ĐỀ CƯƠNG ÔN TẬP 2019
Vi tích phân 2

1. Chuỗi số

TIẾT 1

Định nghĩa. Cho dãy $a_n \in \mathbb{R}$, $n_0 \in \mathbb{N}$, Đặt $s_n = \sum_{k=n_0}^{n} a_k$ $(n \geq n_0)$.

(a) Nếu $\lim_{n\to\infty} s_n$ tồn tại thì ta ký hiệu

$$\sum_{k=n_0}^{\infty} a_k = \lim_{n\to\infty} s_n$$

và ta nói chuỗi $\sum_{k=n_0}^{\infty} a_k$ *hội tụ*.

(b) Nếu $\lim_{n\to\infty} s_n$ không tồn tại thì ta nói chuỗi $\sum_{k=n_0}^{\infty} a_k$ *phân kỳ* (hay không hội tụ).

Ví dụ. Xét chuỗi $\sum_{k=0}^{\infty} aq^n$ (chuỗi của cấp số nhân) ta có $s_n = \sum_{k=0}^{n} aq^k = \frac{a(1-q^{n+1})}{1-q}$ $(q \neq 1)$.

a) Chuỗi hội tụ khi $|q| < 1$ và

$$\sum_{k=0}^{\infty} aq^n = \frac{a}{1-q}.$$

b) Chuỗi phân kỳ khi $|q| \geq 1$.

Định lý. *Cho $\sum_{k=n_0}^{\infty} a_k$, $\sum_{k=n_0}^{\infty} b_k$ hội tụ. Khi đó*

a) Chuỗi $\sum_{k=n_0}^{\infty}(\alpha a_k + \beta b_k)$ hội tụ và

$$\sum_{k=n_0}^{\infty}(a_k + b_k) = \alpha \sum_{k=n_0}^{\infty} a_k + \beta \sum_{k=n_0}^{\infty} b_k.$$

b) Cho $n_1 > n_0$, $n_0, n_1 \in \mathbb{N}$, (c_n). Khi đó chuỗi $\sum_{k=n_0}^{\infty} c_k$ hội tụ khi và chỉ khi $\sum_{k=n_1}^{\infty} a_k$ hội tu và

$$\sum_{k=n_0}^{\infty} a_k = \sum_{k=n_0}^{n_1-1} a_k + \sum_{k=n_1}^{\infty} a_k.$$

Định lý (điều kiện cần của sự hội tụ). *Nếu $\sum_{k=n_0}^{\infty} a_k$ hội tụ thì $\lim_{k\to\infty} a_k = 0$. Vậy nếu $\lim_{k\to\infty} a_k \neq 0$ thì chuỗi $\sum_{k=n_0}^{\infty} a_k$ không hội tụ.*

Định lý (điều kiện cần và đủ của sự hội tụ). *Chuỗi $\sum_{k=n_0}^{\infty} a_k$ hội tụ khi và chỉ khi: với mỗi $\epsilon > 0$ tồn tại n_ϵ sao cho*

$$\left|\sum_{k=n}^{m} a_k\right| \leq \epsilon \qquad \forall m > n \geq n_\epsilon.$$

2. Chuỗi số không âm

TIẾT 2

Định nghĩa Nếu $a_n \geq 0$ với mọi $n \in \mathbb{N}$ thì ta nói $\sum_{k=n_0}^{\infty} a_k$ là chuỗi không âm. Nếu $a_n > 0$ với mọi $n \in \mathbb{N}$ thì ta nói $\sum_{k=n_0}^{\infty} a_k$ là chuỗi dương. Số s_n gọi là tổng $n - n_0 + 1$ số hạng đầu tiên của dãy (a_n).

Định lý (điều kiện cần và đủ để chuỗi số không âm hội tụ) *Cho $a_n \geq 0$. Chuỗi $\sum_{k=n_0}^{\infty} a_k$ hội tụ khi và chỉ khi tồn tại một số M thỏa*

$$s_n = \sum_{k=n_0}^{n} a_k \leq M \qquad \forall n > n_0.$$

Tiêu chuẩn tích phân *Cho $f : [n_0, \infty) \to \mathbb{R}$ thỏa $f(x) \geq 0$, f, $a_k = f(k)$ là* *hàm giảm. Khi đó* $\sum_{k=n_0}^{\infty} a_k$ *hội tụ khi và chỉ khi* $\int_{n_0}^{\infty} f(x)dx$ *hội tụ.*

Ví dụ. Chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ hội tụ $\Leftrightarrow \int_1^{\infty} \frac{dx}{x^p}$ hội tụ $\Leftrightarrow p > 1$.

