ĐỀ THI HỌC KỲ II KHÓA 2010

Môn Toán B2 – Khoa Vật Lý

Thời gian làm bài: 90 phút

Thí sinh được phép sử dụng tài liệu

<u>Câu 1</u>: Cho u = $x^2 + 2xy + 3y^2 + 3x + 2y + 1$. Hãy tính các đạo hàm riêng $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$.

<u>Câu 2</u>: Khảo sát cực trị của hàm số $u = x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2$ với n biến $x_1, x_2, \ldots, x_n$ bị ràng buộc bởi điều kiện $\frac{x_1}{a_1} + \frac{x_2}{a_2} + \cdots + \frac{x_n}{a_n} = 1, \quad (a_i \neq 0, i = \overline{1,n})$

<u>Câu 3</u>: Tính tích phân:

$$\iiint_{(V)} \sqrt{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}}\, dxdydz \quad ; \qquad (V): \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1$$

<u>Câu 4</u>: Hãy tính cường độ điện trường E(r) sinh ra bởi một quả cầu đặc tích điện đều có bán kính R và điện tích Q. Vẽ đồ thị mô tả sự phụ thuộc của E(r) vào r [0, +∞) và cho nhận xét.

<u>Câu 5</u>: Chứng minh rằng nếu $f(u)$ là hàm liên tục và (C) là đường cong khép kín trơn từng khúc thì

$$\oint_{(C)} f(x^2 + y^2)(xdx + ydy) = 0.$$

- - - HẾT - - -

Câu 1: u = x² + 2xy + 3y² + 3x + 2y + 1.

$$* \ \frac{\partial u}{\partial x} = 2x + 2y + 3.$$

$$* \ \frac{\partial u}{\partial y} = 2x + 6y + 2.$$

$$* \ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 2.$$

$$* \ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 6.$$

$$* \ \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 2.$$

Câu 2: Xét hàm Lagrange:

$$F(x,y) = f(x,y) + \lambda\varphi(x,y) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + \lambda\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i}{a_i} - 1\right).$$

Điều kiện cần để có cực trị (nếu có):

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x_i} = 0 \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i}{a_i} = 1 \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} 2x_i + \dfrac{\lambda}{a_i} = 0 \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i}{a_i} = 1 \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} \lambda = \dfrac{-2}{\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{a_j^2}} \\ x_i = \dfrac{1}{a_i\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{a_j^2}} \end{cases} \left(i,j = \overline{1,n}\right) \rightarrow \begin{matrix} M(x_i) \text{ là điểm dừng} \\ \text{với } x_i = \dfrac{1}{a_i\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{a_j^2}} \end{matrix}$$

Điều kiện đủ:

$$\begin{cases} d^2F = \displaystyle\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2 F}{\partial x_i^2}dx_i^2 + 2\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i+1}^{n}\frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j}dx_i dx_j \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{n}\frac{dx_i}{a_i} = 0 \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{n} dx_i^2 > 0 \end{cases} \rightarrow d^2F = 2\sum_{i=1}^{n} dx_i^2 > 0 \ \rightarrow M(x_i) \text{ là điểm cực tiểu.}$$

$$Do\ đó: \ u_{Min} = \frac{1}{\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{a_j^2}} \text{ tại } x_i = \frac{1}{a_i\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{a_j^2}} \quad \left(i,j = \overline{1,n}\right).$$

Câu 3:

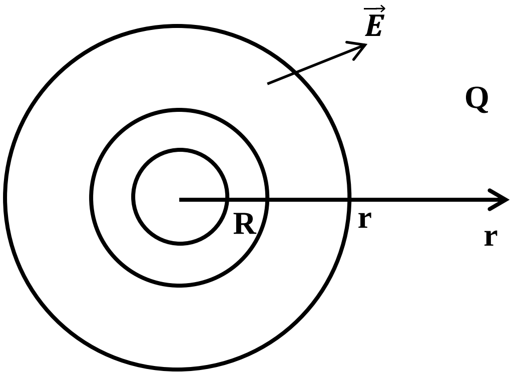
$$I = \iiint\limits_{(V)} \sqrt{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}}\, dxdydz \ ; \qquad (V): \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \le 1$$

