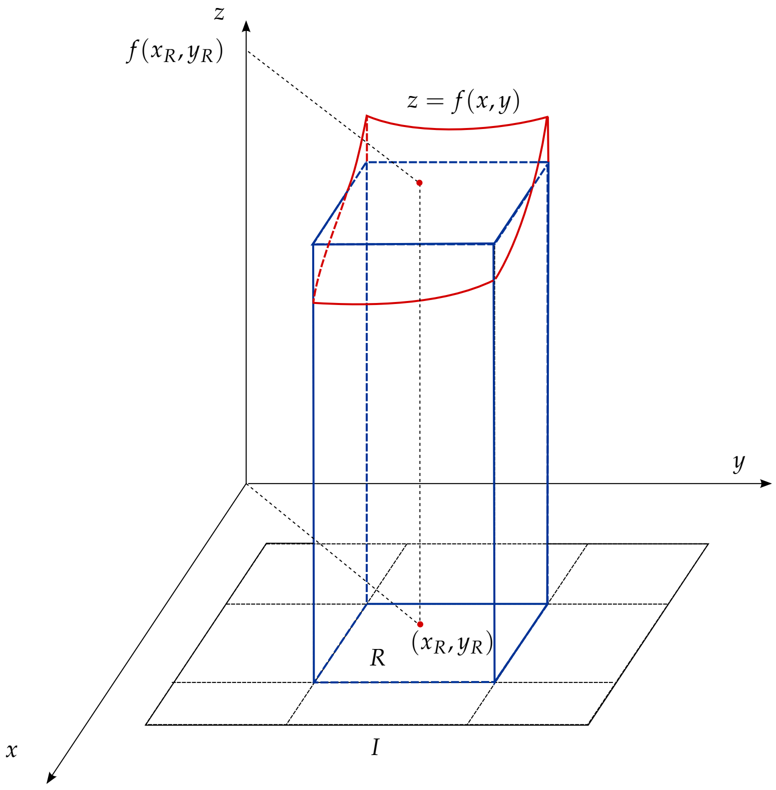
Bài giảng môn Giải tích 3: Tích phân Bội, Tích phân Đường, Tích phân Mặt

Huỳnh Quang Vũ

KHOA TOÁN-TIN HỌC, ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN, ĐẠI HỌC QUỐC GIA THÀNH PHỐ HỒ CHÍ MINH, 227 NGUYỄN VĂN CỪ, QUẬN 5, THÀNH PHỐ HỒ CHÍ MINH. EMAIL: HQVU@HCMUS.EDU.VN



TÓM TẮT NỘI DUNG. Đây là tập bài giảng cho môn Giải tích A3 (TTH024). Đây là môn học bắt buộc cho tất cả các sinh viên ngành Toán-Tin trường Đại học Khoa học Tự nhiên Thành phố Hồ Chí Minh vào học kì thứ 3.

Tập bài giảng có thể được dùng kèm với các giáo trình chẳng hạn như của Stewart [**Ste08**]. Tập bài giảng này cung cấp tài liệu đọc thêm, sâu hơn, nhưng vẫn sát với nội dung môn học nhằm phục vụ tốt hơn cho sinh viên chuyên ngành Toán -Tin.

Những phần có đánh dấu * là tương đối khó hơn, không bắt buộc.

Để làm một số bài tập có thể cần dùng chương trình máy tính. Có thể dùng những phần mềm như Matlab, Maple, Mathematica, hay phần mềm tự do Maxima hay Sage.

Đây là một bản thảo, sẽ được tiếp tục sửa chữa. Bản mới nhất có trên trang web http://www.math.hcmus.edu.vn/∼hqvu.

Ngày 4 tháng 3 năm 2014.

Mục lục

Chương 1

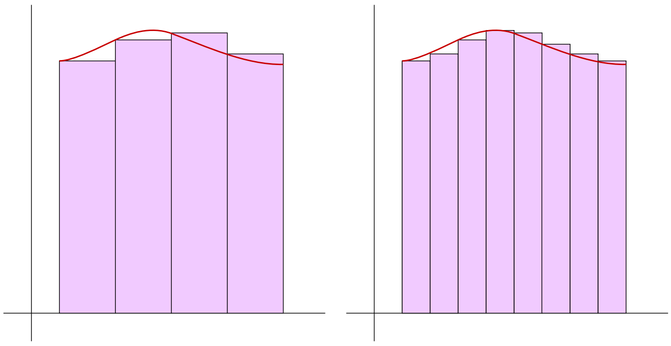
Tích phân bội

Trong chương này chúng ta sẽ nghiên cứu tích phân Riemann trong không gian nhiều chiều.

1.1. Tích phân trên hình hộp

Tích phân trên không gian nhiều chiều là sự phát triển tương tự của tích phân một chiều. Do đó các ý chính đã quen thuộc và không khó. Người đọc có thể xem lại phần tích phân một chiều để dễ theo dõi hơn.

Cho I là một hình hộp, và $f : I \to \mathbb{R}$. Ta muốn tính tổng giá trị của hàm f trên hình hộp I. Ta chia nhỏ hình hộp I bằng những hình hộp con nhỏ hơn. Ta hy vọng rằng trên mỗi hình hộp nhỏ hơn đó, giá trị của hàm f sẽ thay đổi ít hơn, và ta có thể xấp xỉ f bằng một hàm hằng. Ta chờ đợi rằng nếu ta chia càng nhỏ thì xấp xỉ càng tốt hơn, và khi qua giới hạn thì ta sẽ được giá trị đúng của tổng giá trị của f.



Sau đây là một cách giải thích hình học. Giả sử thêm hàm f là không âm, ta muốn tìm "thể tích" của khối bên dưới đồ thị của hàm f bên trên hình hộp I. Ta sẽ xấp xỉ khối đó bằng những hình hộp với đáy là một hình hộp con của I và chiều cao là một giá trị của f trong hình hộp con đó. Ta chờ đợi rằng khi số hình hộp tăng lên vô hạn thì sẽ được giá trị đúng của thể tích.

Chia nhỏ hình hộp. Trong môn học này, khi ta nói đến không gian $\mathbb{R}^n$ thì ta dùng chuẩn và khoảng cách Euclid, cụ thể nếu $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ thì $|x| = (x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2)^{1/2}$.

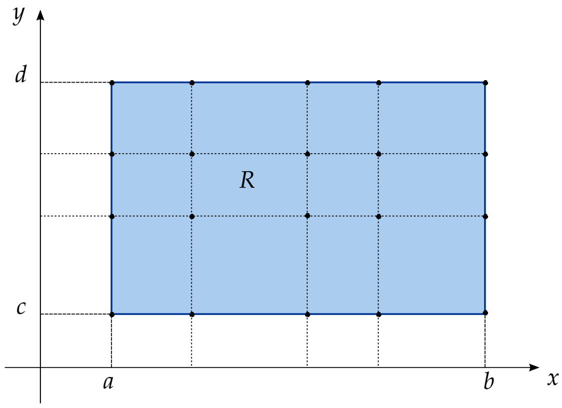
Một *hình hộp n-chiều* là một tập con của $\mathbb{R}^n$ có dạng $[a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \cdots \times [a_n, b_n]$ với $a_i < b_i$ với mọi $1 \le i \le n$.

Định nghĩa. *Thể tích* (volume) của hình hộp $I = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \cdots \times [a_n, b_n]$ được định nghĩa là số thực $|I| = (b_1 - a_1)(b_2 - a_2) \cdots (b_n - a_n)$.

Khi số chiều $n = 1$ ta thường thay từ thể tích bằng từ *chiều dài* (length). Khi $n = 2$ ta thường dùng từ *diện tích* (area).

Một *phép chia* (hay phân hoạch) (partition) của một khoảng $[a, b]$ là một tập con hữu hạn của khoảng $[a, b]$ mà chứa cả a và b. Ta có thể đặt tên các phần tử của một phép chia là $x_0, x_1, \ldots, x_m$ với $a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_m = b$. Mỗi khoảng $[x_{i-1}, x_i]$ là một *khoảng con* của khoảng $[a, b]$ tương ứng với phép chia.

Một phép chia của hình hộp $I = \prod_{i=1}^{n}[a_i, b_i]$ là một tích Descartes của các phép chia của các khoảng $[a_i, b_i]$. Cụ thể nếu mỗi P_i là một phép chia của khoảng $[a_i, b_i]$ thì $P = \prod_{i=1}^{n} P_i$ là một phép chia của hình hộp I.



HÌNH 1.1.1. Một phép chia của hình chữ nhật $[a, b] \times [c, d]$ gồm những điểm mà các tọa độ thứ nhất tạo thành một phép chia của $[a, b]$ và các tọa độ thứ hai tạo thành một phép chia của $[c, d]$.

Một *hình hộp con* ứng với một phép chia P của một hình hộp là một tích các khoảng con của các cạnh của hình hộp ban đầu. Cụ thể một hình hộp con của hình hộp I có dạng $\prod_{i=1}^{n} T_i$ trong đó T_i là một khoảng con của khoảng $[a_i, b_i]$ ứng với phép chia P_i.

Định nghĩa tích phân trên hình hộp. Cho I là một hình hộp, và $f : I \to \mathbb{R}$. Với một phép chia P của I, thành lập *tổng Riemann*[1]

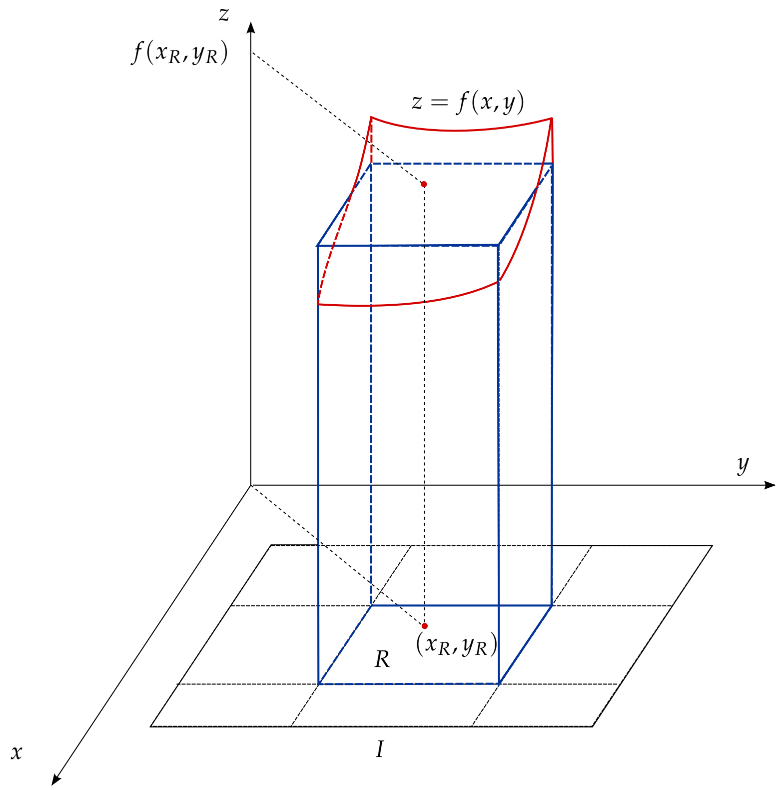
$$\sum_R f(x_R)|R|$$

ở đây tổng được lấy trên tất cả các hình hộp con R của P, và x_R là một điểm bất kì thuộc R. "Giới hạn" của tổng Riemann khi phép chia "mịn hơn và mịn hơn" sẽ là tích phân của hàm f trên I, kí hiệu là $\int_I f$.

Vậy $\int_I f$ đại diện cho *tổng giá trị* của hàm f trên miền I. [2]

Để làm chính xác ý tưởng trên ta cần làm rõ quá trình qua giới hạn. Chúng ta sẽ dùng một cách trình bày do Jean Gaston Darboux đề xuất năm 1870.

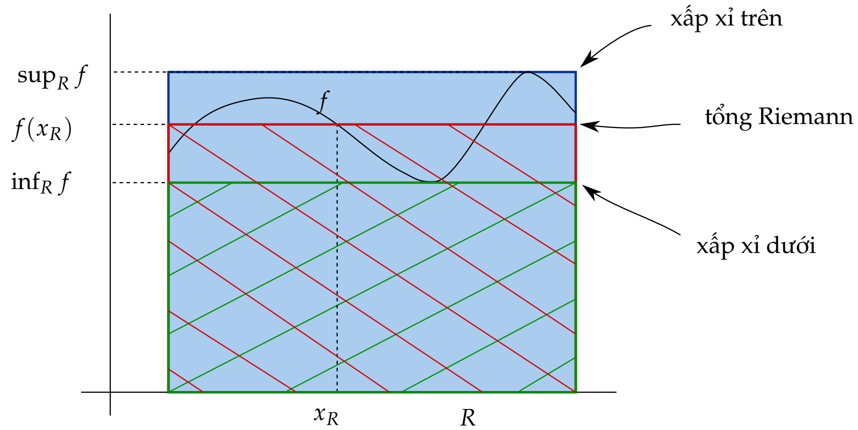
[1]Bernard Riemann là người đã đề xuất một định nghĩa chặt chẽ cho tích phân vào khoảng năm 1854, mặc dù tích phân đã được biết trước đó.
[2]Kí hiệu $\int$ do Gottfried Leibniz đặt ra. Nó đại diện cho chữ cái "s" trong chữ Latin "summa" (tổng).



Nhớ lại rằng ngay cả cho tích phân của hàm một biến, để xét tích phân của hàm không bị chặn cần lấy giới hạn của tích phân để có "tích phân suy rộng". Trong suốt chương này ta *chỉ xét hàm bị chặn*.

Gọi $L(f,P) = \sum_R (\inf_R f)|R|$, trong đó tổng được lấy trên tất cả các hình hộp con ứng với phép chia P, là *tổng dưới* hay xấp xỉ dưới ứng với P.

Tương tự, $U(f,P) = \sum_R (\sup_R f)|R|$ là *tổng trên* hay xấp xỉ trên ứng với P.



HÌNH 1.1.2. Xấp xỉ dưới ≤ xấp xỉ Riemann ≤ xấp xỉ trên.

Cho P và P' là hai phép chia của hình hộp I. Nếu $P \subset P'$ thì ta nói P' là *mịn hơn* P.

Bổ đề (Chia mịn hơn thì xấp xỉ tốt hơn). *Nếu phép chia P' là mịn hơn phép chia P thì $L(f,P') \geq L(f,P)$ và $U(f,P') \leq U(f,P)$.*

Đây một ưu điểm quan trọng của xấp xỉ trên và xấp xỉ dưới bởi vì ta có thể thấy với tổng Riemann thì chia mịn hơn không nhất thiết dẫn tới xấp xỉ tốt hơn.

CHỨNG MINH. Mỗi hình hộp con R' của P' nằm trong một hình hộp con R của P. Ta có $\inf_{R'} f \geq \inf_R f$. Vì thế

$$\sum_{R' \subset R} (\inf_{R'} f)|R'| \geq \sum_{R' \subset R} (\inf_R f)|R'| = \inf_R f \sum_{R' \subset R} |R'| = (\inf_R f)|R|.$$

Lấy tổng hai vế của bất đẳng thức trên theo tất cả hình hộp con R của P ta được $L(f,P') \geq L(f,P)$. □

Bổ đề (Xấp xỉ dưới $\leq$ xấp xỉ trên). *Nếu P và P' là hai phép chia bất kì của cùng một hình hộp thì $L(f,P) \leq U(f,P')$.*

CHỨNG MINH. Với hai phép chia P và P' bất kì thì luôn có một phép chia P'' mịn hơn cả P lẫn P', chẳng hạn nếu $P = \prod_{i=1}^n P_i$ và $P' = \prod_{i=1}^n P'_i$ thì có thể lấy $P'' = \prod_{i=1}^n P''_i$ với $P''_i = P_i \cup P'_i$. Khi đó $L(f,P) \leq L(f,P'') \leq U(f,P'') \leq U(f,P')$. □

Một hệ quả là chặn trên nhỏ nhất của tập hợp tất cả các xấp xỉ dưới $\sup_P L(f,P)$ và chặn dưới lớn nhất của của tập hợp tất cả các xấp xỉ trên $\inf_P U(f,P)$ tồn tại, và $\sup_P L(f,P) \leq \inf_P U(f,P)$.

Định nghĩa (Tích phân Riemann). Cho hình hộp I. Hàm $f : I \to \mathbb{R}$ là *khả tích* (integrable) nếu f bị chặn và $\sup_P L(f,P) = \inf_P U(f,P)$. Nếu f khả tích thì *tích phân* (integral) của f được định nghĩa là số thực $\sup_P L(f,P) = \inf_P U(f,P)$, và được kí hiệu là $\int_I f$.

Ví dụ. Nếu c là hằng số thì $\int_I c = c|I|$.

Ghi chú. Khi số chiều $n = 1$ ta có tích phân của hàm một biến quen thuộc từ trung học, thường được viết là $\int_a^b f(x)\, dx$. Khi $n = 2$ ta có *tích phân bội hai* thường được viết là $\iint_I f(x,y)\, dA$ hay $\iint_I f(x,y)\, dxdy$. Khi $n = 3$ ta có *tích phân bội ba*, thường được viết là $\iiint_I f(x,y,z)\, dV$ hay $\iiint_I f(x,y,z)\, dxdydz$. Hiện giờ dx, $dxdy$, $dxdydz$, dA, dV chỉ là kí hiệu để chỉ loại tích phân, không có ý nghĩa độc lập.

1.1.1. Mệnh đề. *Cho f bị chặn trên hình hộp I. Khi đó f là khả tích trên I nếu và chỉ nếu với mọi $\epsilon > 0$ có phép chia P của I sao cho $U(f,P) - L(f,P) < \epsilon$.*

Như vậy hàm khả tích khi và chỉ khi xấp xỉ trên và xấp xỉ dưới có thể gần nhau tùy ý.

CHỨNG MINH. ($\Rightarrow$) Cho f khả tích. Cho $\epsilon > 0$, có phép chia P và P' sao cho

$$L(f,P) > -\epsilon + \int_I f$$

và

$$U(f,P') < \epsilon + \int_I f$$

Lấy P'' mịn hơn cả P và P'. Khi đó

$$U(f,P'') - L(f,P'') \leq U(f,P') - L(f,P) < 2\epsilon$$

($\Leftarrow$) Giả sử với $\epsilon > 0$ cho trước bất kì có phép chia P sao cho $U(f,P) - L(f,P) < \epsilon$. Bất đẳng thức này dẫn tới $0 \leq \inf_P U(f,P) - \sup L(f,P) < \epsilon$ với mọi $\epsilon > 0$. Do đó $\inf_P U(f,P) = \sup_P L(f,P)$. □

Tính chất của tích phân. Ta có những tính chất tương tự trường hợp một biến:

1.1.2. Mệnh đề. *Nếu f và g khả tích trên hình hộp I thì:*

(a) *$f+g$ khả tích và $\int_I (f+g) = \int_I f + \int_I g$.*
(b) *Với mọi số thực c thì cf khả tích và $\int_I cf = c\int_I f$.*
(c) *Nếu $f \leq g$ thì $\int_I f \leq \int_I g$.*

CHỨNG MINH. Ta chứng minh phần (a), các phần còn lại được để ở phần bài tập.

Với một phép chia P của I, trên một hình hộp con R ta có $\inf_R f + \inf_R g \leq f(x) + g(x)$, $\forall x \in R$. Suy ra $\inf_R f + \inf_R g \leq \inf_R (f+g)$. Do đó $L(f,P) + L(g,P) \leq L(f+g,P)$.

Cho $\epsilon > 0$, có phép chia P sao cho $L(f,P) > \int_I f - \epsilon$ và có phép chia P' sao cho $L(g,P') > \int_I g - \epsilon$. Lấy phép chia P'' mịn hơn cả P và P' thì $L(f,P'') \geq L(f,P) > \int_I f - \epsilon$ và $L(g,P'') \geq L(g,P') > \int_I g - \epsilon$. Suy ra

$$L(f+g,P'') \geq L(f,P'') + L(g,P'') > \int_I f + \int_I g - 2\epsilon.$$

Tương tự, có phép chia Q sao cho

$$U(f+g,Q) \leq U(f,Q) + U(g,Q) < \int_I f + \int_I g + 2\epsilon.$$

Lấy phép chia Q' mịn hơn cả P'' và Q thì ta được

$$\int_I f + \int_I g - 2\epsilon < L(f+g,Q') \leq U(f+g,Q') < \int_I f + \int_I g + 2\epsilon.$$

Hệ thức này dẫn tới $U(f+g,Q') - L(f+g,Q') < 4\epsilon$, do đó $f+g$ khả tích, hơn nữa

$$\int_I f + \int_I g - 2\epsilon < \int_I (f+g) < \int_I f + \int_I g + 2\epsilon, \ \forall \epsilon > 0,$$

do đó $\int_I (f+g) = \int_I f + \int_I g$. □

*** Đọc thêm.** Có thể định nghĩa tích phân Riemann như sau. Ta nói f là khả tích trên I nếu có một số thực, gọi là tích phân của f trên I, kí hiệu là $\int_I f$, có tính chất là với mọi $\epsilon > 0$ có $\delta > 0$ sao cho nếu tất cả các cạnh của các hình chữ nhật con của P đều có chiều dài nhỏ hơn δ thì với mọi cách chọn điểm x_R thuộc hình hộp con R của P ta có $\left|\sum_R f(x_R)|R| - \int_I f\right| < \epsilon$. Có thể chứng minh rằng định nghĩa này tương đương với định nghĩa của Darboux ở 1.1.

Có thể hỏi nếu ta dùng những cách xấp xỉ khác thì có mang tới cùng một tích phân hay không? Nếu ta muốn tích phân có những tính chất nhất định, gồm chẳng hạn tính tuyến tính, thì thực ra chỉ có duy nhất một loại tích phân thỏa các tính chất đó. Xem [**Lan97**, tr. 575].

Bài tập.

1.1.3. Một hồ nước hình chữ nhật kích thước 4m $\times$ 8m có độ sâu không đều. Người ta đo được chiều sâu tại một số điểm trên hồ như trong bảng sau. Ví dụ trong bảng này độ sâu tại điểm cách bờ trái 1m và bờ trên 5m là 4.6m. Hãy ước lượng lượng nước trong hồ.

vị trí	1	3	5	7
1	3.1	4.5	4.6	4.0
3	3.7	4.1	4.5	4.4

1.1.4. Hãy cho một ví dụ minh họa rằng xấp xỉ Riemann ứng với một phép chia mịn hơn không nhất thiết tốt hơn.

1.1.5. Chứng minh các tính chất ở 1.1.2.

1.1.6. Hãy cho một ước lượng cho giá trị của tích phân

$$\iint_{[0,1]\times[1,2]} e^{x^2y^3}\,dxdy.$$

1.1.7. Điều sau đây là đúng hay sai, giải thích:

$$\iint_{[0,1]\times[1,4]} (x^2+\sqrt{y})\sin(xy^2)\,dA = 10.$$

1.1.8. Giả sử f liên tục trên hình hộp I và $f(x) \geq 0$ trên I. Chứng minh rằng nếu $\int_I f = 0$ thì $f = 0$ trên I.

1.2. Sự khả tích

Qua ý của tích phân, ta thấy việc xấp xỉ dựa trên một giả thiết: nếu biến thay đổi ít thì giá trị của hàm thay đổi ít. Như vậy sự khả tích phụ thuộc chặt chẽ vào sự liên tục.

1.2.1. Định lí (liên tục thì khả tích). *Một hàm liên tục trên một hình hộp thì khả tích trên đó.*

Đây là một điều kiện đủ cho sự khả tích mà ta sẽ dùng thường xuyên.

CHỨNG MINH. Chứng minh chủ yếu dựa vào tính liên tục đều của của hàm. Ta dùng các kết quả sau trong Giải tích 2 (xem chẳng hạn [**Lan97**, tr. 193]):

(a) Một tập con của $\mathbb{R}^n$ là compắc khi và chỉ khi nó đóng và bị chặn.
(b) Một hàm thực liên tục tập con compắc của $\mathbb{R}^n$ thì liên tục đều.
(c) Một hàm thực liên tục trên một tập compắc thì bị chặn.

Giả sử f là một hàm liên tục trên hình hộp I. Khi đó f liên tục đều trên I, do đó cho trước $\epsilon > 0$, có $\delta > 0$ sao cho $|x - y| < \delta \Rightarrow f(x) - f(y) < \epsilon$.

Lấy một phép chia P của I sao cho khoảng cách giữa hai điểm bất kì trong một hình hộp con của P là nhỏ hơn δ. Điều này không khó: nếu chiều dài các cạnh của các hình hộp con của P không quá δ thì chiều dài của một đường chéo của một hình hộp con không quá $\sqrt{n}\delta$.

Với phép chia P, cho hai điểm x, y bất kì thuộc về một hình hộp con R thì $f(x) - f(y) < \epsilon$. Suy ra $\sup_R f - \inf_R f \leq \epsilon$. Vì thế

$$U(f,P) - L(f,P) = \sum_R (\sup_R f - \inf_R f)|R| \leq \epsilon \sum_R |R| = \epsilon |I|$$

Theo tiêu chuẩn 1.1.1 ta có kết quả. □

Tập có thể tích không. Ví dụ sau cho thấy một hàm không liên tục vẫn có thể khả tích.

Ví dụ. Cho $f : [0,1] \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \neq \frac{1}{2} \\ 1, & x = \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Nếu ta lấy phép phân chia P của $[0,1]$ sao cho chiều dài của các khoảng con nhỏ hơn $\frac{\epsilon}{2}$ thì sai khác giữa $U(f,P)$ và $L(f,P)$ nhỏ hơn ϵ. Vì thế hàm f khả tích. Chú ý rằng f không liên tục tại $\frac{1}{2}$.

Ví dụ. Cho $f : [0,1] \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Với bất kì phép chia P nào của khoảng $[0,1]$ ta có $L(f,P) = 0$ and $U(f,P) = 1$. Do đó f không khả tích. Chú ý rằng f không liên tục tại bất kì điểm nào.

1.2.2. Định nghĩa. Một tập con C của $\mathbb{R}^n$ được gọi là có *thể tích n-chiều không* (of content zero) nếu với mọi số $\epsilon > 0$ có một họ hữu hạn các hình hộp n-chiều $\{U_1, U_2, \ldots, U_m\}$ sao cho $\bigcup_{i=1}^m U_i \supset C$ và $\sum_{i=1}^m |U_i| < \epsilon$.

Nói cách khác, một tập con của $\mathbb{R}^n$ là có thể tích không nếu ta có thể phủ tập đó bằng hữu hạn hình hộp có tổng thể tích nhỏ hơn số dương cho trước bất kì.

Khi $n = 2$ ta thay từ "thể tích không" bởi từ "diện tích không".

Ví dụ. (a) Tập hợp gồm một điểm trong $\mathbb{R}^n$ có thể tích n-chiều không với mọi $n \geq 1$.

(b) Một đoạn thẳng trong $\mathbb{R}^n$ có thể tích n-chiều không với mọi $n \geq 2$.

(c) Hội của hai tập có thể tích không là một tập có thể tích không.

1.2.3. Mệnh đề. *Đồ thị của một hàm khả tích trên một hình hộp trong $\mathbb{R}^n$ có thể tích không trong $\mathbb{R}^{n+1}$.*

CHỨNG MINH. Cho f khả tích trên hình hộp $I \subset \mathbb{R}^n$. Cho trước $\epsilon > 0$ có phép chia P của I sao cho $U(f, P) - L(f, P) = \sum_R (\sup_R f - \inf_R f)|R| < \epsilon$. Đồ thị của hàm f, tập $\{(x, f(x)) \mid x \in I\}$, được phủ bởi họ tất cả các hình hộp $R \times [\inf_R f, \sup_R f]$. Tổng thể tích của các hình hộp này chính là $\sum_R (\sup_R f - \inf_R f)|R|$, nhỏ hơn ϵ. □

1.2.4. Ví dụ. Đặc biệt, đồ thị của một hàm liên tục trên một khoảng đóng có diện tích không. Vậy một đoạn thẳng, một đường tròn có diện tích không.

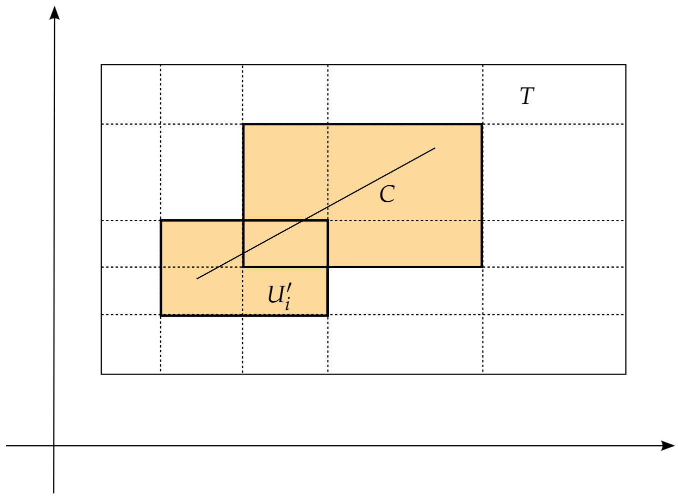
1.2.5. Định lí (liên tục trừ ra trên tập có thể tích không thì khả tích). *Một hàm thực bị chặn trên một hình hộp và liên tục trên hình hộp trừ ra một tập có thể tích không thì khả tích trên hình hộp đó.*

CHỨNG MINH. Giả sử f là một hàm thực bị chặn trên hình hộp I, do đó có số thực M sao cho $|f(x)| \leq M$ với mọi $x \in I$. Cho C là tập hợp các điểm thuộc I mà tại đó hàm f không liên tục. Giả thiết rằng C có thể tích không.

Ý của chứng minh là dùng hữu hạn hình hộp có tổng thể tích nhỏ hơn ϵ để phủ C và dùng tính bị chặn của f đối với phần này. Trên phần của hình hộp không được phủ thì f liên tục đều, ta sử dụng lập luận như trong phần chứng minh của 1.2.1.

Cho $\epsilon > 0$, có một họ các hình hộp $\{U_i\}_{1 \leq i \leq m}$ phủ C và có tổng thể tích nhỏ hơn ϵ. Có thể giả sử mỗi hình hộp U_i là một hình hộp con của I, bằng cách thay U_i bởi $U_i \cap I$ nếu cần. Mở rộng mỗi hình hộp U_i thành một hình hộp U_i' chứa trong I có thể tích không quá hai lần thể tích của U_i sao cho phần trong của U_i' chứa U_i. (Ở đây ta xét phần trong tương đối với I, nghĩa là các tập được xét được coi là tập con của không gian I.) Như vậy ta có được một họ mới $\{U_i'\}_{1 \leq i \leq m}$ các hình hộp con của I với tổng thể tích nhỏ hơn 2ϵ, hội các phần trong của các hình hộp này chứa C. Đặt $T = I \setminus \cup_{i=1}^m \overset{\circ}{U_i'}$ thì T rời khỏi C do đó f liên tục trên T.

Bây giờ ta làm tương tự như ở 1.2.1. Gọi P là phép chia của I nhận được bằng cách lấy tọa độ đỉnh của các hình hộp U_i' làm các điểm chia trên các cạnh của I. Vì T



là compắc nên f liên tục đều trên T, do đó ta có thể lấy được một phép chia P' mịn hơn P sao cho với bất kì hình hộp con R của P' chứa trong T thì $\sup_R f - \inf_R f < \epsilon$. Khi đó với P' ta có

$$\sum_{R\subset T}(\sup_R f - \inf_R f)|R| < \epsilon \sum_{R\subset T}|R| \leq \epsilon|I|.$$

Nếu hình hộp con R của P' không chứa trong T thì R chứa trong một hình hộp U_i' nào đó, do đó

$$\sum_{R\not\subset T}(\sup_R f - \inf_R f)|R| \leq \sum_{R\not\subset T} 2M|R| = 2M\sum_{R\not\subset T}|R| = 2M\sum_{i=1}^{m}|U_i'| < 2M2\epsilon.$$

Kết hợp hai đánh giá trên ta có $U(f,P') - L(f,P') < (|I| + 4M)\epsilon$. Từ đó ta kết luận hàm f khả tích. □

1.2.6. Định lí. *Giả sử f và g là hàm bị chặn trên một hình hộp I và $f(x) = g(x)$ trên I trừ ra một tập con có thể tích không. Khi đó f khả tích trên I khi và chỉ khi g khả tích trên I, và khi đó $\int_I f = \int_I g$.*

Vậy *giá trị của một hàm bị chặn trên một tập có thể tích không không ảnh hưởng đến tích phân.*

Chứng minh. Đặt $h = g - f$ thì h bị chặn, và $h(x) = 0$ trừ ra trên một tập C có thể tích không. Ta chỉ cần chứng minh h khả tích và $\int_I h = 0$, sau đó dùng 1.1.2. Ta tiến hành giống như cách chứng minh 1.2.5.

Cho trước $\epsilon > 0$, ta có một họ $\{U_i\}_{1\leq i\leq m}$ các hình hộp con của I với tổng thể tích nhỏ hơn ϵ và hội các phần trong (tương đối với không gian I) của các hình hộp này chứa C. Đặt $T = I \setminus \cup_{i=1}^{m}\overset{\circ}{U}_i$ thì T rời khỏi C do đó $h = 0$ trên T.

Gọi P là phép chia của I nhận được bằng cách lấy tọa độ đỉnh của các hình hộp U_i làm các điểm chia trên các cạnh của I. Trên T thì

$$\sum_{R\subset T}(\sup_R f)|R| = \sum_{R\subset T}(\inf_R f)|R| = 0.$$

Do h bị chặn nên có số $M > 0$ sao cho $|h(x)| \le M$ với mọi $x \in I$. Nếu hình hộp con R không chứa trong T thì R chứa trong một hình hộp U_i nào đó, do đó

$$\sum_{R \not\subseteq T} (\sup_R h)|R| \le \sum_{R \not\subseteq T} M|R| = M \sum_{R \not\subseteq T} |R| = M \sum_{i=1}^{m} |U_i| < M\epsilon.$$

Tương tự:

$$\sum_{R \not\subseteq T} (\inf_R h)|R| \ge \sum_{R \not\subseteq T} -M|R| = -M \sum_{R \not\subseteq T} |R| = -M \sum_{i=1}^{m} |U_i| > -M\epsilon.$$

Vậy $-M\epsilon < L(h,P) \le U(h,P) < M\epsilon$.

Từ đây ta có thể kết luận hàm h khả tích và $\int_I h = 0$. □

Điều kiện cần và đủ cho sự khả tích. Trong phần này chúng ta sẽ trả lời hoàn chỉnh vấn đề khả tích. Nếu người đọc thấy quá khó hoặc không có đủ thời gian thì chỉ cần nắm được phát biểu kết quả chính là 1.2.8.

1.2.7. Định nghĩa (độ đo không). Một tập con C của $\mathbb{R}^n$ là có *độ đo không* (of measure zero) nếu với mọi số $\epsilon > 0$ có một họ các hình hộp $\{U_1, U_2, \ldots, U_n, \ldots\}$ sao cho $\bigcup_{i=1}^{\infty} U_i \supset C$ và $\sum_{n=1}^{\infty} |U_n| < \epsilon$. [3]

Nói cách khác, một tập con của $\mathbb{R}^n$ là có độ đo không nếu ta có thể phủ tập đó bằng một họ *đếm được* hình hộp có tổng thể tích nhỏ hơn số dương cho trước bất kì.

Ví dụ. Một tập có thể tích không thì có độ đo không.

Một mệnh đề $P(x)$ thường được gọi là đúng *hầu khắp* (almost everywhere) nếu nó đúng với mọi x trừ ra trên một tập có độ đo không.