TIẾT 3 Ví dụ và Bài tập

TIẾT 4

Tiêu chuẩn so sánh (dạng bất đẳng thức). *Giả sử tồn tại* $c > 0$, $n_1 \in \mathbb{R}$ *sao cho* $0 \leq a_n \leq cb_n$ *với* $n \geq n_1$.

a) Nếu $\sum_{k=n_0}^{\infty} b_k$ *hội tụ thì* $\sum_{k=n_0}^{\infty} a_k$ *hội tụ.*

b) Nếu $\sum_{k=n_0}^{\infty} a_k$ *phân kỳ thì* $\sum_{k=n_0}^{\infty} a_k$ *phân kỳ.*

Tiêu chuẩn so sánh (dạng giới hạn). *Giả sử* $a_n, b_n > 0$ *với* $n \geq n_1 \in \mathbb{R}$ *thỏa* $L = \lim_{n\to\infty} a_n/b_n$ *tồn tại.*

a) Nếu $L > 0$ *thì* $\sum_{k=n_0}^{\infty} b_k$ *và* $\sum_{k=n_0}^{\infty} a_k$ *cùng hội tu hay phân kỳ.*

b) Nếu $L = 0$ *và nếu* $\sum_{k=n_0}^{\infty} b_k$ *hội tụ thì* $\sum_{k=n_0}^{\infty} a_k$ *hội tụ.*

c) Nếu $L = \infty$ *và nếu* $\sum_{k=n_0}^{\infty} a_k$ *hội tụ thì* $\sum_{k=n_0}^{\infty} b_k$ *hội tụ.*

Tiêu chuẩn Cauchy. *Cho chuỗi không âm* $\sum_{k=n_0}^{\infty} a_k$. *Đặt* $L = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}$.

(a) Nếu $L < 1$ *thì chuỗi hội tụ.*

(b) Nếu $L > 1$ *thì chuỗi phân kỳ.*

Tiêu chuẩn D'Alembert. *Cho chuỗi không âm* $\sum_{k=n_0}^{\infty} a_k$. *Đặt* $R = \limsup_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$, $r = \liminf_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$.

a) Nếu $R < 1$ *thì chuỗi hội tụ.*

b) Nếu $r > 1$ *thì chuỗi phân kỳ.*

TIẾT 5 Ví dụ và bài tập

3. Chuỗi số có dấu bất kỳ

TIẾT 6

Định nghĩa Cho chuỗi $\sum_{k=n_0}^{\infty} a_k$. Ta nói chuỗi $\sum_{k=n_0}^{\infty} a_k$ *hội tụ tuyệt đối* nếu

$\sum_{k=n_0}^{\infty} |a_k|$ hội tụ.

Định lý. *Chuỗi hội tụ tuyệt đối thì hội tụ.*

Tiêu chuẩn Cauchy. *Cho chuỗi* $\sum_{k=n_0}^{\infty} a_k$*. Đặt* $L = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$.

(a) Nếu $L < 1$ thì chuỗi hội tụ (tuyệt đối).

(b) Nếu $L > 1$ thì chuỗi phân kỳ.

Tiêu chuẩn D'Alembert. *Cho chuỗi* $\sum_{k=n_0}^{\infty} a_k$*. Đặt* $R = \limsup_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$, $r = \liminf_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$.

a) Nếu $R < 1$ thì chuỗi hội tụ (tuyệt đối).

b) Nếu $r > 1$ thì chuỗi phân kỳ.

Tiêu chuẩn Leibniz *Cho (a_n) thỏa $a_n \geq 0$, $a_{n+1} \leq a_n$, $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. Khi đó chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$ hội tụ và có tổng nằm trong khoảng $a_1 - a_2$ và a_1.*

Tiêu chuẩn Dirichlet *Cho $K \in \mathbb{R}$, (a_n) thỏa $a_n \geq K$, $a_{n+1} \leq a_n$, $\sum b_n$ hội tụ. Khi đó chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ hội tu.*

