

ĐỀ THI KẾT THÚC HỌC KỲ
Môn TOÁN B2 – Khoa VẬT LÝ (Khóa 2009)

Thời gian làm bài: 90 phút
(Thí sinh được phép sử dụng tài liệu)

Câu 1: Tính gần đúng $\sqrt{3.01^2 + 3.98^2}$.

Câu 2:

Cho $u = \frac{\alpha}{r}, r = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2}$.

Hãy tính Δu với $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ là toán tử Laplace; α, a, b, c là các hằng số.

Câu 3: Khảo sát cực trị của hàm số $u = x + y$ nếu x và y bị ràng buộc bởi điều kiện $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Câu 4: Tính tích phân đường loại II:

$$\oint_{(E^+)} (x+y)dx + (x-y)dy$$

Trong đó (E) là Ellipse: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Câu 5: Hãy tính moment quán tính của một quả cầu đặc đồng nhất có khối lượng M và bán kính R đối với đường thẳng tiếp xúc với mặt cầu.

--- HẾT ---

Câu 1: $\sqrt{3.01^2 + 3.98^2}$.

Xét $f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ với $x = 3; y = 4; \Delta x = 0,01; \Delta y = -0,02$.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \rightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(3; 4) = \frac{3}{5}.$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \rightarrow \frac{\partial f}{\partial y}(3; 4) = \frac{4}{5}.$$

Ta có: $f(x + \Delta x; y + \Delta y) = f(x, y) + \Delta f \approx f(x, y) + \frac{\partial f}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial f}{\partial y} \Delta y$.

$$\rightarrow \sqrt{3.01^2 + 3.98^2} \approx 5 + \frac{3}{5} \cdot 0,01 + \frac{4}{5} \cdot (-0,02) = 4,99.$$

Câu 2: $u = \frac{\alpha}{r}$ với $r = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2}$.

Ta có: $u'_x = u'_r r'_x = -\frac{\alpha}{r^2} \cdot \frac{x-a}{r} = -\frac{\alpha(x-a)}{r^3}$.

$$u''_{x^2} = \left[-\frac{\alpha(x-a)}{r^3} \right]'_x = \alpha \frac{-r^3 + 3r^2 r'_x (x-a)}{r^6} = \alpha \frac{-r^3 + 3r(x-a)^2}{r^6}.$$

Tương tự cho u''_{y^2} và u''_{z^2} .

$$\rightarrow \Delta u = u''_{x^2} + u''_{y^2} + u''_{z^2} = \alpha \frac{-3r^3 + 3r[(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2]}{r^6} = \alpha \frac{-3r^3 + 3r^3}{r^6} = 0.$$

Vậy hàm số $u = \frac{\alpha}{r}$ với $r = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2}$ thỏa mãn phương trình Laplace $\Delta u = 0$,

trong đó $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ là toán tử Laplace.

Câu 3: Xét hàm Lagrange: $F(x, y) = f(x, y) + \lambda \varphi(x, y) = x + y + \lambda \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 \right)$.

Điều kiện cần:

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x} = 1 + \lambda \frac{2x}{a^2} = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial y} = 1 + \lambda \frac{2y}{b^2} = 0 \\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \end{cases} \rightarrow \text{Điểm } M \begin{cases} x_0 = \frac{a^2}{\sqrt{a^2+b^2}} \\ y_0 = \frac{b^2}{\sqrt{a^2+b^2}} \\ \lambda_0 = -\frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2} \end{cases} \text{ hay } \text{Điểm } N \begin{cases} x_0 = -\frac{a^2}{\sqrt{a^2+b^2}} \\ y_0 = -\frac{b^2}{\sqrt{a^2+b^2}} \\ \lambda_0 = \frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2} \end{cases}$$

$$\text{Điều kiện đủ: } \begin{cases} d^2F = 2\lambda \left(\frac{dx^2}{a^2} + \frac{dy^2}{b^2} \right) \\ \frac{2x}{a^2} dx + \frac{2y}{b^2} dy = 0 \\ dx^2 + dy^2 > 0 \end{cases}$$

$$\text{Điểm } M: \begin{cases} d^2F = -\sqrt{a^2+b^2} \left(\frac{dx^2}{a^2} + \frac{dy^2}{b^2} \right) \\ dx + dy = 0 \\ dx^2 + dy^2 > 0 \end{cases} \rightarrow d^2F = -\sqrt{a^2+b^2} \frac{a^2+b^2}{a^2b^2} dx^2 < 0 \text{ (vì nếu } dx = 0 \rightarrow dy = 0)$$

$\rightarrow M \left(\frac{a^2}{\sqrt{a^2+b^2}}; \frac{b^2}{\sqrt{a^2+b^2}} \right)$ là điểm cực đại.

$$\text{Điểm } N: \begin{cases} d^2F = \sqrt{a^2+b^2} \left(\frac{dx^2}{a^2} + \frac{dy^2}{b^2} \right) \\ dx + dy = 0 \\ dx^2 + dy^2 > 0 \end{cases} \rightarrow d^2F = \sqrt{a^2+b^2} \frac{a^2+b^2}{a^2b^2} dx^2 > 0 \text{ (vì nếu } dx = 0 \rightarrow dy = 0)$$

$\rightarrow N \left(-\frac{a^2}{\sqrt{a^2+b^2}}; -\frac{b^2}{\sqrt{a^2+b^2}} \right)$ là điểm cực tiểu.

Câu 4:

$$\oint_{(E^+)} (x+y)dx + (x-y)dy = 0 \text{ (Dùng công thức Green)}$$

Câu 5:

$$I = \iiint_{(V)} (x^2 + y^2 + z^2) \rho(x, y, z) dx dy dz$$

Quả cầu đặc, đồng nhất $\rightarrow \rho = \text{const.}$ Sử dụng hệ trục tọa độ cầu với:

$$\begin{aligned} x &= r \sin \theta \cos \varphi \\ y &= r \sin \theta \sin \varphi & |J| &= r^2 \sin \theta \\ z &= r \cos \theta \end{aligned}$$

Gọi $I_{(o)}$ là moment quán tính của quả cầu đối với tâm.

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } I_{(o)} &= \rho \iiint_{(V)} (r^2 \sin^2 \theta \cos^2 \varphi + r^2 \sin^2 \theta \sin^2 \varphi + r^2 \cos^2 \theta) r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi = \rho \iiint_{(V)} r^4 \sin \theta dr d\theta d\varphi. \\ \Leftrightarrow I_{(o)} &= \rho \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \sin \theta d\theta \int_0^R r^4 dr = \rho \cdot 2\pi \cdot 2 \cdot \frac{1}{5} R^5 = \frac{4}{5} \rho \pi R^5 = \frac{3}{5} \left(\frac{4}{3} \pi R^3 \rho \right) R^2 = \frac{3}{5} MR^2. \end{aligned}$$

Gọi I_o là moment quán tính của quả cầu đối với trục xuyên tâm.

$$\text{Ta có: } I_o = \frac{2}{3} I_{(o)} = \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{5} MR^2 = \frac{2}{5} MR^2.$$

Gọi I_Δ là moment quán tính của quả cầu đối với đường thẳng tiếp xúc mặt cầu.

$$\text{Ta có: } I_\Delta = I_o + MR^2 = \frac{7}{5} MR^2.$$

--- HẾT ---