Dưới đây là câu trả lời hoàn chỉnh cho vấn đề khả tích, thường được gọi là Điều kiện khả tích Lebesgue:

1.2.8. Định lí (khả tích=bị chặn+liên tục hầu khắp). *Một hàm thực bị chặn trên một hình hộp là khả tích trên hình hộp đó khi và chỉ khi tập hợp những điểm tại đó hàm không liên tục có độ đo không.*

Nói cách khác, một hàm bị chặn là khả tích trên một hình hộp khi và chỉ khi nó liên tục hầu khắp trên đó.

1.2.9. Ví dụ. Sau đây là một ví dụ kinh điển về một hàm khả tích có tập hợp các điểm không liên tục có độ đo không nhưng không có thể tích không.

Cho $f : [0,1] \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{q}, & x = \frac{p}{q},\ p, q \in \mathbb{Z},\ q > 0,\ \gcd(p,q) = 1 \\ 0, & x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$

---

[3] Từ "độ đo" ở đây chỉ độ đo Lebesgue. Lí thuyết tích phân của Henri Lebesgue xuất hiện năm 1901, sau lí thuyết tích phân Riemann.

Rõ ràng f không liên tục tại các số hữu tỉ. Mặt khác có thể chứng minh là f liên tục tại các số vô tỉ (Bài tập 1.2.16). Tập hợp các số hữu tỉ trong khoảng $[0,1]$ có độ đo không nhưng không có thể tích không (Bài tập 1.2.17).

Hóa ra hàm f khả tích. Thực vậy, cho $\epsilon > 0$, gọi C_ϵ là tập hợp các số hữu tỉ x trong $[0,1]$ sao cho nếu $x = \frac{p}{q}$ ở dạng tối giản thì $\frac{1}{q} \geq \epsilon$. Vì $0 \leq p \leq q \leq \frac{1}{\epsilon}$, nên tập C_ϵ là hữu hạn. Ta phủ C_ϵ bằng một họ U gồm hữu hạn các khoảng con rời nhau của khoảng $[0,1]$ có tổng chiều dài nhỏ hơn ϵ. Các điểm đầu mút của các khoảng này sinh ra một phép chia P của khoảng $[0,1]$. Ta có $\sum_{R\in U}(\sup_R f)|R| \leq \sum_{R\in U}|R| < \epsilon$. Trong khi đó nếu số $x = \frac{p}{q}$ ở dạng tối giản không thuộc C_ϵ thì $\frac{1}{q} < \epsilon$, do đó $\sum_{R\notin U}(\sup_R f)|R| < \epsilon \sum_{R\notin U}|R| \leq \epsilon$. Vậy $U(f,P) < 2\epsilon$. Từ đây ta kết luận f khả tích, hơn nữa $\int_{[0,1]} f = 0$.

*** Chứng minh 1.2.8.** Cho f là một hàm bị chặn trên miền xác định là $D \subset \mathbb{R}^n$. Ta định nghĩa *dao động* (oscillation) của f tại $x \in D$ là số thực

$$o(f,x) = \inf_{\delta>0}\left(\sup_{B(x,\delta)\cap D} f - \inf_{B(x,\delta)\cap D} f\right) = \lim_{\delta\to 0}\left(\sup_{B(x,\delta)\cap D} f - \inf_{B(x,\delta)\cap D} f\right).$$

Rõ ràng $o(f,x)$ được xác định và không âm.

1.2.10. Bổ đề. *Hàm f liên tục tại x khi và chỉ khi $o(f,x) = 0$.*

CHỨNG MINH. ($\Rightarrow$) Giả sử $o(f,x) = 0$. Cho trước $\epsilon > 0$, có $\delta > 0$ sao cho $\sup_{B(x,\delta)} f - \inf_{B(x,\delta)} f < \epsilon$. Suy ra $f(y) - f(x) < \epsilon$ và $f(x) - f(y) < \epsilon$, vì thế $|f(y) - f(x)| < \epsilon$ với mọi $y \in B(x,\delta) \cap D$. Vậy f liên tục tại x.

($\Leftarrow$) Giả sử f liên tục tại x. Cho $\epsilon > 0$, có $\delta > 0$ sao cho $|f(y) - f(x)| < \epsilon$ với mọi $y \in B(x,\delta) \cap D$. Vì vậy với mọi y, $z \in B(x,\delta) \cap D$ ta có $|f(y) - f(z)| < 2\epsilon$. Suy ra $\sup_{B(x,\delta)} f - \inf_{B(x,\delta)} f \leq 2\epsilon$. Vậy $o(f,x) = 0$. □

CHỨNG MINH PHẦN ĐIỀU KIỆN ĐỦ CỦA 1.2.8. Phần này được phát triển từ chứng minh của 1.2.5, dùng kĩ thuật trong 1.2.9.

Giả sử $|f(x)| \leq M$ với mọi x trong hình hộp I. Gọi C là tập các điểm trong I tại đó f không liên tục, và giả sử C có độ đo không.

Cho trước $\epsilon > 0$. Đặt $C_\epsilon = \{x \in I \mid o(f,x) \geq \epsilon\}$. Khi đó theo 1.2.11, C_ϵ là một tập compắc, chứa trong C, do đó theo 1.2.12 C_ϵ có thể tích không. Như trong phần chứng minh của 1.2.5, có một họ hữu hạn các hình hộp $\{U_1, U_2, \ldots, U_m\}$, mỗi hình hộp này chứa trong I, sao cho C_ϵ được phủ bởi họ các phần trong đối với I của các U_i, nghĩa là $C \subset \bigcup_{i=1}^m \overset{\circ}{U_i}$, và $\sum_{i=1}^m |U_i| < \epsilon$.

Đặt $T = I \setminus \bigcup_{i=1}^m \overset{\circ}{U_i}$. Khi đó T rời khỏi C_ϵ. Với mỗi $x \in T$ thì $o(f,x) < \epsilon$. Có hình hộp R_x là lân cận của x trong I sao cho $\sup_{R_x} f - \inf_{R_x} f < \epsilon$. Vì T compắc, mọi phủ mở có một phủ con hữu hạn (xem chẳng hạn [**Lan97**, tr. 203]), nên họ $\{\overset{\circ}{R_x} \mid x \in T\}$ phủ T có một phủ con hữu hạn $\{R_j \mid j = 1, 2, \ldots, k\}$.

Các hình hộp U_i và R_j, $1 \leq i \leq m$ và $1 \leq j \leq k$ sinh ra một phép chia P của I, được tạo ra từ các tọa độ đỉnh của các hình hộp.

Nếu hình hộp con R của P nằm trong T thì $R \subset R_j$ nào đó, vì thế $\sup_R f - \inf_R f < \epsilon$. Do đó

$$\sum_{R\subset T} (\sup_R f - \inf_R f)|R| < \epsilon \sum_{R\subset T} |R| < \epsilon |I|.$$

Nếu hình hộp con R của P không chứa trong T thì $R \subset U_i$ nào đó. Do đó

$$\sum_{R\not\subset T} (\sup_R f - \inf_R f)|R| \le \sum_{R\not\subset T} 2M|R| = 2M \sum_{R\not\subset T} |R| = 2M \sum_{i=1}^{m} |U_i| < 2M\epsilon$$

Từ hai đánh giá trên ta có $U(f,P) - L(f,P) < (|I| + 2M)\epsilon$. Ta kết luận hàm f khả tích. □

Trong chứng minh trên ta đã dùng các bổ đề sau.

1.2.11. Bổ đề. *Với mọi $\epsilon > 0$, tập $\{x \in D \mid o(f,x) \ge \epsilon\}$ là tập đóng trong D.*

CHỨNG MINH. Ta sẽ chứng minh rằng $A = \{x \in D \mid o(f,x) < \epsilon\}$ là tập mở trong D. Giả sử $x \in A$. Có $\delta > 0$ sao cho $\sup_{B(x,\delta)\cap D} f - \inf_{B(x,\delta)\cap D} f < \epsilon$. Lấy $y \in B(x,\delta) \cap D$. Lấy $\delta' > 0$ sao cho $B(y,\delta') \subset B(x,\delta)$. Khi đó $\sup_{B(y,\delta')\cap D} f - \inf_{B(y,\delta')\cap D} f < \sup_{B(x,\delta)\cap D} f - \inf_{B(x,\delta)\cap D} f < \epsilon$. Điều này dẫn tới $y \in A$. □

1.2.12. Bổ đề. *Một tập compắc có độ đo không thì có thể tích không.*

CHỨNG MINH. Giả sử C là compắc và có độ đo không. Cho $\epsilon > 0$, có họ các hình hộp đóng $U_1, U_2, \ldots$ sao cho $\cup_{i=1}^{\infty} U_i \supset C$ và $\sum_{i=1}^{\infty} |U_i| < \epsilon/2$. Mở rộng kích thước tất cả các cạnh của mỗi U_i để được hình hộp U_i' sao cho $|U_i'| < 2|U_i|$. Khi đó $\overset{\circ}{U_i'}$ chứa U_i, do đó $\cup_{i=1}^{\infty} \overset{\circ}{U_i'} \supset C$, và $\sum_{i=1}^{\infty} |U_i'| < \epsilon$. Vì C compắc nên họ $\{\overset{\circ}{U_i'}\}_{i=1}^{\infty}$ có một họ con hữu hạn $\{\overset{\circ}{U_{i_k}'}\}_{k=1}^{n}$ thỏa $\cup_{k=1}^{n} \overset{\circ}{U_{i_k}'} \supset C$. Suy ra $\sum_{k=1}^{n} |\overset{\circ}{U_{i_k}'}| < \epsilon$. Vậy C có thể tích không. □

CHỨNG MINH PHẦN ĐIỀU KIỆN CẦN CỦA 1.2.8. Giả sử $|f(x)| \le M$ với mọi x trong hình hộp I và f khả tích trên I. Gọi C là tập các điểm trong I tại đó f liên tục. Đặt $C_{1/m} = \{x \in I \mid o(f,x) \ge 1/m\}$. Khi đó $C = \bigcup_{m=1}^{\infty} C_{1/m}$. Ta sẽ chứng minh mỗi tập $C_{1/m}$ có thể tích không, và do đó theo 1.2.13 tập C có độ đo không.

Cho $\epsilon > 0$. Vì f khả tích nên có phép chia P của I sao cho $U(f,P) - L(f,P) < \epsilon$. Tập $C_{1/m}$ gồm các điểm trong (đối với I) của một số hình hộp con của P, họ tất cả các hình hộp như vậy ta gọi là S, và các điểm biên của một số hình hộp con khác, họ tất cả các hình hộp như vậy ta gọi là T.

Nếu $R \in S$ thì R có điểm trong $x \in C_{1/m}$. Do đó $\sup_R f - \inf_R f \ge o(f,x) \ge 1/m$. Vậy

$$\epsilon > \sum_{R\in S} (\sup_R f - \inf_R f)|R| \ge \sum_{R\in S} \frac{1}{m}|R|.$$

Vậy ta được

$$\sum_{R\in S} |R| < m\epsilon.$$

Theo 1.2.14 tập T có thể tích không. Có một phủ Q của T bằng hữu hạn các hình hộp sao cho tổng thể tích của các hình hộp này nhỏ hơn ϵ. Do đó $C_{1/m}$ được phủ bởi họ $S \cup Q$ với tổng thể tích nhỏ hơn $(m+1)\epsilon$. Ta kết luận $C_{1/m}$ có thể tích không. □

Trong chứng minh trên ta đã dùng các bổ đề sau.

1.2.13. Bổ đề. *Hội của một họ đếm được các tập có thể tích không là một tập có độ đo không.*

CHỨNG MINH. Giả sử C_i, $i \in \mathbb{Z}^+$ là một tập có thể tích không. Đặt $C = \bigcup_{i=1}^{\infty} C_i$.

Cho $\epsilon > 0$. Với mỗi i có một họ hữu hạn các hình hộp $\{U_{i,j} \mid 1 \leq j \leq n_i\}$ phủ C_i và $\sum_{j=1}^{n_i} |U_{i,j}| < \frac{\epsilon}{2^i}$.

Bây giờ ta liệt kê các tập $U_{i,j}$ theo thứ tự

$$U_{1,1}, U_{1,2}, \ldots, U_{1,n_1}, U_{2,1}, U_{2,2}, \ldots, U_{2,n_2}, U_{3,1}, \ldots$$

Đây là một phủ đếm được của C có tổng diện tích nhỏ hơn $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{\epsilon}{2^i} = \epsilon$. Vậy C có độ đo không. □

1.2.14. Bổ đề. *Biên của một hình hộp có thể tích không.*

CHỨNG MINH. Do 1.2.13 ta chỉ cần chứng minh mỗi mặt của một hình hộp n-chiều có thể tích không trong $\mathbb{R}^n$. Mỗi mặt của hình hộp là một tập hợp D các điểm có dạng $(x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots, x_n)$ với $a_j \leq x_j \leq b_j$ khi $j \neq i$, và $x_i = c$ với $c = a_i$ hoặc $c = b_i$. Cho trước $\epsilon > 0$. Lấy hình hộp R phủ D có chiều dài cạnh ở chiều thứ i đủ nhỏ, cụ thể R gồm các điểm có dạng $(x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots, x_n)$ với $a_j \leq x_j \leq b_j$ khi $j \neq i$ và $c - \delta \leq x_i \leq c + \delta$. Khi đó $|R| = 2\delta \prod_{j \neq i}(b_j - a_j) < \epsilon$ nếu δ đủ nhỏ. □

Bài tập.

1.2.15. Các hàm sau có khả tích không? Nếu hàm khả tích thì tích phân của nó bằng bao nhiêu?

(a) $f(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x \leq 1,\ x \neq \frac{1}{2}, \\ 0, & x = \frac{1}{2}. \end{cases}$

(b) $f(x) = \begin{cases} 0, & x = 0 \\ \frac{\sin x}{x}, & 0 < x \leq 1. \end{cases}$

(c) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x}{y}, & 0 \leq x \leq 1,\ 0 < y \leq 1, \\ 0, & 0 < x \leq 1,\ y = 0. \end{cases}$

(d) $f(x,y) = \begin{cases} 2, & 0 < x \leq 1,\ 0 \leq y \leq 1, \\ 3, & x = 0,\ 0 \leq y \leq 1. \end{cases}$

1.2.16. Hàm được định nghĩa trong ví dụ 1.2.9 liên tục tại các số vô tỉ.

1.2.17. Tập hợp các số hữu tỉ trong khoảng $[0,1]$ có độ đo không nhưng không có thể tích không.

1.2.18. Mệnh đề 1.2.6 có còn đúng không nếu thay thể tích không bằng độ đo không?

1.2.19. Chứng tỏ hội của một tập có độ đo không với một tập có thể tích không thì có độ đo không.

1.2.20. Chứng tỏ nếu f khả tích thì $|f|$ khả tích và $\left|\int_I f\right| \leq \int_I |f|$.

1.3. Tích phân trên tập tổng quát

Chúng ta chỉ xét các tập con của $\mathbb{R}^n$. Để ngắn gọn hơn ta thường dùng từ *miền* (region) để chỉ một tập như vậy. Chúng ta *chỉ xét những miền bị chặn*. Nhớ lại rằng trong Giải tích 1 để xét tích phân trên khoảng không bị chặn ta đã phải dùng tới giới hạn của tích phân ủa và có khái niệm tích phân suy rộng.

Giả sử D là một miền bị chặnvà $f : D \to \mathbb{R}$. Vì D bị chặn nên có hình hộp I chứa D. Mở rộng hàm f lên hình hộp I thành hàm $F : I \to \mathbb{R}$ xác định bởi

$$F(x) = \begin{cases} f(x), & x \in D \\ 0, & x \in I \setminus D. \end{cases}$$

Một cách tự nhiên ta định nghĩa :

Định nghĩa. Ta nói f là khả tích trên D nếu F khả tích trên I, và khi đó tích phân của f trên D được định nghĩa là tích phân của F trên I:

$$\int_D f = \int_I F.$$

Để tích phân của f trên D được định nghĩa thì F phải bị chặn trên I, do đó *f phải bị chặn trên D*.

Bổ đề. *Tích phân $\int_D f$ không phụ thuộc vào cách chọn hình hộp I.*

Chứng minh. Giả sử F_1 là mở rộng của f lên $I_1 \supset D$, bằng không ngoài D và F_2 là mở rộng của f lên $I_2 \supset D$, bằng không ngoài D. Ta cần chứng minh điều sau: nếu F_1 khả tích trên I_1 thì F_2 khả tích trên I_2, và $\int_{I_1} F_1 = \int_{I_2} F_2$.

Đặt $I_3 = I_1 \cap I_2$ thì I_3 là một hình hộp con của I_1, và ta chứng minh điều sau là đủ: F_1 khả tích trên I_1 khi và chỉ khi F_3 khả tích trên I_3, và $\int_{I_1} F_1 = \int_{I_3} F_3$.

Đặt hàm F_1' xác định trên I_1 sao cho F_1' trùng với F_1 trừ ra trên biên của I_3, nơi mà F_1' được định nghĩa là bằng không. Vì F_1' chỉ khác F_1 trên một tập có thể tích không nên theo 1.2.6 F_1' khả tích khi và chỉ khi F_1 khả tích, và $\int_{I_1} F_1' = \int_{I_1} F_1$.

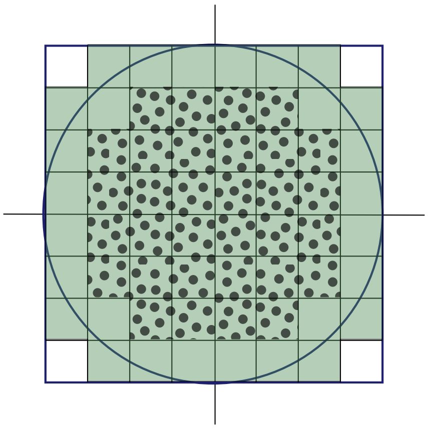
Một phép chia bất kì P của I_3 sinh ra một phép chia P' của I_1 bằng cách thêm vào tọa độ các đỉnh của I_1. Nếu một hình hộp con R ứng với P' không chứa trong I_3 thì $\sup_R F_1' = \inf_R F_1' = 0$ (ở chỗ này có dùng giả thiết F_1' bằng không trên biên của I_3). Điều này dẫn tới $U(F_3, P) = U(F_1', P')$ và $L(F_3, P) = L(F_1', P')$. Do đó ta kết luận nếu F_3 khả tích thì F_1' khả tích và $\int_{I_1} F_1' = \int_{I_3} F_3$.

Ngược lại, một phép chia bất kì P' của I_1 sinh ra một phép chia P'' của I_1 mịn hơn P' bằng cách thêm vào tọa độ các đỉnh của I_3. Hạn chế P'' lên I_3 ta được một phép chia P của I_3. Giống như đoạn vừa rồi, $U(F_3, P) = U(F_1', P'')$ và $L(F_3, P) = L(F_1', P'')$. Do đó nếu F_1' khả tích thì F_3 khả tích và $\int_{I_3} F_3 = \int_{I_1} F_1'$. □

Ghi chú. Khi D là một hình hộp thì định nghĩa tích phân này trùng với định nghĩa đã có.

Thể tích. Từ ý của tích phân ta có thể thấy ý của thể tích. Đặt miền bị chặn D vào trong một hình hộp I và xét một phép chia P của I. Ta xấp xỉ trên thể tích của D

bằng tổng thể tích của các hình chữ nhật con của I mà có phần chung khác rỗng với D, tức là $\sum_{R\cap D\neq\emptyset}|R|$. Ta cũng xấp xỉ dưới thể tích của D bằng tổng thể tích của các hình chữ nhật con của I mà nằm trong D, tức là $\sum_{R\subset D}|R|$. Miền D có thể tích nếu như hai xấp xỉ này có thể gần nhau tùy ý.



HÌNH 1.3.1. Xấp xỉ ngoài và xấp xỉ trong diện tích của một hình tròn.

Xét hàm có giá trị bằng 1 trên D và bằng 0 ngoài D. Hàm này thường được gọi là gọi là *hàm đặc trưng* của D, kí hiệu là χ_D:

$$\chi_D(x) = \begin{cases} 1, & x \in D \\ 0, & x \in \mathbb{R}^n \setminus D, \end{cases}$$

Ta có $U(\chi_D, P) = \sum_R(\sup_R \chi_D)|R| = \sum_{R\cap D\neq\emptyset}|R|$ chính là xấp xỉ trên thể tích của D, và $L(\chi_D, P) = \sum_R(\inf_R \chi_D)|R| = \sum_{R\subset D}|R|$ chính là xấp xỉ dưới thể tích của D. Từ đây ta thấy thể tích của D chính là tích phân của χ_D trên I. Mà đây chính là tích phân của hàm 1 trên D. Vậy ta định nghĩa thể tích thông qua tích phân:

Định nghĩa. Cho D là một tập con bị chặn của $\mathbb{R}^n$. *Thể tích* n-chiều của D được định nghĩa là tích phân của hàm 1 trên D:

$$|D| = \int_D 1.$$

Ta thường thay từ thể tích bằng từ diện tích khi số chiều $n = 2$ và bằng từ chiều dài khi $n = 1$.

1.3.1. Định lí. *Một tập con bị chặn của $\mathbb{R}^n$ có thể tích n-chiều khi và chỉ khi biên của nó có thể tích n-chiều không.*

Thô sơ mà nói, theo cách giải thích về thể tích ở đoạn trên, xấp xỉ dưới và xấp xỉ trên của thể tích có thể gần nhau tùy ý khi các hình hộp phủ phần biên có tổng thể tích nhỏ tùy ý.

CHỨNG MINH 1.3.1. Cho D là một tập con bị chặn của $\mathbb{R}^n$, lấy một hình hộp I chứa D và lấy hàm F bằng 1 trên D và bằng 0 ngoài D. Tập hợp các điểm không liên tục của F là chính tập biên ∂D của D. Vậy F khả tích khi và chỉ khi ∂D có độ đo không. Biên của một tập con của $\mathbb{R}^n$ luôn là một tập đóng, ngoài ra vì D bị chặn nên ∂D cũng bị chặn, do đó ∂D là compắc. Do 1.2.12, ta biết ∂D có độ đo không khi và chỉ khi nó có thể tích không. □

Ví dụ (Hình tròn có diện tích). Xét hình tròn cho bởi $x^2 + y^2 \leq R^2$. Biên của hình tròn này là đường tròn $x^2 + y^2 = R^2$. Đường tròn này là hội của nửa đường tròn trên và nửa đường tròn dưới. Nửa đường tròn trên là đồ thị của hàm $y = \sqrt{R^2 - x^2}$, $-R \leq x \leq R$. Theo 1.2.4, tập này có diện tích không. Tương tự nửa đường tròn dưới có diện tích không. Vậy đường tròn có thể tích không, do đó theo 1.3.1 ta kết luận hình tròn có diện tích.

Ví dụ. Tương tự, một hình đa giác thì có diện tích vì biên của nó là một hội của hữu hạn những đoạn thẳng, là những tập có diện tích không.

Ví dụ. Tập hợp $\mathbb{Q} \cap [0,1]$ có biên đúng bằng $[0,1]$, do đó tập này không có chiều dài (xem thêm 1.2.17).

Sự khả tích. Tương tự trường hợp hình hộp 1.2.8, ta có:

1.3.2. Định lí (khả tích trên tập có thể tích=bị chặn+liên tục hầu khắp). *Cho D là tập con có thể tích của $\mathbb{R}^n$. Khi đó f khả tích trên D khi và chỉ khi f bị chặn và liên tục hầu khắp trên D.*

CHỨNG MINH. Cho I là một hình hộp chứa D và cho F là mở rộng của f lên I, bằng không ngoài D. Tích phân $\int_D f$ tồn tại nếu và chỉ nếu tích phân $\int_I F$ tồn tại. Theo 1.2.8 ta biết tích phân $\int_I F$ tồn tại khi và chỉ khi F liên tục hầu khắp trên I. Tập E các điểm tại đó F không liên tục gồm tập C các điểm trên D mà tại đó f không liên tục và có thể những điểm khác trên biên của D. Như vậy $C \subset E \subset (C \cup \partial D)$. Do giả thiết, ∂D có thể tích không. Nếu C có độ đo không thì $C \cup \partial D$ có độ đo không (xem 1.2.19), dẫn đến E có độ đo không, do đó F khả tích. Ngược lại, nếu F khả tích thì E có độ đo không, do đó C có độ đo không. □

Tương tự 1.2.3 ta có:

1.3.3. Mệnh đề. *Đồ thị của một hàm khả tích trên một tập con bị chặn của $\mathbb{R}^n$ có thể tích không trong $\mathbb{R}^{n+1}$.*

CHỨNG MINH. Giả sử $D \subset \mathbb{R}^n$ bị chặn và $f : D \to \mathbb{R}$. Gọi I là một hình hộp chứa D và F là mở rộng của f lên I, bằng không ngoài D. Vì f khả tích nên F khả tích trên I. Theo 1.2.3, đồ thị của F có thể tích không trong $\mathbb{R}^{n+1}$. Đồ thị của f là một tập con của đồ thị của F. □

Ví dụ (Quả cầu có thể tích). Xét quả cầu cho bởi $x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2$. Nửa mặt cầu trên là đồ thị của hàm $z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$ với (x,y) thuộc về hình tròn $x^2 + y^2 \leq R^2$. Vì hình tròn có diện tích và hàm trên liên tục, nên theo 1.3.2 hàm trên khả tích, và theo 1.3.3 thì đồ thị của nó có thể tích không trong $\mathbb{R}^3$. Tương tự nửa mặt cầu dưới cũng có thể tích không, do đó mặt cầu có thể tích không, và do 1.3.1 nên quả cầu có thể tích.

Tính chất của tích phân. Những tính chất sau là hệ quả đơn giản của những tính chất tương ứng cho hình hộp 1.1.2:

1.3.4. Mệnh đề. *Nếu f và g khả tích trên D thì:*
(a) $f+g$ khả tích và $\int_D (f+g) = \int_D f + \int_D g$.
(b) Với mọi số thực c thì cf khả tích và $\int_D cf = c\int_D f$.
(c) Nếu $f \le g$ thì $\int_D f \le \int_D g$.

Tương tự như kết quả cho hình hộp 1.2.6, ta có:

1.3.5. Mệnh đề. *Cho D là tập con bị chặn của $\mathbb{R}^n$, f và g bị chặn trên D, và $f(x) = g(x)$ trừ ra một tập có thể tích không. Khi đó f khả tích khi và chỉ khi g khả tích, và trong trường hợp này $\int_D f = \int_D g$.*

Vậy *giá trị của một hàm bị chặn trên một tập có thể tích không không ảnh hưởng đến tích phân.*

CHỨNG MINH. Lấy một hình hộp I chứa D. Gọi F và G là các mở rộng của f và g lên I, bằng không ngoài D. Khi đó $F(x) = G(x)$ trên I trừ ra một tập có thể tích không. Nếu f khả tích trên D thì F khả tích trên I. Từ đây theo 1.2.6 thì G khả tích trên I, nên g khả tích trên D, và $\int_D f = \int_I F = \int_I G = \int_D g$. □

1.3.6. Hệ quả (Thêm bớt một tập có thể tích không không ảnh hưởng tới tích phân). *Cho D là tập con bị chặn của $\mathbb{R}^n$, C là tập con của D có thể tích không, và f bị chặn trên D. Khi đó f khả tích trên D khi và chỉ khi f khả tích trên $D \setminus C$, và khi đó $\int_D f = \int_{D\setminus C} f$.*

CHỨNG MINH. Đặt hàm g xác định trên D sao cho $g(x) = f(x)$ trên $D \setminus C$ và $g(x) = 0$ trên C. Do 1.3.5 g cũng khả tích trên D và $\int_D g = \int_D f$. Mặt khác từ định nghĩa của tích phân ta có $\int_D g = \int_{D\setminus C} g = \int_{D\setminus C} f$. □

1.3.7. Hệ quả. *Cho D_1 và D_2 là hai tập con bị chặn của $\mathbb{R}^n$. Giả sử $D_1 \cap D_2$ có thể tích không. Nếu f khả tích trên D_1 và trên D_2 thì f khả tích trên $D_1 \cup D_2$, và*

$$\int_{D_1\cup D_2} f = \int_{D_1} f + \int_{D_2} f.$$

Kết quả này cho phép ta *tính tích phân trên một miền bằng cách chia miền đó thành những miền đơn giản hơn*. Đây là dạng tổng quát của công thức quen thuộc cho hàm một biến: $\int_a^b f + \int_b^c f = \int_a^c f$.

CHỨNG MINH. Đặt f_1 xác định trên $D = D_1 \cup D_2$ sao cho $f_1 = f$ trên D_1 và $f_1 = 0$ trên $D \setminus D_1$. Tương tự, đặt f_2 xác định trên D sao cho $f_2 = f$ trên D_2 và $f_2 = 0$ trên $D \setminus D_2$. Vì f khả tích trên D_1 nên từ định nghĩa tích phân ta có ngay f_1 khả tích trên D và $\int_D f_1 = \int_{D_1} f$. Tương tự f_2 khả tích trên D và $\int_D f_2 = \int_{D_2} f$.

Ta có $f_1 + f_2 = f$ trên $D \setminus (D_1 \cap D_2)$. Vì $f_1 + f_2$ khả tích trên D và $D_1 \cap D_2$ có thể tích không nên do 1.3.5 f khả tích trên D và

$$\int_D f = \int_D (f_1 + f_2) = \int_D f_1 + \int_D f_2 = \int_{D_1} f + \int_{D_2} f.$$

□

Ví dụ. Trong mệnh đề trên lấy $f = 1$ ta có kết quả: Nếu D_1 và D_2 có thể tích và $D_1 \cap D_2$ có thể tích không thì $|D_1 \cup D_2| = |D_1| + |D_2|$.

Chẳng hạn khi tính diện tích một hình ta vẫn thường chia hình đó thành những hình đơn giản hơn bằng những đoạn thẳng hay đoạn cong, rồi cộng các diện tích lại.

Bài tập.

1.3.8. Giải thích tại sao một hình tam giác thì có diện tích.

1.3.9. Tại sao miền phẳng bên dưới đồ thị $y = 1 - x^2$, bên trên đoạn $-1 \leq x \leq 1$ có diện tích?

1.3.10. Giải thích tại sao một khối tứ diện thì có thể tích.

1.3.11. Chứng minh 1.3.4.

1.3.12. Giải thích tại sao một hình tam giác thì có diện tích bằng phân nửa chiều dài một cạnh nhân với chiều cao ứng với cạnh đó.

1.3.13. Giả sử $A \subset B \subset \mathbb{R}^n$, A và B có thể tích. Chứng tỏ $|A| \leq |B|$.

1.3.14. Giả sử $A \subset B \subset \mathbb{R}^n$, f khả tích trên A và B, và $f \geq 0$. Chứng tỏ $\int_A f \leq \int_B f$.

1.3.15. Chứng tỏ tích phân của một hàm bị chặn trên một tập có thể tích không thì bằng không.

1.3.16. * Chứng tỏ một tập con bị chặn của $\mathbb{R}^n$ có thể tích không khi và chỉ khi nó có thể tích và thể tích đó bằng không. Như vậy thể tích không chính là có thể tích bằng không!

1.4. Định lí Fubini

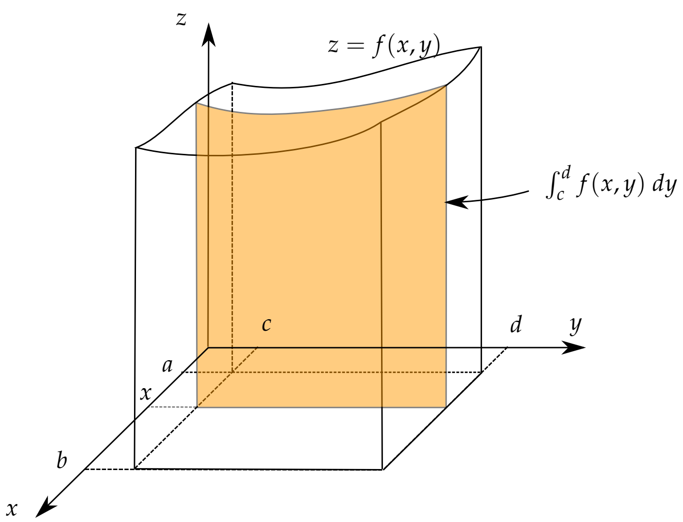
Định lí Fubini trong không gian hai chiều cho một công thức có dạng:

$$\iint_{[a,b]\times[c,d]} f(x,y)\,dxdy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)\,dy\right) dx = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)\,dx\right) dy.$$

Một tích phân của tích phân được gọi là một *tích phân lặp* (repeated integral). Công thức Fubini đưa bài toán tính tích phân bội về bài toán tính tích phân của hàm một biến.

Về mặt định lượng công thức Fubini nói rằng tổng giá trị của hàm trên hình chữ nhật bằng tổng của các tổng giá trị trên các đoạn cắt song song.

Ta có thể giải thích bằng hình học công thức trên như sau. Giả sử $f > 0$. Khi đó $\int_{[a,b]\times[c,d]} f$ là "thể tích" của khối bên dưới mặt $z = f(x,y)$ bên trên hình chữ nhật $[a,b] \times [c,d]$. Khi đó $\int_c^d f(x_0,y)\,dy$ là "diện tích" của mặt cắt (cross-section) của khối bởi mặt phẳng $x = x_0$. Vậy công thức Fubini nói rằng *thể tích của khối bằng tổng diện tích các mặt cắt song song.*



Có thể giải thích công thức này bằng cách xấp xỉ thể tích của khối như sau. Chia khoảng $[a,b]$ thành những khoảng con. Ứng với những khoảng con này, khối được cắt thành những mảnh bởi những mặt cắt song song. Vì chiều dài mỗi khoảng con là nhỏ, ta có thể xấp xỉ thể tích của mỗi mảnh bởi diện tích một mặt cắt nhân với chiều dài của khoảng con.

Chi tiết hơn, ta xấp xỉ theo tổng Riemann: Giả sử $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_m = b$ là một phép chia của khoảng $[a,b]$ và $c = y_0 < y_1 < \cdots < y_n = d$ là một phép chia của khoảng $[c,d]$. Với x_i^* là điểm đại diện bất kì thuộc khoảng con $\Delta x_i = [x_{i-1}, x_i]$ và y_j^* là điểm bất kì thuộc $\Delta y_j = [y_{j-1}, y_j]$ thì

$$\begin{aligned}
\int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)\,dy \right) dx &\approx \sum_{i=1}^{m} \left(\int_c^d f(x_i^*,y)\,dy \right) |\Delta x_i| \\
&\approx \sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{j=1}^{n} f(x_i^*,y_j^*)|\Delta y_j| \right) |\Delta x_i| \\
&= \sum_{1\le i\le m, 1\le j\le n} f(x_i^*,y_j^*)|\Delta x_i||\Delta y_j| \\
&\approx \iint_{[a,b]\times[c,d]} f(x,y)\,dxdy.
\end{aligned}$$

Sau đây là một dạng tổng quát của định lí Fubini[4].

1.4.1. Định lí (Định lí Fubini). *Cho A là một hình hộp trong $\mathbb{R}^m$ và B là một hình hộp trong $\mathbb{R}^n$. Cho f khả tích trên hình hộp $A \times B$ trong $\mathbb{R}^{m+n}$. Giả sử với mỗi $x \in A$ tích phân $\int_B f(x,y)\,dy$ tồn tại. Khi đó*

$$\boxed{\int_{A\times B} f = \int_A \left(\int_B f(x,y)\,dy \right) dx.}$$

Chú ý rằng các giả thiết trong định lí trên sẽ thỏa nếu f là hàm liên tục.

CHỨNG MINH. Chứng minh này đơn giản là một cách viết chính xác cách giải thích bằng xấp xỉ với tổng Riemann ở trên. Gọi P là một phép chia bất kì của hình hộp $A \times B$. Khi đó P là tích của một phép chia P_A của A và một phép chia P_B của B.