Sử dụng hệ trục tọa độ cầu tổng quát: $(V) \rightarrow (V')$: $r \le 1$.

$$\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\varphi \\ y = r\sin\theta\sin\varphi \\ z = r\cos\theta \end{cases} \qquad |J| = abcr^2\sin\theta$$

$$\rightarrow \ I = abc\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \sin\theta d\theta \int_0^{1} r^3 dr = abc \times 2\pi \times 2 \times \frac{1}{4} = \pi abc.$$

Câu 4:



$*\ \boldsymbol{r} \geq \boldsymbol{R}$:

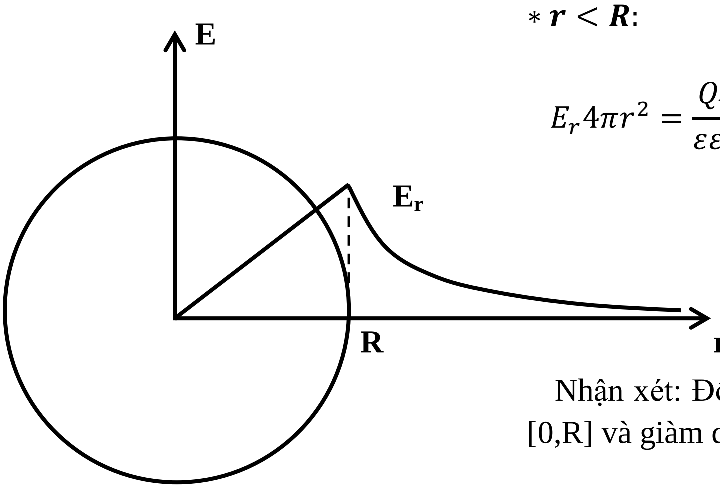
$$\oiint_{(S^+)} \vec{E}\, d\vec{s} = \iiint_{(V)} dN\vec{E} dv \quad (Oshogradsky - Gauss)$$

$$= \frac{1}{\varepsilon\varepsilon_o} \iiint_{(V)} \rho dv = \frac{Q}{\varepsilon\varepsilon_o}.$$

$$\rightarrow\ E_r 4\pi r^2 = \frac{Q}{\varepsilon\varepsilon_0}\ \rightarrow\ E_r = \frac{Q}{4\pi\varepsilon\varepsilon_o}\frac{1}{r^2}\ \rightarrow\ \overrightarrow{E_{(r)}} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon\varepsilon_o}\frac{\vec{r}}{r^3}.$$

$*\ \boldsymbol{r} < \boldsymbol{R}$:

$$E_r 4\pi r^2 = \frac{Q_r}{\varepsilon\varepsilon_0} = \frac{\frac{r^3}{R^3}Q}{\varepsilon\varepsilon_0}\ \rightarrow\ E_r = \frac{Q}{4\pi\varepsilon\varepsilon_o}\frac{r}{R^3}\ \rightarrow\ \overrightarrow{E_{(r)}} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon\varepsilon_o}\frac{\vec{r}}{R^3}.$$



Nhận xét: Độ lớn cường độ điện trường E(r) tăng tuyến tính khi r [0,R] và giảm dần khi r (R, +∞).

Câu 5:

$$I = \oint_{(C)} f(x^2+y^2)(xdx+ydy). \quad \textit{Sử dụng công thức Green ta được}:$$

$$I = \pm \iint_{(S)} \left\{\frac{\partial[f(x^2+y^2)].y}{\partial x} - \frac{\partial[f(x^2+y^2)].x}{\partial y}\right\} dxdy = \pm \iint_{(S)} \left[y\frac{\partial f(x^2+y^2)}{\partial x} - x\frac{\partial f(x^2+y^2)}{\partial y}\right] dxdy$$

$$= \pm \iint_{(S)} [y.f(2x) - x.f(2y)]dxdy = \pm 2\iint_{(S)} [y.f(x) - x.f(y)]dxdy = \pm 2\iint_{(S)} [f(yx) - f(xy)]dxdy = 0.$$

- - - HẾT - - -

Ivanpham