điểm tụ của A ký hiệu là A'.

d) Điểm x gọi là một *điểm trong* của A nếu tồn tại $r_x > 0.$ sao cho $B(x, r_x) \subset A$. Tập hợp các điểm trong của A được gọi là *phần trong* của A. Ký hiệu là $\overset{\circ}{A}$.

e) Điểm x gọi là *điểm biên* của tập hợp A nếu x là điểm dính của A và của $X \setminus A$. Tập hợp các điểm biên của A ký hiệu là ∂A

Mệnh đề. *Điểm x_0 là một điểm dính của A nếu và chỉ nếu tồn tại $x_n \in A$ sao cho $x_n \to x_0$ khi $n \to \infty$.*

Định nghĩa. Tập hợp A gọi là *tập mở* nếu mọi điểm của A đều là điểm trong. Tập A gọi là tập đóng nếu nó là phần bù của tập mở.

Định lý. *Tập hợp A đóng nếu A chứa tất cả các điểm dính của nó.*

Định lý. *Tập hợp A là tập đóng nếu và chỉ nếu $A = \overline{A}$. Tập hợp A là tập mở nếu và chỉ nếu $A = \overset{\circ}{A}$.*

Mệnh đề. *Tập A đóng nếu và chỉ nếu: với mọi dãy $\{x_n\} \subset A$, $x_n \to x_0$ thì $x_0 \in A$.*

Mệnh đề. *Tập $\overset{\circ}{A}$ là tập mở lớn nhất chứa trong A. Tập $\overline{A}$ là tập đóng nhỏ nhất chứa A. Ngoài ra $\overline{A} = A \cup \partial A = \overset{\circ}{A} \cup \partial A$.*

Mệnh đề. *Quả cầu mở là một tập mở.*

Định lý. *Trong không gian mêtric X, tập A mở khi và chỉ khi tập $X \setminus A$ đóng.*

Định lý. *Trong một không gian mêtríc X*

a) Hội bất kỳ các tập mở là tập mở.

b) Giao hữu hạn các tập mở là mở.

Định lý. *Trong một không gian mêtríc X*

a) Giao bất kỳ các tập đóng là tập đóng.

b) Hội hữu hạn các tập đóng là đóng.

Mệnh đề (tập mở, đóng trên $\mathbb{R}$). *Trên $\mathbb{R}$ với metric $d(x,y) = |x - y|$*

a) Các khoảng đóng $[a,b], [a,\infty), (-\infty, b]$ là các tập đóng.

b) Các khoảng mở $(a,b), (a,\infty), (-\infty, b)$ là tập mở.

c) Mọi tập mở trên $\mathbb{R}$ đều viết được dưới dạng hội hữu hạn hay đếm được *của các khoảng mở.*

Phương pháp chứng minh tập đóng

Muốn chứng minh một tập hợp A là đóng, ta lấy một điểm dính bất kỳ của A rồi chứng minh điểm dính ấy là một phần tử của A.

Muốn chứng minh một tập hợp A không phải là tập đóng, ta tìm một điểm dính cụ thể không chứa trong A, nghĩa là ta tìm một điểm $x_0 \notin A$ và một dãy $(x_n) \subset A$ sao cho $d(x_n, x_0) \to 0$.

Phương pháp chứng minh tập mở

Muốn chứng minh một tập hợp A là mở, ta chứng minh phần bù $X \setminus A$ là tập đóng. Ta cũng có thể chứng minh mọi điểm x_0 của A đều là điểm trong của A.

Muốn chứng minh một tập hợp A không phải là tập mở, ta tìm một điểm cụ thể của A không phải là điểm trong của A, hay ta tìm một điểm $x_0 \in A$ sao cho có một dãy $(x_n) \subset X \setminus A$ sao cho $x_n \to x_0$.

Phương pháp chứng minh một điểm là điểm biên, điểm trong

Muốn chứng minh một điểm là điểm biên của tập hợp A, ta chứng minh nó là điểm dính của tập A và của $X \setminus A$

Muốn chứng minh một điểm không phải là điểm trong của A ta chứng minh nó là điểm dính của $X \setminus A$

Muốn chứng minh một điểm $x \in A$ là điểm trong của tập hợp A ta có thể

* Tìm một số $r_x > 0$ sao cho $B(x, r_x) \subset A$

* Giả sử x là điểm dính của $X \setminus A$ và suy ra điều vô lý

BÀI TẬP

1. Cho không gian metric (X, d). Cho $A, B \subset X$. CM
   (a) $X \setminus \overset{\circ}{A} = \overline{X \setminus A}$.
   (b) $(X \setminus A)^\circ = X \setminus \overline{A}$.
   (c) $(\overset{\circ}{A})^\circ = \overset{\circ}{A}$.
   (d) $\overset{\circ}{A} \cap \overset{\circ}{B} = (A \cap B)^\circ$.
   (e) $\overset{\circ}{A} \cup \overset{\circ}{B} \subset (A \cup B)^\circ$. Dấu bằng có xảy ra không?
2. Cho không gian metric (X, d). Cho $A, B \subset X$. CM

(a) $\overline{(\overline{A})} = \overline{A}$.

(b) $\overline{A} \cup \overline{B} = \overline{A \cup B}$.

(c) $\overline{A} \cap \overline{B} \supset \overline{A \cup B}$. Dấu bằng có xảy ra không?

3. Cho không gian metric (X, d). Cho $A, B \subset X$. CM

   (a) ∂A là tập đóng và A đóng khi và chỉ khi $\partial A \subset A$.

   (b) $\overline{A} = A \cup A'$.

   (c) $\partial A = \partial(X \setminus A)$.

   (d) $\partial A = \overline{A} \cap \overline{X \setminus A}$.

   (e) $A = \partial A \cup \overset{\circ}{A}$.

   (f) $\partial(A \cup B) \subset \partial A \cup \partial B$. Cho ví dụ cho thấy dấu bằng chưa chắc xảy ra.

4. Cho không gian metric X, $A \subset X$ và G là một tập mở trong X. Giả sử $G \cup A = \emptyset$. CMR $G \cap \overline{A} = \emptyset$.