Đối với tổng dưới, ta có:

$$\begin{aligned}
L\left(\int_B f(x,y)\,dy, P_A \right) &= \sum_{R_A} \left(\inf_{x\in R_A} \int_B f(x,y)\,dy \right) |R_A| \\
&\ge \sum_{R_A} \left(\inf_{x\in R_A} \sum_{R_B} \left[\inf_{y\in R_B} f(x,y) \right] |R_B| \right) |R_A| \\
&\ge \sum_{R_A} \left(\inf_{x\in R_A} \sum_{R_B} \left[\inf_{R_A\times R_B} f(x,y) \right] |R_B| \right) |R_A| \\
&= \sum_{R_A} \left(\sum_{R_B} \left[\inf_{R_A\times R_B} f(x,y) \right] |R_B| \right) |R_A| \\
&= \sum_{R_A\times R_B} \inf_{R_A\times R_B} f(x,y)|R_A||R_B| \\
&= \sum_{R_A\times R_B} \inf_{R_A\times R_B} f(x,y)|R_A\times R_B| = L(f,P).
\end{aligned}$$

Tương tự, thay inf bởi sup ta được $U(\int_B f(x,y)\,dy, P_A) \le U(f,P)$. Từ đây ta có ngay định lí. □

1.4.2. Hệ quả (thể tích của miền dưới đồ thị). *Giả sử f là hàm xác định, không âm trên miền bị chặn $D \subset \mathbb{R}^n$. Gọi E là miền dưới đồ thị của f bên trên miền D, tức*

[4]Guido Fubini (1979–1943) chứng minh một dạng rất tổng quát của định lí, nhưng những kết quả dạng này đã được biết trước đó khá lâu.

$E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \mid x \in D,\ 0 \le y \le f(x)\}$. *Nếu E có thể tích thì thể tích đó bằng tích phân của f trên D:*

$$\boxed{|E| = \int_D f.}$$

Đây là một công thức mà ta đã nói tới ngay từ đầu khi xây dựng tích phân nhưng phải tới giờ ta mới có.

CHỨNG MINH. Vì E có thể tích nên nó bị chặn, có một hình hộp chứa nó. Ta có thể lấy hình hộp đó là $I \times [0,c]$ với I là một hình hộp n-chiều trong $\mathbb{R}^n$ chứa D và c đủ lớn. Nếu $x \in I \setminus D$ thì $\chi_E(x,y) = 0\ \forall y \in [0,c]$, do đó $\int_0^c \chi_E(x,y)\, dy = 0$. Nếu $x \in D$ thì $\chi_E(x,y) = 1$ khi và chỉ khi $0 \le y \le f(x)$, do đó $\int_0^c \chi_E(x,y)\, dy = \int_0^{f(x)} 1\, dy = f(x)$. Do đó ta có thể áp dụng công thức Fubini:

$$\begin{aligned} |E| &= \int_E 1 = \int_{I\times[0,c]} \chi_E = \int_I \left(\int_0^c \chi_E(x,y)\, dy \right) dx \\ &= \int_D \left(\int_0^c \chi_E(x,y\, dy \right) dx = \int_D f(x)\, dx. \end{aligned}$$

□

Định lí Fubini cho miền phẳng. Việc áp dụng định lí Fubini sẽ dễ dàng hơn đối với những miền "đơn giản". Một tập con của $\mathbb{R}^2$ được gọi là một *miền đơn giản theo chiều đứng* (vertically simple region) nếu nó có dạng $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \le x \le b,\ f(x) \le y \le g(x)\}$. Đây là một miền giữa hai đồ thị có cùng miền xác định. Một đường thẳng đứng nếu cắt miền này thì phần giao là một đoạn thẳng.

Tương tự, một tập con của $\mathbb{R}^2$ được gọi là một *miền đơn giản theo chiều ngang* (vertically simple region) nếu nó có dạng $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid c \le y \le d,\ f(y) \le x \le g(y)\}$.

1.4.3. Mệnh đề. *Cho miền đơn giản theo chiều đứng* $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \le x \le b,\ g(x) \le y \le h(x)\}$. *Giả sử f, g và h liên tục. Khi đó*

$$\iint_D f(x,y)\, dA = \int_a^b \left(\int_{g(x)}^{h(x)} f(x,y)\, dy \right) dx.$$

Công thức có thể đúng dưới những điều kiện tổng quát hơn như ở 1.4.2 nhưng chúng ta chỉ phát biểu ở dạng thường dùng trong môn học này. Trường hợp miền đơn giản theo chiều nằm ngang là tương tự.

CHỨNG MINH. Ta chỉ ra với những điều kiện này thì miền D có diện tích. Do g và h bị chặn nên D bị chặn. Ta chứng tỏ biên của D có diện tích không. Ta có thể kiểm tra là phần trong của D là tập $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid a < x < b,\ g(x) < y < h(x)\}$. Cụ thể, giả sử $a < x_0 < b$ và $g(x_0) < y_0 < h(x_0)$. Có số $\epsilon > 0$ sao cho $g(x_0) < y_0 - \epsilon$ và $h(x_0) > y_0 + \epsilon$. Do g và h liên tục nên có khoảng mở U chứa x_0 sao cho với $x \in U$ thì $g(x) < y_0 - \epsilon$ và $h(x) > y_0 + \epsilon$. Suy ra hình chữ nhật mở $U \times (y_0 - \epsilon, y_0 + \epsilon)$ được chứa trong D, mà đó là một lân cận mở của điểm (x_0, y_0). Từ đây có thể suy ra biên của D là hội của đồ thị của g và h và hai đoạn thẳng $\{(a,y) \mid g(a) \le y \le h(a)\}$ và $\{(b,y) \mid g(b) \le y \le h(b)\}$. Do 1.3.3 các tập này có diện tích không.

Lấy một hình chữ nhật $I = [a,b] \times [c,d]$ chứa D. Gọi F là mở rộng của f lên I bằng không ngoài D. Vì f liên tục trên tập có diện tích D nên f khả tích trên D, do đó F khả tích trên I. Ngoài ra $\int_c^d F(x,y)\,dy = \int_{g(x)}^{h(x)} f(x,y)\,dy$ tồn tại. Áp dụng công thức Fubini cho F:

$$\begin{aligned}\iint_D f(x,y)\,dxdy &= \iint_I F(x,y)\,dxdy\\ &= \int_a^b \left(\int_c^d F(x,y)\,dy\right)dx = \int_a^b \left(\int_{g(x)}^{h(x)} f(x,y)\,dy\right)dx.\end{aligned}$$

□

Ghi chú. Trong trường hợp miền không đơn giản ta có thể tìm cách chia miền thành những phần đơn giản để tính, dựa trên cơ sở 1.3.7.

Ví dụ. Tính tích phân $\iint_D e^{y^2}\,dA$, trong đó D là tam giác với các đỉnh $(0,0)$, $(4,0)$, $(0,2)$.

Do miền D là một tam giác nên nó có diện tích (1.3.8). Hàm e^{y^2} liên tục trên D do đó khả tích trên D (1.3.2). Ta có thể miêu tả D theo hai cách

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \le x \le 4,\ \frac{x}{2} \le y \le 2\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \le y \le 2,\ 0 \le x \le 2y\}.$$

Theo cách miêu tả thứ nhất, tức là xem D là miền đơn giản theo chiều đứng, thì theo công thức Fubini:

$$I = \iint_D e^{-y^2}\,dA = \int_0^4 \left(\int_{\frac{x}{2}}^2 e^{-y^2}\,dy\right)dx.$$

Tuy nhiên người ta biết nguyên hàm của hàm e^{-y^2} theo biến y không phải là một hàm sơ cấp, do đó không có công thức cho nó.

Ta chuyển hướng dùng cách miêu tả thứ hai, xem D là miền đơn giản theo chiều ngang:

$$\begin{aligned}I &= \int_0^2 \left(\int_0^{2y} e^{-y^2}\,dx\right)dy = \int_0^2 xe^{-y^2}\Big|_{x=0}^{x=2y}\,dy = \int_0^2 2ye^{-y^2}\,dy = e^{-y^2}\Big|_{y=0}^{y=2}\\ &= e^{-4} - e^{-1}.\end{aligned}$$

Định lí Fubini cho miền ba chiều. Tương tự trường hợp hai chiều ta có thể nói về miền ba chiều đơn giản. Một tập con của $\mathbb{R}^3$ được gọi là một *miền đơn theo chiều trục z* nếu nó có dạng $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x,y) \in D,\ f(x,y) \le z \le g(x,y)\}$. Đây là miền nằm giữa hai đồ thị có cùng miền xác định. Một đường thẳng cùng phương với trục z nếu cắt miền này thì phần giao là một đoạn thẳng. Tương tự có khái niệm miền đơn giản theo chiều trục x và trục y.

Tương tự trường hợp hai chiều 1.4.3, ta có:

1.4.4. Mệnh đề. *Cho miền $D \subset \mathbb{R}^2$ có diện tích, và miền $E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x,y) \in D,\ g(x,y) \le z \le h(x,y)\}$. Giả sử f, g và h bị chặn và liên tục. Khi đó*

$$\iiint_E f(x,y,z)\,dV = \iint_D \left(\int_{g(x,y)}^{h(x,y)} f(x,y,z)\,dz\right)dA.$$

Chứng minh. Ta chỉ ra với những điều kiện này thì E có thể tích. Vì g và h bị chặn trên D nên E bị chặn. Ta chứng minh biên của E có thể tích không trong $\mathbb{R}^3$. Giống như trong trường hợp 2 chiều ở trên, có thể kiểm biên của E là hội của đồ thị của g và h, miền D, và mặt "bên hông" của E, tập $\{(x,y,z) \mid (x,y) \in \partial D,\ g(x,y) \leq z \leq h(x,y)\}$. Theo 1.3.3 đồ thị của g và h, và miền D đều có thể tích không trong $\mathbb{R}^3$.

Đặt D trong một hình chữ nhật I trong $\mathbb{R}^2$. Có một khoảng $[a,b]$ sao cho hình hộp $I \times [a,b]$ chứa E. Mặt bên hông của E là một tập con của tập $\partial D \times [a,b]$. Vì ∂D có diện tích không trong $\mathbb{R}^2$ nên cho trước $\epsilon > 0$ ta có thể phủ ∂D bằng hữu hạn hình chữ nhật với tổng diện tích nhỏ hơn ϵ. Lấy tích của mỗi hình chữ nhật đó với khoảng $[a,b]$ ta được một phủ của $\partial D \times [a,b]$ bởi các hình hộp có tổng thể tích nhỏ hơn $\epsilon(b-a)$. Vậy mặt bên hông của E có thể tích không trong $\mathbb{R}^3$.

Lấy mở rộng F của f lên $I \times [a,b]$ sao cho F bằng không ngoài E. Nếu $(x,y) \notin D$ thì F có giá trị 0 trên $\{(x,y)\} \times [a,b]$. Nếu $(x,y) \in D$ thì $\int_a^b F(x,y,z)\,dz = \int_{g(x,y)}^{h(x,y)} f(x,y,z)\,dz$. Áp dụng công thức Fubini cho F:

$$\begin{aligned}\iiint_{I\times[a,b]} F(x,y,z)\,dV &= \iint_I \left(\int_a^b F(x,y,z)\,dz\right) dA\\ &= \iint_D \left(\int_a^b F(x,y,z)\,dz\right) dA\\ &= \iint_D \left(\int_{g(x,y)}^{h(x,y)} f(x,y,z)\,dz\right) dA.\end{aligned}$$

□

Bài tập.

1.4.5. Cho hàm

$$\begin{aligned} f:[0,1]\times[0,1] &\to \mathbb{R}\\ (x,y) &\mapsto f(x,y) = \begin{cases} x+y, & x \leq y\\ xy, & x > y.\end{cases}\end{aligned}$$

Hàm f có khả tích không? Nếu f khả tích thì tích phân của nó bằng bao nhiêu?

1.4.6. (a) Giải thích vì sao tích phân sau tồn tại, sau đó tính nó:

$$\iint_D (\sqrt{x} - y^2)\,dA$$

trong đó D là miền bao bởi các đường cong $y = x^2$, $x = y^4$.

(b) Gọi D là miền bao bởi các đường cong $x = y^2$, $y - x = 3$, $y = -3$, $y = 2$. Tính $\iint_D x\,dA$.

(c) Gọi D là miền trong góc phần tư thứ nhất, nằm bên trên đường hyperbola $xy = 1$, bên trên đường thẳng $y = x$, bên dưới đường thẳng $y = 2$. Tính $\iint_D y\,dA$.

1.4.7. Giải thích vì sao có thể đổi thứ tự tích phân trong các tích phân lặp sau và hãy tính chúng:

(a) $\int_0^1 \left(\int_{x^2}^1 xe^{-y^2}\,dy\right)\,dx$.

(b) $\int_0^1 \left(\int_{\sqrt{y}}^1 \sqrt{x^3+2}\,dx\right)\,dy$.

1.4.8. (a) Tính tích phân $\iiint_E y\, dV$ trong đó E là khối tứ diện với 4 đỉnh $(0,0,0)$, $(1,0,0)$, $(2,1,0)$ và $(0,0,1)$.

(b) Tính tích phân $\iiint_E z\, dV$ trong đó E là khối được bao bởi các mặt $z = 0$, $x = 0$, $y = x$, $y = 1$, $z = 2x + 3y$.

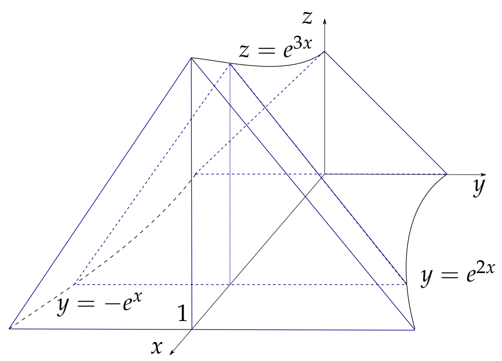
1.4.9. Cho f là hàm liên tục. Hãy viết lại tích phân $\int_{-1}^{1} \int_{|x|}^{1} \int_{0}^{1-y} f(x, y, z)\, dz\, dy\, dx$ theo thứ tự $dx\, dz\, dy$.

1.4.10. Tính $\int_0^1 \int_0^2 \int_{z^2}^4 x^3 z \cos(y^2)\, dy\, dz\, dx$.

1.4.11. Cho g liên tục trên hình hộp $[a, b] \times [c, d] \times [e, f]$, chứng tỏ

$$\iiint_{[a,b]\times[c,d]\times[e,f]} g(x, y, z)\, dV = \int_a^b \left(\int_c^d \left(\int_e^f g(x, y, z)\, dz \right) dy \right) dx.$$

1.4.12. Tính thể tích của khối được miêu tả trong hình dưới đây:



HÌNH 1.4.1. Bài tập 1.4.12

1.4.13. Chứng minh nguyên lí Cavalieri[5]: Nếu hai khối ba chiều có thể tích, và hai lát cắt bởi một mặt phẳng nằm ngang bất kì có cùng diện tích, thì hai khối đó có cùng thể tích.

1.4.14. Cho $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Giả sử $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ và $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ liên tục.

(a) Trên hình chữ nhật $[a, b] \times [c, d]$ bất kì, dùng định lí Fubini, hãy chứng tỏ

$$\iint_{[a,b]\times[c,d]} \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\, dA = \iint_{[a,b]\times[c,d]} \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}\, dA.$$

(b) Dùng phần (a), chứng tỏ $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$.

Đây là một chứng minh dùng tích phân bội của một định lí quen thuộc trong Giải tích 2 nói rằng nếu các đạo hàm riêng cấp hai đều liên tục thì thứ tự lấy đạo hàm không ảnh hưởng tới kết quả.

[5]Bonaventura Francesco Cavalieri là một nhà toán học Ý sống vào đầu thế kỉ 17.

1.5. Công thức đổi biến

Nhắc lại về vi phân. Người đọc có thể xem lại nội dung này trong môn Giải tích 2, hoặc xem [**Lan97**].

Cho D là một tập con của $\mathbb{R}^n$, x là một *điểm trong* của D. *Đạo hàm riêng* của $f : D \to \mathbb{R}$ theo biến thứ i tại x được định nghĩa là số thực

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+he_i) - f(x)}{h}$$

trong đó $e_i = (0,\ldots,0,1,0,\ldots,0)$ với số 1 nằm ở tọa độ thứ i. Đây là tỉ lệ thay đổi của giá trị của hàm so với giá trị của biến thứ i tại điểm đã cho.

Xét hàm $f : D \to \mathbb{R}^m$. Nếu tất cả các đạo hàm riêng của các hàm thành phần của f tồn tại và liên tục tại x thì ta nói f *khả vi liên tục* (continuously differentiable) hay *trơn* (smooth) tại x. Ma trận các đạo hàm riêng của f tại x được gọi là *ma trận Jacobi* của f tại x, kí hiệu là $J_f(x) = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x)\right)_{1\le i\le m,\ 1\le j\le n}$.

Ví dụ. Khi $m = 1$ ma trận Jacobi $J_f(x)$ chính là vectơ gradient

$$\nabla f(x) = \Big(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(x)\Big).$$

Nếu có một hàm tuyến tính $f'(x) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ sao cho có một quả cầu $B(x,\epsilon) \subset D$ và một hàm $r : B(x,\epsilon) \to \mathbb{R}^m$ thỏa mãn:

$$f(x+h) = f(x) + f'(x)(h) + r(h),\ \forall h \in B(x,\epsilon)$$

và

$$\lim_{h\to 0} \frac{r(h)}{|h|} = 0,$$

thì ánh xạ $f'(x)$ được gọi là *đạo hàm* (derivative) của f tại x. Vậy đạo hàm cho một xấp xỉ tuyến tính của hàm:

$$\boxed{f(x+h) \approx f(x) + f'(x)(h)}$$

Ta biết nếu f khả vi liên tục tại x thì f có đạo hàm tại x, và ánh xạ tuyến tính $f'(x)$ có thể biểu diễn trong cơ sở chuẩn tắc của $\mathbb{R}^n$ (tức là cơ sở $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$) và $\mathbb{R}^m$ bởi ma trận Jacobi $J_f(x)$. Cần nhấn mạnh là bây giờ ta coi đạo hàm tại một điểm là một ánh xạ tuyến tính chứ không phải là một số thực hay một ma trận. Ma trận Jacobi chỉ là một ma trận đại diện cho đạo hàm.

Phép đổi biến. Cho A và B là hai tập mở trong $\mathbb{R}^n$. Một ánh xạ $f : A \to B$ được gọi là một *phép vi đồng phôi* (diffeomorphism) hay một *phép đổi biến* nếu f là song ánh, khả vi liên tục, và ánh xạ ngược f^{-1} cũng khả vi liên tục.

Ví dụ. Trong $\mathbb{R}^n$ phép tịnh tiến $x \mapsto x + a$ là một phép đổi biến.

1.5.1. Mệnh đề. *Nếu f là một phép vi đồng phôi trên một lân cận của x thì $f'(x)$ là một ánh xạ tuyến tính khả nghịch, hơn nữa với $y = f(x)$ thì $J_{f^{-1}}(y) = (J_f(x))^{-1}$.*

Chứng minh. Từ đẳng thức $(f^{-1} \circ f)(x) = x$ với mọi x, lấy đạo hàm hai vế, theo qui tắc đạo hàm của hàm hợp thì $(f^{-1})'(f(x)) \circ f'(x) = \mathrm{id}$ (identity: ánh xạ đồng nhất), hay $(f^{-1})'(y) \circ f'(x) = \mathrm{id}$. Tương tự do $(f \circ f^{-1})(y) = y$ nên $f'(f^{-1}(y)) \circ (f^{-1})'(y) = \mathrm{id}$, hay $f'(x) \circ (f^{-1})'(y) = \mathrm{id}$. Hai điều này dẫn tới $f'(x)$ là một ánh xạ tuyến tính khả nghịch, ma trận biểu diễn của nó là $J_f(x)$ không suy biến, và ma trận biểu diễn ánh xạ ngược chính là ma trận nghịch đảo, tức là $J_{f^{-1}}(y) = (J_f(x))^{-1}$. □

Điều ngược lại là nội dung của một định lí rất quan trọng:

Định lí (Định lí hàm ngược). *Cho $D \subset \mathbb{R}^n$ mở và $f : D \to \mathbb{R}^n$ khả vi liên tục tại x. Nếu $f'(x)$ khả nghịch thì x có một lân cận mà trên đó f là một vi đồng phôi. Nói cách khác, nếu $\det(J_f(x)) \neq 0$ thì có một lân cận mở U của x và một lân cận mở V của $f(x)$ sao cho $f : U \to V$ là song ánh và $f^{-1} : V \to U$ là khả vi liên tục .*

Hệ quả. *Giả sử U và V là các tập mở của $\mathbb{R}^n$, và $f : U \to V$ là một song ánh khả vi liên tục. Nếu $\det J_f$ luôn khác không thì f là một vi đồng phôi.*

Hệ quả này cho thấy ta có thể kiểm tra tính vi đồng phôi mà không cần phải đi tìm ánh xạ ngược, thuận tiện trong ứng dụng.

Công thức đổi biến.

Định lí (Công thức đổi biến). *Giả sử A là tập mở trong $\mathbb{R}^n$, φ là một phép đổi biến từ A vào $\varphi(A)$, và $f : \varphi(A) \to \mathbb{R}$ khả tích, thì*

$$\int_{\varphi(A)} f = \int_A (f \circ \varphi) |\det \varphi'|.$$

Một cách viết hình thức dễ nhớ là: Đặt $u = \varphi(x)$ thì $du = |\det J_\varphi(x)| dx$ và

$$\boxed{\int_A f(\varphi(x)) |\det J_\varphi(x)|\, dx = \int_{\varphi(A)} f(u)\, du.}$$

Công thức đổi biến có thể dùng để làm cho hàm dưới dấu tích phân đơn giản hơn, như trường hợp một nhiều, hay làm cho miền lấy tích phân đơn giản hơn.

Ví dụ. Trong trường hợp 1 chiều công thức đổi biến cho phương pháp đổi biến tích phân quen thuộc trong Giải tích 1. Thực vậy, cho $x = \varphi(t)$ với $t \in [a, b]$, ở đây φ liên tục và $\varphi : (a, b) \to \varphi((a, b))$ là một vi đồng phôi. Cho f khả tích trên $\varphi([a, b])$. Theo Công thức đổi biến:

$$\int_{\varphi((a,b))} f(x)\, dx = \int_{(a,b)} f(\varphi(t)) |\varphi'(t)|\, dt.$$

Do $\varphi'(t) \neq 0$, $\forall t \in (a, b)$ nên hoặc $\varphi'(t) > 0$, $\forall t \in (a, b)$ hoặc $\varphi'(t) < 0$, $\forall t \in (a, b)$. Vì vậy hoặc φ là hàm tăng hoặc φ là hàm giảm trên $[a, b]$.

Nếu φ là hàm tăng thì $\varphi([a,b]) = [\varphi(a), \varphi(b)]$. Do đó, dùng 1.3.6 để chuyển đổi giữa tích phân trên khoảng mở và tích phân trên khoảng đóng, ta được

$$\begin{aligned}\int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt &= \int_{[a,b]} f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt = \int_{(a,b)} f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt\\ &= \int_{(\varphi(a),\varphi(b))} f(x)\,dx = \int_{[\varphi(a),\varphi(b)]} f(x)\,dx\\ &= \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)\,dx.\end{aligned}$$

Nếu φ là hàm giảm thì $\varphi([a,b]) = [\varphi(b), \varphi(a)]$ và $|\varphi'(t)| = -\varphi'(t)$. Do đó

$$\begin{aligned}\int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt &= -\int_{(a,b)} f(\varphi(t))|\varphi'(t)|\,dt\\ &= -\int_{(\varphi(b),\varphi(a))} f(x)\,dx\\ &= -\int_{\varphi(b)}^{\varphi(a)} f(x)\,dx = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)\,dx.\end{aligned}$$

Trong cả hai trường hợp ta được công thức đổi biến cho tích phân hàm một biến:

$$\int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)\,dx.$$

Trong Giải tích 1 nếu ta giả sử hàm f liên tục thì công thức trên được chứng minh bằng cách dùng Công thức Newton-Leibniz và Qui tắc đạo hàm hàm hợp (trong trường hợp này ta chỉ cần hàm φ trơn). Trước đây ta thường tiến hành đổi biến bằng cách viết một cách hình thức $x = \varphi(t)$ và $dx = \varphi'(t)dt$.

Ví dụ. Trong trường hợp 2 chiều, với phép đổi biến $(u,v) \mapsto (x,y)$ người ta thường dùng kí hiệu

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \det\begin{pmatrix}\frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v}\\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v}\end{pmatrix}.$$

Với kí hiệu này công thức đổi biến có dạng như sau. Nếu phép đổi biến $(u,v) \mapsto (x,y)$ mang tập A thành tập B thì

$$\iint_B f(x,y)\,dxdy = \iint_A f(x(u,v), y(u,v))\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| dudv.$$

Một cách hình thức ta có thể viết:

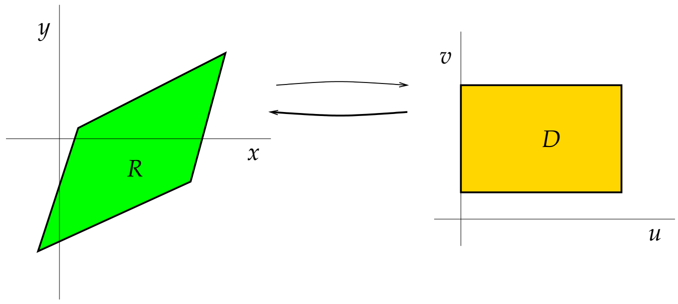
$$\boxed{dxdy = \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| dudv.}$$

Đây là mối quan hệ giữa "phần tử diện tích trên mặt phẳng xy" với "phần tử diện tích trên mặt phẳng uv". Chú ý rằng, do 1.5.1:

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = \frac{1}{\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}}.$$

Ví dụ. Tính $\iint_R \frac{x-2y}{3x-y}\,dA$ trong đó R là hình bình hành bao bởi các đường thẳng $x-2y=0$, $x-2y=4$, $3x-y=1$, và $3x-y=8$.

Đặt $u = x-2y$ và $v = 3x-y$. Miền bao bởi các đường thẳng $u = 0$, $u = 4$, $v = 1$, và $v = 8$ là hình chữ nhật $D = [0,4] \times [1,8]$ trong mặt phẳng (u,v).



Vì

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = \det\begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} = 5 \neq 0$$

nên ánh xạ $(x,y) \mapsto (u,v)$ là một phép đổi biến từ phần trong của D sang phần trong của R. Biên của D và R không ảnh hưởng đến tích phân vì chúng có diện tích không và ta đang lấy tích phân hàm liên tục (xem 1.3.6).

Chú ý rằng

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \frac{1}{\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}} = \frac{1}{5}.$$

Cuối cùng công thức đổi biến cho:

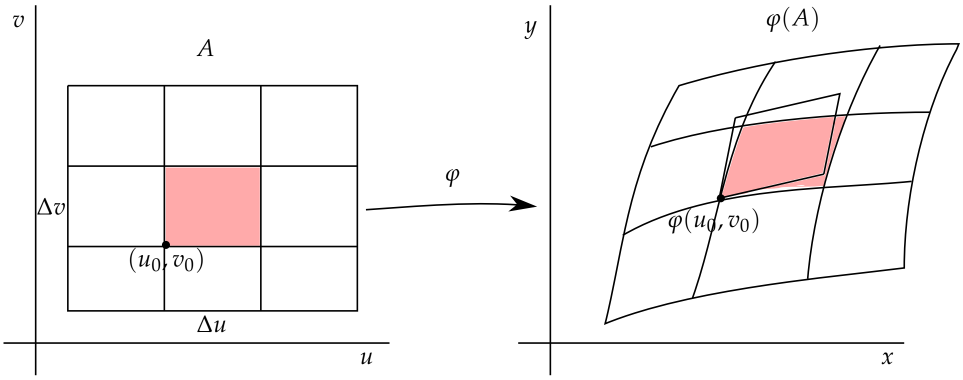
$$\begin{aligned} \iint_R \frac{x-2y}{3x-y}\,dxdy &= \iint_D \frac{u}{v}\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| dudv \\ &= \frac{1}{5}\iint_D \frac{u}{v}\,dudv = \frac{1}{5}\int_0^4 \left(\int_1^8 \frac{u}{v}\,dv\right) du = \frac{8}{5}\ln 8. \end{aligned}$$

Giải thích Công thức đổi biến. Chúng ta sẽ không chứng minh Công thức đổi biến vì một chứng minh sẽ khó và dài, vượt khỏi phạm vi môn học này. Các quyển sách **[Lan97]**, **[Rud76]**, **[Spi65]**, **[Mun91]** có chứng minh công thức này. Một dạng tổng quát hơn của công thức này sẽ được chứng minh trong môn học Độ đo và Tích phân, thông qua tích phân Lebesgue.

Dưới đây chúng ta đưa ra một giải thích, tuy chưa phải là một chứng minh, nhưng sẽ giúp ta hiểu rõ hơn công thức. Xem thêm [**Ste08**, tr. 1012–1017].

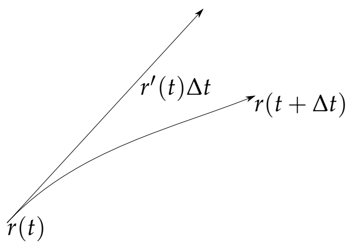
Để cho đơn giản, xét trường hợp A là một hình chữ nhật. Ánh xạ φ mang miền A trên mặt phẳng (u,v) sang miền $\varphi(A)$ trên mặt phẳng (x,y).

Xét một phép chia A thành những hình chữ nhật con. Ta xem tác động của φ lên một hình chữ nhật con đại diện $[u_0, u_0+\Delta u] \times [v_0, v_0+\Delta v]$, có diện tích $\Delta u \Delta v$. Hàm trơn φ mang mỗi cạnh của hình chữ nhật này thành một đoạn cong trên mặt phẳng (x,y), do đó ta được một "hình chữ nhật cong" trên mặt phẳng (x,y) với một đỉnh là điểm $\varphi(u_0,v_0)$.



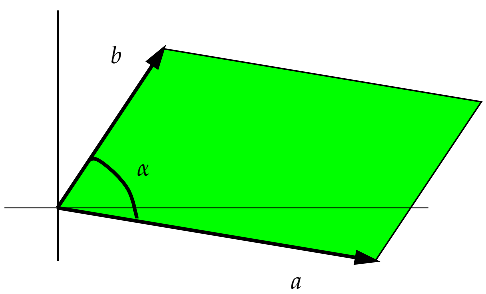
HÌNH 1.5.1. Minh họa công thức đổi biến.

Bây giờ ta tính diện tích hình chữ nhật cong này bằng cách xấp xỉ tuyến tính. Đoạn cong từ $\varphi(u_0, v_0)$ tới $\varphi(u_0 + \Delta u, v_0)$ sẽ được xấp xỉ tuyến tính bằng một đoạn thẳng tiếp tuyến tại $\varphi(u_0, v_0)$. Vì vectơ tiếp xúc chính là $\frac{\partial \varphi}{\partial u}(u_0, v_0)$ nên đoạn tiếp tuyến này cho bởi vectơ $\frac{\partial \varphi}{\partial u}(u_0, v_0)\Delta u$.



HÌNH 1.5.2. Xấp xỉ tuyến tính đường cong: $r(t + \Delta t) - r(t) \approx r'(t)\Delta t$.

Tương tự, đoạn cong $\varphi(u_0, v_0 + \Delta v)$ được xấp xỉ bởi vectơ tiếp xúc $\frac{\partial \varphi}{\partial v}(u_0, v_0)\Delta v$. Vậy hình chữ nhật cong được xấp xỉ bởi hình bình hành sinh bởi hai vectơ tiếp xúc trên.



Giả sử $a = (a_1, a_2)$ và $b = (b_1, b_2)$, diện tích của hình bình hành sinh bởi a và b là

$$\begin{aligned}
|a||b|\sin\alpha &= \sqrt{|a|^2|b|^2(1-\cos^2\alpha)} = \sqrt{|a|^2|b|^2 - \langle a,b\rangle^2} \\
&= \sqrt{(a_1^2+a_2^2)(b_1^2+b_2^2) - (a_1b_1+a_2b_2)^2} \\
&= \sqrt{(a_1b_2-a_2b_1)^2} = |a_1b_2 - a_2b_1| \\
&= |\det\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}| = |\det(a,b)|.
\end{aligned}$$

Ta vừa được một kết quả đáng chú ý, giải thích ý nghĩa hình học của định thức: *giá trị tuyệt đối của định thức của ma trận chính là diện tích của hình bình hành sinh bởi hai vectơ cột của ma trận*. Bản thân dấu của định thức cũng có thể được giải thích, nhưng ta gác việc này lại.

Diện tích của hình bình hành sinh bởi hai vectơ $\frac{\partial\varphi}{\partial u}(u_0,v_0)\Delta u$ và $\frac{\partial\varphi}{\partial v}(u_0,v_0)\Delta v$ là

$$\begin{aligned}
|\det\left(\frac{\partial\varphi}{\partial u}(u_0,v_0)\Delta u, \frac{\partial\varphi}{\partial v}(u_0,v_0)\Delta v\right)| &= |\det\left(\frac{\partial\varphi}{\partial u}(u_0,v_0), \frac{\partial\varphi}{\partial v}(u_0,v_0)\right)|\Delta u\Delta v \\
&= |\det J_\varphi(u_0,v_0)|\Delta u\Delta v.
\end{aligned}$$

Điều này giải thích sự xuất hiện của đại lượng trị tuyệt đối của Jacobi của phép đổi tọa độ trong công thức đổi biến.

Tọa độ cực. Một điểm $P = (x,y)$ trên mặt phẳng $\mathbb{R}^2$ có thể được miêu tả bằng hai số thực (r,θ), với r là khoảng cách từ O tới P, và $0 \le \theta \le 2\pi$ là góc từ vectơ $(1,0)$ (tia Ox) tới vectơ $\overrightarrow{OP}$. Vậy $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$, $r \ge 0$, $0 \le \theta \le 2\pi$.

Tuy nhiên tương ứng $(x,y) \mapsto (r,\theta)$ này không là song ánh và không liên tục trên tia Ox. Vì vậy ta phải hạn chế miền xác định là mặt phẳng bỏ đi tia Ox. Khi đó ánh xạ ngược là

$$\begin{aligned}
(0,\infty)\times(0,2\pi) &\to \mathbb{R}^2 \setminus \{(x,0) \mid x \ge 0\} \\
(r,\theta) &\mapsto (x,y) = (r\cos\theta, r\sin\theta).
\end{aligned}$$

Ta tính được $\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}(r,\theta) = r > 0$, vì vậy đây là một phép đổi biến. Một cách hình thức, có thể nhớ rằng

$$\boxed{dxdy = r\,drd\theta.}$$

Ví dụ (Tích phân trên hình tròn). Gọi $B'^2(O,R)$ là hình tròn đóng tâm O bán kính R. Để áp dụng công thức đổi biến ta dùng phép vi đồng phôi φ từ hình chữ nhật mở $(0,R)\times(0,2\pi)$ sang miền D là $B'^2(O,R)$ bỏ đi đường tròn biên và tia Ox. Giả sử f khả tích trên $B'^2(O,R)$. Tập bị bỏ đi có diện tích không, do đó nó không ảnh hưởng đến tích phân, theo 1.3.6, nên:

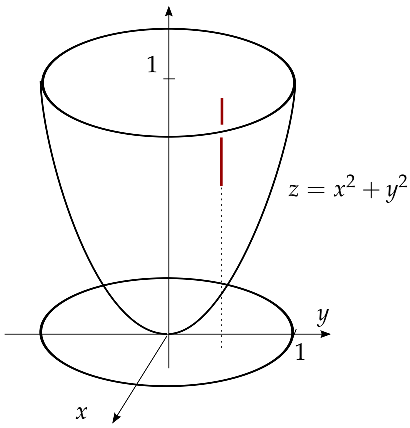
$$\iint_{B'^2(O,R)} f(x,y)\,dxdy = \iint_D f(x,y)\,dxdy = \iint_{(0,R)\times(0,2\pi)} f(r\cos\theta, r\sin\theta) r\,drd\theta$$
$$= \iint_{[0,R]\times[0,2\pi]} f(r\cos\theta, r\sin\theta) r\,drd\theta.$$

Chẳng hạn diện tích của hình tròn là:

$$|B'^2(O,R)| = \iint_{B'^2(O,R)} 1\,dxdy = \int_0^R \int_0^{2\pi} 1\cdot r\,d\theta\,dr = \pi R^2.$$

Như vậy chú ý rằng với mục đích lấy tích phân thì để đơn giản ta thường lấy cận trong tọa độ cực là $r \geq 0$ và $0 \leq \theta \leq 2\pi$.

