TÀI LIỆU THAM KHẢO
TOÁN CAO CẤP A4 - GIẢI TÍCH 3

GIẢNG VIÊN: TS. NGUYỄN ĐỨC TRUNG
NĂM HỌC: 2016 -2017

TRANG CHỦ:
http://moon.vn/KhoaHoc/MonHoc/7

LỜI NÓI ĐẦU

§TRÌNH GIẢNG DẠY TOÁN CAO CẤP TRÊN MOON.VN NĂM HỌC 2016 - 2017

Chúc mừng các bạn đã bước vào một ngưỡng cửa mới của cuộc đời. Việc đỗ Đại học mở ra cho các em một trang mới với đầy cơ hội nhưng không kém thách thức. Thách thức không chỉ ở việc học xa nhà hoặc ở môi trường mà cơ hội tiếp xúc để hỏi đáp với Giảng viên rất hạn chế trên những giảng đường lớn hàng trăm Sinh viên mà ở khối lượng kiến thức đồ xộ.

Tại bậc học Đại học, một môn học được chia ra làm các phân môn (hay còn gọi là học phần). Các học phần có tính độc lập tương đối về nội dung kiến thức nên được tổ chức học và đánh giá kết quả học tập độc lập hoàn.

Bài tập hoàn toàn được tập trung dồn vào cuối §hoặc chuyên đề chứ không theo bài (các buổi học). Các bài tập cũng được giải theo tính chủ động học tập của Sinh viên. Rất nhiều bạn Sinh viên ngỡ ngàng với việc học ở bậc Đại học nên kết quả học tập các môn học Đại cương thường thấp hơn những môn học chuyên ngành ở năm thứ 3, thứ 4 (hoặc thứ 5).

Tuy nhiên, §trình giảng dạy Toán Cao Cấp tại Moon.vn vẫn thiết kế bài tập tại cuối các bài học lý thuyết (qua Video theo truyền thống ở Moon.vn) và cuối các §(Phần luyện tập chuyên đề). Cũng nhằm để làm quen với cách học ở Đại học, một số video bài tập được đưa ra với mục đích hướng dẫn các em cách làm bài tập và trình bầy ở bậc Đại học.

Thầy thiết kế §trình với lịch phát sóng sớm để các em có cơ hội tiếp cận sớm với kiến và kỹ năng làm bài tập tốt. Hy vọng với sự chuẩn bị sớm và tốt, các em sẽ thành đạt bởi theo kinh nghiệm: 95% thành công do việc chuẩn bị.

Để các bạn Sinh viên tiện theo dõi §trình học, Thầy thiết kế §trình đào tạo được đánh mã số chi tiết theo các phân đoạn đơn vị kiến thức tuần tự để các em dễ dàng theo dõi. Các em có thể vào đường link sau để biết rõ về toàn bộ §trình: http://moon.vn/KhoaHoc/MonHoc/7

Tại bậc Phổ thông, các em học một §trình Toán duy nhất còn đối với Toán Cao Cấp thì sự khác biệt rất lớn được thể hiện ở từng Trường, thâm chí từng khối ngành học trong Trường.

- Đối với các khối ngành Kỹ thuật, Khoa học (Sư phạm, KHTN), Công nghệ, §trình Toán Cao Cấp được học là Toán A gồm có 4 học phần riêng biệt với đường link chính cho Toán A (http://moon.vn/Pro/7/212):
  - Toán A1: Đại số tuyến tính
  - Toán A2: Giải tích 1
  - Toán A3: Giải tích 2
  - Toán A4: Giải tích 3
- Đối với các khối ngành Nông – Lâm – Y – Dược, §trình Toán Cao Cấp được học là Toán B gồm có 2 học phần riêng biệt với đường link chính cho Toán B (http://moon.vn/Pro/7/213):
  - Toán B1: Đại số tuyến tính
  - Toán B2: Giải tích
- Đối với các khối ngành Kinh tế, Thương mại, Tài chính, Ngân hàng, Luật hoặc Quản trị kinh doan ... §trình Toán Cao Cấp được học là Toán C gồm có 2 học phần riêng biệt với đường link chính cho Toán C (http://moon.vn/Pro/7/214):
  - Toán C1: Đại số tuyến tính
  - Toán C2: Giải tích