5. Cho không gian metric X, $A \subset X$ và $\overline{A} = X$. Ta nói A *trù mật* trong X. Cho U là một tập mở trong X. CM $U \subset \overline{E \cap U}$.

6. Cho không gian metric (X, d), $A, B \subset X$. CM các kết quả về khoảng cách sau

   (a) $d(x, A) = 0$ khi và chỉ khi $x \in \overline{A}$.

   (b) $d(x, A) = d(x, \overline{A})$.

   (c) $d(A, B) = d(\overline{A}, \overline{B})$.

   (d) $diam\ A = diam\ \overline{A}$.

7. Các tập hợp sau đóng (hay mở) trong $\mathbb{R}^k$ $(k = 1, 2, 3)$? Chứng minh khẳng định.

   (a) $A = [0, 1)$

   (b) $A = (-1, 1)$

   (c) $A = \bigcup_{n=1}^{\infty}(0, \frac{n}{n+1})$

   (d) $A = \bigcup_{n=1}^{\infty}(-\frac{1}{n}, \frac{n}{n+1})$

(e) $A = \bigcap_{n=1}^{\infty}(-\frac{2}{n}, \frac{n}{n+1})$

(f) $A = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 5\}$

(g) $A = \{(x, y) : x^2 + \sin xy \geq 7\}$

3. Liên tục

Định nghĩa. Cho không gian metric $(X, d_X), (Y, d_Y)$, $D \subset X$ và $f : D \to Y$.

a)Ánh xạ f gọi là *có giới hạn* $y_0 \in Y$ *tại* $x_0 \in D'$ (tập các điểm tụ của D) nếu: với mỗi $\epsilon > 0$, tồn tại $\delta > 0$ sao cho $d_Y(f(x), y_0)) < \epsilon$ với mọi $x \in D$ thỏa $d_X(x, x_0) < \delta$. Ta nói $f(x) \to y_0$ khi $x \to x_0$ hay

$$y_0 = \lim_{x \to x_0} f(x).$$

b) Ánh xạ f gọi là *liên tục tại* $x_0 \in D$ nếu: với mỗi $\epsilon > 0$, tồn tại $\delta > 0$ sao cho $d_Y(f(x), f(x_0)) < \epsilon$ với mọi $x \in D$ thỏa $d_X(x, x_0) < \delta$. Ánh xạ f gọi là *liên tục trên* D nếu f liên tục tại mọi $x \in D$.

Mệnh đề. *Cho hai không gian metric $(X, d_X), (Y, d_Y)$, $D \subset X$ và $f : D \to Y$.*

a) Với $x_0 \in D'$, ta có $\lim_{x \to x_0} f(x) = y_0$ nếu và chỉ nếu: với mọi dãy $(x_n) \subset D$ hội tụ về x_0, ta có $f(x_n) \to y_0$ khi $n \to \infty$.

b) f liên tục tại $x_0 \in D$ nếu và chỉ nếu: với mọi dãy $(x_n) \subset D$ hội tụ về x_0, ta có $f(x_n) \to f(x_0)$ khi $n \to \infty$.

Mệnh đề. *Cho $(X, d_X), (Y, d_Y), (Z, d_Z)$ là các không gian metric. Cho các ánh xạ $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$. Giả sử f liên tục tại $x_0 \in X$, g liên tục tại $f(x_0)$. Khi đó $h = g \circ f : X \to Z$ liên tục tại x_0.*

Mệnh đề. *Các khẳng định sau là tương đương*

a) $f : X \to Y$ liên tục trên X.

b) Với mọi tập U mở trong Y, ảnh ngược $f^{-1}(U)$ mở trong X.

c) Với mọi tập V đóng trong Y, ảnh ngược $f^{-1}(V)$ đóng trong X.

Mệnh đề. *Cho (X, d) là không gian metric, Y là một không gian định chuẩn. Cho $D \subset X$, x_0 là một điểm tụ của D, $f, g : X \to Y$ và $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.*

a) Giả sử $\lim_{x \to x_0} f(x)$, $\lim_{x \to x_0} f(x)$ tồn tại. Ta có

$$\lim_{x \to x_0} (\alpha f(x) + \beta g(x)) = \alpha \lim_{x \to x_0} f(x) + \beta \lim_{x \to x_0} f(x).$$

b) Giả sử $u \in D$ và f, g liên tục tại u thì $f \pm g, \alpha f$ liên tục tại u.

Mệnh đề. *Cho (X, d) là không gian metric. Cho $D \subset X$, x_0 là một điểm tụ của D, $f, g : X \to \mathbb{R}$.*

a) Giả sử $\lim_{x \to x_0} f(x)$, $\lim_{x \to x_0} f(x)$ tồn tại. Ta có

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to x_0} (\alpha f(x) + \beta g(x)) &= \alpha \lim_{x \to x_0} f(x) + \beta \lim_{x \to x_0} g(x). \\
\lim_{x \to x_0} (f(x) g(x)) &= \lim_{x \to x_0} f(x) \lim_{x \to x_0} g(x). \\
\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} &= \frac{\lim\limits_{x \to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x \to x_0} g(x)} \quad (\lim_{x \to x_0} g(x) \neq 0).
\end{aligned}$$

b) (Bảo toàn bất đẳng thức) Nếu $f \leq g$ trên D thì $\lim_{x \to x_0} f(x) \leq \lim_{x \to x_0} g(x)$.

c) (Tính chất Sandwich) Nếu $h : D \to \mathbb{R}$ thỏa $f \leq h \leq g$ với $x \in D$ và nếu

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} g(x) = L$$

thì $\lim_{x \to x_0} h(x)$ tồn tại và bằng L.

d) Giả sử $u \in D$ và f, g liên tục tại u thì $f \pm g, \alpha f, f/g$ (với $g(u) \neq 0$) liên tục tại u.

Phương pháp chứng minh tập mở, đóng bằng ánh xạ liên tục

Cho $T : X \to \mathbb{R}$, $U \subset \mathbb{R}$. Để kiểm tra tập hợp $\{x \in X : T(x) \in B\}$ mở (đóng) ta có thể làm như sau:

B1: Chứng minh T liên tục trên X.