Ví dụ. Cho E là khối được bao bởi các mặt $z = x^2 + y^2$ và $z = 1$. Tính $\iiint_E z\,dxdydz$.



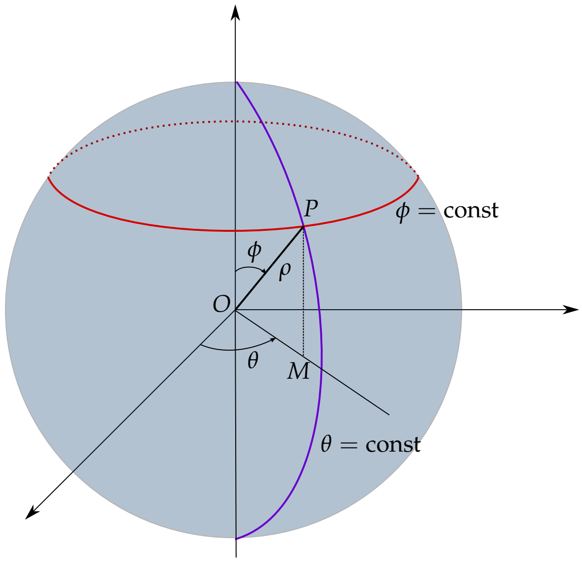
Xem E là một khối đơn giản theo chiều trục z, nằm dưới mặt $z = x^2 + y^2$, trên mặt $z = 1$. Như vậy $E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leq z \leq 1\}$. Chiếu khối E xuống mặt phẳng xOy ta được hình tròn $x^2 + y^2 \leq 1$. Áp dụng công thức Fubini:

$$\begin{aligned}
\iiint_E z\,dxdydz &= \iint_{x^2+y^2\leq 1} \left(\int_{x^2+y^2}^1 z\,dz\right) dxdy \\
&= \iint_{x^2+y^2\leq 1} \frac{1}{2} z^2 \Big|_{z=x^2+y^2}^1 dxdy \\
&= \iint_{x^2+y^2\leq 1} \frac{1}{2}\left(1 - \left(x^2+y^2\right)^2\right) dxdy \\
&= \iint_{0\leq r\leq 1, 0\leq\theta\leq 2\pi} \frac{1}{2}\left(1 - \left(r^2\right)^2\right) r\,drd\theta \\
&= \frac{1}{2}\int_0^1 \left(\int_0^{2\pi} (r - r^5)\,d\theta\right) dr = \frac{\pi}{3}.
\end{aligned}$$

Trong ví dụ này một điểm (x,y,z) trong $\mathbb{R}^3$ được miêu tả bằng cách dùng tọa độ cực (r,θ) để miêu tả (x,y). Người ta thường gọi hệ tọa độ (r,θ,z) là hệ *tọa độ trụ*.

Tọa độ cầu. Một điểm $P = (x,y,z)$ trong $\mathbb{R}^3$ có thể được miêu tả bằng bộ ba số thực (ρ,ϕ,θ), với ρ là khoảng cách từ O tới P, ϕ là góc giữa vectơ $(0,0,1)$ (tia Oz)

và vectơ $\overrightarrow{OP}$, và nếu gọi $M = (x, y, 0)$ là hình chiếu của điểm P xuống mặt phẳng Oxy thì θ là góc từ vectơ $(1, 0, 0)$ (tia Ox) tới vectơ $\overrightarrow{OM}$.



HÌNH 1.5.3. $\rho = \text{const}$ ứng với một mặt cầu. Trên mỗi mặt cầu các đường $\phi = \text{const}$ là các đường vĩ tuyến, các đường $\theta = \text{const}$ là các đường kinh tuyến, với $0 \leq \rho$, $0 \leq \phi \leq \pi$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$. Bộ (ρ, ϕ, θ) đại diện cho (cao độ, vĩ độ, kinh độ) của một điểm trong không gian.

Tương tự như trường hợp tọa độ cực, để có một phép đổi biến thực sự ta phải hạn chế miền xác định bằng cách bỏ đi tập $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid y = 0,\ x \geq 0\}$, tức một nửa của mặt phẳng xOz, ứng với $\rho = 0$, $\phi = 0$, $\phi = \pi$, $\theta = 0$, $\theta = 2\pi$. Khi đó ánh xạ

$$\begin{aligned} \varphi : (0, \infty) \times (0, \pi) \times (0, 2\pi) &\to \mathbb{R}^3 \setminus \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid y = 0,\ x \geq 0\} \\ (\rho, \phi, \theta) &\mapsto (x, y, z) = (\rho \sin\phi \cos\theta, \rho \sin\phi \sin\theta, \rho \cos\phi) \end{aligned}$$

là một song ánh, có $\det J_\varphi(\rho, \phi, \theta) = \rho^2 \sin\phi > 0$. Vậy đây là một phép đổi biến. Cũng như trường hợp tọa độ cực, phần bị bỏ đi thường không ảnh hưởng tới tích phân nên ta thường không nhắc tới chi tiết kĩ thuật này.

Một cách hình thức, có thể nhớ rằng

$$\boxed{dxdydz = \rho^2 \sin\phi\ d\rho d\phi d\theta.}$$

Có tài liệu dùng thứ tự trong tọa độ cầu là (ρ, θ, ϕ). Thứ tự tọa độ trong tọa độ cầu liên quan tới định hướng trên mặt cầu, tuy không ảnh hưởng tới tích phân bội nhưng sẽ ảnh hưởng tới tích phân mặt ở phần sau.

Ví dụ (Thể tích quả cầu). Gọi $B^3(O,R)$ là quả cầu mở tâm O bán kính R trong $\mathbb{R}^3$. Thể tích của quả cầu này là:

$$|B^3(O,R)| = \iiint_{B^3(O,R)} 1\,dV = \int_0^R \int_0^\pi \int_0^{2\pi} 1 \cdot \rho^2 \sin\phi \,d\theta\,d\phi\,d\rho = \frac{4\pi}{3}R^3.$$

Bài tập.

1.5.2. (a) Tính thể tích của khối bao bởi mặt $z = 4 - x^2 - y^2$ và mặt phẳng xOy.

(b) Tính tích phân $\iint_R \sqrt{x^2+y^2}$ trong đó R là miền bao bởi hai đường cong $x^2+y^2 = 4$ and $x^2+y^2 = 9$.

(c) Tính tích phân $\iint_D (x^2+y^2)^{3/2}\,dA$ trong đó D là miền trong góc phần tư thứ nhất bao bởi đường tròn $x^2+y^2 = 9$, đường thẳng $y = 0$ và $y = \sqrt{3}x$.

(d) Tính diện tích của miền được bao bởi đường tròn tâm O bán kính 2 và đường tròn tâm $(1,0)$ bán kính 1.

(e) Tính tích phân $\iint_D x^2\,dA$ trong đó D là miền bao bởi e-líp $3x^2+4y^2 = 8$.

(f) Tính tích phân $\iiint_E \cos\left[(x^2+y^2+z^2)^{3/2}\right]\,dV$ trong đó E là quả cầu đơn vị $x^2+y^2+z^2 \le 1$.

(g) Tính thể tích của khối được bao phía trên bởi mặt cầu $x^2+y^2+z^2 = 2$ và được bao phía dưới bởi mặt paraboloid $z = x^2+y^2$.

(h) Tìm thể tích của khối bị chặn trên bởi mặt cầu $x^2+y^2+z^2 = 9$ và bị chặn dưới bởi mặt nón $z^2 = 3x^2+3y^2$, $z \ge 0$.

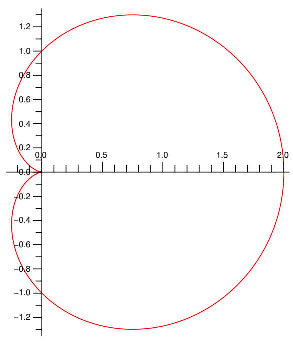
(i) Tính thể tích của miền phía dưới mặt cầu $x^2+y^2+z^2 = 1$, phía trên mặt phẳng $z = 1/\sqrt{2}$.

(j) Tính thể tích của khối bên dưới mặt $z = 4-x^2-y^2$ bên trên mặt $x^2+y^2+z^2 = 6$.

(k) Tính tích phân $\iiint_E x\,dV$ trong đó E là khối bao bởi hai mặt $z = 6-x^2-y^2$ và $z = x^2+3y^2$.

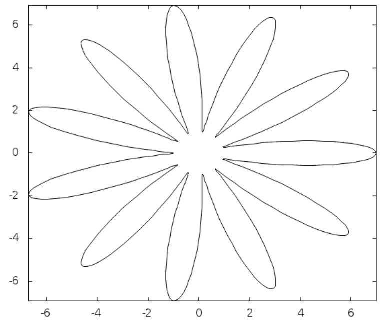
1.5.3. Tính thể tích của khối được miêu tả bởi ba điều kiện sau: $x^2+y^2 \le z^2 \le 3(x^2+y^2)$, $1 \le x^2+y^2+z^2 \le 4$, $z \ge 0$.

1.5.4. (a) Tính diện tích miền được bao bởi đường cong hình trái tim (cardioid) $r = 1+\cos\theta$.



HÌNH 1.5.4. Đường $r = 1+\cos\theta$.

(b) Tính diện tích của miền phẳng được bao bởi đường cong $r = 4+3\cos(11\theta)$.



HÌNH 1.5.5. Đường $4 + 3\cos(11\theta)$.

1.5.5. (a) Tính tích phân $\iint_R (x^2 + 2xy)\, dA$ trong đó R là hình bình hành bao bởi các đường thẳng $y = 2x + 3$, $y = 2x + 1$, $y = 5 - x$, $y = 2 - x$.

(b) Tính tích phân $\iint_R (x + y)^2\, dA$ trong đó R là hình bình hành bao bởi các đường thẳng $y = -x$, $y = -x + 1$, $y = 2x$, $y = 2x - 3$.

(c) Tính diện tích của miền phẳng được bao bởi các đường cong $y^2 = x$, $y^2 = 2x$, $y = 1/x$, $y = 2/x$.

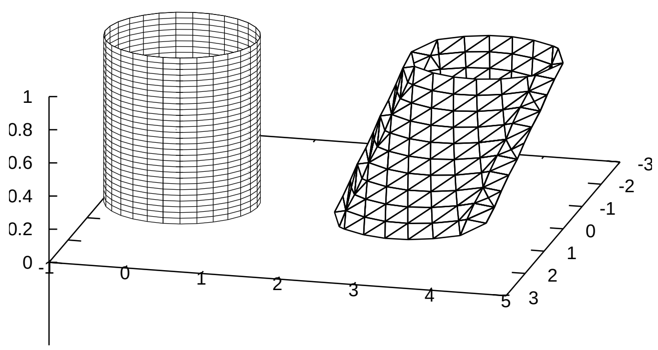
1.5.6. Gọi D là miền phẳng được bao bởi đường $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 1$ trong góc phần tư thứ nhất. Bằng cách đổi biến $u = \sqrt{x}$, $v = \sqrt{y}$, hãy tính diện tích miền này.

1.5.7. Gọi D là miền phẳng được xác định bởi $x^4 + y^4 \leq 1$. Hãy tính tích phân $\iint_D x\, dxdy$.

1.5.8. Vẽ mặt cầu mấp mô cho bởi phương trình trong tọa độ cầu $\rho = 1 + \sin^2(3\theta)\sin^4(5\phi)$. Tính thể tích của khối bao bởi mặt này.

1.5.9 (Mặt tròn xoay). Cho f là hàm liên tục trên khoảng $[a, b]$ và $f(x) \geq 0$ trên $[a, b]$. Chứng tỏ thể tích của khối tròn xoay nhận được bằng cách xoay miền dưới đồ thị của f quanh trục x là $V = \pi \int_a^b [f(x)]^2\, dx$.

1.5.10. Chứng tỏ rằng thể tích của khối bao bởi mặt $x^2 + (y - z - 3)^2 = 1$, $0 \leq z \leq 1$ bằng với thể tích của khối bao bởi mặt $x^2 + y^2 = 1$, $0 \leq z \leq 1$.

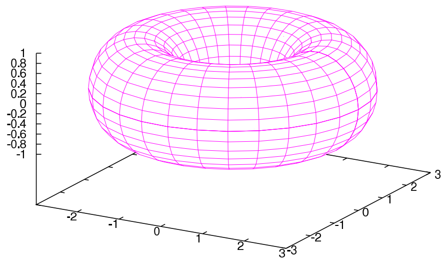


HÌNH 1.5.6. Mặt $x^2 + y^2 = 1$ (trái) và mặt $x^2 + (y - z - 3)^2 = 1$ (phải).

(a) Bằng cách dùng công thức Fubini.

(b) Bằng cách dùng công thức đổi biến.

1.5.11. Mặt xuyến (torus) có thể được miêu tả như là mặt tròn xoay nhận được bằng cách xoay quanh trục z một đường tròn trên mặt phẳng Oyz không cắt trục z. Có thể tìm được



HÌNH 1.5.7. Mặt xuyến.

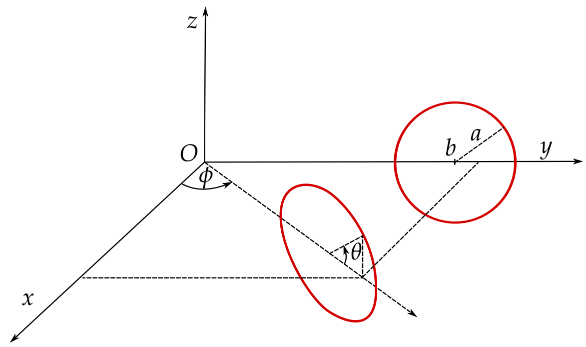
phương trình dạng ẩn của mặt xuyến:

$$\left(\sqrt{x^2+y^2}-b\right)^2+z^2=a^2,\ 0<a<b,$$

và ở dạng tham số:

$$((b+a\cos\theta)\cos\phi, (b+a\cos\theta)\sin\phi, a\sin\theta),\ 0\le\phi,\ \theta\le 2\pi.$$

Hãy tính thể tích của khối bao bởi mặt xuyến.



1.5.12 (Thể tích quả cầu). Tọa độ cầu trong $\mathbb{R}^n$, $n\ge 2$, được cho bởi:

$$\begin{aligned}
x_1 &= r\cos\varphi_1, && r>0,\ 0<\varphi_1<\pi\\
x_2 &= r\sin\varphi_1\cos\varphi_2, && 0<\varphi_2<\pi\\
&\vdots\\
x_i &= r\sin\varphi_1\sin\varphi_2\cdots\sin\varphi_{i-1}\cos\varphi_i, && 0<\varphi_i<\pi\\
&\vdots\\
x_{n-1} &= r\sin\varphi_1\sin\varphi_2\cdots\sin\varphi_{n-2}\cos\varphi_{n-1}, && 0<\varphi_{n-1}<2\pi\\
x_n &= r\sin\varphi_1\sin\varphi_2\cdots\sin\varphi_{n-2}\sin\varphi_{n-1}.
\end{aligned}$$

Hãy dùng tọa độ cầu để kiểm công thức sau cho thể tích của quả cầu $B^n(R) = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 < R^2\}$:

$$|B^n(R)| = \begin{cases} \dfrac{2(2\pi)^{(n-1)/2}}{1 \cdot 3 \cdots n} R^n, & \text{nếu } n \text{ lẻ} \\ \dfrac{(2\pi)^{n/2}}{2 \cdot 4 \cdots n} R^n, & \text{nếu } n \text{ chẵn.} \end{cases}$$

1.5.13. Sau đây là một cách khác để tính thể tích quả cầu (xem chẳng hạn [**Áng97**], [**Lan97**, tr. 598]).

(a) Dùng công thức đổi biến, chứng tỏ $|B^n(R)| = |B^n(1)|R^n$.

(b) Chứng tỏ

$$|B^n(1)| = \iint_{x_1^2+x_2^2 \le 1} \left(\int_{x_3^2+\cdots+x_n^2 \le 1-x_1^2-x_2^2} 1 \right) dx_1 dx_2.$$

(c) Suy ra $|B^n(1)| = \frac{2\pi}{n}|B^{n-2}(1)|$.

1.5.14. Sau đây là một cách nữa để tính thể tích quả cầu.

(a) Dùng công thức đổi biến, chứng tỏ $|B^n(R)| = |B^n(1)|R^n$.

(b) Dùng công thức Fubini, chứng tỏ

$$|B^n(1)| = \int_{-1}^{1} |B^{n-1}\left(\sqrt{1-x_n^2}\right)| \, dx_n.$$

(c) Đưa bài toán về việc tính tích phân $\int_0^{\pi/2} (\cos t)^n \, dt$.

1.5.15. Trong mặt phẳng $\mathbb{R}^2$ một phép quay quanh gốc tọa độ một góc α có thể được miêu tả bằng 2 cách: Trong tọa độ cực, đó là ánh xạ $(r, \theta) \mapsto (r, \theta + \alpha)$. Trong tọa độ Euclid, đó là ánh xạ

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Hãy chứng tỏ một phép quay quanh gốc tọa độ mang một hình có diện tích thành một hình có cùng diện tích.

1.5.16 (Phép dời hình bảo toàn thể tích). Một phép dời hình, còn gọi là một phép đẳng cấu hình học (isometry) trong $\mathbb{R}^n$ được định nghĩa là một song ánh φ từ $\mathbb{R}^n$ vào chính nó bảo toàn khoảng cách, tức $|\varphi(x) - \varphi(y)| = |x - y|$ với mọi $x, y \in \mathbb{R}^n$.

Ví dụ, trong mặt phẳng một phép dời hình bất kì là một hợp của các phép tịnh tiến, phép quay, và phép lấy đối xứng qua một đường thẳng ([**Sti92**, tr. 13]).

Có thể chứng minh rằng ([**Rat94**, tr. 13]) bất kì một phép dời hình nào cũng có dạng $\varphi(x) = A \cdot x + b$ trong đó A là một ma trận $n \times n$ trực giao (orthogonal), và $b \in \mathbb{R}^n$. Một ma trận $n \times n$ là trực giao nếu các vectơ cột của nó tạo thành một cơ sở trực chuẩn của $\mathbb{R}^n$. Nói cách khác ma trận A là trực giao nếu $A^T A = I$ trong đó A^T là ma trận chuyển vị của A.

Dùng công thức đổi biến, hãy chứng tỏ thể tích của một hình không thay đổi qua một phép dời hình.

1.6. Ứng dụng của tích phân bội

Tích phân là tổng, đó là ý nghĩa chính của tích phân. Vì vậy mỗi khi có nhu cầu tính tổng của vô hạn giá trị thì tích phân có thể xuất hiện.

Tích phân còn có vai trò như phép biến đổi ngược của vi phân, cho phép chuyển một bài toán vi phân về một bài toán tích phân (ví dụ xem 3.4.1).

Về cơ bản, nếu tại mỗi điểm x_i, $1 \le i \le n$ có tương ứng các giá trị $f(x_i)$ của một đại lượng thì tổng giá trị của đại lượng đó dĩ nhiên là $\sum_{i=1}^{n} f(x_i)$. Nếu tập hợp D các điểm đang xét là vô hạn thì hàm $f : D \to \mathbb{R}$ có khi được gọi là *hàm mật độ* của đại lượng, và tổng giá trị của đại lượng là $\int_D f$.

Giá trị trung bình. Nếu tại các điểm x_i, $1 \le i \le n$ có tương ứng các giá trị $f(x_i)$ thì giá trị trung bình tại các điểm này như ta đã biết là $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)$. Trong trường hợp miền xác định có vô hạn phần tử, giả sử $f : D \to \mathbb{R}$, thì giá trị trung bình của f được cho bằng công thức tương tự, chỉ thay tổng bằng tích phân: $\frac{1}{|D|}\int_D f$.

Tâm khối lượng. Ta giới thiệu khái niệm tâm khối lượng (center of mass). Trong trường hợp hai chất điểm có khối lượng m_1 tại điểm p_1 và có khối lượng m_2 tại điểm p_2 thì tâm khối lượng của hệ hai điểm này, theo nguyên tắc đòn bẩy của Vật lí, nằm tại điểm

$$\frac{m_1p_1 + m_2p_2}{m_1 + m_2}.$$

Đối với hệ gồm n chất điểm, bằng qui nạp ta tìm được vị trí của tâm khối lượng là

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} m_ip_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i},$$

với tổng khối lượng là $m = \sum_{i=1}^{n} m_i$.

Xét trường hợp khối lượng liên tục, giả sử ta có một khối vật chất chiếm phần không gian E trong $\mathbb{R}^3$. Tại mỗi điểm $p = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ gọi $\rho(p)$ là mật độ khối lượng của khối tại p, đó là giới hạn của khối lượng trung bình quanh p, có thể hiểu là khối lượng tại điểm p. Khối lượng của khối chính là tích phân của mật độ khối lượng:

$$m = \int_E \rho.$$

Từ công thức của trường hợp rời rạc ở trên ta suy ra vị trí của tâm khối lượng trong trường hợp liên tục sẽ là

$$\frac{\int_E \rho p}{\int_E \rho} = \frac{\int_E \rho p}{m}.$$

Cụ thể hơn, nếu $p = (x, y, z)$ thì tâm khối lượng nằm ở $\frac{1}{m}\left(\int_E \rho x, \int_E \rho y, \int_E \rho z\right)$.

Ví dụ. Ta tìm tâm khối lượng của nửa hình tròn đồng chất. Gọi D là nửa trên của hình tròn tâm O bán kính R và gọi hằng số ρ là mật độ khối lượng của nó. Khối lượng của khối này là $m = \iint_D \rho \, dA = \rho\pi R^2/2$. Tọa độ của tâm khối lượng là

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{m}\iint_D \rho x \, dxdy = 0, \\ y &= \frac{1}{m}\iint_D \rho y \, dxdy = \frac{\rho}{m}\int_0^R \int_0^\pi (r\sin\theta) r \, d\theta \, dr = \frac{4}{3\pi}R. \end{aligned}$$

Xác suất của sự kiện ngẫu nhiên. Một biến ngẫu nhiên X là một ánh xạ từ một tập hợp các sự kiện vào $\mathbb{R}$. Trong trường hợp rời rạc, tập giá trị D của X là hữu hạn. Với mỗi giá trị $x \in D$ có một số thực $0 \leq f(x) \leq 1$ là xác suất để X có giá trị x, kí hiệu là $P(X = x)$. Hàm f được gọi là hàm phân bố xác suất của biến ngẫu nhiên X. Xác suất để X có giá trị trong tập $C \subset D$ được cho bởi

$$P(X \in C) = \sum_{x \in C} f(x).$$

Một hệ quả là $\sum_{x \in D} f(x) = P(X \in D) = 1$. Giá trị trung bình (mean) hay kỳ vọng (expected value) theo xác suất của X được cho bởi:

$$E(X) = \sum_{x \in D} x f(x).$$

Ví dụ. Xét một trò chơi với con xúc sắc như sau: Người chơi phải trả 20 đồng cho mỗi lần tung xúc sắc. Nếu mặt ngửa là mặt 6 nút thì người chơi được nhận 60 đồng, nếu là các mặt còn lại thì chỉ được nhận 10 đồng. Hỏi trong trò chơi này ai được lợi, người chơi hay người tổ chức trò chơi?

Gọi X là biến xác suất như sau: Mặt 6 nút của xúc sắc ứng với số thực 60, các mặt còn lại ứng với số thực 10. Hàm phân bố xác suất trong trường hợp này là $f(10) = 5/6$ và $f(60) = 1/6$. Câu trả lời cho câu hỏi trên được quyết định bởi giá trị trung bình của biến xác suất X. Ta có $E(X) = 110/6 < 20$, như vậy nếu chơi nhiều lần thì người chơi sẽ bị thiệt, còn người tổ chức trò chơi sẽ hưởng lợi.

Trong trường hợp biến ngẫu nhiên liên tục, tập giá trị của biến ngẫu nhiên X là một tập con vô hạn D của $\mathbb{R}$. Tương tự với trường hợp rời rạc, có một hàm phân bố xác suất, hay mật độ xác suất (probability density function) $f : D \to \mathbb{R}$ sao cho $f(x) \geq 0$ và xác suất để X có giá trị trong tập $C \subset D$ được cho bởi

$$P(X \in C) = \int_C f.$$

Một hệ quả là hàm mật độ xác suất phải thỏa $P(X \in D) = \int_D f = 1$.

Trung bình hay kỳ vọng của biến ngẫu nhiên X được cho bởi:

$$E(X) = \int_D x f.$$

Chú ý sự tương tự của công thức này với công thức của tâm khối lượng.

Ví dụ. Một nhà sản xuất bảo hành một sản phẩm 2 năm. Gọi T là biến xác suất ứng thời điểm hư hỏng của sản phẩm với số thực $t \geq 0$ là thời gian từ khi sản phẩm được sản xuất theo năm. Giả sử hàm mật độ xác suất được cho bởi $f(t) = 0.1e^{-0.1t}$.

Xác suất sản phẩm bị hư trong thời gian bảo hành sẽ là

$$P(0 \leq T \leq 2) = \int_0^2 0.1e^{-0.1t}\,dt \approx 18\%.$$

Trong trường hợp có n biến ngẫu nhiên thì tập giá trị của biến ngẫu nhiên là một tập con của $\mathbb{R}^n$, hàm phân bố xác suất sẽ là một hàm n biến, và các tích phân trên sẽ là tích phân bội.

Ví dụ. Xét tình huống một chuyến xe buýt thường tới trạm trễ, nhưng không quá 10 phút, và đợi ở trạm 5 phút. Hàm mật độ xác suất của giờ xe tới trạm, gọi là X, được cho bởi $f_1(x) = -0.02x + 0.2$, $0 \leq x \leq 10$. Một người thường đi xe buýt vào giờ này nhưng hay bị trễ, có khi tới 20 phút. Hàm mật độ xác suất của giờ người này tới trạm, gọi là Y, được cho bởi $f_2(y) = -0.005y + 0.1$, $0 \leq y \leq 20$. Hỏi xác suất để người này đón được chuyến xe buýt này là bao nhiêu?

Ở đây có hai biến xác suất độc lập nên hàm phân bố xác suất chung là $f(x,y) = f_1(x)f_2(y)$. Xác suất cần tìm được cho bởi

$$\begin{aligned} P(Y \leq X+5) &= \iint_{\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid 0\leq x\leq 10,\ y\leq x+5\}} f(x,y)\,dxdy \\ &= \int_0^{10}\int_0^{x+5} f(x,y)\,dy\,dx \approx 65\%. \end{aligned}$$

Tính $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx$. Gọi $B'(R)$ là hình tròn đóng tâm 0 bán kính R, tức $B'(R) = \{(x,y) \mid x^2+y^2 \leq R^2\}$. Gọi $I(R)$ là hình vuông tâm 0 với chiều dài cạnh $2R$, tức $I(R) = [-R,R] \times [-R,R]$.

Vì $B'(R) \subset I(R) \subset B'(R\sqrt{2})$ nên

$$\iint_{B'(R)} e^{-(x^2+y^2)}\,dA \leq \iint_{I(R)} e^{-(x^2+y^2)}\,dA \leq \iint_{B'(R\sqrt{2})} e^{-(x^2+y^2)}\,dA.$$

Vì

$$\iint_{B'(R)} e^{-(x^2+y^2)}\,dA = \iint_{[0,R]\times[0,2\pi]} re^{-r^2}\,dA = \pi(1-e^{-R^2}),$$

nên từ bất đẳng thức trên, lấy giới hạn ta được

$$\lim_{R\to\infty}\iint_{I(R)} e^{-(x^2+y^2)}\,dA = \pi.$$

Mặt khác theo công thức Fubini:

$$\iint_{I(R)} e^{-(x^2+y^2)}\,dA = \left(\int_{-R}^{R} e^{-x^2}\,dx\right)\cdot\left(\int_{-R}^{R} e^{-y^2}\,dy\right) = \left(\int_{-R}^{R} e^{-x^2}\,dx\right)^2,$$

nên

$$\lim_{R\to\infty}\iint_{I(R)} e^{-(x^2+y^2)}\,dA = \lim_{R\to\infty}\left(\int_{-R}^{R} e^{-x^2}\,dx\right)^2 = \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx\right)^2.$$

Vậy ta được công thức nổi tiếng:

$$\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\, dx = \sqrt{\pi}.}$$

Công thức này được sử dụng nhiều trong môn Xác suất.

Bài tập.

1.6.1. Tìm tâm khối lượng của một khối đồng chất có dạng hình chóp nhọn cân chiều cao là h và với đáy là hình tròn bán kính R.

1.6.2. Nhiệt độ tại điểm (x, y) trên mặt phẳng là $100e^{-x^2-y^2}$ (độ Celcius). Hãy tìm nhiệt độ trung bình trên đĩa tròn đơn vị tâm tại gốc tọa độ.

1.6.3. Khu trung tâm thành phố được miêu tả như một hình chữ nhật $[0,1] \times [0,2]$ với đơn vị chiều dài là km. Giá đất trong khu vực này trong được mô hình hóa bằng hàm p, ở vị trí $(x, y) \in [0,1] \times [0,2]$ thì $p(x, y) = 200 - 10(x - \frac{1}{2})^2 - 15(y-1)^2$ (triệu đồng/m^2). Hãy tính giá đất trung bình ở khu vực này.

1.6.4. Hai công ty sản xuất hai sản phẩm cạnh tranh với nhau. Gọi X, Y là biến xác suất ứng thời điểm hư hỏng của hai sản phẩm tính theo thời gian từ khi sản phẩm được sản xuất (theo năm), và giả sử hai biến này là độc lập với nhau. Giả sử các hàm mật độ xác suất được cho bởi $f(x) = 0.2e^{-0.2x}$ và $g(y) = 0.1e^{-0.1y}$. Hãy tính xác suất sản phẩm của công ty thứ nhất bị hư trước sản phẩm của công ty thứ hai trong thời gian bảo hành 3 năm.

1.6.5. Chứng tỏ hàm được dùng trong mô hình phân bố chuẩn (normal distribution) của môn Xác suất

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

thỏa mãn tính chất cần có của hàm phân bố xác suất: $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx$=1.

1.6.6 (Hàm Gamma). Hàm Gamma là một mở rộng của hàm giai thừa lên tập hợp các số thực. Ta định nghĩa

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} t^{z-1} e^{-t}\, dt, \qquad z \in \mathbb{R},\ z > 0.$$

(a) Chứng tỏ $\Gamma(z)$ được xác định.

(b) Kiểm tra rằng $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$. Suy ra với số nguyên dương n thì $\Gamma(n+1) = n!$.

(c) Kiểm tra công thức $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$.

(d) Chứng tỏ thể tích của quả cầu n-chiều bán kính R (xem 1.5.12) có thể được viết ngắn gọn là

$$|B^n(R)| = \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2}+1)} R^n.$$

1.6.7 (Công thức Pappus). Hãy tìm lại công thức của Pappus[6]: Thể tích của khối tròn xoay nhận được bằng cách xoay một miền phẳng quanh một trục bên ngoài bằng diện tích của miền nhân với chiều dài của đường đi của tâm khối lượng của miền.

Cụ thể hơn, gọi D là miền bao bởi hai đồ thị của hai hàm f và g trên đoạn $[a, b]$, với $0 \le g(x) \le f(x)$ trên $[a, b]$. Gọi (x_0, y_0) là tâm khối lượng của D. Khi đó thể tích của khối tròn xoay nhận được bằng cách xoay miền D quanh trục x bằng $2\pi y_0 |D|$.

Ứng dụng, hãy tìm lại công thức thể tích của khối xuyến.

[6]Pappus xứ Alexandria, một nhà hình học sống vào thế kỉ thứ 4 sau Công nguyên.

Chương 2

Tích phân đường

Trong chương trước chúng ta đã khảo sát thể tích của miền trong không gian n-chiều và tích phân trên những miền đó. Tuy nhiên những câu hỏi chẳng hạn như về chu vi của đường tròn, diện tích của mặt cầu, hay nói chung là độ đo của tập con "k-chiều" trong không gian n-chiều với $k < n$ và tích phân trên đó thì chúng ta chưa xét.

Chương tích phân đường và chương tích phân mặt sẽ trả lời những câu hỏi này cho trường hợp đường ($k = 1$) và mặt ($k = 2$).

2.1. Tích phân đường

Đường. Khi nói tới một "đường" ta thường nghĩ tới một "con đường", tức là một tập hợp điểm, ví dụ một đường thẳng hay một đường tròn. Mục đích của chúng ta trong chương này là thực hiện các đo đạc trên đường, chẳng hạn như đo chiều dài của đường. Các đo đạc đó sẽ được thực hiện qua một chuyến đi trên con đường. Tuy nhiên ta có thể đi trên một con đường theo nhiều cách khác nhau, và ta chưa có căn cứ để cho rằng các đo đạc bằng các cách đi khác nhau trên cùng một con đường sẽ cho ra cùng một kết quả. Do đó trước mắt chúng ta sẽ làm việc với từng cách đi cụ thể trên con đường.

Một *đường đi* (path) là một ánh xạ từ một khoảng đóng $[a, b]$ vào $\mathbb{R}^n$ (một tương ứng mỗi thời điểm với một vị trí).

Tập hợp các điểm mà đường đi đã đi qua được gọi là *vết của đường đi* (trace) (đây là "con đường" như đã bàn ở trên). Với đường đi $r : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ thì vết của r tập ảnh $r([a, b]) = \{r(t) \mid t \in [a, b]\}$.

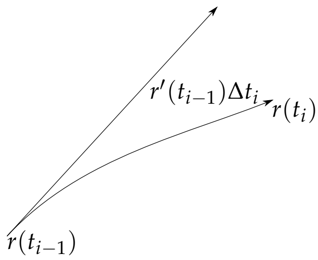
Đường đi $r : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ được gọi là:

- *đóng* (closed) hay *kín* nếu $r(a) = r(b)$, tức là điểm đầu và điểm cuối trùng nhau.
- *đơn* (simple) nếu nó không đi qua điểm nào hai lần (không có điểm tự cắt). Chính xác hơn, nếu r không phải là đường đóng thì nó được gọi là đơn nếu r là đơn ánh trên $[a, b]$; nếu r là đường đóng thì nó được gọi là đơn nếu r là đơn ánh trên $[a, b)$.
- *liên tục* nếu r là hàm liên tục trên $[a, b]$.

Đường đi $r : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ được gọi là *trơn* (smooth) nếu r là hàm trơn trên $[a, b]$. tức là nếu r mở rộng được thành một hàm trơn trên một khoảng (c, d) chứa $[a, b]$. Điều này đồng nghĩa với việc r có đạo hàm phải tại a và đạo hàm trái tại b.

Nếu r là một đường đi trơn thì đạo hàm $r'(t)$ có ý nghĩa vật lí là *vận tốc* chuyển động (velocity) tại thời điểm t. Độ lớn của vận tốc $|r'(t)|$ là *tốc độ* (speed) tại thời điểm t.