TIẾT 7 Ví dụ và bài tập

4. Không gian $\mathbb{R}^k$

TIẾT 8

Định nghĩa. Tập hợp các phần tử $x = (x_1, \ldots, x_k)$, $x_j \in \mathbb{R}$ gọi là không gian $\mathbb{R}^k$. Cho $\alpha \in \mathbb{R}$, $x, y \in \mathbb{R}^k$, $x = (x_1, \ldots, x_k), y = (y_1, \ldots, y_k)$, ta định nghĩa các phép toán cộng và nhân vô hướng

$$x + y = (x_1 + y_1, \ldots, x_k + y_k), \alpha x = (\alpha x_1, \ldots, \alpha x_k).$$

Tính chất. *Không gian $\mathbb{R}^k$ với các phép toán cộng và nhân vô hướng trên là một không gian vector.*

Định nghĩa. (b) Trên $\mathbb{R}^k$ ta định nghĩa

$$x.y = \sum_{j=1}^{k} x_j y_j, ||x|| = \sqrt{\sum_{j=1}^{k} x_j^2}.$$

Tính chất. *Cho* $\alpha \in \mathbb{R}, x, y \in \mathbb{R}^k$. *Khi đó* $||.||$ *là một chuẩn, nghĩa là*

(a) $||x|| \geq 0$, $||x|| = 0$ *khi và chỉ khi* $x = (0, ..., 0)$.

(b) $||\alpha x|| = |\alpha|.||x||$,

(c) $||x + y|| \leq ||x|| + ||y||$.

Định nghĩa

(a) Quả cầu mở tâm $x \in \mathbb{R}^k$, bán kính $r > 0$ là tập hợp

$$B(x; r) = \{y \in \mathbb{R}^k : \ ||x - y|| < r\}.$$

(b) Cho $A \subset \mathbb{R}^k$, $x \in A$ gọi là *điểm trong* của A nếu ta tìm được một $r_x > 0$ sao cho $B(x; r_x) \subset A$. Khi đó tập A gọi là một *lân cận* của x. Nếu mọi phần tử của A đều là một điểm trong thì ta nói A là tập mở.

(c) Điểm x gọi là điểm dính của A nếu $B(x; r) \cap A \neq \emptyset$ với mọi $r > 0$.

(d) Cho $x^{(n)}, x \in \mathbb{R}^k$, ta nói $x^{(n)} \to x$ nếu $\lim_{n\to\infty} ||x^{(n)} - x|| = 0$.

Tính chất. *Giả sử* $x^{(n)} = (x_{n1}, \ldots, x_{nk})$, $x_0 = (x_{01}, \ldots, x_{0k})$. *Khi đó* $x^{(n)} \to x_0$ *khi và chỉ khi* $\lim_{n\to\infty} x_{nj} = x_{0j}$ *với* $j = 1, \ldots, k$.

Định nghĩa. Cho $A \subset \mathbb{R}^k$, x_0 là một *điểm dính* của A, $f : A \to \mathbb{R}^m$. Ta nói $f(x)$ có giới hạn là $L \in \mathbb{R}^m$ khi $x \to x_0$ nếu: với mỗi $\epsilon > 0$, tồn tại $\delta > 0$ sao cho

$$||f(x) - L|| \leq \epsilon \quad \forall ||x - x_0|| < \delta, x \in A.$$

Ta ký hiệu $\lim_{x\to x_0} f(x) = L$.

Tính chất. *Cho* $f : A \to \mathbb{R}^m$. *Khi đó* $\lim_{x\to x_0} f(x) = L$ *khi và chỉ khi* $\lim_{n\to\infty} ||f(x^{(n)}) - L|| = 0$ *với mọi dãy* $x^{(n)} \to x_0$, $x^{(n)} \in A$.

Định nghĩa. Cho $f : A \to \mathbb{R}^m$ và $x_0 \in A$. Ta nói f *liên tục* tại x_0 nếu $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$ với $x \in A$.

Bài tập

1. Tìm giới hạn của các dãy số sau trong $\mathbb{R}^2$: $\left(\frac{1}{n}, \frac{n}{n+1}\right)$, $\left(\sqrt[n]{n}, \frac{n^2}{(n+1)(n+2)}\right)$, $\left(nq^n, \frac{\ln n}{n}\right)$ $(|q| < 1)$, $\left(\frac{n(n+1)^2}{(n+3)(n+4)(n+5)}, 1\right)$, $\left((-1)^n, \frac{1}{n}\right)$, $(\sin n, 1)$.