B2: Chứng tỏ B mở (đóng) trên $\mathbb{R}$.

B3: Áp dụng định lý về ảnh ngược.

Ví dụ. CM tập hợp $A = \left\{ f \in C[0,1] : \int_0^1 f(t)dt \geq 5 \right\}$ là một tập đóng trong $C[0, 1]$.

Giải Đặt $T(f) = \int_0^1 f(t)dt$ thì $T : C[0,1] \to \mathbb{R}$. Ta chứng minh T liên tục trên $C[0, 1]$. Lấy $f \in C[0, 1]$ và giả sử $f_n \in C[0, 1]$ thỏa $d(f_n, f) =$

$\max\limits_{0\le t\le 1} |f_n(t) - f(t)| \to 0$ khi $n \to \infty$. Khi đó ta có

$$\begin{aligned} |T(f_n) - T(f)| &= \left|\int_0^1 (f_n(t) - f(t))dt\right| \\ &\le \int_0^1 |f_n(t) - f(t)|dt \\ &\le \int_0^1 d(f_n, f)dt = d(f_n, f). \end{aligned}$$

Do $d(f_n, f) \to 0$ khi $n \to \infty$ nên từ bất đẳng thức trên ta có $Tf_n \to Tf$ khi $n \to \infty$. Vậy T liên tục tại f. Vì f chọn bất kỳ trong $C[0,1]$ nên T liên tục trên $C[0,1]$.

Bây giờ ta có thể viết $A = \{f \in C[0,1] : \ Tf \in B\} = T^{-1}(B)$ với $B = [5, \infty)$. Vì B đóng trong $\mathbb{R}$ và T liên tục trên $C[0,1]$ nên ta suy ra $A = T^{-1}(B)$ đóng trong $C[0,1]$.

BÀI TẬP

1. Tìm các giới hạn nếu có
   (a) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{2x}{2+3x^2+y^2}$.
   (b) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,-1)} \ln(1+x^2y^2)$.
   (c) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$.
   (d) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} (x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}$.
2. Có $f(0,0)$ để các hàm sau liên tục tại đó không? Nếu có hãy tìm giá trị đó. Cho $f(x,y)$ là
   (a) $\dfrac{x^3+y^3}{x^2+y^2}$
   (b) $\dfrac{x+y}{x^2+y^2}$
   (c) $(x+y)\sin\frac{1}{x}\sin\frac{1}{y}$.

3. Chứng minh các ánh xạ sau liên tục

   (a) $T : C[0,1] \to \mathbb{R}$, $T(f) = \int_0^1 \sin f(t)dt$.

   (b) $T : C[0,1] \to \mathbb{R}$, $T(f) = \int_0^1 |f(t)|^2 dt$.

   (c) $T : C[0,1] \to \mathbb{R}$, $T(f) = \int_0^1 \exp(f(t))dt$.

   (d) $T : C[0,1] \to \mathbb{R}$, $T(f) = \sup\limits_{0\le t\le 1} |f(t)|$.

   (e) $T : C[0,1] \to \mathbb{R}$, $T(f) = \inf\limits_{0\le t\le 1} |f(t)|$.

4. Khảo sát sự đóng mở của các tập trong $\mathbb{R}^2$

   (a) $A = \{(x,y) : x^3 + \sin(x+y) > 4\}$

   (b) $A = \{(x,y) : |x| + |y| < 5\}$

   (c) $A = \{(x,y) : max\{|x|, |y|\} < 5\}$

   (d) $A = \{(x,y) : 1 \le max\{|x|, |y|\} < 5\}$

   (e) $A = \{(x,y) : max\{|x|, |y|\} < 5,\ x > 1\}$

5. Khảo sát sự đóng mở trong $C[a,b]$ hay $C^1[a,b]$

   (a) $A = \left\{f \in C[0,1] :\ \int_0^1 f(t)dt \le 6\right\}$

   (b) $A = \left\{f \in C^1[0,1] :\ \int_0^1 e^{|f(t)|^3}dt \ge 4, f'(0) + f'(1) = 0\right\}$

   (c) $A = \left\{f \in C[-1,1] :\ \int_0^1 f(t)dt < 4\right\}$

   (d) $A = \left\{f \in C[0,1] :\ \max_{x\in[0,1]} f(x) \ge 5\right\}$

   (e) $A = \left\{f \in C[0,1] :\ \max_{x\in[0,1]} f(x) > 5\right\}$

   (f) $A = \left\{f \in C[0,1] :\ \min_{x\in[0,1]} f(x) \ge -1\right\}$

   (g) $A = \left\{f \in C[0,1] :\ \min_{x\in[0,1]} f(x) < -1\right\}$

   (h) $A = \left\{f \in C^1[0,1] :\ \max_{x\in[0,1]} f(x) \ge 4, f'(0) + f'(1) \ne 0\right\}$

   (i) $A = \left\{f \in C[0,2] :\ \int_0^1 |f(t)|^2 dt < 5\right\}$

   (j) $A = \left\{f \in C[0,2] :\ \int_0^2 f^3(t)dt < 5\right\}$

   (k) $A = \left\{f \in C[-1,2] :\ \int_{-1}^2 \sin f^3(t)dt < 2; \|f\| \ge 1\right\}$

(l) $A = \left\{ f \in C[-4,2] : \int_{-4}^{2} \cos f^3(t)dt \geq 4; \|f\| > 1 \right\}$

(m) $A = \left\{ f \in C[0,1] : \int_0^1 f(t)dt < 5, f(0) > 3 \right\}$

(n) $A = \left\{ f \in C[0,1] : \int_0^1 e^{|f(t)|}dt \geq 4, f(0) \neq 0 \right\}$

(o) $A = \left\{ f \in C[0,1] : \int_0^1 e^{|f(t)|^3}dt \geq 4, f(0) + f(1) \neq 0 \right\}$

(p) $A = \left\{ f \in C^1[0,1] : \int_0^1 e^{|f(t)|^3}dt \geq 4, f'(0) + f'(1) \neq 0 \right\}$

6. Cho không gian metric $(X, d_X), (Y, d_Y)$, $f : X \to Y$. Chứng minh các tính chất sau tương đương

   (a) f liên tục trên X.