Chiều dài của đường đi. Cho đường đi $r : [a, b] \to \mathbb{R}^n$. Xét một phép chia $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_m = b$ của $[a, b]$. Trên mỗi khoảng con $[t_{i-1}, t_i]$, $1 \le i \le m$, ta xấp xỉ tuyến tính đường đi: $r(t) - r(t_{i-1}) \approx r'(t_{i-1})(t - t_{i-1})$. Nói cách khác, ta xấp xỉ chuyển động bằng một chuyển động đều với vận tốc không đổi $r'(t_{i-1})$. Quãng đường đi được trong khoảng thời gian từ t_{i-1} tới t_i được xấp xỉ bởi vectơ $r'(t_{i-1})\Delta t_i$, với chiều dài là $|r'(t_{i-1})\Delta t_i|$.



HÌNH 2.1.1. Xấp xỉ tuyến tính: $r(t_i) - r(t_{i-1}) \approx r'(t_{i-1})\Delta t_i$.

Như vậy "chiều dài" của đường đi được xấp xỉ bởi $\sum_{i=1}^{m} |r'(t_{i-1})|\Delta t_i$. Đây chính là tổng Riemann của hàm $|r'(t)|$ trên khoảng $[a, b]$.

Vậy ta đưa ra định nghĩa sau:

Định nghĩa. Chiều dài của đường đi $r : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ được định nghĩa là

$$\int_a^b |r'(t)|\, dt.$$

Định nghĩa này chứa công thức đã quen biết: quãng đường đi được = tốc độ × thời gian.

Ví dụ. Giả sử một vật di chuyển trên một đường với tốc độ hằng v, trong khoảng thời gian từ a tới b. Khi đó quãng đường vật đã đi được có chiều dài là $\int_a^b v\, dt = v(b - a)$, đúng như ta chờ đợi.

Tích phân đường loại một. Cho đường đi $r : [a, b] \to \mathbb{R}^n$. Giả sử f là một hàm thực xác định trên vết của đường, tức $f : r([a, b]) \to \mathbb{R}$. Ta muốn tính *tổng giá trị của hàm trên đường*.

Ta tiến hành một cách tương tự như đã làm khi định nghĩa chiều dài đường đi. Xét một phép chia $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_m = b$. Trên khoảng con $[t_{i-1}, t_i]$ ta xấp xỉ tuyến tính đường đi $r(t) - r(t_{i-1}) \approx r'(t_{i-1})(t - t_{i-1})$. Khi đó phần đường từ $r(t_{i-1})$ đến $r(t_i)$ được xấp xỉ bằng $r'(t_{i-1})\Delta t_i$. Trên phần đường này ta xấp xỉ hàm f bởi hàm hằng với giá trị $f(r(t_{i-1}))$. Do đó tổng giá trị của f trên phần đường từ $r(t_{i-1})$ đến $r(t_i)$ được xấp xỉ bằng $f(r(t_{i-1}))|r'(t_{i-1})|\Delta t_i$. Tổng giá trị của f trên đường r được xấp xỉ bằng

$$\sum_{i=1}^{m} f(r(t_{i-1}))|r'(t_{i-1})|\Delta t_i.$$

Vậy ta định nghĩa:

Định nghĩa. Cho f là một hàm xác định trên vết của đường $r : [a,b] \to \mathbb{R}^n$. Tích phân của f trên r được kí hiệu là $\int_r f\, ds$ và được định nghĩa là:

$$\boxed{\int_r f\, ds = \int_a^b f(r(t))|r'(t)|\, dt.}$$

Nếu r chỉ *khả vi từng khúc*, tức là có các số $a = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_m = b$ sao cho trên mỗi khoảng $[t_{i-1}, t_i]$ ánh xạ r là khả vi, thì gọi r_i là hạn chế của đường r lên khoảng $[t_{i-1}, t_i]$, ta định nghĩa.

$$\int_r f\, ds = \sum_{i=1}^{m} \int_{r_i} f\, ds.$$

Ví dụ. Nếu $f \equiv 1$ thì $\int_r 1\, ds = \int_a^b |r'(t)|\, dt$ là chiều dài của đường đi r.

Ví dụ. Xét trường hợp hai chiều, $n = 2$. Viết $r(t) = (x(t), y(t))$, khi đó

$$\int_r f\, ds = \int_a^b f((x(t), y(t))\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}\, dt.$$

Một cách hình thức có thể nhớ rằng

$$\boxed{ds = \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}\, dt.}$$

Tích phân đường loại hai. Cho đường đi $r : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ và cho F là một trường vectơ xác định trên vết của r. Ta muốn tính *tổng thành phần của trường cùng chiều đường đi* .

Ví dụ. Trong Vật lí, nếu một vật di chuyển theo một đường dưới tác động của một trường lực thì tổng tác động của lực, tức tổng thành phần của lực cùng chiều chuyển động, được gọi là *công* (work) của trường lực. Trong trường hợp đơn giản, nếu lực là hằng $\vec{F}$ và vật chuyển chuyển đều trên một đường thẳng theo một vectơ $\vec{d}$ thì công của lực bằng $|\vec{F}|\cos(\vec{F}, \vec{d})|\vec{d}| = \vec{F} \cdot \vec{d}$.

Xét một phép chia $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_m = b$ của $[a,b]$. Trên mỗi khoảng con $[t_{i-1}, t_i]$, $1 \le i \le m$, ta xấp xỉ đường bằng xấp xỉ tuyến tính: $r(t) \approx r'(t_{i-1})(t - t_{i-1})$. Khi đó phần đường từ $r(t_{i-1})$ đến $r(t_i)$ được xấp xỉ bằng $r'(t_{i-1})\Delta t_i$. Trên phần đường này trường F có thể được xấp xỉ bằng trường hằng, đại diện bởi vectơ $F(r(t_{i-1}))$. Tổng của thành phần cùng chiều đường đi của trường F trên phần đường từ $r(t_{i-1})$ đến $r(t_i)$ được xấp xỉ bằng $\langle F(r(t_{i-1})), r'(t_{i-1})\Delta t_i\rangle$. Tổng thành phần tiếp tuyến của F dọc theo r được xấp xỉ bằng $\sum_{i=1}^{m}\langle F(r(t_{i-1})), r'(t_{i-1})\rangle\Delta t_i$.

Vậy ta định nghĩa:

Định nghĩa. Cho F là một trường vectơ trên vết của một đường đi $r : [a,b] \to \mathbb{R}^n$. Tích phân của F trên r được kí hiệu là $\int_r F \cdot dr$ và được định nghĩa là:

$$\boxed{\int_r F \cdot dr = \int_a^b F(r(t)) \cdot r'(t)\, dt.}$$

Định nghĩa này được mở rộng cho đường khả vi từng khúc theo cách như tích phân đường loại một.

Ghi chú. Có một số cách kí hiệu khác cho tích phân đường loại hai, chẳng hạn $\int_r F \cdot d\vec{r}$, $\int_r F \cdot d\vec{s}$, $\int_r F \cdot d\vec{l}$.

Ví dụ. Xét trường hợp hai chiều, $n = 2$. Viết $F(x,y) = (P(x,y), Q(x,y))$ và $r(t) = (x(t), y(t))$. Khi đó

$$\int_r F \cdot dr = \int_a^b [P(x(t),y(t))x'(t) + Q(x(t),y(t))y'(t)]\, dt.$$

Ta đưa ra hai tích phân mới:

$$\boxed{\int_r P(x,y)\, dx = \int_a^b P(x(t),y(t))x'(t)\, dt.}$$

$$\boxed{\int_r Q(x,y)\, dy = \int_a^b Q(x(t),y(t))y'(t)\, dt.}$$

Người ta thường viết

$$\int_r F \cdot dr = \int_r P(x,y)\, dx + Q(x,y)\, dy.$$

Một cách hình thức có thể nhớ rằng

$$\boxed{dr = r'(t)\, dt, \quad dx = x'(t)\, dt, \quad dy = y'(t)\, dt.}$$

Đổi biến và sự phụ thuộc vào đường đi. Như đã bàn ở đầu chương, ta rất quan tâm tới việc các kết quả đo đạc có thay đổi hay không nếu ta đi theo những đường đi khác nhau trên cùng một con đường.

Cho $\varphi : [c,d] \to [a,b]$ là một phép vi đồng phôi, tức một phép đổi biến.

Nếu $\varphi'(t) > 0$ với mọi $t \in [c,d]$ ta nói φ *bảo toàn định hướng* (orientation-preserving) . Nếu $\varphi'(t) < 0$ với mọi $t \in [c,d]$ ta nói φ *đảo ngược định hướng* (orientation-reversing)

Nếu $r : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ là một đường đi thì $r \circ \varphi$ là một đường đi cùng vết với r. Ta nói $r \circ \varphi$ và r sai khác một phép đổi biến. Ta có kết quả đơn giản sau đây về sự bất biến của tích phân đường qua một phép đổi biến.

2.1.1. Định lí (Đổi biến trong tích phân đường). (a) *Tích phân đường loại một không thay đổi qua phép đổi biến.*

(b) *Tích phân đường loại hai không thay đổi qua phép đổi biến bảo toàn định hướng.*

(c) *Tích phân đường loại hai đổi dấu qua phép đổi biến đảo ngược định hướng.*

CHỨNG MINH. Cho f là một hàm thực và F là một trường vectơ xác định trên vết của đường $r : [a,b] \to \mathbb{R}^n$. Cho $\varphi : [c,d] \to [a,b]$ là một phép đổi biến. Ta xét trường hợp φ đảo ngược định hướng, trường hợp còn lại là tương tự. Theo Công thức đổi biến của tích phân hàm bội, với phép đổi biến $u = \varphi(t)$ thì

$$\begin{aligned}\int_r f\, ds = \int_a^b f(r(u))|r'(u)|\, du &= \int_c^d f(r(\varphi(t)))|r'(\varphi(t))||\varphi'(t)|\, dt\\ &= \int_c^d f(r(\varphi(t)))|r'(\varphi(t))\varphi'(t)|\, dt\\ &= \int_c^d f(r\circ\varphi(t))|(r\circ\varphi)'(t)|\, dt\\ &= \int_{r\circ\varphi} f\, ds.\end{aligned}$$

Trong khi đó

$$\begin{aligned}\int_r F\cdot dr = \int_a^b F(r(u))\cdot r'(u)\, du &= \int_c^d [F(r(\varphi(t)))\cdot r'(\varphi(t))]|\varphi'(t)|\, dt\\ &= -\int_c^d [F(r(\varphi(t)))\cdot r'(\varphi(t))]\varphi'(t)\, dt\\ &= -\int_c^d F(r\circ\varphi(t))\cdot(r\circ\varphi)'(t)\, dt\\ &= -\int_{r\circ\varphi} F\cdot dr.\end{aligned}$$

□

Ví dụ. Cả hai loại tích phân đường không thay đổi dưới một phép tịnh tiến của biến thời gian $t \mapsto t + c$ với $c \in \mathbb{R}$.

Ví dụ. Với đường đi $r(t)$, $t \in [a, b]$ thì đường $r(a + b - t)$, $t \in [a, b]$, khởi đầu ở $r(b)$ và kết thúc ở $r(a)$, được gọi là *đường ngược* của đường r, kí hiệu là $-r$. Ta nói đường $-r$ trái chiều với đường r. Định lí 2.1.1 nói *nếu đảo ngược định hướng của đường thì tích phân đường loại một không thay đổi trong khi đó tích phân đường loại hai bị đổi dấu.*

Đường đi $r : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ được gọi là *chính qui* (regular) nếu r trơn trên $[a, b]$ và vận tốc $r'(t)$ luôn khác không.

Ghi chú. Trong quyển sách của Stewart [**Ste08**, tr. 1034] thuật ngữ đường trơn chính là thuật ngữ đường chính qui ở đây.

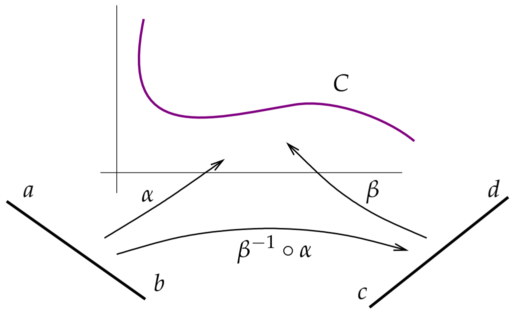
2.1.2. Bổ đề. *Giả sử $\alpha : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ và $\beta : [c, d] \to \mathbb{R}^n$ là hai đường đi đơn chính qui với cùng vết.*

(a) Nếu α và β không đóng thì $\beta^{-1} \circ \alpha : (a, b) \to (c, d)$ là một vi đồng phôi.

(b) Nếu α và β đóng [1], đặt $\beta(t_1) = \alpha(a)$ và $\alpha(s_1) = \beta(c)$, thì $\beta^{-1} \circ \alpha : (a, b) \setminus \{s_1\} \to (c, d) \setminus \{t_1\}$ là một vi đồng phôi.

Chú ý rằng $\alpha = \beta \circ (\beta^{-1} \circ \alpha)$, mệnh đề trên nói rằng hai đường đi đơn chính qui với cùng vết khác biệt bởi một phép đổi biến. Mệnh đề này sẽ được chứng minh ở phần sau. Từ mệnh đề này ta đưa ra định nghĩa về định hướng:

[1] Không còn khả năng khác, vì nếu α đóng thì β cũng phải đóng. Điều này đưa về việc một đường tròn thì không thể đồng phôi với một đoạn thẳng, một kết quả trong môn Tôpô.



Định nghĩa (định hướng). Ta nói hai đường đi đơn chính qui có cùng vết α và β là *có cùng định hướng* nếu phép vi đồng phôi $\beta^{-1}\circ\alpha$ có đạo hàm luôn dương. Ngược lại nếu $\beta^{-1}\circ\alpha$ có đạo hàm luôn âm thì ta nói α và β là *trái định hướng*.

Từ bổ đề 2.1.2 và định lí 2.1.1 ta có kết quả chính của phần này:

Định lí (tích phân trên đường cong). (a) *Tích phân đường loại một dọc theo hai đường đi đơn chính qui có cùng vết thì bằng nhau.*

(b) *Tích phân đường loại hai dọc theo hai đường đi đơn chính qui có cùng vết và cùng định hướng thì bằng nhau.*

(c) *Tích phân đường loại hai dọc theo hai đường đi đơn chính qui có cùng vết nhưng trái định hướng thì đối nhau.*

Như vậy ta có thể nói đến tích phân đường loại một (chẳng hạn chiều dài) trên một *tập điểm*, ví dụ như một đường tròn, một đồ thị, ... nếu tập điểm ấy là vết của một đường đi đơn chính qui nào đó. Trong trường hợp này ta nói vết đó là một *đường cong* (curve).

Để tính tích phân trên một đường cong ta có thể chọn một đường đi đơn chính qui bất kì để thực hiện tính toán. Đối với tích phân đường loại hai thì ta được cho thêm một "định hướng" trên đường cong và ta có thể chọn một đường đi đơn chính qui có cùng định hướng bất kì để tính.

Ví dụ. Giả sử hàm thực f xác định trên khoảng $[a,b]$. Gọi γ là một đường chính qui bất kì đi từ a tới b. Vì khoảng $[a,b]$ cũng là vết của đường đơn chính qui $\alpha(t)=t$ với $t\in[a,b]$ nên

$$\int_\gamma f\,ds=\int_\alpha f\,ds=\int_a^b f(\alpha(t))\alpha'(t)\,dt=\int_a^b f(t)\,dt.$$

Đây chính là tích phân của hàm f trên khoảng $[a,b]$. Vậy tích phân của hàm thực trên khoảng là một trường hợp riêng của tích phân đường loại một.

Ví dụ (chiều dài của đường tròn). Xét đường đi $r(t)=(R\cos t,R\sin t)$, $0\le t\le 2\pi$, một đường đi với tốc độ hằng quanh đường tròn tâm O bán kính R. Chiều dài của đường này là $\int_0^{2\pi}R\,dt=2\pi R$. Nếu ta lấy một đường đi khác $\alpha(t)=(R\cos(2\pi t),R\sin(2\pi t))$, $0\le t\le 1$, thì chiều dài của đường này là $\int_0^1 2\pi R\,dt=2\pi R$.

Bây giờ ta có thể nói chiều dài của đường tròn bằng $2\pi R$, không phụ thuộc vào cách chọn một tham số hóa đơn chính qui để tính.

Liên hệ giữa hai loại tích phân đường. Nếu α và β là hai đường đi đơn chính qui cùng định hướng ứng với đường cong C thì theo 2.1.2 ta có $\alpha(t) = \beta(\varphi(t))$ trong đó $\varphi'(t) > 0$ với $a < t < b$ (trong trường hợp đường đóng ta giả sử hai đường có cùng điểm đầu và điểm cuối). Vì $\alpha'(t) = \beta'(\varphi(t))\varphi'(t)$ nên hai vectơ $\alpha'(t)$ và $\beta'(\varphi(t))$ luôn cùng phương cùng hướng.

Từ đó ta đưa ra định nghĩa *hướng tiếp tuyến* của đường cong được định hướng C, vết của một đường đi đơn chính qui $r(t)$, $a \leq t \leq b$, tại điểm $p = r(t)$, $a < t < b$, là hướng của vectơ vận tốc $r'(t)$. Hướng tiếp tuyến tại một điểm trên đường cong được định hướng không phụ thuộc vào cách chọn đường đi đơn chính qui trên đó.

Tại điểm $p = r(t)$ *vectơ tiếp tuyến cùng chiều đơn vị* được định nghĩa, đó là $T(p) = \frac{r'(t)}{|r'(t)|}$, không phụ thuộc vào cách chọn đường đi r theo định hướng của C.

Nếu F là một trường vectơ trên C thì

$$\begin{aligned}
\int_C F \cdot dr &= \int_a^b F(r(t)) \cdot r'(t)\, dt = \int_a^b \left[F(r(t)) \cdot \frac{r'(t)}{|r'(t)|} \right] |r'(t)|\, dt \\
&= \int_a^b [F(r(t)) \cdot T(r(t))]\, |r'(t)|\, dt = \int_C F \cdot T\, ds.
\end{aligned}$$

Vậy trong trường hợp này tích phân đường loại hai có thể được biểu diễn qua tích phân đường loại một. Biểu thức trên cũng khẳng định lại ý nghĩa của tích phân loại hai, đó là tổng thành phần tiếp tuyến của trường dọc theo đường.

*** Chứng minh bổ đề 2.1.2.** Chứng minh này chứa những kĩ thuật hữu ích mà ta sẽ sử dụng lại sau này. Trước hết ta sẽ cần một bổ đề nhỏ:

2.1.3. Bổ đề. *Giả sử $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ là một đường đơn liên tục và gọi $C = \gamma([a, b])$ là vết của nó. Khi đó γ mang một tập mở trên khoảng (a, b) thành một tập mở trên C.*

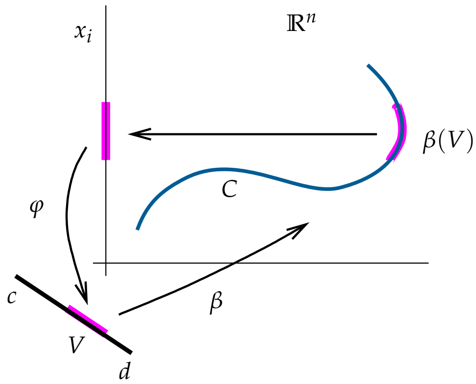
CHỨNG MINH. Giả sử V là một tập con mở của (a, b). Khi đó V cũng mở trên $[a, b]$. Vì $[a, b] \setminus V$ là một tập con đóng của không gian compắc $[a, b]$ nên nó cũng compắc. Do γ liên tục nên tập ảnh $\gamma([a, b] \setminus V)$ cũng compắc. Vì thế $\gamma([a, b] \setminus V)$ đóng trong $\mathbb{R}^n$, và do đó đóng trong C. Mặt khác vì đường γ là đơn nên γ hạn chế lại trên (a, b) là một song ánh, nên có thể kiểm được là $\gamma([a, b] \setminus V) = C \setminus \gamma(V)$. Suy ra $\gamma(V)$ là tập con mở của C. □

Ghi chú. Nếu thêm giả thiết γ không đóng thì ta thấy ngay chứng minh trên vẫn đúng cho mọi tập mở trên $[a, b]$. Khi đó kết quả trên có thể được hiểu theo cách là ánh xạ ngược γ^{-1} cũng liên tục, tức γ là một *phép đồng phôi* (homeomorphism). Nếu γ là đóng thì $\gamma|_{(a,b)}$ là đồng phôi lên vết $C \setminus \{\gamma(a), \gamma(b)\}$.

CHỨNG MINH 2.1.2. Trong cả hai trường hợp của mệnh đề $\beta^{-1} \circ \alpha$ đã là một song ánh (xem thêm 2.1.9). Vì vai trò của hai đường đi là như nhau, nên vấn đề chính là cần chứng minh $\beta^{-1} \circ \alpha$ là hàm trơn. Gọi C là vết của α và β. Ta sẽ chứng minh $\beta|_{(c,d)}$ là một vi đồng phôi lên vết $C' = C \setminus \{\beta(c), \beta(d)\}$ của nó, tức là hàm ngược $\beta^{-1} : C' \to (c, d)$ là trơn. Điều này sẽ cho ngay kết quả.

Viết $\beta(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$. Xét điểm $\beta(t_0)$ với $t_0 \in (c,d)$. Do $\beta'(t_0) = (x_1'(t_0), \dots, x_n'(t_0)) \neq 0$ nên có chỉ số i sao cho $x_i'(t_0) \neq 0$. Áp dụng Định lí hàm ngược cho hàm x_i, có một lân cận mở $V \subset (c,d)$ của t_0 trên đó hàm x_i là một vi đồng phôi. Do đó x_i có hàm ngược trơn $\varphi : x_i(V) \to V$, $\varphi(x_i) = t$. Suy ra với $t \in V$ thì

$$\beta(t) = (x_1(\varphi(x_i)), \dots, x_{i-1}(\varphi(x_i)), x_i, x_{i+1}(\varphi(x_i)), \dots, x_n(\varphi(x_i))).$$



Như vậy $\beta(V)$ là đồ thị của một hàm theo biến x_i. Trên $\beta(V)$ thì ánh xạ ngược β^{-1} trùng với hợp của ánh xạ chiếu xuống tọa độ thứ i và ánh xạ φ:

$$\begin{array}{ccccc} \beta(V) & \xrightarrow{p_i} & x_i(V) & \xrightarrow{\varphi} & V \\ (x_1, x_2, \dots, x_n) & \mapsto & x_i & \mapsto & t. \end{array}$$

Theo bổ đề 2.1.3, $\beta(V)$ là một tập mở trên C', do đó có một tập mở U của $\mathbb{R}^n$ sao cho $\beta(V) = U \cap C'$. Do ánh xạ chiếu p_i xác định và trơn trên U, nên có thể được mở rộng thành hàm $\varphi \circ p_i$ xác định và trơn trên U. Vậy β^{-1} là trơn tại $\beta(t_0)$. □

Bài tập.

2.1.4. Tính chiều dài của đường $r(t) = (2\sqrt{2}t, e^{-2t}, e^{2t})$, $0 \leq t \leq 1$.

2.1.5. (a) Một vật di chuyển trong trường trọng lực của Quả đất từ một điểm có cao độ 100 mét đến một điểm có cao độ 200 mét. Hỏi công của trọng lực là âm, bằng không, hay dương?

(b) Cho C là một đường và n là vectơ pháp tuyến. Hỏi $\int_C n \cdot d\vec{r}$ là âm, bằng không, hay dương?

2.1.6. Một sợi dây với hai đầu cố định dưới tác động của trọng trường sẽ có hình dạng một đường xích (catenary) với phương trình $y = a\cosh\left(\frac{x}{a}\right)$, với cosh là hàm hyperbolic cosine cho bởi $\cosh x = (e^x + e^{-x})/2$.

Đài tưởng niệm Gateway Arch ở Saint Louis nước Mỹ có dạng một đường xích đảo ngược. Vị trí điểm tâm hình học (centroid) của cổng được thiết kế theo công thức $y = 693.8597 - 68.7672\cosh 0.0100333x$ với y là khoảng cách tới mặt đất và $-299.2239 \leq x \leq 299.2239$, đơn vị đo là feet.

(a) Hãy tính chiều dài của đường tâm hình học.

HÌNH 2.1.2. Gateway Arch.

(b)* Mỗi mặt cắt vuông góc với đường tâm hình học là một tam giác đều chỉ xuống đất. Diện tích của mặt cắt này là $125.1406 \cosh 0.0100333x$. Hãy tính thể tích của Gateway Arch.

2.1.7. Cầu Akashi-Kaikyo ở Nhật Bản hiện là cây cầu treo dài nhất thế giới. Hai tháp cao

HÌNH 2.1.3. Cầu Akashi-Kaikyo.

297m tính từ mặt biển. Chiều dài nhịp chính (khoảng cách giữa hai tháp) là 1991m. Mỗi sợi cáp chính có dạng một đường parabola. Điểm thấp nhất của sợi cáp chính cách mặt biển khoảng 97m. Hãy tính chiều dài của một sợi cáp chính, bằng tính chính xác hoặc tính xấp xỉ.

2.1.8. Cho đường đi chính qui $r : [a, b] \to \mathbb{R}^n$. Đặt

$$s(t) = \int_a^t |r'(u)|\, du.$$

Hàm s được gọi là *hàm chiều dài* (arc-length function) của r. Đặt chiều dài của r là $l = s(b)$.

(a) Chứng tỏ hàm $s(t)$ có hàm ngược trơn. Gọi hàm đó là $t(s)$, $0 \leq s \leq l$.

(b) Kiểm tra rằng đường $\alpha(s) = r(t(s))$ có cùng vết với đường r. Chứng tỏ tốc độ của α luôn là 1.

Việc thay r bởi α được gọi là *tham số hóa lại theo chiều dài* (reparametrization by arc-length). Chú ý rằng $\frac{ds}{dt}(t) = |r'(t)|$. Điều này thường được viết dưới dạng kí hiệu là $ds = |r'(t)|dt$.

2.1.9. Liên quan tới phần chứng minh của 2.1.2: Chứng minh rằng nếu $\psi : [a, b] \to [c, d]$ là một song ánh liên tục thì $\psi(a) = c$ và $\psi(b) = d$, hoặc $\psi(a) = d$ và $\psi(b) = c$. Suy ra nếu α và β là hai đường đi liên tục, đơn, không đóng, có cùng vết, thì chúng có cùng tập điểm đầu và điểm cuối, tức là $\{\alpha(a), \alpha(b)\} = \{\beta(c), \beta(d)\}$.

2.2. Trường bảo toàn

Định nghĩa. Một trường vectơ F được gọi là *bảo toàn* (conservative) nếu có hàm thực f, gọi là *hàm thế* (potential function) của F, sao cho $\nabla f = F$.

Vectơ $\nabla f(x)$ đại diện cho đạo hàm $f'(x)$, vì thế ta có thể hiểu là $f' = F$: hàm thế f chính là một "nguyên hàm" (antiderivative) của trường F.

Trường hằng Giả sử $c \in \mathbb{R}^n$ và F là trường trên $\mathbb{R}^n$ cho bởi $F(x) = c$.

Định lí (công thức Newton-Leibniz). *Giả sử r là một đường đi trơn bắt đầu ở A và kết thúc ở B. Cho f là một hàm thực trơn trên một tập mở chứa vết của r. Khi đó:*

$$\boxed{\int_r \nabla f \cdot dr = f(B) - f(A).}$$

Định lí trên có một hệ quả là tích phân $\int_r \nabla f \cdot dr$ không phụ thuộc vào sự lựa chọn đường đi r từ điểm A tới điểm B. Ta nói tích phân này là *độc lập với đường đi.*

Công thức trên có thể được hiểu như:

$$\int_A^B f' = f(B) - f(A).$$

Đây là dạng tổng quát hóa của công thức Newton-Leibniz của hàm một biến.

CHỨNG MINH. Giả sử $r : [a, b] \to \mathbb{R}^n$, $r(a) = A$ và $r(b) = B$. Khi đó theo công thức Newton-Leibniz của hàm một biến:

$$\int_r \nabla f \cdot dr = \int_a^b \nabla f(r(t)) \cdot r'(t)\, dt = \int_a^b \frac{d}{dt}(f \circ r)(t)\, dt = f \circ r(b) - f \circ r(a).$$

□

Hệ quả (tích phân của trường bảo toàn chỉ phụ thuộc vào điểm đầu và điểm cuối của đường đi). *Nếu F là một trường bảo toàn liên tục trên miền D thì tích phân của F trên một đường đi trơn trong D chỉ phụ thuộc vào điểm đầu và điểm cuối của đường đi.*

Hệ quả (tích phân của trường bảo toàn trên đường đi đóng thì bằng không). *Nếu F là một trường bảo toàn liên tục trên miền D thì tích phân của F trên một đường đi trơn đóng trong D bằng không.*

Những kết quả trong phần trên có thể được mở rộng cho các đường trơn từng khúc.

Ý nghĩa vật lí của khái niệm trường bảo toàn.

Ví dụ. Xét vật có khối lượng m ở trong không gian gần bề mặt quả đất. Ta giả sử trọng trường không đổi trong phần không gian này. Nếu ta đặt trục z vuông góc với mặt đất, chỉ ra ngoài, và gốc tọa độ trên mặt đất thì trọng lực tác động lên vật là $\vec{F} = -mg\vec{k} = (0, 0, -mg)$ trong đó $g \approx 9{,}8\ \mathrm{m/s^2}$ là hằng số trọng trường gần mặt đất. Ta tìm được hàm thế của trường này có dạng $f(z) = -mgz + C$. Trong Vật lí ta thường cho thế năng của vật ở trên mặt đất là dương, còn thế năng tại mặt đất bằng 0, do đó thế năng của vật được cho bởi hàm $U(z) = mgz$. Như vậy hàm thế trong Vật lí là đối của hàm thế trong Toán.

Ví dụ (trường trọng lực). Giả sử một vật có khối lượng M nằm ở gốc tọa độ trong $\mathbb{R}^3$, và một vật có khối lượng m nằm ở điểm $\vec{r} = (x, y, z)$. Theo cơ học Newton, vật có khối lượng m sẽ chịu tác động của lực hấp dẫn từ vật có khối lượng M bằng

$$F(\vec{r}) = -\frac{mMG}{|\vec{r}|^3}\vec{r}.$$

Ta tìm một nguyên hàm cho F bằng cách giải hệ phương trình

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = -mMG\frac{x}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) = -mMG\frac{y}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} \\ \frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = -mMG\frac{z}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}. \end{cases}$$

Từ phương trình thứ nhất, lấy tích phân theo x ta được

$$f(x,y,z) = \int -mMG\frac{x}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\,dx = \frac{mMG}{(x^2+y^2+z^2)^{1/2}} + C(y,z).$$

Thay vào hai phương trình còn lại, ta được $C(y,z)$ thực sự chỉ là một hằng số C. Vậy trường trọng lực là một trường bảo toàn với một hàm thế là $f(\vec{r}) = \frac{mMG}{|\vec{r}|}$.

Giả sử một vật di chuyển dưới tác dụng của *tổng lực* F. Giả sử trường F là bảo toàn với f là một hàm thế. Giả sử vị trí của vật ở thời điểm t là $r(t)$. Giả sử $r(t_0) = x_0$ và $r(t_1) = x_1$. Ta định nghĩa:

Động năng (kinetic energy) (năng lượng từ chuyển động) của vật là $K(t) = \frac{1}{2}m|r'(t)|^2$.

Thế năng (potential energy) (năng lượng từ vị trí) của vật là $U(x) = -f(x)$.

Theo định lí cơ bản của tích phân đường:

$$\int_{x_0}^{x_1} F \cdot dr = f(x_1) - f(x_0) = -(U(x_1) - U(x_0)).$$

Vậy công của trường bằng đối của biến thiên thế năng.

Mặt khác theo cơ học Newton: $F = ma = mr''$. Do đó:

$$\int_{x_0}^{x_1} F \cdot dr = \int_{t_0}^{t_1} F(r(t)) \cdot r'(t)\,dt = \int_{t_0}^{t_1} mr''(t) \cdot r'(t)\,dt.$$

Bây giờ chú ý hệ thức $(r' \cdot r')' = r'' \cdot r' + r' \cdot r'' = 2r'' \cdot r'$, hay $r'' \cdot r' = \frac{1}{2}(|r'|^2)'$, ta biến đổi

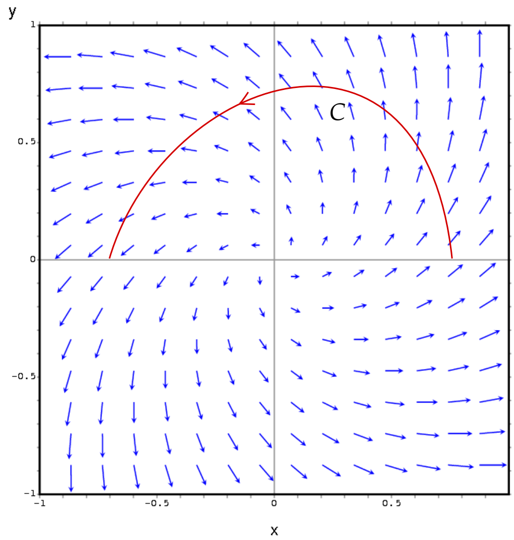
$$\begin{aligned} \int_{x_0}^{x_1} F \cdot dr &= \int_{t_0}^{t_1} m\frac{1}{2}(|r'(t)|^2)'\,dt \\ &= \frac{1}{2}m|r'(t_1)|^2 - \frac{1}{2}m|r'(t_0)|^2 = K(t_1) - K(t_0). \end{aligned}$$

Vậy công của trường bằng biến thiên động năng.

Ta kết luận $K(t) + U(r(t))$ không đổi, vậy *tổng động năng và thế năng, tức năng lượng cơ học, được bảo toàn trong quá trình chuyển động trong trường bảo toàn.*

Bài tập.

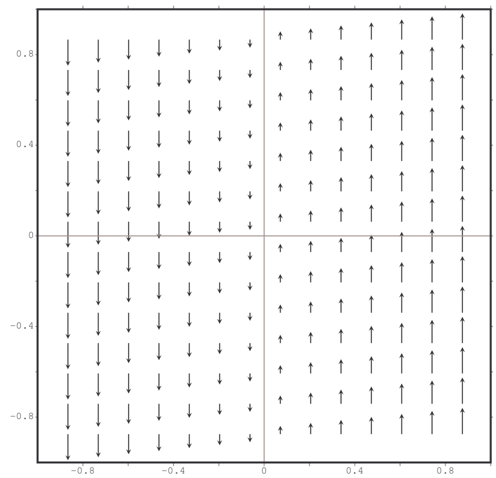
2.2.1. Dưới đây là hình vẽ của trường vectơ F quanh điểm $(0,0)$:



(a) Ước đoán trường F có bảo toàn không?

(b) Ước đoán tích phân của trường F dọc theo đường C là âm, dương hay bằng 0?

2.2.2. Ước đoán trường sau đây có bảo toàn không?



2.2.3. Tìm một hàm $f(x,y,z)$ sao cho $f(0,0,0) = 6$ và $\nabla f(x,y,z) = (2y, 2x, e^z)$.

2.2.4. Cho C là đường $y = x^3$ từ điểm $(0,0)$ tới điểm $(1,1)$.

(a) Tính $\int_C 3y\,dx + 2x\,dy$.

(b) Dùng câu (a), tính $\int_C (3y + ye^x)\,dx + (2x + e^x + e^y)\,dy$.

2.2.5. Tính công của trường lực $F(x,y,z) = (2, 3y, 4z^2)$ khi mang điểm $(1,1,1)$ tới điểm $(1,0,0)$.

2.2.6 (điện trường). Định luật Coulomb[2] là một định luật của vật lí có được từ thực nghiệm được phát biểu như sau: Nếu trong $\mathbb{R}^3$ có hai điện tích q_1 và q_2 thì điện tích q_1 sẽ tác động

[2]Định luật này được phát biểu lần đầu tiên bởi Charles Coulomb năm 1785.