2. Tìm giới hạn

   (a) $\lim_{(x,y)\to(1,2)} \sqrt{x + y^2}$,

(b) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2}$,

(c) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x^2+y^2}$,

(d) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2}$,

(e) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3-y^2}{x^2+y^2}$.

3. Khảo sát tính liên tục của hàm $f(x,y) = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$ với $(x,y) \neq (0,0)$ và $f(0,0) = 1$.

5. Đạo hàm riêng

TIẾT 9

Định nghĩa. Cho $u \in \mathbb{R}^k$ và $A \subset \mathbb{R}^k$. Cho $f : A \to \mathbb{R}$ và x_0 là một điểm trong của A. Ta nói *đạo hàm theo hướng u tại x_0 của hàm f* là đại lượng

$$\lim_{\epsilon\to 0} \frac{f(x_0+\epsilon u) - f(x_0)}{\epsilon}$$

nếu giới hạn tồn tại. Đại lượng này ký hiệu là $D_u f(x_0)$.

Định nghĩa. Cho $e_1 = (1,0,\ldots,0)$, $e_2 = (0,1,0,\ldots,0)$,..., $e_k = (0,\ldots,0,1)$. $A \subset \mathbb{R}^k$. Cho $f : A \to \mathbb{R}$ và x_0 là một điểm trong của A. Ta định nghĩa *đạo hàm riêng theo biến thứ j* là

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(x_0) = \lim_{\epsilon\to 0} \frac{f(x_0+\epsilon e_j) - f(x_0)}{\epsilon}.$$

Ta cũng ký hiệu đạo hàm riêng này là $D_j f(x_0)$. Nếu hàm số có tất cả các đạo hàm riêng theo các biến $(x_1,\ldots,x_k)$ thì ta ký hiệu

$$\nabla f(x_0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_k}(x_0)\right).$$

Véc tơ này gọi là *véc tơ gradient* của f.

Phương pháp tính đạo hàm riêng

1. Dùng định nghĩa: *Trường hợp hai biến.* Cho $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Khi đó $e_1 = (1,0)$, $e_2 = (0,1)$. Cho $x_0 = (a,b)$. Khi đó $x_0 + \epsilon e_1 = (a+\epsilon, b)$, $x_0 + \epsilon e_2 = (a, b+\epsilon)$. Do đó

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(a,b) = \lim_{\epsilon \to 0} \frac{f(a+\epsilon,b) - f(a,b)}{\epsilon}, \quad \frac{\partial f}{\partial x_2}(a,b) = \lim_{\epsilon \to 0} \frac{f(a,b+\epsilon) - f(a,b)}{\epsilon}.$$

2. Dùng công thức: Muốn đạo hàm theo biến x ta cố định các biến khác rồi đạo hàm theo công thức của hàm một biến.

Bài tập.

1. Cho $u = (1,2)$. Tính $D_u f(3,1)$ với $f(x,y) = x^3y^2$.
2. Tính bằng định nghĩa $\frac{\partial f}{\partial x}(1,2), \frac{\partial f}{\partial y}(1,2)$ với $f(x,y) = x^2y + xy^2$.
3. Tính bằng công thức đạo hàm $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$ với $f(x,y) = xsin(xy)$.

TIẾT 10 Ví dụ và bài tập

TIẾT 11 Ví dụ và bài tập

6. Khả vi Frechet cho hàm số

TIẾT 12

Định nghĩa. Cho $L:\mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$. Ta nói L là ánh xạ tuyến tính nếu $L(x+y) = L(x) + L(y)$ và $L(\alpha x) = \alpha L(x)$ với mọi $x, y \in \mathbb{R}^k$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

Tính chất. *Cho ánh xạ tuyến tính $L:\mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$. Khi đó tồn tại vecto $\ell = (\ell_1, \dots, \ell_k) \in \mathbb{R}^k$ sao cho $Lh = \ell.h$ với mọi $h = (h_1, \dots, h_k) \in \mathbb{R}^k$, nghĩa là $Lh = \sum_{j=1}^k \ell_j h_j$.*

Định nghĩa. Cho $A \subset \mathbb{R}^k$, $f : A \to \mathbb{R}$ và x_0 là một điểm trong của A. Ta nói hàm f khả vi Frechet tại x_0 nếu tồn tại ánh xạ tuyến tính $L:\mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ sao cho

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + Lh + ||h||\varphi(h)$$

với $\lim_{h\to 0}\varphi(h) = 0$. Ánh xạ tuyến tính L gọi là đạo hàm Frechet của f tại x_0 và ký hiệu là $f'(x_0)$.