   (b) $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)})$ với mọi $A \subset X$.

   (c) $f^{-1}(\overline{B}) \supset \overline{f^{-1}(B)}$ với mọi $B \subset Y$.

7. Cho X là một không gian metric, $D \subset X$ và $f : D \to \mathbb{R}$. CM

   (a) Nếu D mở thì tập $\{x \in D : f(x) < k\}$ là một tập mở. Có thể mở rộng kết quả này không?

   (b) Nếu D đóng thì tập $\{x \in D : f(x) = k\}$, $\{x \in D : f(x) \leq k\}$ là các tập đóng.

8. Cho E là một không gian metric và $A \subset E$. CM *hàm đặc trưng* của A xác định bởi

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & x \in A, \\ 0 & x \notin A, \end{cases}$$

   liên tục trên E nếu và chỉ nếu A là tập vừa mở vừa đóng.

9. Cho X là không gian metric và $f : X \to X$ liên tục. CM $A = \{x \in X : f(x) = x\}$ đóng.

10. Cho không gian metric $(X, d_X), (Y, d_Y)$, $f, g : X \to Y$ là hai ánh xạ liên tục. Đặt $A = \{x \in X : f(x) = g(x)\}$. Giả sử $A \neq \emptyset$. CM $f(x) = g(x)$ với mọi $x \in \overline{A}$.

11. Cho X, Y là hai không gian metric, $f : X \to Y$ liên tục. Gọi $\Gamma = \{(x, f(x)) : x \in X\}$. CM Γ đóng trong $X \times Y$.

12. Cho $f : X \to Y$ liên tục với X, Y là không gian metric. Cho $A \subset X$ và A mở. CM $f|_A$ liên tục tại $x \in A$ nếu và chỉ nếu f liên tục tại x. CM điều kiện A mở là không thể bỏ được.

13. Trong không gian metric X, Y, ta cho U là một tập mở trong X và $f, g : X \to Y$. Giả sử $f(x) = g(x)$ với mọi $x \in U$ và f liên tục trong U. CM g liên tục trong U.

4. Compact

Định nghĩa. Cho X là không gian mêtric. Tập $K \subset X$ gọi là tập compac của X nếu

i) mỗi dãy $(x_n) \subset K$ đều có một dãy con hội tụ,

ii) giới hạn của dãy con đó là một phần tử của K.

Nếu X compac, ta nói X là *không gian metric compac.*

Mệnh đề. *i) Nếu K là một tập compac của không gian metric X thì K bị chận (nghĩa là K chứa trong một quả cầu) và K là một tập đóng.*

ii) Nếu $V \subset K$, V đóng, K compac thì V compac.

Mệnh đề. *Cho $E = X \times Y$ với X, Y là các không gian metric. E compac khi và chỉ khi X, Y compac.*

Định lý (tiêu chuẩn compact trong $\mathbb{R}^n$). *Trong $\mathbb{R}^n$ mọi tập hợp đóng và bị chặn đều compact.*

Định nghĩa. Trên không gian metric X, xét các tập hợp K và W_i $(i \in I)$. Ta nói $\{W_i\}_{i\in I}$ là một *phủ mở* của K nếu mỗi W_i đều mở và nếu $K \subset \bigcup_{i\in I} W_i$.

Mệnh đề. *Tập K compac trong không gian metric X khi và chỉ khi: với mọi phủ mở $\{W_i\}_{1\in I}$ của K ta đều tìm được một phủ con hữu hạn (nghĩa là có $i_1, ..., i_n \in I$ sao cho $K \subset \bigcup_{j=1}^{n} W_{i_j}$).*

Mệnh đề. *Cho hai không gian metric X,Y và cho ánh xạ $A : X \to Y$ liên tục. Khi đó nếu K compac $\subset X$ thì $A(K)$ compac trong Y.*

Định lý (cực đại cực tiểu). *Cho hàm liên tục $f : X \to \mathbb{R}$ từ không gian* *metric X vào $\mathbb{R}$. Nếu K compac $\subset X$ thì f đạt cực đại cực tiểu trên K.*

Định nghĩa. Cho hai không gian metric X,Y và cho ánh xạ $A : X \to Y$ liên tục. Khi đó A gọi là *liên tục đều* trên X nếu với mỗi $\epsilon > 0$ tồn tại $\delta > 0$ sao cho $d_Y(A(x), A(y)) < \epsilon$ khi $d_X(x, y) < \delta$.

Định lý Cantor. *Cho ánh xạ liên tục $A : X \to Y$ từ không gian metric X vào không gian metric Y. Nếu K compac $\subset X$ thì A liên tục đều trên K.*

Định nghĩa. Cho hai không gian metric X,Y. Ánh xạ $A : X \to Y$ gọi là ánh xạ compăc nếu ảnh của mọi tập bị chận trong X đều có bao đóng compăc trong Y.

Định nghĩa. *Cho K là tập compac trong không gian metric X. Đặt $C(K)$ gồm các hàm $f : K \to \mathbb{R}$ liên tục trên K. $C(K)$ là không gian định chuẩn với chuẩn sup $\|f\| := \sup_{t\in K} |f(t)|$.Tập hợp $\mathcal{A} \subset C(K)$*

a) gọi là bị chặn đều nếu tồn tại $M > 0$ sao cho $\|f\| \leq M$ với mọi $f \in A$,

b) gọi là đồng liên tục nếu, với mổi $\epsilon > 0$, tồn tại $\delta = \delta(\epsilon)$ sao cho

$$|f(t_1) - f(t_2)| < \epsilon \quad \forall t_1, t_2 \in K, d_X(t_1, t_2) < \delta.$$

Định lý Ascoli (tiêu chuẩn compact trong C(K)). *Cho K là tập hợp compact trong một không giam mêtríc X. Cho tập $\mathcal{A} \subset C(K)$. Tập hợp $\mathcal{A}$ có $\overline{\mathcal{A}}$ compăc khi và chỉ khi $\mathcal{A}$ bị chặn đều và đồng liên tục*