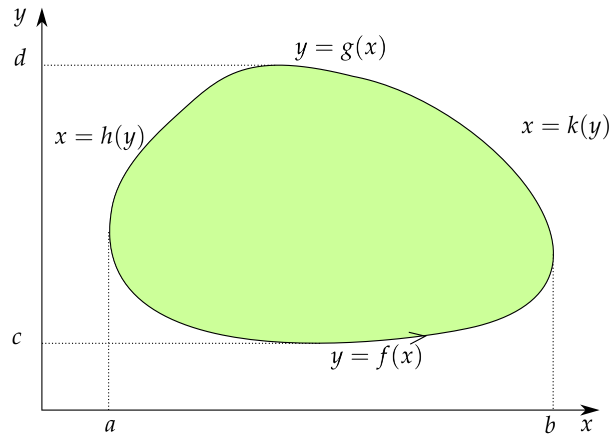
lên điện tích q_2 một lực bằng
$$F(\vec{r}) = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 |\vec{r}|^3}\vec{r},$$
trong đó $\vec{r}$ là vectơ từ điểm mang điện tích q_1 sang điểm mang điện tích q_2, và ϵ_0 là một hằng số. Để đơn giản ta giả sử điện tích q_1 nằm ở gốc tọa độ, khi đó $\vec{r} = (x, y, z)$ là vị trí của điện tích q_2. Chứng tỏ điện trường là một trường bảo toàn.

2.2.7. Chứng tỏ hai hàm thế bất kì của cùng một trường xác định trên một miền mở liên thông sai khác nhau một hằng số. Điều này có cùng đúng không nếu bỏ giả thiết miền liên thông?

2.3. Định lí Green

Trong phần này ta chỉ làm việc trên trên mặt phẳng Euclid hai chiều $\mathbb{R}^2$.

Định lí Green cho miền đơn giản. Giả sử D là một miền đơn giản có biên trơn từng khúc trên $\mathbb{R}^2$. Cụ thể, như là một miền đơn giản theo chiều thẳng đứng, D có dạng $D = \{(x,y) \mid a \leq x \leq b, f(x) \leq y \leq g(x)\}$ trong đó $f(x)$ và $g(x)$ là hàm trơn, trong khi đó theo chiều nằm ngang thì $D = \{(x,y) \mid c \leq y \leq d,\ h(y) \leq x \leq k(y)\}$ trong đó $h(y)$ và $k(y)$ là hàm trơn.



Biên của miền D được định hướng dương như sau. Một cách trực quan, *biên được định hướng sao cho một đường đi trên biên theo hướng đã chọn thì miền nằm bên tay trái của đường đi*. Một cách chính xác, ∂D được định hướng cùng chiều với định hướng của các đường đi $\gamma_1(x) = (x, f(x)), a \leq x \leq b$ và $-\gamma_2$ với $\gamma_2(x) = (x, g(x))$, $a \leq x \leq b$.

2.3.1. Định nghĩa (trơn). Nếu x là một *điểm biên* của thuộc miền xác định của hàm f thì ta nói f là *trơn* tại x nếu có một lân cận mở của x trong $\mathbb{R}^n$ trên đó f có thể được mở rộng thành một hàm trơn theo nghĩa đã biết ở 1.5, tức là có các đạo hàm riêng liên tục.

Theo định nghĩa ở 2.3.1 các đạo hàm riêng của hàm trơn không nhất thiết được xác định tại các điểm biên, vì có thể có nhiều cách mở rộng hàm. Tuy nhiên chẳng hạn trong trường hợp miền xác định D là bao đóng của một tập mở có thể thấy rằng nếu f trơn trên D thì các đạo hàm riêng của f được xác định và liên tục trên D.

Định lí (Định lí Green cho miền đơn giản). *Cho D là một miền đơn giản với biên trơn từng khúc được định hướng dương. Giả sử (P, Q) là một trường vectơ trơn trên D. Khi đó:*

$$\boxed{\int_{\partial D} P\,dx + Q\,dy = \iint_D \left[\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right] dA.}$$

CHỨNG MINH. Ta có:

$$\int_{\partial D} P\,dx = \int_{\gamma_1} P\,dx + \int_{\gamma_2} P\,dx - \int_{\gamma_3} P\,dx - \int_{\gamma_4} P\,dx$$
$$= \int_a^b P(x, f(x))\,dx - \int_a^b P(x, g(x))\,dx.$$

Xem D là miền đơn giản theo chiều thẳng đứng, do các đạo hàm riêng của trường là liên tục trên D nên ta có

$$\iint_D -\frac{\partial P}{\partial y}\,dA = -\int_a^b \left(\int_{f(x)}^{g(x)} \frac{\partial P}{\partial y}\,dy\right)\,dx$$
$$= \int_a^b [P(x, f(x)) - P(x, g(x))]\,dx.$$

Vậy

$$\int_{\partial D} P\,dx = \iint_D -\frac{\partial P}{\partial y}\,dA.$$

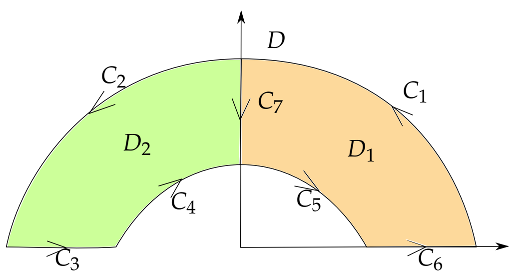
Tương tự, xem D là miền đơn giản theo chiều nằm ngang, ta được

$$\int_{\partial D} Q\,dy = \iint_D \frac{\partial Q}{\partial x}\,dA.$$

Cộng lại ta được kết quả. □

Đối với một miền không đơn giản nhưng có thể được phân chia thành một hội của hữu hạn những miền đơn giản với những phần chung chỉ nằm trên biên, ta có thể áp dụng công thức Green cho từng miền đơn giản rồi cộng lại.

Ví dụ. Công thức Green vẫn đúng cho miền $D = \{(x, y) \mid 1 \leq x^2 + y^2 \leq 2,\ y \geq 0\}$, mặc dù miền này không phải là một miền đơn giản.



Chia D thành hội của hai miền đơn giản D_1 và D_2 được miêu tả trong hình vẽ. Chú ý rằng khi được định hướng dương ứng với D_2 thì đường C_7 được định hướng ngược lại, trở thành $-C_7$. Áp dụng Công thức Green cho D_1 và D_2 ta được:

$$\begin{aligned}\iint_D \left[\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right] dA &= \iint_{D_1} \left[\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right] dA + \iint_{D_2} \left[\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right] dA \\ &= \left(\int_{C_1} F \cdot dr + \int_{C_7} F \cdot dr + \int_{C_5} F \cdot dr + \int_{C_6} F \cdot dr\right) + \\ &\quad + \left(\int_{C_2} F \cdot dr + \int_{C_3} F \cdot dr + \int_{C_4} F \cdot dr + \int_{-C_7} F \cdot dr\right). \\ &= \int_{C_1} F \cdot dr + \int_{C_2} F \cdot dr + \int_{C_3} F \cdot dr + \int_{C_4} F \cdot dr + \\ &\quad + \int_{C_5} F \cdot dr + \int_{C_6} F \cdot dr \\ &= \int_{\partial D} F \cdot dr.\end{aligned}$$

Một khó khăn khi muốn phát biểu công thức Green cho những miền tổng quát hơn là việc định nghĩa một cách chính xác những khái niệm xuất hiện trong công thức, như thế nào là định hướng dương của biên, khi nào thì biên của một miền là một đường, khi nào thì một đường bao một miền, ... Một phát biểu và chứng minh sơ cấp của công thức Green cho miền tổng quát hơn có trong quyển sách của Kellogg [**Kel29**, tr. 119] xuất bản năm 1929, ở đó công thức được chứng minh cho một miền không đơn giản bằng cách xấp xỉ miền đó bằng những miền là hội của hữu hạn miền đơn giản, sau đó qua giới hạn. Ngày nay công thức Green thường được xét như là một trường hợp riêng của công thức Stokes tổng quát cho không gian nhiều chiều mà ta sẽ nghiên cứu ở phần sau.

Điều kiện để trường vectơ phẳng là bảo toàn.

Định lí. *Nếu trường $F = (P, Q)$ trơn và bảo toàn trên một tập mở chứa tập $D \subset \mathbb{R}^2$ thì trên D ta có*

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

Chứng minh. Giả sử f là hàm thế của F. Khi đó $\frac{\partial f}{\partial x} = P$ và $\frac{\partial f}{\partial y} = Q$. Với giả thiết về tính trơn như trên thì các đạo hàm riêng của P và Q tồn tại và liên tục trên D, hơn nữa $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ và $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$. Vì $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ và $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ tồn tại và liên tục nên chúng bằng nhau, do đó $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$. □

2.3.2. Ví dụ (điều kiện $P_y = Q_x$ chỉ là điều kiện cần, không phải là điều kiện đủ). Xét trường

$$F(x, y) = (P(x, y), Q(x, y)) = \left(\frac{-y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2}\right).$$

Ta có $\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x}$ trên trên miền xác định là mặt phẳng bỏ đi điểm $(0, 0)$. Mặt khác, tính toán trực tiếp cho thấy nếu C là đường tròn bán kính đơn vị tâm tại $(0, 0)$ ngược chiều kim đồng hồ thì $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = 2\pi$ khác 0. Vậy $\vec{F}$ không phải là một trường vectơ bảo toàn trên miền xác định của nó. Xem thêm ở 2.3.11.

Một tập $D \subset \mathbb{R}^n$ được gọi là một *miền hình sao* (star-shaped region) nếu có một điểm $p_0 \in D$ sao cho với mọi điểm $p \in D$ thì đoạn thẳng nối p_0 và p được chứa trong D.

Ví dụ. $\mathbb{R}^n$ là một miền hình sao.

Một tập con lồi của $\mathbb{R}^n$ là một miền hình sao.

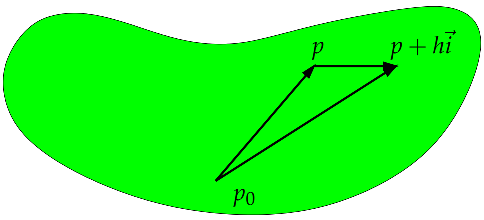
$\mathbb{R}^n$ trừ đi một điểm không là miền hình sao.

Dưới đây là một điều kiện đủ để trường là bảo toàn:

2.3.3. Định lí (Bổ đề Poincaré). *Giả sử $F = (P, Q)$ là một trường vectơ trơn trên miền mở hình sao $D \subset \mathbb{R}^2$. Nếu $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ trên D thì F là bảo toàn trên D.*

CHỨNG MINH. Để gợi ý, ở đây ta dùng kí hiệu $\int_{p_0}^{p} F \cdot dr$ để chỉ tích phân của F trên đoạn thẳng $p_0 + t(p - p_0)$, $0 \le t \le 1$, nối điểm p_0 với điểm p. Đặt

$$f(p) = \int_{p_0}^{p} F \cdot dr.$$



HÌNH 2.3.1. Miền hình sao.

thì đây chính là một hàm thế của F. Ta sẽ kiểm tra rằng $\frac{\partial f}{\partial x} = P$, chứng minh $\frac{\partial f}{\partial y} = Q$ là tương tự. Theo định nghĩa của đạo hàm, với $\vec{i} = (1, 0)$, ta có:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(p) = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \left[\int_{p_0}^{p+h\vec{i}} F \cdot dr - \int_{p_0}^{p} F \cdot dr \right].$$

Chú ý do D mở nên nếu h đủ nhỏ thì điểm $p + h\vec{i}$ sẽ nằm trong D. Nếu ba điểm p_0, p và $p + h\vec{i}$ không cùng nằm trên một đường thẳng thì chúng tạo thành một tam giác. Tam giác này là một miền đơn giản do đó ta có thể áp dụng định lí Green cho miền này, dùng giả thiết $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$, ta được tích phân đường trên biên của tam giác bằng 0, tức là

$$\int_{p_0}^{p+h\vec{i}} F \cdot dr - \int_{p_0}^{p} F \cdot dr = \int_{p}^{p+h\vec{i}} F \cdot dr.$$

Công thức này cũng đúng nếu ba điểm là thẳng hàng.

Viết $p = (x, y)$, và lấy đường đi thẳng từ p tới $p + h\vec{i}$ là $r(t) = (x + t, y)$ với $0 \le t \le h$, ta được

$$\int_{p}^{p+h\vec{i}} F \cdot dr = \int_{x}^{x+h} P(t, y)\, dt.$$

Do đó

$$\frac{\partial f}{\partial x}(p) = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \int_x^{x+h} P(t,y)\, dt = P(x,y).$$

Đẳng thức cuối cùng là một kết quả quen thuộc trong Giải tích 1, có thể được kiểm dễ dàng sử dụng việc hàm P liên tục theo x, xem 2.3.15. □

Nếu có một trường (P,Q) mà $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ nhưng lại không bảo toàn thì bổ đề Poincaré cho biết miền xác định của trường không phải là một miền hình sao. Như vậy một giả thiết giải tích đã đưa đến một kết luận hình học.

Kết luận của bổ đề Poincaré vẫn đúng nếu thay miền hình sao bởi miền tổng quát hơn gọi là *miền đơn liên* (simply connected), đại khái là miền chỉ gồm một mảnh không có lỗ thủng. Để trình bày chính xác cần vượt ra ngoài phạm vi môn học này, xem **[Sja06]**.

Ta thấy chứng minh của bổ đề Poincaré vẫn đúng nếu luôn tồn tại đường đi từ điểm p_0 tới điểm p, không nhất thiết phải là đường thẳng, và tích phân $\int_{p_0}^{p} F \cdot dr$ chỉ phụ thuộc vào điểm đầu p_0 và điểm cuối p. Từ đó ta có một tiêu chuẩn nữa:

Định lí. *Giả sử $F = (P,Q)$ là một trường vectơ trơn trên miền mở liên thông đường $D \subset \mathbb{R}^2$. Nếu tích phân đường của F trên D chỉ phụ thuộc vào điểm đầu và điểm cuối của đường đi thì F là bảo toàn trên D.*

Bài tập.

2.3.4. Cho C là biên của hình vuông $[0,1]^2 \subset \mathbb{R}^2$ định hướng theo chiều kim đồng hồ. Tính tích phân $\int_C x^3\, dx + (x + \sin(2y))\, dy$.

2.3.5. Cho $F(x,y) = 2xy\vec{i} + x^2\vec{j}$. Gọi T là tam giác với các đỉnh $(0,0)$, $(0,1)$, $(1,1)$, định hướng ngược chiều kim đồng hồ. Giải thích tại sao $\int_T F \cdot d\vec{r} = 0$ bằng 3 cách.

2.3.6. Cho $F(x,y) = (x^2 + y, x + \sqrt{y^4 + y^2 + 1})$. Trường này có bảo toàn không? Gọi $C(t) = (1 - \cos^3 t, \sin 2t)$, $0 \le t \le \pi$. Tính $\int_C F \cdot d\vec{r}$.

2.3.7. Cho $F(x,y) = (y - 2xye^{-x^2}, e^{-x^2} + y)$. Tính tích phân của trường này trên nửa đường tròn đơn vị đi từ $(1,0)$ tới $(0,1)$.

2.3.8. Gọi D là một miền trên đó công thức Green có thể áp dụng được. Chứng tỏ diện tích của D có thể được tính theo công thức

$$|D| = -\int_{\partial D} y\, dx = \int_{\partial D} x\, dy = \frac{1}{2}\int_{\partial D} x\, dy - y\, dx.$$

2.3.9. Cho đường cong trong mặt phẳng (x,y) viết bằng phương trình dùng tọa độ cực $r = 4 + 3\cos(11\theta)$, với $0 \le \theta \le 2\pi$ (xem hình 1.5.5). Dùng 2.3.8, hãy tính diện tích của miền được bao bởi đường cong này.

2.3.10. Cho đường cong hình sao (astroid) $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = 2^{\frac{2}{3}}$.

(a) Vẽ đường này.

(b) Tính diện tích của miền bao bởi đường cong trên bằng cách dùng tích phân bội.

(c) Tính diện tích miền này bằng cách dùng tích phân đường, dùng tham số hóa của đường astroid: $x = 2\cos^3\theta,\ y = 2\sin^3\theta$.

2.3.11 (tiếp tục 2.3.2). Trên mặt phẳng Oxy, xét trường

$$F(x,y) = \left(\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}\right).$$

(a) Kiểm tra rằng nếu $x \neq 0$ thì F có một hàm thế là $\theta = \arctan \frac{y}{x}$, với θ chính là biến góc trong tọa độ cực. Người ta thường viết một cách hình thức

$$d\theta = \frac{-y}{x^2+y^2}dx + \frac{x}{x^2+y^2}dy.$$

(b) Có thể mở rộng θ thành một hàm trơn trên toàn miền xác định của F không?

(c) Tích phân $\frac{1}{2\pi}\int_C d\theta$ được gọi *số vòng* (winding number), tính theo chiều ngược chiều kim đồng hồ, của đường đi C quanh điểm O.
Chứng tỏ số vòng của đường đi $(\cos t, \sin t)$, $0 \le t \le 2n\pi$ đúng bằng n.

(d) Tại sao F không có hàm thế trên miền xác định?

2.3.12. Trên mặt phẳng Oxy, xét trường

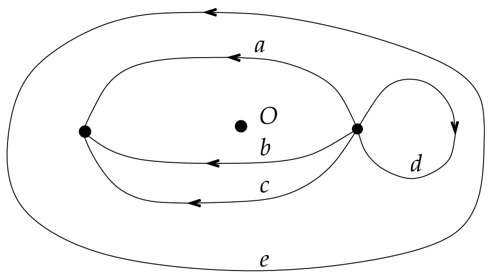
$$F(x,y) = (P(x,y), Q(x,y)) = \left(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{y}{x^2+y^2}\right).$$

(a) Kiểm tra rằng $P_y = Q_x$ trên miền xác định của F.

(b) Chứng tỏ F bảo toàn trên miền xác định. Điều này có gì mâu thuẫn với 2.3.2 hoặc 2.3.3 hay không?

2.3.13. Cho $F(x,y) = \left(\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}\right)$. Cho C_1 là đường e-líp $9x^2 + 4y^2 = 36$ và C_2 là đường tròn $x^2 + y^2 = 1$, đều được định hướng cùng chiều kim đồng hồ. Chứng tỏ tích phân của F trên C_1 và trên C_2 là bằng nhau và tính chúng.

2.3.14. Cho $\vec{F} = (P, Q)$ là trường vectơ xác định trên mặt phẳng trừ điểm O, không xoay (nghĩa là $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ tại mọi điểm).



Giả sử $\int_a \vec{F} \cdot d\vec{r} = 1$ và $\int_b \vec{F} \cdot d\vec{r} = 2$ (xem hình). Hãy tính tích phân của $\vec{F}$ trên c, d, và e.

2.3.15. Liên quan tới phần chứng minh của 2.3.3, hãy kiểm tra: Nếu $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ liên tục và $x \in [a,b]$ thì $\lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)\, dt = f(x)$. Hãy chỉ ra rằng định lí cơ bản của Vi Tích phân hàm một biến nói rằng $\int_a^x f(t)\, dt$ là một nguyên hàm của f trên $[a,b]$ là một hệ quả của kết quả trên.

2.3.16. * Chứng minh vết của một đường đi trơn trên mặt phẳng có diện tích không. Định lí đường cong Jordan trong Tôpô nói rằng một đường liên tục, đơn, đóng trong mặt phẳng bao một miền liên thông bị chặn. Do đó một đường đi trơn, đơn, đóng thì bao một miền có diện tích.

Chương 3

Tích phân mặt

3.1. Tích phân mặt

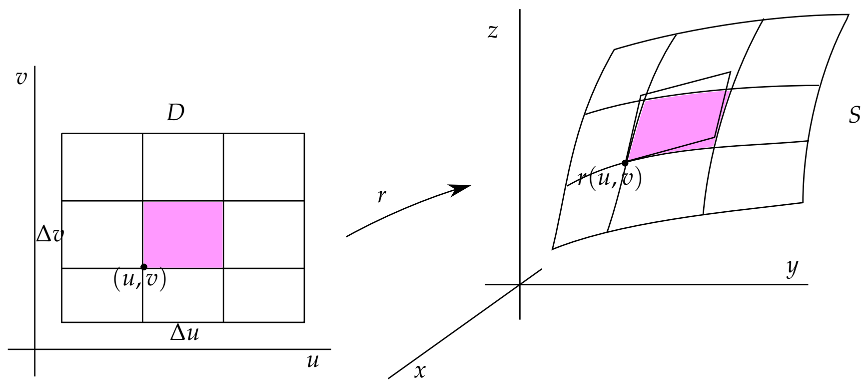
Mặt. Giống như đường, đối với chúng ta một *mặt* (surface) là một ánh xạ r từ một tập con D của $\mathbb{R}^2$ vào $\mathbb{R}^3$. Tập ảnh $r(D)$ được gọi là *vết* của mặt.

Ví dụ. Nửa trên của mặt cầu là vết của mặt $(x, y, z = \sqrt{1 - x^2 - y^2})$ với $x^2 + y^2 \leq 1$ (tọa độ Euclid). Đó cũng là vết của mặt $(\sin\phi\cos\theta, \sin\phi\sin\theta, \cos\phi)$ với $0 \leq \theta \leq 2\pi$ và $0 \leq \phi \leq \pi$ (tọa độ cầu).

Mặt $r : D \to \mathbb{R}^3$ được gọi là *trơn* (smooth) nếu r là ánh xạ trơn.

Ví dụ. Cho hàm thực f trơn trên một tập mở chứa D thì mặt $r(x, y) = (x, y, f(x, y))$ với $(x, y) \in D$ là trơn, với vết là đồ thị $z = f(x, y)$.

Diện tích mặt. Cho mặt $r : D \to \mathbb{R}^3$. Với một phép chia của D ta có một phép chia của mặt thành những mảnh nhỏ. Một hình chữ nhật con với kích thước $\Delta u \times \Delta v$ sẽ được mang thành một mảnh trên mặt được xấp xỉ tuyến tính bằng hình bình hành xác định bởi các vectơ $r_u(u, v)\Delta u$ và $r_v(u, v)\Delta v$. Diện tích của hình bình hành này được cho bởi độ lớn của tích có hướng của hai vectơ này, tức là $|r_u(u, v) \times r_v(u, v)|\Delta u \Delta v$.



Từ đó ta đưa ra định nghĩa:

Định nghĩa. Diện tích của mặt $r : D \to \mathbb{R}^3$ là

$$\iint_D |r_u \times r_v| \, dA.$$

Ghi chú. Trong tính toán ta có thể dùng công thức

$$|u \times v| = \sqrt{|u|^2|v|^2 - \langle u, v\rangle^2} = \sqrt{\langle u, u\rangle \langle v, v\rangle - \langle u, v\rangle^2}.$$

Ví dụ. Giả sử $f : D \to \mathbb{R}$ là một hàm trơn trên một tập mở chứa D. Xét mặt $r(x,y) = (x,y,f(x,y))$ có vết là đồ thị của hàm f. Diện tích của mặt này là

$$\iint_D \sqrt{1+f_x^2+f_y^2}\,dA.$$

Tích phân mặt loại một. Cho mặt $r : D \to \mathbb{R}^3$ với vết $S = r(D)$. Cho f là một hàm thực trên S.Ta muốn tính *tổng giá trị của hàm trên mặt.* Lí luận như trong phần diện tích mặt, trên mỗi mảnh con trên mặt ta xấp xỉ tuyến tính diện tích của mảnh con bằng diện tích của một hình bình hành, bằng $|r_u(u,v) \times r_v(u,v)|\Delta u\Delta v$, và xấp xỉ giá trị của hàm f bằng giá trị của nó tại một điểm $r(u,v)$. Từ đó ta đưa ra định nghĩa:

Định nghĩa. Cho mặt $r : D \to \mathbb{R}^3$ với vết $S = r(D)$. Cho $f : S \to \mathbb{R}$. Tích phân mặt loại một của f trên r là

$$\boxed{\iint_r f\,dS = \iint_D f(r(u,v))|r_u(u,v) \times r_v(u,v)|\,dA.}$$

Ví dụ. Nếu $f \equiv 1$ thì $\iint_r 1\,dS$ chính là diện tích của mặt r được định nghĩa ở trên.

Ví dụ. Giả sử $f : D \to \mathbb{R}$ là một hàm trơn trên một tập mở chứa D. Xét mặt $r(x,y) = (x,y,f(x,y))$ có vết là đồ thị S của hàm f. Giả sử $g : S \to \mathbb{R}$. Khi đó tích phân của g trên r là

$$\iint_r g\,dS = \iint_D g(x,y,f(x,y))\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}\,dA.$$

Ghi chú. Trong các tài liệu khác tích phân mặt loại 1 còn được kí hiệu bằng $\int_S f\,d\sigma$, $\int_S f\,d\Sigma$.

Tích phân mặt loại hai. Cho mặt $r : D \to \mathbb{R}^3$ với vết $S = r(D)$. Cho F là một trường vectơ trên S, tức $F : S \to \mathbb{R}^3$. Ta muốn tính *tổng của thành phần pháp tuyến của trường trên mặt*.

Như trong tích phân mặt loại một, diện tích của một mảnh con của mặt được xấp xỉ bởi diện tích hình bình hành $|r_u(u,v) \times r_v(u,v)|\Delta u\Delta v$.

Trên mảnh con trường F được xấp xỉ bằng giá trị của nó tại điểm $r(u,v)$. Vectơ pháp tuyến đơn vị của mặt tại điểm $r(u,v)$ là

$$\frac{r_u(u,v) \times r_v(u,v)}{|r_u(u,v) \times r_v(u,v)|}.$$

Thành phần pháp tuyến của vectơ $F(r(u,v))$ là số thực

$$F(r(u,v)) \cdot \frac{r_u(u,v) \times r_v(u,v)}{|r_u(u,v) \times r_v(u,v)|}.$$

Tổng thành phần pháp tuyến của F trên mảnh con đó được xấp xỉ bằng

$$F(r(u,v)) \cdot \frac{r_u(u,v) \times r_v(u,v)}{|r_u(u,v) \times r_v(u,v)|}|r_u(u,v) \times r_v(u,v)|\Delta u\Delta v = [F(r(u,v)) \cdot r_u(u,v) \times r_v(u,v)]\Delta u\Delta v.$$

Chú ý rằng số thực trên cũng là thể tích có hướng của khối bình hành sinh bởi ba vectơ $F(r(u,v))$, $r_u(u,v)\Delta u$, $r_v(u,v)\Delta v$.

Từ đây ta đưa ra định nghĩa:

Định nghĩa. Cho mặt $r : D \to \mathbb{R}^3$ với vết $S = r(D)$. Cho F là một trường vectơ trên S, tức $F : S \to \mathbb{R}^3$. Tích phân mặt loại hai của của F trên r là

$$\boxed{\iint_r F \cdot d\vec{S} = \iint_D F(r(u,v)) \cdot (r_u(u,v) \times r_v(u,v))\, dA.}$$

Ghi chú. Trong tính toán ta có thể dùng công thức $a \cdot (b \times c) = \det(a, b, c)$.

Ghi chú. Ta tính được ngay

$$r_u(u,v) \times r_v(u,v)) = \frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}\vec{i} + \frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}\vec{j} + \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\vec{k}.$$

Từ đó, viết $F = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$, trong một số tài liệu người ta dùng thêm các tích phân mặt:

$$\iint_r P(x,y,z)\, dydz = \iint_r P\vec{i} \cdot d\vec{S} = \iint_r P(r(u,v))\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}\, dA,$$

$$\iint_r Q(x,y,z)\, dzdx = \iint_r Q\vec{j} \cdot d\vec{S} = \iint_r Q(r(u,v))\frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}\, dA,$$

$$\iint_r R(x,y,z)\, dxdy = \iint_r R\vec{k} \cdot d\vec{S} = \iint_r R(r(u,v))\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\, dA.$$

Với các kí hiệu này thì

$$\iint_r F \cdot d\vec{S} = \iint_r (P\, dydz + Q\, dzdx + R\, dxdy).$$

Mặt như là tập điểm. Định hướng. Tương tự như đã xảy ra với đường, trong nhiều ứng dụng ta muốn xem mặt như là một tập điểm chứ không phải là một ánh xạ. Bây giờ ta xây dựng quan điểm này.

Cho D và D' là hai tập con mở của $\mathbb{R}^2$ và giả sử có một vi đồng phôi φ từ D lên D'. Một vi đồng phôi như vậy còn được gọi là một *phép đổi biến*. Những phép đổi biến như vậy chúng ta đã nghiên cứu trong phần công thức đổi biến của tích phân bội. Nếu $\det d\varphi(p)$ luôn dương trên D thì φ được gọi là một *vi đồng phôi bảo toàn định hướng* (orientation-preserving diffeomorphism). Nếu $\det d\varphi(p)$ luôn âm thì φ được gọi là một *vi đồng phôi đảo ngược định hướng* (orientation-reversing diffeomorphism).

3.1.1. Định lí (Bất biến của tích phân mặt qua phép đổi biến). *Giả sử D và D' là hai tập con mở bị chặn của $\mathbb{R}^2$ và $\varphi : D' \to D$ là một phép đổi biến. Cho mặt trơn $r : D \to \mathbb{R}^3$. Khi đó:*

(a) *Tích phân mặt loại một không đổi qua phép đổi biến:*

$$\iint_r f\, dS = \iint_{r\circ\varphi} f\, dS.$$

(b) *Tích phân mặt loại hai không đổi qua phép đổi biến bảo toàn định hướng:*

$$\iint_r F \cdot d\vec{S} = \iint_{r\circ\varphi} F \cdot d\vec{S}.$$

(c) *Tích phân mặt loại hai đổi dấu qua phép đổi biến đảo ngược định hướng:*

$$\iint_r F \cdot d\vec{S} = -\iint_{r\circ\varphi} F \cdot d\vec{S}.$$

CHỨNG MINH. Theo qui tắc đạo hàm của hàm hợp:

$$J_{r\circ\varphi}(s,t) = J_r(u,v)J_\varphi(s,t).$$

Cụ thể hơn:

$$\frac{\partial(r\circ\varphi)}{\partial s} = \frac{\partial r}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial s} + \frac{\partial r}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial s},$$
$$\frac{\partial(r\circ\varphi)}{\partial t} = \frac{\partial r}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial r}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial t}.$$

Nhân hai vectơ này, và đơn giản hóa, ta được

$$\begin{aligned}\frac{\partial(r\circ\varphi)}{\partial s}\times\frac{\partial(r\circ\varphi)}{\partial t} &= \left(\frac{\partial r}{\partial s}\times\frac{\partial r}{\partial t}\right)\cdot\left(\frac{\partial u}{\partial s}\cdot\frac{\partial v}{\partial t} - \frac{\partial u}{\partial t}\cdot\frac{\partial v}{\partial s}\right)\\ &= \left(\frac{\partial r}{\partial s}\times\frac{\partial r}{\partial t}\right)\cdot\frac{\partial(u,v)}{\partial(s,t)}.\end{aligned}$$

Viết cách khác:

(3.1.1) $$(r\circ\varphi)_s \times (r\circ\varphi)_t = (r_u \times r_v)\det J_\varphi(s,t).$$

Bây giờ dùng công thức đổi biến của tích phân bội ta được điều phải chứng minh. □

3.1.2. Mệnh đề. *Cho D và D' là tập con đóng, bị chặn của $\mathbb{R}^2$ và cho $r : D \to \mathbb{R}$ và $r' : D' \to \mathbb{R}^3$ là hai mặt đơn chính qui có cùng vết. Khi đó $r(\partial D) = r'(\partial D')$, và $r'^{-1}\circ r : \overset{\circ}{D} \to \overset{\circ}{D'}$ là một vi đồng phôi.*

Ta gọi tập $r(\partial D) = r'(\partial D')$ là *biên* của mặt cong $S = r(D) = r'(D')$, kí hiệu là ∂S.

Ta nói r và r' có *cùng định hướng* nếu $r'^{-1}\circ r$ bảo toàn định hướng và *trái định hướng* nếu $r'^{-1}\circ r$ đảo ngược định hướng. Tập hợp các tham số hóa đơn chính qui của S được chia thành các lớp tương đương, mỗi lớp được gọi là một *định hướng của mặt cong S.*

Ví dụ. Xét phần mặt cầu $x^2+y^2+z^2 = 1$, $x,y,z > 0$. Tập điểm này có thể được tham số hóa như là một mặt đồ thị $(x,y,z = \sqrt{1-x^2-y^2})$. Một cách khác để tham số hóa tập này là dùng tọa độ cầu: $x = \sin\phi\cos\theta$, $y = \sin\phi\sin\theta$, $z = \cos\phi$, với $0 < \phi < \pi/2$, $0 < \theta < \pi/2$. Với thứ tự (ϕ,θ) của tọa độ cầu, phép biến đổi $(\phi,\theta) \mapsto (x,y)$ có $\frac{\partial(x,y)}{\partial(\phi,\theta)} = \sin\phi\cos\phi > 0$, do đó bảo toàn định hướng. Như vậy hai tham số hóa này có cùng định hướng.

Mặt $r : D \to \mathbb{R}^3$ được gọi là

- *đơn* (simple) nếu r là đơn ánh,
- *chính qui* (regular) nếu hai vectơ $r_u(u,v)$ và $r_v(u,v)$ xác định và luôn không cùng phương trên D; nói cách khác vectơ $r_u(u,v)\times r_v(u,v)$ luôn khác 0

trên D. Một cách trực quan, mặt là chính qui nếu pháp tuyến có thể được xác định.

Ví dụ. Cho hàm thực f trơn trên một tập mở chứa D. Xét mặt $r(x,y) = (x, y, f(x,y))$ với $(x,y) \in D$. Vết của r là mặt đồ thị $z = f(x,y)$. Ta có $r_x = (1, 0, f_x)$ và $r_y = (0, 1, f_y)$, do đó $r_x \times r_y = (-f_x, -f_y, 1) \neq 0$. Vậy r là một mặt đơn, chính qui.

Kết quả chính của phần này là một hệ quả của 3.1.2, 3.1.1, và 1.3.5:

3.1.3. Định lí (Tích phân trên mặt cong). *Trên những mặt đơn, chính qui với cùng vết, xác định trên tập con đóng bị chặn có diện tích của $\mathbb{R}^2$ thì:*

(a) *Tích phân mặt loại một là như nhau.*

(b) *Tích phân mặt loại hai là như nhau nếu hai mặt cùng định hướng và đối nhau nếu hai mặt trái định hướng.*

Như vậy ta có thể nói tới tích phân mặt loại một trên một tập điểm (một mặt cong) nếu tập điểm đó là vết của một mặt đơn chính qui xác định trên một tập đóng có diện tích. Để tính tích phân ta có thể lấy một tham số hóa đơn chính qui xác định trên một tập đóng bất kì. Đối với tích phân mặt loại hai ta cần lấy tham số hóa có cùng định hướng với mặt cong. Với ý nghĩa đó ta có thể dùng kí hiệu $\iint_S f\, dS$ và $\iint_S F \cdot d\vec{S}$.

Ví dụ (Diện tích mặt cầu). Xét nửa mặt cầu trên $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, $z \geq 0$. Tập điểm này có thể được tham số hóa như là một mặt đồ thị: $r(x,y) = (x, y, z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2})$, $x^2 + y^2 \leq R^2$. Diện tích của tập này được hiểu là diện tích của một tham số hóa đơn chính qui của nó như tham số hóa vừa cho. Với tham số hóa trên ta được diện tích này bằng

$$\begin{aligned}\iint_{x^2+y^2\leq R^2} \left| \left(\frac{x}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}, \frac{x}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}, 1 \right) \right| dxdy &= \int_0^{2\pi} \int_0^R \frac{Rr}{\sqrt{R^2-r^2}}\, dr d\theta \\ &= 2\pi R^2.\end{aligned}$$

Nếu ta xem diện tích mặt cầu là tổng diện tích hai nửa mặt cầu thì từ đây ta nói diện tích của mặt cầu bán kính R là $4\pi R^2$.