TIẾT 13 Ví dụ và bài tập

TIẾT 14

Định lý (Điều kiện cần của sự khả vi Frechet). *Cho $A \subset \mathbb{R}^k$, $f : A \to \mathbb{R}$ và x_0 là một điểm trong của A. Nếu f khả vi Frechet tại x_0 thì*

a) f liên tục tại x_0,

b) Các đạo hàm riêng $\frac{\partial f}{\partial x_j}(x_0)$, $j = 1, \ldots, k$ tồn tại và

$$f'(x_0)h = \nabla f(x_0).h = \sum_{j=1}^{k} \frac{\partial f}{\partial x_j}(x_0)h_j$$

với $h = (h_1, \ldots, h_k)$.

Định lý (Điều kiện đủ của sự khả vi Frechet) *Cho $A \subset \mathbb{R}^k$, $f : A \to \mathbb{R}$ và x_0 là một điểm trong của A. Nếu*

a) f có đạo hàm riêng theo tất cả các biến trong một quả cầu $B(x_0; r) \subset A$ và

b) các đạo hàm riêng này liên tục tại x_0

thì f khả vi Frechet tại x_0.

TIẾT 15 Ví dụ và bài tập

Phương pháp CM tính không khả vi Frechet Để chứng minh hàm f không khả vi tại x_0 ta có thể dùng các cách sau

1. CM hàm số không liên tục tại x_0.
2. CM hàm số không có một đạo hàm riêng tại x_0.
3. Chứng minh đại lượng

$$\varphi(h) = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0) - \nabla f(x_0)h}{||h||} \not\to 0$$

khi $h \to 0$.

Phương pháp CM tính khả vi Frechet Ta có thể dùng

1. định nghĩa: Chứng minh có vecto L sao cho

$$\varphi(h) = \frac{f(x_0+h) - f(x_0) - Lh}{||h||} \to 0$$

khi $h \to 0$.

2. điều kiện cần: tính các đạo hàm riêng và chứng minh

$$\varphi(h) = \frac{f(x_0+h) - f(x_0) - \nabla f(x_0)h}{||h||} \to 0$$

khi $h \to 0$.

3. điều kiện đủ: Chứng minh f có đạo hàm riêng trong một lân cận của x_0 và chứng tỏ các đạo hàm riêng này liên tục tại x_0.

TIẾT 16 Ví dụ và bài tập

7. Khả vi Frechet cho hàm vecto

TIẾT 17

Định nghĩa. Cho $A \subset \mathbb{R}^k$, $f_i : A \to \mathbb{R}$ $(i = 1, \ldots, m)$ và x_0 là một điểm trong của A. Cho $F = (f_1, \ldots, f_m)$, ta nói F khả vi Frechet tại x_0 nếu f_i khả vi Frechet tại x_0, $i = 1, \ldots, m$, nghĩa là

$$\begin{aligned} f_1(x_0+h) &= f-1(x_0) + f_1'(x_0)h + ||h||\varphi_1(h) \\ \vdots \quad & \quad \vdots \\ f_m(x_0+h) &= f_m(x_0) + f_m'(x_0)h + ||h||\varphi_m(h) \end{aligned}$$

với $\varphi_i(h) \to 0$, $i = 1, \ldots, m$, khi $||h|| \to 0$. Ta có thể viết công thức trên dưới dạng

$$\begin{pmatrix} f_1(x_0+h) \\ \vdots \\ f_m(x_0+h) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(x_0) \\ \vdots \\ f_m(x_0) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \nabla f_1(x_0) \\ \vdots \\ \nabla f_m(x_0) \end{pmatrix} h + ||h|| \begin{pmatrix} \varphi_1(h) \\ \vdots \\ \varphi_m(h) \end{pmatrix}.$$

Ma trận $m \times k$

$$J_F(x_0) = \begin{pmatrix} \nabla f_1(x_0) \\ \vdots \\ \nabla f_m(x_0) \end{pmatrix} = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x_0) \right)$$

gọi là ma trận Jacobi của F tại x_0.