Hệ quả (điều kiện đủ cho tính compact trong $L^p(\Omega)$). *Cho Ω mở,bị chặn trong R^n và $A \subset C(\overline{\Omega})$. Nếu A có bao đóng compact trong $C(\overline{\Omega})$ thì nó cũng có bao đóng compact trong $L^p(\Omega), 1 \leq p < \infty$.*

Định lý (tiêu chuẩn compac của l^p $(p \geq 1)$) *Tập hợp $A \subset l^p$ có bao đóng compac khi và chỉ khi A bị chặn và, với mỗi $\epsilon > 0$, ta tìm được $N(\epsilon) > 0$ sao cho,*

$$\sum_{k=n}^{\infty} |x_k|^p < \epsilon \quad \forall x = (x_1, x_2, ...) \in A, \forall n > N(\epsilon).$$

1. Tập hợp nào trong các tập hợp sau là compăc trong R^n

   (a) $A = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + |z| \leq 3\}$

   (b) $A = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 + x + y + z \leq 6\}$

   (c) $A = \{(x, y, z) : x + y + z \leq 5; x \geq -2, y \geq -3, z \geq -4\}$

(d) $A = \{(x, y, z) : x + y + z < 5; x \geq -2, y \geq -3, z \geq -4\}$

(e) $A = \{(x, y, z) : x + y + z \leq 5; x \geq -2, y \geq -3, \}$

(f) $A = \{(x, y) : xy = 1\}$

2. Các tập hợp sau có bao đóng compăc trong $C[0, 1]$ không?

   (a) $x_n(t) = t^n$

   (b) $x_n(t) = \sin nt$

   (c) $x_n(t) = \sin(t + n)$

   (d) $x_\alpha(t) = \sin \alpha t, \quad \alpha \in R$

   (e) $x_\alpha(t) = \sin \alpha t, \quad \alpha \in [1, 2]$

   (f) $x_\alpha(t) = \arctan \alpha t, \quad \alpha \in R$

   (g) $x_\alpha(t) = e^{t-\alpha}, \ \alpha \in R, \ \alpha \geq 0$

3. Cho M là một tập hợp bị chặn trong $C[a, b]$. Chứng minh rằng tập hợp A các hàm có dạng sau là tập hợp có bao đóng compăc

$$y(t) = \int_0^t x(\tau) d\tau \qquad x \in M$$

4. Cho $k_1, k_2 > 0$. Chứng minh rằng tập hợp các hàm khả vi liên tục trên khỏang $[a, b]$ thỏa

$$|x(0)| \leq k_1, \ \int_a^b |x'(t)|^2 dt \leq k_2$$

   là tập compăc trong $C[a, b]$.

5. Cho $k > 0$. Chứng minh rằng tập hợp các hàm khả vi liên tục trên khỏang $[a, b]$ thỏa

$$\int_a^b [|x(t)|^2 + |x'(t)|^2] dt \leq k$$

   là tập compăc trong $C[a, b]$.

6. Tóan tử $A : C[0, 1] \to C[0, 1]$ nào là compac

(a) $Ax(t) = tx(t)$

(b) $Ax(t) = \int_0^t x(s)ds$

(c) $Ax(t) = \int_0^1 e^{ts}x(s)ds$

(d) $Ax(t) = x(t^2)$

7. Cho $x = (x_1, x_2, ...)$.Tóan tử $A : l^2 \to l^2$ nào là compac

   (a) $Ax = (0, x_1, x_2, ...)$

   (b) $Ax = (x_1, \frac{x_2}{2}, \frac{x_3}{3}, ...)$

   (c) $Ax = (0, x_1, \frac{x_2}{2}, \frac{x_3}{3}, ...)$

8. Chứng minh các tóan tử sau compac

   (a) $A : C^1[a,b] \to C[a,b],\ Ax(t) = x(t)$

   (b) $A : C^1[a,b] \to C[a,b],\ Ax(t) = x^2(t)$

   (c) $A : C[0,1] \to C[0,1],\ Ax(t) = \int_0^1 \sin(tx(s))ds$

   (d) $A : C[0,1] \to C[0,1],\ Ax(t) = \int_0^t e^{tx(s)}ds$

   (e) $A : C[0,1] \to C[0,1],\ Ax(t) = \int_0^1 e^{tx(s)}ds$

   (f) $A : C[0,1] \to C[0,1],\ Ax(t) = \int_0^1 \cos(tx(s))ds$

   (g) $A : C[0,1] \to C[0,1],\ Ax(t) = \int_0^1 e^{t|x(s)|}ds$

   (h) $A : C[0,1] \to C[0,1],\ Ax(t) = \int_0^t e^{|t-x(s)|}ds$

   (i) $A : C[0,1] \to C[0,1],\ Ax(t) = \int_t^1 e^{t|x(s)|^3}ds$

9. Cho X và Y là hai không gian metric, $f : X \to Y$ sao cho $f|_K$ liên tục với mọi K compact. CMR f liên tục trên X.

10. Cho X và Y là hai không gian metric, $f : X \to Y$ sao cho f là song ánh liên tục. CMR nếu X compact thì $f^{-1} : Y \to X$ cũng liên tục.

11. Cho (X, d) là không gian metric và $\{G_i\}_{i\in I}$ là một họ các phủ mở của X. Ta nói $\alpha > 0$ là số Lebesgue của họ phủ mở $\{G_i\}_{i\in I}$ nếu với mọi $A \subset X$, $diamA < \alpha$ ta tìm được $i_0 \in I$ sao cho $A \subset G_{i_0}$. CMR nếu X compact thì mọi bao phủ mở đều có một số Lebesgue.

12. Cho không gian metric (X, d), tập $A \subset X$ gọi là tiền compact nếu: với mọi $\epsilon > 0$, tồn tại một phủ mở của A gồm một số hữu hạn quả cầu bán kính nhỏ hơn ϵ.

    (a) CMR mọi không gian metric compact thì tiền compact.

    (b) Từ câu trên và bài tập về số Lebesgue hãy CMR: điều kiện cần và đủ để X compact là mọi bao phủ mở của X đều có một phủ con hữu hạn.