Có thể đặt vấn đề là nếu mặt cầu được chia theo những cách khác nhau thì điều gì sẽ xảy ra. Chú ý rằng mặt cầu không thể có một tham số hóa đơn liên tục xác định trên tập đóng (một kết quả của môn Tôpô). Đây là một khuyết điểm của cách tiếp cận của chúng ta trong môn học này (có thể đọc thêm ở 3.5). Trong những trường hợp cụ thể ta sẽ nói tới tích phân trên hợp của những mặt, hay "tích phân trên mặt trơn từng khúc", theo nghĩa là tổng của các tích phân trên từng mặt. Ta sẽ không đưa ra định nghĩa tổng quát.

*** Chứng minh 3.1.2.** Tương tự kết quả cho đường 2.1.3 ta có:

Bổ đề. *Nếu $D \subset \mathbb{R}^2$ đóng và bị chặn, $r : D \to \mathbb{R}^3$ là một mặt đơn liên tục với vết $S = r(D)$ thì r là một đồng phôi lên S.*

CHỨNG MINH. Ta chứng minh r^{-1} là liên tục. Giả sử U là một tập mở trên D. Vì $D \setminus U$ là tập con đóng bị chặn của $\mathbb{R}^2$ nên nó compắc. Do đó ảnh của nó $r(D \setminus U)$ là tập compắc, do đó đóng trong S. Do đó $S \setminus r(D \setminus U) = r(U)$ mở trong S. Như vậy với mọi U mở trong D thì $(r^{-1})^{-1}(U) = r(U)$ là mở trong S. Vậy r^{-1} là ánh xạ liên tục. □

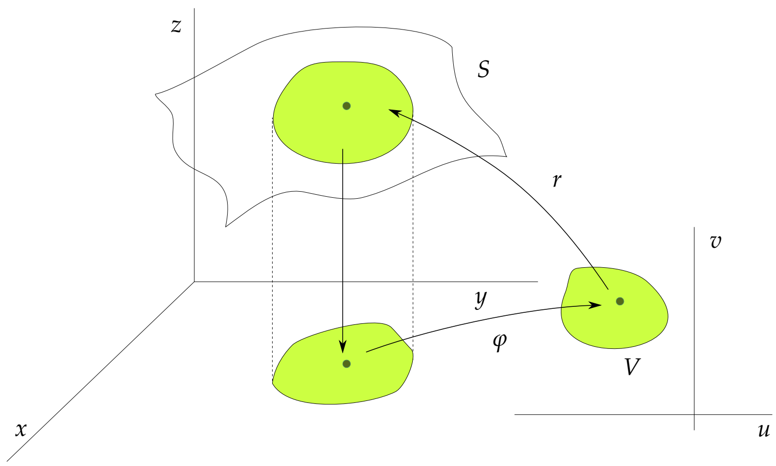
CHỨNG MINH 3.1.2 . Cho D và D' là tập con đóng, bị chặn của $\mathbb{R}^2$ với biên có diện tích không; $r : D \to \mathbb{R}$ và $r' : D' \to \mathbb{R}^3$ là hai mặt đơn chính qui có cùng vết S. Do bổ đề trên, ta có $r'^{-1} \circ r : D \to D'$ là một đồng phôi. Suy ra $r'^{-1} \circ r$ hạn chế lại trên $\overset{\circ}{D}$ là một đồng phôi lên ảnh của nó. Theo một định lí trong môn Tôpô gọi là định lí bất biến miền ([**Mun00**, tr. 381]), thì một tập con của $\mathbb{R}^2$ mà đồng phôi với một tập mở của $\mathbb{R}^2$ thì phải là một tập mở. Do đó $(r'^{-1} \circ r)(\overset{\circ}{D})$ là một tập mở của $\mathbb{R}^2$. Như vậy $r'^{-1} \circ r$ mang điểm trong của D thành điểm trong của D'. Tương tự $r^{-1} \circ r'$ mang điểm trong của D' thành điểm trong của D, do đó $r(\overset{\circ}{D}) = r'(\overset{\circ}{D'})$. Từ đó ta cũng có $r(\partial D) = r'(\partial D') = \partial S$.

Tiếp theo ta tiến hành tương tự chứng minh của kết quả cho tích phân đường 2.1.2. Ta sẽ chứng minh $r : \overset{\circ}{D} \to S \setminus \partial S$ là vi đồng phôi, tức là r^{-1} là trơn. Tương tự $r'^{-1} : S \setminus \partial S \to \overset{\circ}{D'}$ là trơn, nên $r'^{-1} \circ r$ là trơn.

Viết $r(u,v) = (x,y,z)$. Xét điểm $r(u_0,v_0)$ với $(u_0,v_0) \in \overset{\circ}{D}$. Vì $r_u(u_0,v_0) \times r_v(u_0,v_0) \neq 0$ nên một trong các số

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}(u_0,v_0),\ \frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}(u_0,v_0),\ \frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}(u_0,v_0)$$

phải khác 0. Giả sử $\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}(u_0,v_0) \neq 0$. Theo định lí hàm ngược, có một lân cận mở $V \subset \overset{\circ}{D}$ của (u_0,v_0) sao cho trên V ánh xạ $(u,v) \to (x,y)$ là một vi đồng phôi với ánh xạ ngược trơn φ. Khi đó những điểm trên $r(V)$ có dạng $(x,y,z(\varphi(x,y)))$, nói cách khác $r(V)$ là đồ thị của một hàm theo hai biến x và y.



Trên $r(V)$ thì ánh xạ r^{-1} là hợp của ánh xạ chiếu $r(V) \xrightarrow{p} \varphi^{-1}(V)$ và ánh xạ φ:

$$(x, y, z) \mapsto (x, y) \mapsto (u, v).$$

Vì $r(V)$ là một tập mở trên $S \setminus \partial S$ nên có tập mở U của $\mathbb{R}^3$ sao cho $r(V) = U \cap (S \setminus \partial S)$. Ánh xạ chiếu p là trơn trên U, do đó r^{-1} có thể được mở rộng thành hàm trơn $\varphi \circ p$ trên U. Vậy r^{-1} là trơn tại điểm $r(u_0, v_0)$. □

Liên hệ giữa hai loại tích phân mặt. Dưới các giả thiết của định lí 3.1.2, giả sử $p = r(u, v) = r'(s, t)$ với $(u, v) \in \overset{\circ}{D}$ và $(s, t) \in \overset{\circ}{D'}$. Theo phương trình 3.1.1 tại p hai vectơ $r_u \times r_v$ và $r'_s \times r'_t$ có cùng phương cùng chiều. Vậy tại p vectơ pháp tuyến đơn vị

$$n(p) = \frac{r_u(u, v) \times r_v(u, v)}{|r_u(u, v) \times r_v(u, v)|}$$

được định nghĩa không phụ thuộc vào cách chọn tham số hóa (nhưng phụ thuộc vào định hướng của S). Ta có

$$\begin{aligned}
\iint_S F \cdot n\, dS &= \iint_D F(r(u, v)) \cdot \frac{r_u(u, v) \times r_v(u, v)}{|r_u(u, v) \times r_v(u, v)|} |r_u(u, v) \times r_v(u, v)|\, dA \\
&= \iint_D F(r(u, v)) \cdot (r_u(u, v) \times r_v(u, v))\, dA \\
&= \iint_S F \cdot d\vec{S}.
\end{aligned}$$

Vậy

$$\boxed{\iint_S F \cdot d\vec{S} = \iint_S F \cdot n\, dS.}$$

Điều này khẳng định lại rằng tích phân mặt loại hai là tổng thành phần pháp tuyến của trường trên mặt.

Bài tập.

3.1.4. Tính diện tích phần mặt nón $z^2 = x^2 + y^2, 3 \leq z \leq 5$.

3.1.5. Cho $\vec{F}(x, y, z) = (-x, y, z)$. Cho S là mặt tứ diện bao bởi các mặt phẳng $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $x + 2y + z = 2$, định hướng ra ngoài. Tính tích phân $\iint_S \vec{F} \cdot d\vec{S}$.

3.1.6. Cho khối E xác định bởi điều kiện $x^2 + y^2 \leq 1$, $1 \leq z \leq 2$. Gọi S là mặt biên của E, định hướng ra ngoài. Cho $F(x, y, z) = (2x, 3y, 4z)$. Tính thông lượng của F qua S.

3.1.7. Cho mặt elliptic paraboloid $z = \left(\frac{x}{3}\right)^2 + \left(\frac{y}{4}\right)^2$, $z \leq 5$.

(a) Bằng cách đổi biến $\frac{x}{3} = r\cos\theta$, $\frac{y}{4} = r\sin\theta$ đưa ra một phương trình tham số của mặt.

(b) Tính xấp xỉ diện tích của mặt này.

3.1.8. Cho S là mặt $z = xy$ với $0 \leq x \leq 2$ và $0 \leq y \leq 3$. Tính tích phân mặt

$$\iint_S xyz\, dS$$

ra số thập phân.

3.1.9. Trên bề mặt Quả đất, tọa độ kinh tuyến và vĩ tuyến có liên hệ chặt chẽ với tọa độ cầu. Đặt hệ trục tọa độ $Oxyz$ với O ở tâm Quả đất, trục Oz đi qua Cực Bắc, và phần tư đường tròn từ tia Oz sang tia Ox đi qua Greenwich, nước Anh. Giả sử một điểm có tọa độ là φ° vĩ độ Bắc và λ° kinh độ Đông, khi đó tọa độ cầu của điểm đó là $\phi = (90 - \varphi)^\circ$ và $\theta = \lambda^\circ$ (tuy nhiên nhớ là trong tọa độ cầu góc cần được đo bằng radian).

Thành phố Hồ Chí Minh nằm trong vùng từ $10^\circ 10'$ tới $10^\circ 38'$ vĩ độ Bắc và $106^\circ 22'$ tới $106^\circ 54'$ kinh độ Đông ($1' = 1/60^\circ$). Tính diện tích của vùng này. Bán kính của Quả đất là 6378 km.

3.1.10 (Diện tích mặt tròn xoay). Giả sử $f(x)$ dương, trơn trên $[a, b]$. Hãy tính diện tích của mặt tròn xoay nhận được bằng cách xoay đồ thị $y = f(x)$ quanh trục x. Ứng dụng, tính diện tích mặt ellipsoid $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

3.2. Định lí Stokes

Toán tử curl.

Định nghĩa. Cho $F = (P, Q, R)$ là trường theo ba biến (x, y, z) trên $\mathbb{R}^3$ thì

$$\boxed{\operatorname{curl} F = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}, \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right).}$$

Dưới dạng kí hiệu hình thức, với $\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)$, thì $\operatorname{curl} F = \nabla \times F$.

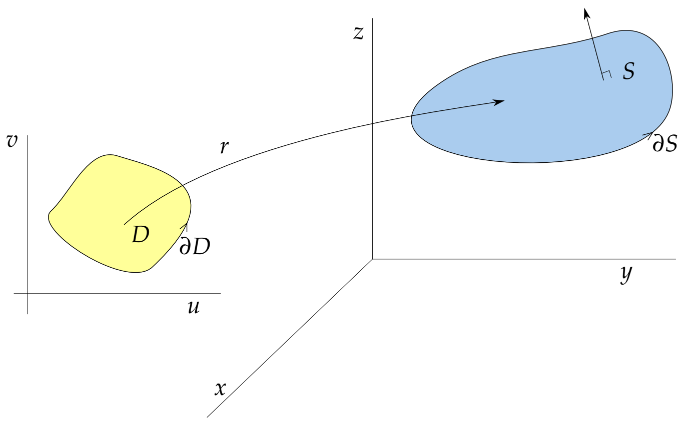
Trường curl F còn được gọi là *trường xoay* của trường F. Toán tử curl còn được kí hiệu là rot (rotation – xoay).

Công thức Stokes. Công thức Stokes ở dạng tọa độ là

$$\int_{\partial S} Pdx + Qdy + Rdz = \iint_S (R_y - Q_z, P_z - R_x, Q_x - P_y) \cdot d\vec{S}.$$

Ở dạng không tọa độ:

$$\int_{\partial S} F \cdot dr = \iint_S \operatorname{curl} F \cdot d\vec{S}.$$



Trong công thức này biên ∂S cần được định hướng tương thích với định hướng của S. Một cách miêu tả trực quan cho định hướng trên biên ∂S là khi đi dọc theo biên theo chiều đã định, thân người hướng theo chiều pháp tuyến đã chọn của S thì mặt S phải nằm bên tay trái.

Công thức Stokes là dạng tổng quát hóa của công thức Green lên không gian ba chiều. Thực vậy, nếu S là miền phẳng và F là một trường phẳng trên S thì $F(x, y, z) = (P(x, y), Q(x, y), 0)$. Vectơ pháp tuyến của S chính là $k = (0, 0, 1)$. Công thức Stokes trở thành

$$\begin{aligned}
\int_{\partial S} Pdx + Qdy &= \iint_S (0, 0, Q_x - P_y) \cdot d\vec{S} = \iint_S (0, 0, Q_x - P_y) \cdot k\, dS \\
&= \iint_S (Q_x - P_y)\, dS = \iint_S (Q_x - P_y)\, dA.
\end{aligned}$$

Định lí (Định lí Stokes). *Gọi S là vết của mặt $r(u, v)$ với $(u, v) \in D$, trong đó D là một miền phẳng trên đó công thức Green có thể áp dụng được và biên ∂D được định hướng* *tương thích. Gọi $\partial S = r(\partial D)$ là biên của S với định hướng cảm sinh từ định hướng của ∂D. Cho trường F trơn trên một tập mở chứa S. Khi đó:*

$$\boxed{\int_{\partial S} F \cdot dr = \iint_S \operatorname{curl} F \cdot d\vec{S}.}$$

CHỨNG MINH. Chứng minh dưới đây tuy chứa những biểu thức dài dòng nhưng chỉ gồm những tính toán trực tiếp và việc áp dụng công thức Green.

Viết $F = (P, Q, R)$ và $(x, y, z) = r(u, v)$. Giả sử $(u(t), v(t))$, $a \le t \le b$ là một tham số hóa theo định hướng dương của ∂D. Khi đó ∂S có tham số hóa $r(u(t), v(t))$. Tính $\int_{\partial S} F \cdot dr$ ta được (trong vài biểu thức dưới đây biến được lược bỏ cho gọn hơn):

$$\begin{aligned}
\int_{\partial S} F \cdot dr &= \int_a^b F(r(u(t), v(t))) \cdot \frac{d}{dt} r(u(t), v(t))\, dt \\
&= \int_a^b F(r(u(t), v(t))) \cdot (r_u u' + r_v v')\, dt \\
&= \int_a^b [P(x, y, z)(x_u u' + x_v v') + Q(x, y, z)(y_u u' + y_v v') + \\
&\qquad + R(x, y, z)(z_u u' + z_v v')]\, dt \\
&= \int_a^b [(P(x, y, z)x_u + Q(x, y, z)y_u + R(x, y, z)z_u)u' + (P(x, y, z)x_v + \\
&\qquad + Q(x, y, z)y_v + R(x, y, z)z_v)v']\, dt \\
&= \int_{\partial D} (Px_u + Qy_u + Rz_u)\, du + (Px_v + Qy_v + Rz_v)\, dv.
\end{aligned}$$

Bây giờ áp dụng công thức Green ta được tích phân trên bằng

$$\iint_D \left[\frac{\partial}{\partial u}(Px_v + Qy_v + Rz_v) - \frac{\partial}{\partial v}(Px_u + Qy_u + Rz_u)\right] dudv.$$

Tính các đạo hàm hàm hợp và đơn giản hóa, ta được tích phân trên bằng

$$\begin{aligned}
&\iint_D [(R_y - Q_z)(y_u z_v - z_u y_v) + (P_z - R_x)(z_u x_v - x_u z_v) + \\
&\quad + (Q_x - P_y)(x_u y_v - x_v y_u)]\, dudv \\
&= \iint_D [\operatorname{curl}(P, Q, R) \cdot (r_u \times r_v)]\, dudv = \iint_S \operatorname{curl} F \cdot d\vec{S}.
\end{aligned}$$

□

Ví dụ. Cho $F(x, y, z) = (x^2, y^3, z^4)$. Cho C là đường tam giác với các đỉnh $(1, 2, 3)$, $(2, 0, -1)$, $(4, 3, 1)$, định hướng theo thứ tự đó. Tính $\int_C F \cdot d\vec{r}$.

Có thể tính trực tiếp hoặc dùng phương pháp trường bảo toàn, nhưng bây giờ ta có thêm một công cụ là công thức Stokes. Đường tam giác C bao hình tam giác S với định hướng sinh bởi C. Áp dụng công thức Stokes:

$$\int_C F \cdot d\vec{r} = \iint_S \operatorname{curl} F \cdot d\vec{S}.$$

Ở đây $\operatorname{curl} F = 0$. Vậy tích phân trên bằng 0.

Điều kiện để trường ba chiều là bảo toàn. Tương tự như trường hợp 2 chiều, bằng tính toán trực tiếp ta có:

Mệnh đề (curl $\nabla = 0$). *Nếu f là hàm thực có các đạo hàm riêng cấp hai liên tục trên một tập mở thì* $\operatorname{curl} \nabla f = 0$ *trên đó.*

Hệ quả (Điều kiện cần để trường ba chiều là bảo toàn). *Nếu F là trường trơn bảo toàn trên một tập mở thì* $\operatorname{curl} F = 0$ *trên đó. Nói cách khác trên đó điều kiện sau phải được thỏa:*

$$\begin{cases} R_y &= Q_z \\ P_z &= R_x \\ Q_x &= P_y. \end{cases}$$

Ta có thể dùng kết quả này để chứng tỏ một trường là không bảo toàn bằng cách chỉ ra rằng curl của nó khác 0.

Bằng chứng minh tương tự ở 2.3.3 nhưng thay công thức Green bởi công thức Stokes ta có:

Mệnh đề (Bổ đề Poincaré). *Nếu F trơn trên một miền mở hình sao trong $\mathbb{R}^3$ và* $\operatorname{curl} F = 0$ *thì F là bảo toàn trên đó.*

Bài tập.

3.2.1. Trường sau có bảo toàn hay không?

(a) $F(x,y,z) = (y,x,y)$.

(b) $F(x,y,z) = (2xe^{x^2}, z\sin y^2, z^3)$.

3.2.2. Cho S là mặt $z = x^2 + y^2$ với $z \le 1$, định hướng lên trên. Tính lưu lượng của trường $\vec{F}(x,y,z) = (3y, -xz, yz^2)$ trên S (tức là $\iint_S \operatorname{curl}\vec{F} \cdot d\vec{S}$) bằng hai cách:

(a) Tính trực tiếp.

(b) Dùng định lí Stokes.

3.2.3. Cho S là mặt $z = 9 - x^2 - y^2$ với $z \ge 0$, định hướng lên trên.

(a) Cho trường $F(x,y,z) = (2z - y, x + z, 3x - 2y)$. Tính trực tiếp lưu lượng của F trên S, tức $\iint_S \operatorname{curl} F \cdot d\vec{S}$.

(b) Dùng định lí Stokes tính $\iint_S \operatorname{curl} F \cdot d\vec{S}$.

3.2.4. Nếu hai mặt đồ thị S_1 và S_2 có cùng biên và cùng được định hướng lên trên thì $\iint_{S_1} \operatorname{curl} F \cdot d\vec{S} = \iint_{S_2} \operatorname{curl} F \cdot d\vec{S}$.

3.2.5. Nếu S là mặt cầu thì $\iint_S \operatorname{curl} F \cdot d\vec{S} = 0$.

3.2.6. Cho $\vec{v} \in \mathbb{R}^3$ là một vectơ cố định. Cho S là một mặt mà trên đó công thức Stokes có thể áp dụng được. Hãy chứng minh:

$$\int_{\partial S} (\vec{v} \times \vec{r}) \cdot d\vec{r} = 2\iint_S \vec{v} \cdot \vec{n}\, dS,$$

trong đó $\vec{r}$ là vectơ vị trí, tức $\vec{r}(x,y,z) = (x,y,z)$.

3.2.7. (a) Chứng minh đẳng thức

$$a \times (b \times c) = (a \cdot c)b - (a \cdot b)c.$$

(b) Từ đó chứng minh

$$\operatorname{curl}(\operatorname{curl} F) = \nabla(\operatorname{div} F) - \Delta F.$$

Ở đây ΔF được hiểu là toán tử Laplace $\Delta = \nabla \cdot \nabla = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ tác động vào từng thành phần của F.

3.3. Định lí Gauss-Ostrogradsky

Toán tử div.

Định nghĩa. Cho $F = (P, Q, R)$ là trường theo ba biến (x, y, z) trên $\mathbb{R}^3$ thì

$$\boxed{\operatorname{div} F = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}.}$$

Dưới dạng kí hiệu hình thức thì $\operatorname{div} F = \nabla \cdot F$. Hàm $\operatorname{div} F$ còn được gọi là *hàm phân tán* (divergence) của trường F.

Mệnh đề (div curl = 0). *Nếu F là trường có các đạo hàm riêng cấp hai liên tục trên một tập mở thì* $\operatorname{div} \operatorname{curl} F = 0$ *trên đó.*

Định lí Gauss-Ostrogradsky. Định lí Gauss-Ostrogradsky còn được gọi là định lí Divergence. Đây là tổng quát hoá của dạng thông lượng của định lí Green, cho một công thức có dạng

$$\iint_{\partial E} P\, dydz + Q\, dzdx + R\, dxdy = \iiint_E \left(P_x + Q_y + R_z\right)\, dxdydz.$$

Định lí (Định lí Gauss-Ostrogradsky). *Cho trường F trơn trên một tập mở chứa một khối đơn 3 chiều E với biên được định hướng ra ngoài. Khi đó:*

$$\boxed{\iint_{\partial E} F \cdot n\, dS = \iint_{\partial E} F \cdot d\vec{S} = \iiint_E \operatorname{div} F\, dV.}$$

CHỨNG MINH. Viết $F = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$. Viết E như là khối đơn theo chiều Oz như là tập hợp những điểm (x, y, z) với $f(x, y) \leq z \leq g(x, y)$ trong đó f, g là hàm liên tục xác định trên miền phẳng D. Ta sẽ chứng tỏ

$$\iint_S R\vec{k} \cdot d\vec{S} = \iiint_E \frac{\partial}{\partial z} R\, dV.$$

Tương tự ta chứng minh hai biểu thức tương ứng cho hai chiều còn lại, cộng lại và được đẳng thức phải được chứng minh.

Biên S gồm các mặt sau: mặt trên là $\{(x, y, z = f(x, y) \mid (x, y) \in D\}$, mặt dưới là $\{(x, y, z = g(x, y)) \mid (x, y) \in D\}$, và mặt hông là $\{(x, y, z) \mid (x, y) \in \partial D, f(x, y) \leq z \leq g(x, y)\}$.

Trước hết tích phân của $R\vec{k}$ bằng không trên mặt hông. Lí do như sau. Mặt hông chứa đường (x_0, y_0, z) với $(x_0, y_0) \in D$ cố định và $f(x_0, y_0) \leq z \leq g(x_0, y_0)$. Đường này có vectơ tiếp xúc là $\vec{k}$. Như vậy $\vec{k}$ là một vectơ tiếp tuyến của mặt hông, do đó $\vec{k}$ vuông góc với vectơ pháp tuyến của mặt hông.

Tổng tích phân của $R\vec{k}$ trên mặt trên và mặt dưới bằng:

$$\begin{aligned}
&\iint_D R(x, y, g(x, y))\vec{k} \cdot (-g_x, -g_y, 1)\, dA + \\
&\qquad + \iint_D R(x, y, f(x, y))\vec{k} \cdot (f_x, f_y, -1)\, dA \\
&\qquad\qquad = \iint_D \left[R(x, y, g(x, y)) - R(x, y, f(x, y))\right]\, dA.
\end{aligned}$$

Theo Định lí Fubini

$$\begin{aligned}\iiint_E R_z\, dV &= \iint_D \left(\int_{f(x,y)}^{g(x,y)} R_z\, dz\right) dA\\ &= \iint_D \left(R(x,y,g(x,y)) - R(x,y,f(x,y))\right) dA.\end{aligned}$$

Vậy ta được đẳng thức phải chứng minh. □

Dạng thông lượng của định lí Green. Cho D là miền phẳng và F là một trường trên D sao cho ta có thể áp dụng công thức Green. Mở rộng F thành một trường vectơ ba chiều bằng cách cho thành phần thứ ba luôn bằng 0. Giả sử ∂D được tham số hóa theo chiều dương bởi $C(t) = (x(t), y(t))$.

Vectơ vận tốc là $C'(t) = (x'(t), y'(t))$. Ta xác định vectơ pháp tuyến ngoài n tại điểm $(x(t), y(t))$. Vectơ $(-y'(t), x'(t))$ vuông góc $(x'(t, y'(t))$, vậy n cùng phương với $(-y'(t), x'(t))$. Chiều của n được xác định theo nguyên tắc chiều từ pháp tuyến ngoài sang tiếp tuyến phải cùng chiều với chiều dương chuẩn tắc của mặt phẳng, tức là chiều từ $(1,0)$ sang $(0,1)$. Do đó định thức của ma trận gồm hai vectơ n và $C'(t)$ phải dương. Nói cách khác $n \times C'(t)$ phải cùng chiều với $k = (0,0,1)$. Suy ra

$$n = \frac{1}{|C'(t)|}(y'(t), -x'(t)).$$

Theo Công thức Green:

$$\begin{aligned}\int_C F\cdot n\, ds &= \int_a^b \langle (P(C(t)), Q(C(t))), \frac{1}{|C'(t)|}(y'(t), -x'(t))\rangle |C'(t)|\, dt\\ &= \int_C -Q\, dx + P\, dy = \iint_D \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y}\right) dA.\end{aligned}$$

Vậy

$$\boxed{\int_{\partial D} F\cdot n\, ds = \iint_D \operatorname{div} F\, dA.}$$

Tích phân $\int_C F\cdot n\, ds$ là tổng thành phần pháp tuyến ngoài của F dọc theo biên ∂D. Nếu F là một trường vectơ vận tốc thì tích phân này thể hiện *thông lượng* (flux) qua ∂D.

Ý nghĩa vật lí của div. Trước hết ta có bổ đề sau đây.

3.3.1. Bổ đề. *Cho f là một hàm thực khả tích trên một lân cận của điểm $p \in \mathbb{R}^n$ và liên tục tại p. Gọi $B'(p,r)$ là một quả cầu đóng tâm tại p với bán kính r. Khi đó:*

$$\lim_{r\to 0}\frac{1}{|B'(p,r)|}\int_{B'(p,r)} f = f(p).$$

Vậy giá trị trung bình của một hàm liên tục quanh một điểm tiến về giới hạn là giá trị của hàm tại điểm đó.

CHỨNG MINH. Vì f liên tục tại p nên cho $\epsilon > 0$, với r đủ nhỏ thì với mọi $q \in B'(p,r)$ ta có $|f(q) - f(p)| \le \epsilon$. Từ đó

$$\begin{aligned}\left|\left(\frac{1}{|B'(p,r)|}\int_{B'(p,r)} f\right) - f(p)\right| &= \left|\frac{1}{|B'(p,r)|}\int_{B'(p,r)} [f(q) - f(p)]\right| \\ &\le \frac{1}{|B'(p,r)|}\int_{B'(p,r)} |f(q) - f(p)| \\ &\le \frac{1}{|B'(p,r)|}\int_{B'(p,r)} \epsilon = \epsilon.\end{aligned}$$

□

Áp dụng bổ đề trên cho div ta được

$$\operatorname{div} F(p) = \lim_{r\to 0}\frac{1}{|B'(p,r)|}\iiint_{B'(p,r)} \operatorname{div} F\, dA = \lim_{r\to 0}\frac{1}{|B'(p,r)|}\iint_{\partial B'(p,r)} F\cdot n\, dS.$$

Tích phân $\iint_{\partial B'(p,r)} F \cdot n\ dS$ là thông lượng của trường F ra khỏi mặt cầu $\partial B'(p,r)$. Vậy *div $F(p)$ chỉ độ phát tán của trường F trên đơn vị thể tích quanh p*.

Ý nghĩa vật lí của curl. Xét một điểm p. Lấy một mặt phẳng qua p với phương định bởi pháp tuyến n. Xét hình tròn $B'(p,r)$ trên mặt phẳng này với tâm tại p và bán kính r. Ta có:

$$\operatorname{curl} F(p)\cdot n = \lim_{r\to 0}\frac{1}{|B'(p,r)|}\iint_{B'(p,r)} \operatorname{curl} F\cdot n\, dA = \lim_{r\to 0}\frac{1}{|B'(p,r)|}\int_{\partial B'(p,r)} F\cdot dr.$$

Vậy $\operatorname{curl} F(p)\cdot n$thể hiện lưu lượng ngược chiều kim đồng hồ (độ xoay) của trường F trên phần tử diện tích quanh p trong mặt phẳng qua p vuông góc n.

Ta có $\operatorname{curl} F(p)\cdot n$ đạt giá trị lớn nhất khi n cùng phương cùng chiều với $\operatorname{curl} F(p)$. Vậy $\operatorname{curl} F(p)$ cho phương của mặt phẳng mà trên đó độ xoay của trường quanh p là lớn nhất, chiều của nó được xác định bởi chiều xoay của trường theo qui tắc bàn tay phải. Hơn nữa có thể chứng tỏ là độ lớn của $\operatorname{curl} F(p)$ tỉ lệ với tốc độ xoay theo góc của trường quanh p. Nói vắn tắt, *curl $F(p)$ chỉ sự xoay của trường F tại điểm p*. Từ đây tích phân $\iint_S \operatorname{curl} F\cdot d\vec{S}$ được gọi là *lưu lượng* (circulation) của trường F trên mặt S.

Ta có một miêu tả trực quan cho $\operatorname{curl} F(p)$: Tưởng tượng rằng ta thả một cái chong chóng vào trường, cố định nó tại điểm p nhưng để cho nó tự do đổi hướng và tự do xoay. Khi đó hướng ổn định của chong chóng chính là hướng của $\operatorname{curl} F(p)$, chiều xoay của nó chính là chiều xoay của trường, còn vận tốc xoay của chong chóng chỉ độ xoay của trường quanh p.

Bài tập.

3.3.2. Tiếp tục bài tập 2.2.1 và 2.2.2, xem F như là trường phẳng trong không gian ba chiều. Ước đoán div$F$ tại điểm gốc tọa độ là âm, dương hay bằng không? Hãy miêu tả curl$F$ tại điểm gốc tọa độ.

3.3.3. Vẽ trường vectơ $(\sin(2x+3y), \cos(2x-3y))$ trong một lân cận của $P = (2,3)$. Tính $\operatorname{div} F(x,y)$ và $\operatorname{curl} F(x,y)$ tại P (xem thành phần thứ 3 của trường là 0). Trường này có bảo toàn trong lân cận này không? Kết quả có phù hợp với hình vẽ không?

3.3.4. Tồn tại hay không một trường F khả vi liên tục cấp hai thỏa $\operatorname{curl} F(x,y,z) = (e^{yz}, \sin(xz^2), z^5)$?

3.3.5. Tiếp tục bài tập 3.1.5. Tính tích phân $\iint_S \vec{F} \cdot d\vec{S}$ bằng cách dùng công thức Gauss-Ostrogradsky.

3.3.6. Tiếp tục bài tập 3.1.6. Tính thông lượng của F qua S bằng cách dùng công thức Gauss-Ostrogradski.

3.3.7. Tính thông lượng của trường $\vec{F}(x,y,z) = (3x, y^2, z^2)$ qua mặt cầu đơn vị $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, định hướng ra ngoài.

3.3.8. Tính thông lượng của trường $F(x,y,z) = (y,z,x)$ qua mặt $x^2 + y^4 + z^6 = 2$, định hướng ra ngoài.

3.3.9. Cho S là mặt $z = 9 - x^2 - y^2$ với $z \geq 0$, định hướng lên trên.

(a) Cho $G(x,y,z) = (e^y \cos z, x^2 z, y^2 + z)$. Cho S_1 là đĩa $x^2 + y^2 \leq 9$, $z = 0$, định hướng xuống dưới. Tính thông lượng của G qua S_1, tức $\iint_{S_1} G \cdot d\vec{S}$.

(b) Dùng định lí Gauss-Ostrogradsky tính $\iint_{S \cup S_1} G \cdot d\vec{S}$.

(c) Tính $\iint_S G \cdot d\vec{S}$.

3.3.10. Hãy tính thông lượng của trường $F(x,y,z) = (x, y, 2 - 2z)$ qua mặt $z = 1 - x^2 - y^2$, $z \geq 0$, định hướng lên trên, bằng hai cách:

(a) Tính trực tiếp.

(b) Tính thông lượng của F qua một mặt khác và dùng công thức Gauss-Ostrogradski.

3.3.11. Cho $f(x,y)$ là hàm thực trên miền $D \subset \mathbb{R}^2$ bao bởi đường cong C. Kí hiệu toán tử Laplace tác động vào f là $\Delta f = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$. Kí hiệu đạo hàm theo hướng $\vec{v}$ của f là $D_{\vec{v}} f$. Kí hiệu $\vec{n}$ là véctơ pháp tuyến đơn vị ngoài của C. Chứng minh:

$$\iint_D \Delta f \, dA = \int_C D_{\vec{n}} f \, ds.$$

Chẳng hạn nếu f miêu tả nhiệt độ thì Δf miêu tả sự mất nhiệt.

3.3.12. Cho f và g là hai hàm thực trơn cấp hai trên $\mathbb{R}^3$.

(a) Chứng tỏ $\operatorname{curl}(f \nabla g) = \nabla f \times \nabla g$.

(b) Tính tích phân $\int_C f \nabla f \cdot dr$ trong đó $C(t) = (\cos t, \sin t, \sin t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$.

3.3.13. Hãy chứng minh các công thức sau, cũng được gọi là các *công thức Green*, với giả thiết E là miền mà công thức Gauss-Ostrogradsky có thể áp dụng được.

(a)
$$\iint_{\partial E} (f \nabla g) \cdot n \, dS = \iiint_E (f \Delta g + \nabla f \cdot \nabla g) \, dV.$$

(b)
$$\iint_{\partial E} (f \nabla g - g \nabla f) \cdot n \, dS = \iiint_E (f \Delta g - g \Delta f) \, dV.$$

3.3.14. Mặt cyclide nhận được từ một mặt xuyến qua phép nghịch đảo qua một mặt cầu. Mặt xuyến được cho bởi tham số hóa

$$r(u,v) = ((5 + \cos u) \cos v, (5 + \cos u) \sin v, \sin u), \quad 0 \leq u, v \leq 2\pi.$$

Đưa mặt xuyến này ra ngoài mặt cầu đơn vị tâm O bán kính 1 bằng một phép tịnh tiến, chẳng hạn theo vectơ $(9,0,0)$, được một mặt xuyến mới với tham số hóa

$$\mathrm{rtorus}(u,v) = (9 + (5 + \cos u) \cos v, (5 + \cos u) \sin v, \sin u), \quad 0 \leq u, v \leq 2\pi.$$

Thực hiện phép lấy nghịch đảo qua mặt cầu tâm O bán kính 1, tức là phép biến đổi mang mỗi điểm $p \neq 0$ thành điểm $\frac{p}{||p||^2}$. Khi đó mặt xuyến trở thành mặt cyclide S với tham số hóa

$$\text{rcyclide}(u,v) = \frac{\text{rtorus}(u,v)}{||\text{rtorus}(u,v)||^2}.$$

(a) Vẽ mặt cyclide S.

(b) Tính diện tích mặt cyclide S ra số thập phân.

(c) Cho trường $F(x,y,z) = (y,x,3z)$. Tính thông lượng của F qua mặt cyclide S ra số thập phân.

(d) Tính thể tích của khối bao bởi mặt cyclide S ra số thập phân.