Định lý. *Cho $F : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^m$ và $G : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^p$. Giả sử F khả vi Frechet tại $x_0 \in \mathbb{R}^k$ và G khả vi Frechet tại $F(x_0) \in \mathbb{R}^m$. Đặt $h(x) = G(F(x))$. Khi đó h khả vi Frechet tại x_0 và*

$$J_h(x_0) = J_G(F(x_0))J_F(x_0).$$

Hệ quả. *Cho $f, g : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$, $u_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $h(t) = f(u_1(t), \ldots, u_k(t))$. Khi đó với các giả thiết khả vi cần thiết ta có*

$$h'(t) = \frac{\partial f}{\partial u_1}u_1'(t) + \ldots + \frac{\partial f}{\partial u_k}u_k'(t)$$

Tương tự cho $w_i : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $i = 1, ..., k$ và $H(t, s) = g(w_1(t, s), ..., w_k(t, s))$ thì

$$\frac{\partial H}{\partial t} = \frac{\partial g}{\partial w_1}\frac{\partial w_1}{\partial t} + \ldots + \frac{\partial g}{\partial w_k}\frac{\partial w_k}{\partial t}$$

TIẾT 18 Ví dụ và bài tập

8. Đạo hàm cấp cao

TIẾT 19

Định nghĩa. Cho $f : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$, $x = (x_1, ..., x_k)$ có đạo hàm tới bậc cần thiết, ta định nghĩa đạo hàm riêng cấp 2 và cấp 3 lần lượt là

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right), \frac{\partial^3 f}{\partial x_\ell \partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_\ell}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\right), \ldots$$

Định lý. *Nếu $f : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ có các đạo hàm riêng liên tục tới cấp 2 trong một lân cận của x thì ta có*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(x), i, j = 1, ..., k.$$

Định nghĩa Do định lý trên, ta ký hiệu đạo hàm riêng của f với α_1 lần theo biến thứ nhất,..., và α_k lần theo biến thứ k là

$$D^\alpha f = \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_k^{\alpha_k}}$$

trong đó $\alpha_j \in \mathbb{N}$, $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_k)$, $|\alpha| = \sum_{j=1}^k \alpha_k$.

TIẾT 20 Ví dụ và bài tập

TIẾT 21 Ví dụ và bài tập

9. Định lý hàm ngược, hàm ẩn

TIẾT 22

Định lý. *Cho $f : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k$, $x_0 \in \Omega$. Giả sử*

a) f khả vi liên tục tại một lân cận của x_0,

b) $det\ J_f(x_0) \neq 0$.

Khi đó tồn tại các tập mở $V, W \subset \mathbb{R}^k$ sao cho

(i) $x_0 \in V$, $f(x_0) \in W$ và

(ii) $f : V \to W$ có ánh xạ ngược $f^{-1} : W \to V$ khả vi liện tục với mọi $y \in W$ và

$$J_{f^{-1}}(y) = [J_f(f^{-1}(y))]^{-1}.$$

TIẾT 23 Ví dụ và bài tập

TIẾT 24

Định nghĩa. Cho $f : \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$. Giả sử $f(x, y) = (f_1(x, y), \dots, f_m(x, y))$ với $f_i : \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, m$, $x = (x_1, \dots, x_k), y = (y_1, \dots, y_m)$. Khi đó ta định nghĩa

$$\frac{\partial(f_1, \dots, f_m)}{\partial(y_1, \dots, y_m)}(x, y) = det\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x, y)\right).$$

Định lý. *Cho* $f : \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$, $f(x,y) = (f_1(x,y), \ldots, f_m(x,y))$ *với* $f_i : \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$, $i = 1, \ldots, m$, $x = (x_1, \ldots, x_k), y = (y_1, \ldots, y_m)$. *Giả sử*

(a) f *khả vi liên tục trong một lân cận của* (a,b) *với* $a \in \mathbb{R}^k$, $b \in \mathbb{R}^m$.

(b) $f(a,b) = 0$ *và* $\frac{\partial(f_1,\ldots,f_m)}{\partial(y_1,\ldots,y_m)}(a,b) \neq 0$.

Khi đó tồn tại tập mở $A \subset \mathbb{R}^k$, $B \subset \mathbb{R}^m$ *sao cho*

(i) $a \in A$, $b \in B$,

(ii) Tồn tại duy nhất hàm khả vi liên tục $g : A \to B$ *sao cho* $g(a) = b$ *và* $f(x, g(x)) = 0$.