13. Cho A là một tập con của không gian metric X. CMR

    (a) A tiền compact nếu và chỉ nếu $\overline{A}$ tiền compact.

    (b) Trong $\mathbb{R}^n$, một tập hợp là tiền compact nếu và chỉ nếu nó bị chặn.

14. Cho $\{K_n\}$ là một dãy giảm các tập compact, khác rỗng của không gian metric X. CMR $\bigcap_{n=1}^{\infty} K_n$ là tập compact và khác rỗng.

15. Cho X là không gian metric compact, Y là không gian metric. Xét A là tập con đóng của $X \times Y$ và tập $pr_2(A) = \{y \in Y : \exists x \in X, (x, y) \in A\}$. CMR $pr_2(A)$ đóng trong Y.

16. cho f từ không gian metric X vào không gian metric compact Y. CMR nếu đồ thị
    $$\Gamma = \{(x, y) \in X \times Y : y = f(x)\}$$
    là một tập đóng thì f liên tục trên X.

17. (Định lý Dini) Cho X là không gian metric compact và $f : X \to R$ là một hàm liên tục và $\{f_n : X \to R\}$ là một dãy đơn điệu các hàm liên tục. CMR nếu $f_n(x) \to f(x)$ khi $n \to \infty$ với mọi $x \in X$ thì f_n hội tụ đều về f, nghĩa là $\sup\limits_{x \in X} |f_n(x) - f(x)| \to 0$ khi $n \to \infty$.

18. Cho X là không gian metric compact. CMR X chứa một tập con không quá đếm được A và $\overline{A} = X$ (ta nói A trù mật trong X).

19. Cho X là không gian metric compact và $f : X \to R$ thỏa $f(x) > 0$ với mọi $x \in X$. CMR tồn tại $c > 0$ sao cho $f(x) \geq c$ với mọi $x \in X$.

20. Cho X là không gian metric compact, $E, F \subset X$ khác rỗng và E compact. CM

(a) Tồn tại $e \in E$ sao cho $d(x, E) = d(E, F)$.

(b) Tồn tại $a, b \in E$ sao cho $d(a, b) = diamE$.

4. Tính đầy đủ, tính trù mật và ánh xạ co

Định nghĩa. Một dãy $\{x_n\}$ trong không gian mêtríc X gọi là dãy Cauchy nếu: Với $\epsilon > 0$ cho trước, ta tìm được N_ϵ sao cho

$$d(x_n, x_m) < \epsilon \quad \forall n, m > N_\epsilon$$

Định lý. *Mọi dãy hội tụ trong không gian mêtric đều là dãy Cauchy*

Định nghĩa. Không gian mêtríc X được gọi là một không gian đầy đủ nếu nó thỏa tính chất: mọi dãy Cauchy đều hội tụ. Một không gian định chuẩn đầy đủ gọi là một không gian Banach

Định nghĩa. Tập $A \subset X$ gọi là trù mật nếu $\overline{A} = X$. Tập $B \subset X$ gọi là không đâu trù mật trong X nếu mọi tập mở $U \subset X$ đều chứa một tập mở $V \subset U$ sao cho $V \cap B = \emptyset$.

Định lý. *Trong không gian metric đầy đủ X, nếu G_n là các tập mở trù mật của X thì $\bigcap_{n=1}^{\infty} G_n$ cũng trù mật trong X.*

Định lý Baire. *Mọi không gian metric đầy đủ X đều không thể là hội đếm được của các tập không đâu trù mật.*

Định lý. *Trong không gian metric X cho $E \subset X$. Ba mệnh đề sau tương đương:*

a) E không đâu trù mật trong X.

b) $\overset{\circ}{\overline{E}} = \emptyset$.

c) $X \setminus \overline{E}$ trù mật trong X.

Định nghĩa. Một ánh xạ $T : X \to X$ gọi là một ánh xạ co nếu tồn tại số α thỏa $0 < \alpha < 1$ và $d(Tx, Ty) \leq \alpha d(x, y)$ với mọi $x, y \in X$.

Định lý ánh xạ co Banach. *Trên một không gian mêtríc đầy đủ, mọi ánh xạ* *co $T : X \to X$ đều có một điểm bất động duy nhất*

Định lý Schauder. *Cho X là một không gian Banach, cho K là một tập lồi đóng trong X. Cho $T : K \to X$ là một ánh xạ liên tục thỏa*

a) $\underline{T(K)} \subset K$

b) $\overline{T(K)}$ *compact trong* X

thì T tồn tại điểm bất động trong K.

Phương pháp Newton *Cho hàm $f : I \to I$ sao cho $f'(x) \neq 0$ với mọi $x \in I$. Phương pháp Newton dùng để giải phương trình $f(x) = 0$ bằng cách xây dựng dãy x_n xác định bởi*

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

1. Áp dụng phương pháp Newton để tính gần đúng

    (a) $\sqrt{2}$ (d) $\sqrt{7}$ (g) $\sqrt[3]{7}$

    (b) $\sqrt{3}$ (e) $\sqrt[3]{3}$ (h) $\sqrt[4]{3}$

    (c) $\sqrt{5}$ (f) $\sqrt[3]{5}$ (i) $\sqrt[6]{5}$

2. CMR các phương trình $x = Tx$ có nghiệm trong $C[a, b]$

    (a) $Tx(t) = \frac{1}{2}\int_0^1 \sin(t - x(s))ds; C[0, 1]$.

    (b) $Tx(t) = \frac{1}{4}\int_0^3 \cos(t - x(s))ds; C[0, 3]$.

    (c) $Tx(t) = \int_0^1 x(s)\sin(ts)ds; C[0, 1]$.

    (d) $Tx(t) = \int_0^t x(s)\cos(ts)ds; C[0, 1]$.

    (e) $Tx(t) = \int_0^1 s\sin(t + x(s))ds; C[0, 1]$.

    (f) $Tx(t) = \int_0^t x(s)\arctan s ds; C[0, 1]$.

    (g) $Tx(t) = \int_0^t x(s)\sin s ds; C[0, 1]$.

    (h) $Tx(t) = \int_0^t x(s)\cos s ds; C[0, 1]$.