3.4. Ứng dụng của định lí Stokes

Định luật Gauss cho điện trường. Giả sử có một điện tích q tại một điểm O. Do Định luật Coulomb (2.2.6), ta đưa ra định nghĩa điện trường ứng với điện tích q này tại một điểm bất kì trong không gian có vị trí cho bởi vectơ $\vec{r}$ đi từ điểm mang điện tích q tới điểm đang xét là:

$$E(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0|\vec{r}|^3}\vec{r}.$$

Đối với môn học của chúng ta, điều đáng chú ý nhất của định luật Coulomb đó là điện trường có độ lớn tỉ lệ nghịch với $|\vec{r}|^2$, thường được gọi là một luật nghịch đảo bình phương (inverse-square law). Như ta đã thấy (2.2), trọng trường cũng cũng được cho bởi một luật như vậy. Tính toán trực tiếp, ta thấy rằng $\operatorname{div} E = 0$, và điều này chỉ đúng cho một trường có dạng $\vec{r}/|\vec{r}|^m$ (trường xuyên tâm, radial) khi $m = 3$. [1]

Giả sử S là một mặt đóng, là mặt biên của khối D. Giả sử công thức Stokes có thể áp dụng được cho D. Nếu D không chứa điểm O thì ta có

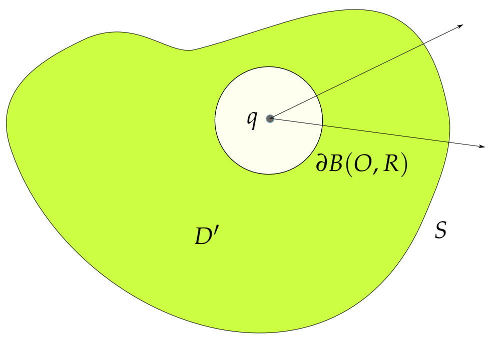
$$\iint_S E \cdot d\vec{S} = \iiint_D \operatorname{div} E \, dV = 0.$$

Mặt khác nếu S bao điểm O, nói cách khác D chứa điểm O ở phần trong thì lấy một quả cầu tâm O với bán kính R đủ nhỏ sao cho nó không cắt S, và cho biên $\partial B(O,R)$ định hướng ra ngoài $B(O,R)$. Khi đó S cùng $\partial B(O,R)$ với định hướng ngược lại tạo thành biên của một khối D' không chứa O. Áp dụng công thức Stokes cho D' ta được

$$\iint_S E \cdot d\vec{S} - \iint_{\partial B(O,R)} E \cdot d\vec{S} = \iiint_{D'} \operatorname{div} E \, dV = 0.$$

Suy ra $\iint_S E \cdot d\vec{S} = \iint_{\partial B(O,R)} E \cdot d\vec{S}$. Tính trực tiếp, ta được

$$\begin{aligned}\iint_S E \cdot d\vec{S} = \iint_{\partial B(O,R)} E \cdot d\vec{S} &= \iint_{\partial B(O,R)} E \cdot \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|} \, dS = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R^2}|\partial B(O,R)| \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R^2} 4\pi R^2 = \frac{q}{\epsilon_0}.\end{aligned}$$



[1] Các thí nghiệm sau này kiểm chứng hằng số m trong định luật Coulomb bằng 3 sai khác không quá 3×10^{-16}.

Như vậy *thông lượng của điện trường qua một mặt đóng bao điện tích không phụ thuộc vào mặt và tỉ lệ với điện tích được bao.* Đây là nội dung của định luật được phát biểu bởi Johann Carl Friedrich Gauss. [2]

Ở trên ta vừa trình bày định luật Coulomb và định luật Gauss cho một điện tích. Trong trường hợp môi trường chứa điện tích tại mọi điểm thì ta có:

Định luật Coulomb	Định luật Gauss
$\operatorname{div} E = \frac{\rho}{\epsilon_0}$, với ρ là hàm mật độ điện tích	$\iint_S E \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \iiint_D \rho \, dV = \frac{Q}{\epsilon_0}$, với D là khối được bao bởi mặt S và Q là tổng điện tích trên D

Rõ ràng định luật Gauss có thể nhận được từ định luật Coulomb bằng cách áp dụng định lí Gauss-Ostrogradski.

Ngược lại định luật Gauss cũng suy ra định luật Coulomb. Xét một điểm p bất kì và xét quả cầu đóng $B'(p,r)$ tâm tại điểm đó với bán kính r. Theo định luật Gauss và định lí Gauss-Ostrogradski:

$$\frac{1}{\epsilon_0} \iiint_{B'(p,r)} \rho \, dV = \iint_{\partial B'(p,r)} E \cdot d\vec{S} = \iiint_{B'(p,r)} \operatorname{div} E \, dV.$$

Chia hai vế cho thể tích của quả cầu $B'(p,r)$ và lấy giới hạn khi $r \to 0$, dùng tính chất về giới hạn của giá trị trung bình của hàm liên tục 3.3.1 ta được

$$\frac{\rho(p)}{\epsilon_0} = \operatorname{div} E(p).$$

Tuy nhiên định luật Gauss có thể được kiểm chứng bằng thí nghiệm dễ hơn định luật Coulomb, vì định luật Gauss có tính vĩ mô trong khi định luật Coulomb có tính vi mô.

Định luật Coulomb cho môi trường mang điện liên tục có thể nhận được một cách thuần túy toán học từ định luật Coulomb cho một điện tích bằng cách lấy tích phân và dùng hàm Dirac, một hàm suy rộng.

Các phương trình Maxwell về điện từ. Không lâu sau hai định luật Coulomb và Gauss, trong thập kỉ 1820, André Marie Ampère phát hiện ra rằng một dòng điện tạo ra quanh nó một từ trường theo định luật:

$$\int_C B \cdot d\vec{r} = \mu_0 I,$$

trong đó C là một đường cong kín bao quanh một dòng điện có cường độ không đổi I, B là từ trường, và μ_0 là một hằng số.

Năm 1831 Michael Faraday phát hiện rằng một từ trường thay đổi theo thời gian tới lượt nó lại tạo ra một điện trường. Định luật Faraday cho công thức:

$$\int_{\partial S} E \cdot d\vec{r} = -\frac{d}{dt} \iint_S B \cdot d\vec{S}.$$

Năm 1864, James Clerk Maxwell phát triển định luật Ampère và thống nhất điện trường với từ trường:

[2] Trong các tài liệu Vật lí định luật Gauss thường được phát biểu mà không kèm theo điều kiện gì về tính trơn của mặt và của các hàm trong công thức.

Các phương trình Maxwell	
Dạng vi phân	Dạng tích phân
(1) (Coulomb) $\operatorname{div} E = \frac{\rho}{\epsilon_0}$	(Gauss) $\iint_S E \cdot d\vec{S} = \frac{Q}{\epsilon_0}$, với S là một mặt đóng
(2) $\operatorname{curl} E = -\frac{\partial B}{\partial t}$	(Faraday) $\int_{\partial S} E \cdot d\vec{r} = -\frac{d}{dt} \iint_S B \cdot d\vec{S}$
(3) $\operatorname{div} B = 0$	$\iint_S B \cdot d\vec{S} = 0$, với S là một mặt đóng
(4) (Ampère) $\frac{1}{\epsilon_0 \mu_0} \operatorname{curl} B = \frac{J}{\epsilon_0} + \frac{\partial E}{\partial t}$, với J là mật độ dòng điện	$\frac{1}{\epsilon_0 \mu_0} \int_{\partial S} B \cdot d\vec{S} = \frac{I}{\epsilon_0} + \frac{d}{dt} \iint_S E \cdot d\vec{S}$, với I là cường độ dòng điện qua mặt S

Giống như sự tương đương của định luật Coulomb và định luật Gauss, các dạng vi phân và dạng tích phân của các phương trình Maxwell là tương đương với nhau, thông qua định lí Stokes và định lí Gauss-Ostrogradski.

Bằng thí nghiệm, Maxwell phát hiện rằng $\frac{1}{\epsilon_0 \mu_0} = c^2$, chính là bình phương của vận tốc của ánh sáng trong chân không.

Các phương trình Maxwell cùng với các định luật của Newton tổng kết toàn bộ Vật lí cổ điển. Chẳng bao lâu lí thuyết của Maxwell đã được ứng dụng trong thực tế với việc phát minh ra sóng điện từ của Heinrich Hertz năm 1887.

Giải hệ phương trình Maxwell. Để đơn giản ở đây ta xét hệ phương trình Maxwell trong trường hợp đặc biệt điện trường và từ trường không đổi theo thời gian. Vậy $\frac{\partial E}{\partial t} = \frac{\partial B}{\partial t} = 0$. Ta được cho ρ và J.

Từ phương trình (2), vì $\operatorname{curl} E = 0$ trên $\mathbb{R}^3$ nên $E = \nabla \psi$ với ψ là một hàm thực được xác định sai khác một hằng số (đây là Bổ đề Poincaré 2.3.3 cho không gian 3 chiều).

Phương trình (1) trở thành $\operatorname{div}(\nabla \psi) = \frac{\rho}{\epsilon_0}$. Vì $\operatorname{div}(\nabla)$ chính là toán tử Laplace Δ, nên ta có phương trình $\Delta \psi = \frac{\rho}{\epsilon_0}$. Đây là một phương trình đạo hàm riêng cấp hai, được gọi là *phương trình Poisson*. Có thể đọc thêm ở [**Fey64**, Chương 18].

Những phương trình như vậy là đối tượng nghiên cứu của ngành Phương trình đạo hàm riêng, một ngành lớn của Toán học.

Bài tập.

3.4.1. Dùng định lí Stokes và định lí Gauss-Ostrogradski, chứng tỏ các dạng vi phân và dạng tích phân của các phương trình Maxwell là tương đương với nhau.

3.5. * Định lí Stokes tổng quát

Định lí Stokes cho mặt $(n-1)$-chiều trong không gian $\mathbb{R}^n$. Sau đây là một trường hợp của Định lí Stokes được dùng phổ biến trong nghiên cứu các phương trình vật lí toán và phương trình đạo hàm riêng ([**Eva97**, tr. 627], [**GT01**, tr. 13]).

3.5.1. Định lí. *Cho Ω là một tập con mở bị chặn của không gian Euclid $\mathbb{R}^n$. Giả sử biên $\partial\Omega$ thuộc lớp C^1. Giả sử ν là vectơ pháp tuyến đơn vị ngoài của $\partial\Omega$. Giả sử trường vectơ F có các thành phần thuộc lớp $C^1(\overline{\Omega})$. Khi đó:*

$$\int_{\Omega} \operatorname{div} F\, dx = \int_{\partial\Omega} F \cdot \nu\, dS.$$

Trong công thức trên, ta nói biên $\partial\Omega$ thuộc lớp C^1 có nghĩa là mỗi điểm trên $\partial\Omega$ có một lân cận vi đồng phôi với một tập mở của $\mathbb{R}^n$. Điều này cũng có nghĩa là mỗi điểm trên $\partial\Omega$ có một lân cận mà trên đó $\partial\Omega$ là đồ thị của một hàm trơn theo $(n-1)$ biến. Như ta đã thấy ở phần chứng minh của 2.1.2 và 3.1.2, khái niệm này là tổng quát hóa của khái niệm đường chính qui và mặt chính qui.

Một hàm thực f là thuộc lớp $C^1(\overline{\Omega})$ nếu nó có các đạo hàm riêng cấp một liên tục trên Ω và các đạo hàm đó có mở rộng liên tục lên $\overline{\Omega}$. Nói cách khác, theo 2.3.1, hàm f là hàm trơn trên $\overline{\Omega}$.

Tích phân theo phần tử diện tích mặt dS có thể được định nghĩa một cách tương tự tích phân đường loại một và tích phân mặt loại một. Tuy nhiên có một khó khăn là có thể cần tới nhiều hơn một phép tham số hóa để phủ được hoàn toàn mặt. Để vượt qua khó khăn này người ta dùng một công cụ cao cấp hơn gọi là "phân hoạch đơn vị".

Sự thống nhất giữa các công thức Newton-Leibniz, Green, Stokes và Gauss-Ostrogradsky. Xem lại các công thức ta đã có:

$$\int_C \nabla f \cdot dr = f(B) - f(A).$$

$$\int_{\partial D} P\,dx + Q\,dy = \iint_D \left[\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right] dA.$$

$$\int_{\partial S} F \cdot dr = \iint_S (\operatorname{curl} F) \cdot n\, dS = \iint_S \operatorname{curl} F \cdot d\vec{S}.$$

$$\int_{\partial D} F \cdot n\, ds = \iint_D \operatorname{div} F\, dA.$$

$$\iint_{\partial E} F \cdot n\, dS = \iint_{\partial E} F \cdot d\vec{S} = \iiint_E \operatorname{div} F\, dV.$$

Ta có thể nhận thấy một sự thống nhất của các công thức này: tích phân của một đối tượng hàm w trên biên ∂M của một đối tượng hình học M thì bằng với tích phân của một đối tượng hàm mới dw liên quan tới đạo hàm của đối tượng hàm w ban đầu trên đối tượng hình học M ban đầu:

$$\int_{\partial M} w = \int_M dw.$$

Đây chính là dạng của công thức Stokes tổng quát.

Định lí Stokes cho mặt k-chiều trong không gian $\mathbb{R}^n$. Công thức Stokes tổng quát sẽ đúng trong trường hợp sau đây. Về mặt hình học, M là một mặt k-chiều, theo nghĩa mỗi điểm trên M có một lân cận vi đồng phôi với một tập mở của $\mathbb{R}^k$ hoặc một tập mở của một nửa của $\mathbb{R}^k$, những điểm không thuộc loại đầu tạo thành biên ∂M. Đây là khái niệm *đa tạp trơn* (smooth manifold) k-chiều.

Đối tượng hàm w thì phức tạp hơn. Đó là một *dạng vi phân* (differential form) bậc $(k-1)$. Khi đó dw là đạo hàm của dạng w và là một dạng bậc k.

Thế nào là tích phân của một dạng vi phân trên một mặt? Vì mỗi điểm trên mặt có một lân cận vi đồng phôi với với một tập con của $\mathbb{R}^k$ nên thông qua phép vi đồng phôi ta mang tích phân trên mặt về tích phân trên $\mathbb{R}^k$ bằng một công thức liên quan tới công thức đổi biến của tích phân.

Tất nhiên những miêu tả trên chưa đủ để người đọc có thể hiểu được cụ thể. Ở đây người viết không có tham vọng đó mà chỉ muốn giới thiệu vài ý niệm, hy vọng người đọc sẽ tìm hiểu thêm sau này.

Vài nét về dạng vi phân. Những kí hiệu dx, dy, dA, dV, $dxdy$, ds, dS, dr, $d\vec{S}$, ... mà ta thấy xuất hiện trong môn học cho tới nay chưa được giải thích ý nghĩa rõ ràng. Chúng là phần tử của tập hợp nào? Quan hệ giữa chúng ra sao?

Dạng vi phân bậc 1

Xét không gian $\mathbb{R}^n$. Giả sử $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. Lạm dụng kí hiệu ta chỉ x_i là hàm cho ra tọa độ thứ i của x, tức là hàm $(x_1, x_2, \dots, x_n) \mapsto x_i$. Khi đó ta định nghĩa *dạng vi phân* dx_i chính là đạo hàm của hàm x_i. Tức là $dx_i = dx_i$!

Vậy dx_i là một hàm trên $\mathbb{R}^n$. Tại mỗi điểm $x \in \mathbb{R}^n$, giá trị $dx_i(x)$ là một ánh xạ tuyến tính từ $\mathbb{R}^n$ vào $\mathbb{R}$, được đại diện bởi vectơ $(0, 0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$ trong đó số 1 nằm ở tọa độ thứ i.

Tổng quát hơn, nếu $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ là một hàm trơn thì đạo hàm df của f là một dạng vi phân trên $\mathbb{R}^n$. Tại mỗi điểm x thì $df(x)$ là một ánh xạ tuyến tính từ $\mathbb{R}^n$ vào $\mathbb{R}$, được đại diện bởi vectơ $\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x), \frac{\partial f}{\partial x_2}(x), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(x)\right)$. Từ đó ta có đẳng thức:

$$df(x) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(x)dx_1(x) + \frac{\partial f}{\partial x_2}(x)dx_2(x) + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(x)dx_n(x)$$

hay ngắn gọn hơn:

$$\boxed{df = \frac{\partial f}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}dx_2 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}dx_n.}$$

Trong trường hợp một chiều công thức trên là:

$$df = f'dx.$$

Khác với sự mơ hồ khi ta thấy công thức này lần đầu khi học về vi phân trong các giáo trình toán giải tích trung học hay năm đầu đại học, bây giờ mọi thứ trong công thức đều có nghĩa chính xác.

Ta định nghĩa một *dạng vi phân bậc 1* trên $\mathbb{R}^n$ là một hàm cho tương ứng mỗi điểm với một ánh xạ tuyến tính từ $\mathbb{R}^n$ vào $\mathbb{R}$, cho bởi công thức

$$f_1dx_1 + f_2dx_2 + \cdots + f_ndx_n$$

trong đó $f_1, \ldots, f_n$ là các hàm trơn.

Ví dụ. Trên $\mathbb{R}^2$, dạng bậc 1 được cho bởi công thức $Pdx + Qdy$ trong đó P, Q là hàm trơn trên $\mathbb{R}^2$.

Tích của dạng vi phân

Người ta định nghĩa được một phép nhân trên các dạng vi phân, thường được kí hiệu bởi $\wedge$ (wedge - tích chèn), nhưng ở đây ta bỏ qua kí hiệu đó cho đơn giản. Phép nhân của dạng vi phân có tính phân phối với phép cộng. Nó còn có một tính chất đặc biệt, là tính phản đối xứng:

$$dxdy = -dydx.$$

Một hệ quả là $dxdx = 0$.

Ví dụ. Khi $n = 2$: Ta sẽ có $dxdy$ là một dạng vi phân bậc 2. Tại mỗi điểm $p \in \mathbb{R}^2$, giá trị $dxdy(p)$ là một ánh xạ mà tác động vào cặp vectơ $u, v \in \mathbb{R}^2$ cho ra $\det(u, v)$, chính là diện tích có hướng của hình bình hành sinh bởi u và v. Vì vậy có lẽ không quá ngạc nhiên khi ta biết kí hiệu dA chính là $dxdy$:

$$\boxed{dA = dxdy.}$$

Ví dụ. Khi $n = 3$: Ta sẽ có $dxdydz$ là một dạng vi phân bậc 3. Tại mỗi điểm $p \in \mathbb{R}^3$, giá trị $dxdydz(p)$ là một ánh xạ mà tác động vào bộ 3 vectơ $u, v, w \in \mathbb{R}^3$ cho ra $\det(u, v, w)$, chính là diện tích có hướng của hình bình hành sinh bởi u, v và w. Kí hiệu dV chính là $dxdydz$:

$$\boxed{dV = dxdydz.}$$

Tổng quát hơn, tại mỗi $p \in \mathbb{R}^n$ thì $dx_1dx_2 \cdots dx_n(p) = \det$, và đó chính là dạng thể tích dV trên $\mathbb{R}^n$.

$$\boxed{dV = dx_1dx_2 \cdots dx_n.}$$

Với $1 \leq i_1, i_2, \ldots, i_k \leq n$ thì $dx_{i_1}dx_{i_2} \cdots dx_{i_k}$ là một dạng bậc k. Tổng của hai dạng bậc k là một dạng bậc k. Tích của một hàm trơn với một dạng bậc k cũng là một dạng bậc k. Ta định nghĩa *một dạng vi phân bậc k bất kì trên $\mathbb{R}^n$ là một tổng hữu hạn của những dạng $fdx_{i_1}dx_{i_2} \cdots dx_{i_k}$.*

Ví dụ. Một dạng bậc 2 trên $\mathbb{R}^3$ có công thức $Pdydz + Qdzdx + Rdxdy$, trong đó P, Q, R là các hàm trơn trên $\mathbb{R}^3$.

Ở đây chúng ta chưa bàn tới dạng vi phân trên các đường, mặt, hay tổng quát hơn những tập con "k-chiều" trong $\mathbb{R}^n$. Vì vậy ta chưa có cơ hội giải thích các dạng ds, dS, ...

Tích phân của dạng vi phân

Theo định nghĩa ở trên một dạng vi phân bậc n trên $\mathbb{R}^n$ là một tổng của hữu hạn những dạng $fdx_1dx_2\cdots dx_n$. Rất đơn giản, ta định nghĩa tích phân của dạng $fdx_1dx_2\cdots dx_n$ trên tập con D của $\mathbb{R}^n$ chính là tích phân bội của hàm f trên D.

Định nghĩa trên được dùng cho những tập con D "n-chiều" trong $\mathbb{R}^n$. Nếu tập con D này có số chiều $k < n$ (ví dụ như đường, mặt trong $\mathbb{R}^n$) thì cần có một định nghĩa khác dành riêng cho số chiều k. Như ta đã thấy qua tích phân đường và tích phân mặt, một định nghĩa như vậy sẽ dùng tới việc "kéo lui" một dạng trên D về một dạng k-chiều trên $\mathbb{R}^k$, rồi lấy tích phân. Chi tiết khá phức tạp, nên ta dừng lại ở đây.

Đạo hàm của dạng vi phân

Người ta định nghĩa được một phép đạo hàm trên các dạng. Phép tính này có tính tuyến tính, nên nó được xác định bởi công thức:

$$\begin{aligned} d(fdx_{i_1}dx_{i_2}\cdots dx_{i_k}) &= (df)dx_{i_1}dx_{i_2}\cdots dx_{i_k} \\ &= \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}dx_2 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}dx_n\right) dx_{i_1}dx_{i_2}\cdots dx_{i_k}. \end{aligned}$$

Như vậy đạo hàm của một dạng bậc k là một dạng bậc $(k+1)$.

Ví dụ. Trên $\mathbb{R}^2$ xét dạng $w = Pdx + Qdy$. Ta có

$$dw = \left(\frac{\partial P}{\partial x}dx + \frac{\partial P}{\partial y}dy\right)dx + \left(\frac{\partial Q}{\partial x}dx + \frac{\partial Q}{\partial y}dy\right)dy = \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy.$$

Ví dụ. Trên $\mathbb{R}^3$ xét dạng $w = Pdx + Qdy + Rdz$. Ta có

$$\begin{aligned} dw &= \left(\frac{\partial P}{\partial x}dx + \frac{\partial P}{\partial y}dy + \frac{\partial P}{\partial z}dz\right)dx + \left(\frac{\partial Q}{\partial x}dx + \frac{\partial Q}{\partial y}dy + \frac{\partial Q}{\partial z}dz\right)dy + \\ &\quad + \left(\frac{\partial R}{\partial x}dx + \frac{\partial R}{\partial y}dy + \frac{\partial R}{\partial z}dz\right)dz \\ &= \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)dydz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)dzdx + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy. \end{aligned}$$

Chú ý các thành phần của dw chính là các thành phần của $\operatorname{curl}(P, Q, R)$.

Ví dụ. Trên $\mathbb{R}^3$ xét dạng $w = Pdydz + Qdzdx + Rdxdy$. Ta có

$$\begin{aligned} dw &= \left(\frac{\partial P}{\partial x}dx + \frac{\partial P}{\partial y}dy + \frac{\partial P}{\partial z}dz\right)dydz + \left(\frac{\partial Q}{\partial x}dx + \frac{\partial Q}{\partial y}dy + \frac{\partial Q}{\partial z}dz\right)dzdx + \\ &\quad + \left(\frac{\partial R}{\partial x}dx + \frac{\partial R}{\partial y}dy + \frac{\partial R}{\partial z}dz\right)dxdy \\ &= \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right)dxdydz. \end{aligned}$$

Thành phần của dạng dw chính là $\operatorname{div}(P, Q, R)$.

Tương ứng giữa hàm và dạng	
hàm thực f	dạng bậc không f
trường (P, Q, R)	dạng bậc một $Pdx + Qdy + Rdz$
trường bảo toàn	dạng bậc một mà là đạo hàm của một dạng bậc không
trường $\text{curl}(P, Q, R)$	dạng bậc hai $\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) dydz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right) dzdx + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy$
hàm $\text{div}(P, Q, R)$	dạng bậc ba $\left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) dxdydz$

Ví dụ. Tính $d(df)$ ta được:

$$\begin{aligned} d(df) &= d\left(\frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz\right) \\ &= \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y}\right) dydz + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}\right) dzdx + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}\right) dxdy. \end{aligned}$$

Vậy nếu f trơn cấp hai thì $d(df) = 0$. Đây không gì khác hơn chính là hệ thức $\text{curl}(\nabla(f)) = 0$.

Ví dụ. Nếu ta lấy $w = Pdx + Qdy + Rdz$ thì như ở trên đã tính $dw = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) dydz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right) dzdx + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy$, tương ứng với trường $\text{curl}(P, Q, R)$, và

$$d(dw) = \left(\frac{\partial^2 R}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 Q}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 P}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 R}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 Q}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 P}{\partial z \partial y}\right) dxdydz.$$

Nếu trường (P, Q, R) là trơn cấp hai thì $d(dw) = 0$. Đây chính là hệ thức $\text{div}(\text{curl}(F)) = 0$.

Tổng quát, tích của hai ánh xạ đạo hàm d nối tiếp bằng không:

$$\boxed{d^2 = 0.}$$

Bổ đề Poincaré tổng quát

Ta đã thấy nếu $w = du$ thì $dw = 0$. Điều ngược lại là nội dung của Bổ đề Poincaré tổng quát: Trên một miền mở hình sao của $\mathbb{R}^n$, nếu w là một dạng bậc k và $dw = 0$ thì tồn tại một dạng u bậc $k - 1$ sao cho $du = w$.

Định lí Stokes tổng quát

Định lí Stokes tổng quát cho công thức trên $\mathbb{R}^n$:

$$\boxed{\int_{\partial M} w = \int_M dw.}$$

- Định lí Newton-Leibniz ứng với trường hợp w là dạng bậc không f và M là một tập con 1-chiều của $\mathbb{R}$ (đoạn thẳng).
- Định lí Green ứng với trường hợp w là dạng bậc một $Pdx + Qdy$ và M là một tập con 2-chiều của $\mathbb{R}^2$.
- Định lí Stokes ứng với trường hợp w là dạng bậc một $Pdx + Qdy + Rdz$ và M là một tập con 2-chiều của $\mathbb{R}^3$ (mặt).

- Định lí Gauss-Ostrogradski ứng với trường hợp w là dạng bậc hai $Pdydz + Qdzdx + Rdxdy$ và M là một tập con 3-chiều của $\mathbb{R}^3$ (khối).

Hướng dẫn đọc thêm. Để trình bày chặt chẽ nội dung của môn học này và tổng quát hóa lên các không gian có số chiều cao hơn cần nghiên cứu hai lãnh vực: đa tạp vi phân (differential manifolds) (tổng quát hóa của đường và mặt), và dạng vi phân (differential forms) (tổng quát hóa của trường vectơ). Quyển sách nhỏ của Spivak [**Spi65**] là giáo trình kinh điển. Quyển sách của Munkres [**Mun91**] xuất hiện sau, có nội dung tương tự nhưng có nhiều chi tiết hơn. Một tài liệu hay gần đây là tập bài giảng [**Sja06**]. Ngoài ra có thể đọc quyển sách nâng cao hơn của Guillemin và Pollack [**GP74**].

Một tiếp cận khác của vấn đề tích phân trên các tập con của không gian Euclid được trình bày trong Lí thuyết độ đo hình học (Geometric Measure Theory). Có thể đọc quyển sách nhập môn của Morgan [**Mor00**].

Bài tập.

3.5.2. Đây là một hệ quả của 3.5.1. Với cùng các giả thiết về Ω, ta viết $v = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$. Giả sử hàm thực f thuộc lớp $C^1(\overline{\Omega})$. Khi đó:

$$\int_\Omega \frac{\partial f}{\partial x_i}\, dx = \int_{\partial\Omega} f v_i\, dS.$$

3.5.3 (tích phân từng phần). Đây là một hệ quả của 3.5.2. Với cùng các giả thiết về Ω, giả sử các hàm thực f và g thuộc lớp $C^1(\overline{\Omega})$. Khi đó:

$$\int_\Omega \frac{\partial f}{\partial x_i} g\, dx = \int_{\partial\Omega} f g v_i\, dS - \int_\Omega f \frac{\partial g}{\partial x_i}\, dx.$$

3.5.4 (công thức Green). Đây là những hệ quả của 3.5.1 và 3.5.2. Với cùng các giả thiết về Ω, giả sử các hàm thực f và g thuộc lớp $C^2(\overline{\Omega})$. Ta viết $\frac{\partial f}{\partial v} = \nabla f \cdot v$, đạo hàm của f theo hướng v. Nhắc lại toán tử Laplace Δ được cho bởi $\Delta f = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}$. Khi đó:

(a)
$$\int_\Omega \Delta f\, dx = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial f}{\partial v}\, dS.$$

(b)
$$\int_\Omega \nabla f \cdot \nabla g\, dx = \int_{\partial\Omega} f \frac{\partial g}{\partial v}\, dS - \int_\Omega f \Delta g\, dx.$$

(c)
$$\int_\Omega (f\Delta g - g\Delta f)\, dx = \int_{\partial\Omega} \left(f\frac{\partial g}{\partial v} - g\frac{\partial f}{\partial v} \right) dS.$$

3.5.5 (diện tích mặt cầu). Gọi $S^n(R)$ là mặt cầu n-chiều tâm tại 0 với bán kính R, biên của quả cầu $B'^{(n+1)}(R)$ tâm 0 bán kính R. Hãy dùng 3.5.1 để tính diện tích (nói cách khác, thể tích n-chiều) của $S^n(R)$.

Gợi ý cho một số bài tập

1.2.16: Giả sử $x \in [0,1]$ là một số vô tỉ và $\{p_n/q_n\}_{n\in\mathbb{Z}^+}$ là một dãy các số hữu tỉ hội tụ về x. Nếu dãy $\{q_n\}_{n\in\mathbb{Z}^+}$ không tiến ra vô cùng thì sẽ có một số thực M và một dãy con $\{q_{n_k}\}_{k\in\mathbb{Z}^+}$ sao cho $q_{n_k} < M$ với mọi $k \in \mathbb{Z}^+$. Dãy $\{p_{n_k}/q_{n_k}\}_{k\in\mathbb{Z}^+}$ chỉ gồm hữu hạn giá trị.

1.2.17: Tập hợp các số hữu tỉ là đếm được.

1.3.12: Đưa bài toán về trường hợp tam giác vuông. Đặt tam giác vào hình chữ nhật rồi lấy một phép chia đều của hình chữ nhật đó. Xét tổng trên và tổng dưới.

1.4.11: Dùng định lí Fubini hai lần.

1.4.14: (b) Dùng ý ở bài 1.1.8.

1.5.7: Chú ý rằng miền D đối xứng qua trục Oy. Có thể có kết quả mà không cần tính trực tiếp tích phân. Để giải thích chính xác có thể dùng phép đổi biến $x \mapsto -x$.

1.6.3: Có thể viết ngay giá trung bình là $\frac{1}{|[0,1]\times[0,2]|}\iint_{[0,1]\times[0,2]} p(x,y)\,dxdy$. Có thể giải thích chi tiết hơn như sau. Chia đoạn $[0,1]$ thành 10^3 đoạn dài bằng nhau và chia đoạn $[0,2]$ thành 2×10^3 đoạn dài bằng nhau. Như vậy hình chữ nhật kích thước 1km $\times$ 2km được chia thành những hình chữ nhật con có kích thước 1m$\times$1m. Số hình chữ nhật con như vậy là $10^3\times(2\times10^3)$. Giá của mỗi mảnh đất 1m$\times$1m này được đại diện bởi $p(x_i,y_j)$ với một điểm (x_i,y_j) trong đó. Vậy giá trung bình là $S = \left(\sum_{i,j} p(x_i,y_j)\right)/(10^3\times2\times10^3)$ (triệu đồng/m^2). Bây giờ viết $S = \frac{1}{2}\sum_{i,j} p(x_i,y_j)\times(10^{-3}\times10^{-3})$ thì $\sum_{i,j} p(x_i,y_j)\times(10^{-3}\times10^{-3})$ chính là một tổng Riemann của hàm p ứng với phép chia nói trên của $[0,1]\times[0,2]$. Giá trị này được xấp xỉ bằng một tổng vô hạn là tích phân $\iint_{[0,1]\times[0,2]} p(x,y)\,dxdy$. Vậy $S = \frac{1}{2}\iint_{[0,1]\times[0,2]} p(x,y)\,dxdy$.

Tài liệu tham khảo

[Áng97] Đặng Đình Áng, *Lý thuyết tích phân*, Nhà Xuất Bản Giáo Dục, 1997. 36

[Apo69] Tom M. Apostol, *Calculus*, vol. 2, John Wiley and Sons, 1969.

[Arn89] Vladimir I. Arnold, *Mathematical methods of classical mechanics*, 2nd ed., Springer, 1989.

[Buc78] Greighton Buck, *Advanced calculus*, 3rd ed., McGraw-Hill, 1978.

[Eva97] Lawrence C. Evans, *Partial Differential Equations*, 2nd ed., AMS, 1997. 81

[Fey64] Richard P. Feynman, Robert B. Leighton, Mathew Sands, *The Feynman's lectures in Physics*, vol. 2, Addison-Wesley, 1964. 80

[GT01] David Gilbarg and Neil S. Trudinger, *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order*, Springer, 2001. 81

[GP74] Victor Guillemin and Alan Pollack, *Differential topology*, Prentice-Hall, 1974. 86

[Kap02] Wilfred Kaplan, *Advanced calculus*, 5th ed., Addison-Wesley, 2002.

[Kel29] Oliver Dimon Kellogg, *Foundations of potential theory*, Springer, 1929. 57

[Khu10] Nguyễn Văn Khuê, Lê Mậu Hải, *Giải tích toán học*, tập 2, Nhà Xuất Bản Đại học Sư phạm Hà Nội, 2010.

[Lan97] Serge Lang, *Undergraduate analysis*, 2nd ed., Springer, 1997, a revision of Analysis I, Addison-Wesley, 1968. 6, 7, 11, 25, 28, 36

[LDP02] Đinh Thế Lục, Phạm Huy Điển, Tạ Duy Phượng, *Giải tích các hàm nhiều biến*, Nhà Xuất Bản Đại học Quốc gia Hà Nội, 2002.

[Mor00] Frank Morgan, *Geometric measure theory: A beginner's guide*, Academic Press, 2000. 86

[MT03] Jerrold E. Marsden and Anthony J. Tromba, *Vector calculus*, Freeman, 2003.

[Mun91] James Munkres, *Analysis on manifolds*, Addison-Wesley, 1991. 28, 86

[Mun00] ———, *Topology a first course*, 2nd ed., Prentice-Hall, 2000. 66

[PTT02] Nguyễn Đình Phư, Nguyễn Công Tâm, Đinh Ngọc Thanh, Đặng Đức Trọng, *Giáo trình giải tích - hàm nhiều biến*, Nhà Xuất Bản Đại học Quốc gia Thành phố Hồ Chí Minh, 2002.

[Rat94] John G. Ratcliffe, *Foundations of hyperbolic manifolds*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 149, Springer-Verlag, 1994. 36

[Rud76] Walter Rudin, *Principles of mathematical analysis*, 3rd ed., McGraw-Hill, 1976. 28

[Rud86] ———, *Real and complex analysis*, 3rd ed., McGraw Hill, 1986.

[Sja06] Reyer Sjamaar, *Manifolds and differential forms*, 2006, Cornell University. 59, 86

[Spi65] Michael Spivak, *Calculus on manifolds*, Addison-Wesley, 1965. 28, 86

[Ste08] James Stewart, *Calculus: Early transcendentals*, 6th ed., Brooks/Cole, 2008. ii, 28, 45

[Sti92] John Stillwell, *Geometry of surfaces*, Universitext, Springer, 1992. 36

Chỉ mục