Tại Moon.vn, kiến thức lý thuyết đã được bố trí với các nội dung chi tiết cho từng khối ngành thông qua hệ thống video bài giảng cùng giáo trình đầy đủ cũng như các tóm tắt lý thuyết vận dụng để nhanh chóng có thể giải bài tập cho cả Toán A, Toán B và Toán C. Đi kèm lý thuyết cơ bản là một kho dữ liệu khổng bài tập được tổng hợp từ các Đề thi giữa và cuối Học kỳ các năm gần đây của các khối ngành:

- Toán A1, A2, A3 và A4: hơn 3500 bài tập

- Toán B1 và B2: gần 2000 bài tập
- Toán C1 và C2: gần 2000 bài tập

Các bài tập trọng yếu được quay Video đi kèm lời giải giúp các em ôn tập dễ dàng, tiếp cận phương pháp giải nhanh chóng và chính xác.

Thầy và đội ngũ các Supper Mods (cũng đều là các Giảng viên dạy Đại học) rất vui được trao đổi trên diễn đàn Toán cao cấp tại Moon.VN trên Facebook với đường link sau: https://www.facebook.com/groups/TCC.moon/

Các em cũng có thể thắc trực tiếp với thầy tại trang Facebook cá nhân với đường link sau: https://www.facebook.com/Thay.Trung.Toan

Chúc các em nhanh chóng thu lượm được những kiến thức, hoàn thiện kỹ năng và vận dụng sáng tạo !

MỤC LỤC

PHẦN I. PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN 8
§1. PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN CẤP I. 8
1. Đại cương về phương trình vi phân cấp 1 8
2. Phương trình phân ly...9
3. Phương trình thuần nhất...10
4. Phương trình khuyết biến...10
5. Phương trình tuyến tính. 12
6. Phương trình Bernoulli. 14
7. Phương trình vi phân toàn phần...15
§2. PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN CẤP HAI 17
1. Đại cương về phương trình vi phân cấp 2. 17
2. Phương trình khuyết...18
3. Phương trình tuyến tính thuần nhất...19
4. Phương trình tuyến tính không thuần nhất. 21
5. Phương trình tuyến tính có hệ số không đổi...23
§3. HỆ PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN...30
1. Đại cương...30
2. Cách giải hệ phương trình vi phân...30
PHẦN II. LÝ THUYẾT CHUỖI...32
§1. ĐẠI CƯƠNG VỀ HỆ CHUỖI SỐ 32
1. Chuỗi số 32
2. Tính chất 33
§2. CHUỖI SỐ DƯƠNG...34
1. Định nghĩa 34

2. Các định lý so sánh 34
3. Các tiêu chuẩn hội tụ...35
§3. CHUỖI SỐ CÓ DẤU VỚI HẠNG TỬ BẤT KỲ 39
1. Chuỗi với số hạng có dấu bất kỳ..39
2. Chuỗi đan dấu 39
3. Tính chất của chuỗi hội tụ tuyệt đối 40
§4. CHUỖI HÀM SỐ...42
1. Chuỗi hàm số hội tụ 42
2. Chuỗi hàm số hội tụ đều 42
3. Tính chất của chuỗi hàm số hội tụ đều 43
§5. CHUỖI LŨY THỪA 45
1. Định nghĩa..45
2. Các tính chất của chuỗi lũy thừa...47
3. Khai triển thành chuỗi lũy thừa 48
4. Khai triển một số hàm số sơ cấp cơ bản 49
§6. CHUỖI FOURIER..52
1. Chuỗi lượng giác chuỗi fourier...52
2. Điều kiện để hàm số khai triển thành chuỗi Fourier.......................................53
3. Khai triển hàm chẵn lẻ 54
PHẦN III. PHƯƠNG PHÁP TOÁN TỬ LAPLACE..57
§1. PHÉP BIẾN ĐỔI LAPLACE VÀ PHÉP BIẾN ĐỔI LAPLACE NGƯỢC 57
1. Phép biến đổi Laplace...57
2. Định nghĩa..57
3. Tính chất của phép biến đổi Laplace 58
4. Phép biến đổi Laplace ngược..60
§2. PHÉP BIẾN ĐỔI CỦA BÀI TOÁN VỚI GIÁ TRỊ BAN ĐẦU........................64
1. Phép biến đổi của đạo hàm 64