    (i) $Tx(t) = \int_0^t e^{-x^2(s)}ds; C[0, 1]$.

    (j) $Tx(t) = \int_0^t e^{-(t-x(s))^2}ds; C[0, 1]$.

    (k) $Tx(t) = \int_0^1 \frac{\sin s}{s}x(s)ds; C[0, 1]$.

(l) $Tx(t) = \int_0^t \frac{\sin(t-s)}{t-s} x(s)ds; C[0,1]$.

(m) $Tx(t) = \frac{1}{2}\int_0^t e^{-|t-x(s)|^3} ds; C[0,1]$.

(n) $Tx(t) = \int_0^t se^{-|t-x(s)|^3} ds; C[0,1]$.

3. CMR các phương trình $x = Tx$ có nghiệm trong $C[a,b]$

(a) $Tx(t) = \int_0^5 \sin(t - x(s))ds; C[0,5]$.

(b) $Tx(t) = t^3 + 4\int_0^3 \cos(t - x(s))ds; C[0,3]$.

(c) $Tx(t) = t + 5 - 4\int_0^1 x(s)\sin(ts)ds; C[0,1]$.

(d) $Tx(t) = \int_0^t x(s)\cos(ts)ds; C[0,2\pi]$.

(e) $Tx(t) = \int_0^{2\pi} s\sin(t + x(s))ds; C[0,2\pi]$.

(f) $Tx(t) = 5\int_0^t x(s)\arctan s ds; C[0,\pi/4]$.

(g) $Tx(t) = \ln(1+t) - 4\int_0^t x(s)\sin s ds; C[0,1]$.

(h) $Tx(t) = 7\int_0^t \cos(t - x(s))ds; C[0,1]$.

(i) $Tx(t) = t^3 + t - 3\int_0^t e^{-x^2(s)} ds; C[0,1]$.

(j) $Tx(t) = \int_0^t e^{-(t-x(s))^2} ds; C[0,10]$.

(k) $Tx(t) = \int_0^1 \frac{\sin s}{s} x(s)ds; C[0,\pi]$.

(l) $Tx(t) = \int_0^t \frac{\sin(t-s)}{t-s} x(s)ds; C[0,\pi]$.

(m) $Tx(t) = \int_0^t e^{-|t-x(s)|^3} ds; C[0,3]$.

(n) $Tx(t) = \int_0^t se^{-|t-x(s)|^3} ds; C[0,2]$.

4. Chứng minh rằng với λ đủ nhỏ, ta có thể chọn $M > 0$ thích hợp để phương trình $x = Tx$ có nghiệm trong $B(0,M) \subset C[a,b]$

(a) $Tx(t) = \lambda + \int_0^t x^2(s)ds;\ C[0,1]$

(b) $Tx(t) = \lambda t - \int_0^t x^3(s)ds;\ C[0,2]$

(c) $Tx(t) = \frac{t}{5} + \lambda\int_0^t x^2(s)ds;\ C[0,1]$

(d) $Tx(t) = \lambda t + \int_0^t x^3(s)ds;\ C[0,2]$

5. Cho (a_n) là một dãy Cauchy trong không gian metric (X, d) và (ϵ_n) là một dãy số thực dương. CM có dãy con (a_{n_k}) sao cho $d(a_{n_{k+1}}, a_{n_k}) \leq \epsilon_k$ với mọi k.

6. CMR không gian metric $X \times Y$ đầy đủ khi và chỉ khi X và Y đầy đủ.

7. Cho X là không gian metric sao cho mọi quả cầu đóng thì compact. CM X đầy đủ.

8. Cho X là không gian metric đầy đủ và $A \subset X$. CM A tiền compact khi và chỉ khi $\overline{A}$ compact.

9. Cho $f : X \to Y$ là ánh xạ liên tục đều từ không gian metric X vào không gian metric Y. CM
   (a) Nếu (x_n) Cauchy trong X thì $(f(x_n))$ Cauchy trong Y.
   (b) Nếu A tiền compact trong X thì $f(A)$ tiền compact trong Y.

10. Cho $f : X \to Y$ là ánh xạ từ không gian metric X vào không gian metric Y. CM f liên tục đều trên X khi và chỉ khi: với mọi $\epsilon > 0$ tồn tại $\eta > 0$ sao cho với $A \subset X$, $diamA < \eta$ thì $diamf(A) < \epsilon$.

11. Cho X là không gian metric đầy đủ. CMR nếu X đếm được thì X chứa ít nhất một điểm cô lập.

12. (Định lý Cantor) Không gian metric X là đầy đủ nếu và chỉ nếu: với mọi dãy $\{C_n\}$ các tập hợp của X thỏa $C_n \supset C_{n+1}$ và $\lim_{n\to\infty} diamC_n = 0$ thì ta có $\bigcap_{n=1}^{\infty} C_n \neq \emptyset$.

13. CMR mọi tập con đóng của một không gian metric đầy đủ (X, d) là một không gian metric đầy đủ với cùng khoảng cách d.

14. Cho không gian metric (X, d) và $f : X \to X$ thỏa $d(f(x), f(y)) < d(x, y)$ với $x, y \in X, x \neq y$. CM nếu X compact thì f có điểm bất động. Nếu bỏ tính chất compact thì kết quả còn đúng không?

15. Cho X là không gian metric đầy đủ và $(f_n : X \to \mathbb{R})$ liên tục. Giả sử với mọi $x \in X$ ta có $\sup_n |f_n(x)| < \infty$. CMR có quả cầu mở $B \subset X$ sao cho $\sup\limits_{x\in B, n\in\mathbb{N}} |f_n(x)| < \infty$.

16. Cho $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ khả vi tại mọi điểm. CMR có một khoảng mở $I \subset \mathbb{R}$ sao cho f Lipschitz trên I.