TIẾT 25 Ví dụ và bài tập

10. Khai triển Taylor

TIẾT 26

Định nghĩa. Với $h = (h_1, \ldots, h_k) \in \mathbb{R}^k$, $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_k) \in \mathbb{N}^k$. Ta định nghĩa

$$h^\alpha = h_1^{\alpha_1} \ldots h_k^{\alpha_k}, \alpha! = \alpha_1! \ldots \alpha_k!, |\alpha| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_k.$$

Định lý (khai triển Taylor) *Cho* $\rho > 0$, $f : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ *khả vi liên tục tới cấp* $p+1$ *trong một lân cận* $B(x,\rho)$ *của* $x \in \mathbb{R}^k$. *Khi đó với mọi* $h \in B(0,\rho)$ *tồn tại* $\theta \in (0,1)$ *sao cho*

$$f(x+h) = f(x) + \sum_{|\alpha|=0}^{p} \frac{h^\alpha}{\alpha!} D^\alpha f(x) + \sum_{|\alpha|=p+1} \frac{h^\alpha}{\alpha!} D^\alpha f(x+\theta h).$$

11. Cực trị

TIẾT 27

Định nghĩa. Cho D là một miền trong R^n, $f : D \to \mathbb{R}$ và $x_0 \in D$. Hàm f gọi là đạt cực đại địa phương tại x_0 nếu tồn tại một lân cận $\omega \subset D$ của x_0

sao cho $f(x) \leq f(x_0)$ với mọi $x \in \omega$. Hàm f gọi là đạt cực tiểu địa phương tại x_0 nếu tồn tại một lân cận $\omega \subset D$ của x_0 sao cho $f(x) \geq f(x_0)$ với mọi $x \in \omega$. Hàm f gọi là đạt cực trị địa phương tại x_0 nếu f có cực đại hay cực tiểu địa phương tại x_0.

Định lý. *Cho $f : D \to \mathbb{R}$, x_0 là một điểm trong của D và f có đạo hàm riêng tại x_0. Nếu f có cực trị địa phương tại x_0 thì $\nabla f(x_0) = 0$. Điểm x_0 gọi là một điểm dừng của f.*

TIẾT 28 Ví dụ và bài tập

TIẾT 29

Định nghĩa. Cho $f : D \to \mathbb{R}$, $f = f(x_1, \ldots, x_n)$, x_0 là một điểm trong của D và f có đạo hàm riêng tới cấp 2 tại x_0. Khi đó ta định nghĩa ma trận Hess của f tại x_0 là

$$H_f(x_0) = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x_0) \right)_{i,j=\overline{1,n}}.$$

Ta cũng định nghĩa

$$\varphi(h, k) = h^T H_f(x_0) k$$

với $h = (h_1, \ldots, h_n)^T$, $k = (k_1, \ldots, k_n)^T$, A^T là chuyển vị của ma trận A.

Định lý. *Cho $x_0 \in D$ là một điểm dừng của $f : D \to \mathbb{R}$ và f khả vi liên tục tới cấp 2 trong một lân cận của x_0.*

1. *Nếu φ là dạng toàn phương xác định dương, nghĩa là*

$$\varphi(h, h) > 0 \quad \forall h \in \mathbb{R}^n, h \neq 0$$

   thì f có cực tiểu địa phương tại x_0.

2. *Nếu φ là dạng toàn phương xác định âm, nghĩa là*

$$\varphi(h, h) < 0 \quad \forall h \in \mathbb{R}^n, h \neq 0$$

   thì f có cực đại địa phương tại x_0.

3. *Nếu tồn tại $h, k \in \mathbb{R}^n$, $h, k \neq 0$ sao cho*

$$\varphi(h, h) > 0, \varphi(k, k) < 0$$

   thì f không có cực trị tại x_0.

Định lý. *Cho D là một miền trong $\mathbb{R}^n$, cho $f : D \to \mathbb{R}$, $g : D \to \mathbb{R}$ khả vi liên tục. Giả sử $\Gamma = \{x = (x_1, \dots, x_n) \in D : g(x) = 0\}$. Nếu hàm số f đạt cực trị trên Γ tại $x_0 \in \Gamma$ và nếu $\nabla g(x_0) \neq 0$ thì tồn tại $\lambda \in \mathbb{R}$ sao cho*

$$\nabla f(x_0) - \lambda \nabla g(x_0) = 0.$$

TIẾT 30 Ví dụ và bài tập