5. Ánh xạ tuyến tính

Định lý. *Cho X và Y là hai không gian định chuẩn. Tóan tử tuyến tính $A : X \to Y$ liên tục trên X khi và chỉ khi*
a) nó liên tục tại 0,
b) tồn tại số c sao cho $\|Ax\| \leq c\|x\|$

Định nghĩa. *Cho X và Y là hai không gian định chuẩn. Ta ký hiệu $\mathcal{L}(X, Y)$ là tập hợp các ánh xạ tuyến tính liên tục từ X vào Y. Ta ký hiệu*

$$\|A\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|_Y}{\|x\|_X} \quad \forall x \in \mathcal{L}(X, Y).$$

Nếu $Y = R$, ta ký hiệu $\mathcal{L}(X, Y) = X^*$, nếu $Y = X$, ta ký hiệu $\mathcal{L}(X, Y) = \mathcal{L}(X)$.

Định lý. *$\mathcal{L}(X, Y)$ là không gian định chuẩn. Nếu Y là không gian Banach thì $\mathcal{L}(X, Y)$ là không gian Banach.*

1. Trên R^n $(n = 2, 3)$, cho không gian con L cho phiếm hàm tuyến tính f. Tìm phiếm hàm thác triển của f trên R^n bảo tòan chuẩn của f.

   (a) $L = \{x = (x_1, x_2) : \ 2x_1 - x_2 = 0\}$, $< x, f >= x_1$, chuẩn Euclide

   (b) $L = \{x = (x_1, x_2) : \ x_1 - 3x_2 = 0\}$, $< x, f >= x_1 + x_2$, chuẩn Euclide

   (c) $L = \{x = (x_1, x_2) : \ 2x_1 - x_2 = 0\}$, $< x, f >= x_1$, chuẩn $|.|_1$

   (d) $L = \{x = (x_1, x_2) : \ x_1 - 4x_2 = 0\}$, $< x, f >= x_1 + 2x_2$, chuẩn $|.|_\infty$

   (e) $L = \{x = (x_1, x_2, x_3) : \ 2x_1 - x_2 = 0\}$, $< x, f >= 3x_1 + x_2 + x_3$, chuẩn Euclide

   (f) $L = \{x = (x_1, x_2, x_3) : \ 3x_1 - 2x_3 = 0\}$, $< x, f >= 3x_1 + x_2 - 2x_3$, chuẩn Euclide

(g) $L = \{x = (x_1, x_2, x_3): \ 2x_1 - x_2 = 0\}$, $< x, f >= 3x_1 + x_2 + x_3$, chuẩn $|.|_1$

(h) $L = \{x = (x_1, x_2, x_3): \ 3x_1 - 2x_3 = 0\}$, $< x, f >= 3x_1 + x_2 - 2x_3$, chuẩn $|.|_\infty$

2. Chứng minh rằng các tóan tử tuyến tính sau liện tục và tính chuẩn của nó:

   (a) $A : C[0,1] \to C[0,1]; Ax(t) = \int_0^t x(t)dt$

   (b) $A : C[-1,1] \to C[0,1]; Ax(t) = \int_0^t x(t)dt$

   (c) $A : C[-1,1] \to C[0,1]; Ax(t) = x(t)$

   (d) $A : C[0,1] \to C[0,1]; Ax(t) = t^2 x(0)$

   (e) $A : C[0,1] \to C[0,1]; Ax(t) = x(t^2)$

   (f) $A : C^1[0,1] \to C[0,1]; Ax(t) = x(t)$

   (g) $A : C^1[0,1] \to C[0,1]; Ax(t) = x'(t)$

   (h) $A : L^2(0,1) \to L^2(0,1); Ax(t) = t\int_0^1 x(\tau)d\tau$

   (i) $A : H^1(0,1) \to L^2(0,1); Ax(t) = x(t)$

   (j) $A : H^1(0,1) \to H^1(0,1); Ax(t) = x(t)$

3. Chứng minh rằng các phiếm hàm thuộc $(C[-1,1])^*$, tìm chuẩn của nó

   (a) $< x, f >= \frac{1}{3}[x(1) + x(-1)]$

   (b) $< x, f >= 2[x(1) - x(0)]$

   (c) $< x, f >= \sum_{k=1}^n \alpha_k x(t_k), \quad t_1, ..., t_k \in [-1,1]$.

   (d) $< x, f >= \frac{1}{2\epsilon}[x(\epsilon) + x(-\epsilon) - 2x(0)], \quad \epsilon \in [-1,1] \setminus \{0\}$

   (e) $< x, f >= \int_0^1 x(t)dt$

   (f) $< x, f >= -x(0) + \int_{-1}^1 x(t)dt$

   (g) $< x, f >= \int_{-1}^0 x(t)dt - \int_0^1 x(t)dt$

   (h) $< x, f >= \int_{-1}^1 x(t)dt - \frac{1}{2n+1}\sum_{k=-n}^n x(\frac{k}{n})$

4. Chứng minh rằng các phiếm hàm sau liên tục, tìm chuẩn của nó

   (a) $< x, f >= \int_{-1}^1 tx(t)dt, \quad x \in C[-1,1]$

(b) $< x, f >= \int_0^1 tx(t)dt, \quad x \in C^1[-1, 1]$

(c) $< x, f >= \int_{-1}^1 tx(t)dt, \quad x \in L^1(-1, 1)$

(d) $< x, f >= \int_{-1}^1 tx(t)dt, \quad x \in L^2(-1, 1)$

(e) $< x, f >= \int_0^1 t^{-1/3}x(t)dt, \quad x \in L^2(0, 1)$

(f) $< x, f >= x_1 + x_2, \quad x = (x_1, x_2, ...) \in l^2$

(g) $< x, f >= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x_k}{k}, \quad x = (x_1, x_2, ...) \in l^2$

(h) $< x, f >= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x_k}{k}, \quad x = (x_1, x_2, ...) \in l^1$

(i) $< x, f >= \sum_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{k}\right) x_k, \quad x = (x_1, x_2, ...) \in l^1$

(j) $< x, f >= x_1 + x_2, \quad x = (x_1, x_2, ...) \in \ell^\infty$ (k/g các dãy bị chặn)

(k) $< x, f >= \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k+1} x_k, \quad x = (x_1, x_2, ...) \in c_0$ (k/g các dãy tiến về 0)

(l) $< x, f >= \lim_{n \to \infty} x_n, \quad x \in c$ (k/g các dãy hội tụ)