2. Nghiệm của bài toán giá trị ban đầu. Hệ quả. Phép biến đổi của đạo hàm bậc cao 64

3. Hệ phương trình vi phân tuyến tính 66

4. Những kỹ thuật biến đổi bổ sung 67

§3. PHÉP TỊNH TIẾN VÀ PHÂN THỨC ĐƠN GIẢN 69

1. Mở đầu 69

2. Quy tắc phân thức đơn giản 69

3. Sự cộng hưởng và nhân tử tích lặp bậc 2 70

§4. ĐẠO HÀM, TÍCH PHÂN VÀ TÍCH CÁC PHÉP BIẾN ĐỔI 72

1. Mở đầu 72

2. Tích chập của hai hàm 72

3. Vi phân của phép biến đổi 73

4. Tích phân của phép biến đổi 75

5. Phép biến đổi của hàm liên tục từng khúc 75

PHẦN I. PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN

Phương trình vi phân là phương trình có dạng F(x, y, y', y'', ... , $y^{(n)}$) = 0, trong đó x là biến độc lập, y = y(x) là hàm phải tìm, y', ... , $y^{(n)}$ là các đạo hàm của nó.

Cấp cao nhất của đạo hàm có trong phương trình, gọi là cấp của phương trình. Giáo trình này chỉ xét các phương trình cấp 1 và 2.

Nghiệm của phương trình vi phân là mọi hàm số thỏa mãn phương trình đã cho.

Nghiệm của phương trình có thể tìm được dưới dạng tường minh y = y(x), hoặc dạng tham số x = x(t); y = y(t); hoặc dạng ẩn Φ(x,y) = 0.

§1. PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN CẤP I.

1. Đại cương về phương trình vi phân cấp 1

Định nghĩa. Phương trình vi phân cấp 1 là phương trình dạng F(x,y,y') = 0. Nếu từ phương trình đã cho giải được theo y' thì phương trình có dạng y' = f(x,y).

Bài toán Cauchy. Là bài toán tìm nghiệm của phương trình y' = f(x,y) thỏa mãn điều kiện $y(x_0) = y_0$, trong đó (x_0, y_0) là các giá trị cho trước. Bài toán Cauchy được viết

$$\begin{cases} y' = f(x,y) & (1) \\ y\big|_{x=x_0} = y_0 & (2) \end{cases}$$

Điều kiện (2) gọi là điều kiện ban đầu, hay điều kiện Cauchy.

Định lý tồn tại và duy nhất nghiệm. Xét bài toán Cauchy (1), (2). Giả sử f(x,y) liên tục trên $D \subset \mathbb{R}^2$, và $(x_0, y_0) \in D$. Khi đó, trong một lân cận nào đó của x_0, bài toán Cauchy (1), (2) luôn có nghiệm. Nếu có thêm điều kiện $f'_y(x,y)$ liên tục trên D, thì nghiệm là duy nhất.

Nghiệm tổng quát. Ta gọi ghiệm tổng quát của phương trình y' = f(x,y) là hàm số $y=\varphi(x,C)$, trong đó C là hằng số tùy ý, thỏa mãn các điều kiện sau:

a) Hàm số $y=\varphi(x,C)$ thỏa mãn phương trình đã cho với mọi giá trị của C.

b) $\forall\left(x_0,y_0\right)\in D$, với D là miền mà điều kiện tồn tại và duy nhất nghiệm được thỏa mãn, luôn tìm được giá trị của hằng số $C=C_0$, sao cho nghiệm $y=\varphi(x,C_0)$ thỏa mãn điều kiện ban đầu (2).

Nghiệm riêng, tích phân riêng. Nếu trong công thức nghiệm tổng quát hoặc tích phân tổng quát, ta cho C giá trị cụ thể C_0, thì nghiệm nhận được gọi là nghiệm riêng hoặc tích phân riêng.

Nghiệm kỳ dị. Có thể tồn tại các nghiệm không nằm trong họ nghiệm tổng quát.

Những nghiệm như vậy gọi là nghiệm kỳ dị.

2. Phương trình phân ly.

Là phương trình dạng f(x)dx + g(y)dy = 0.

Cách giải: Tích phân hai vế phương trình, được $\int f(x)dx+g(y)dy=C$.

Gọi F(x) và G(y) là các nguyên hàm tương ứng, thì tích phân tổng quát của phương
trình là F(x) + G(y) =C.

Ví dụ: Giải phương trình $\left(e^x+1\right)ydx+\left(y+1\right)dy=0$.

Giải: Nếu $y\neq 0$, chia hai vế cho y, được $\left(e^x+1\right)dx+\left(1+\dfrac{1}{y}\right)dy=0$ Tích phân hai vế,được $e^x+x+y+\ln|y|=C$. Ngoài ra, y(x) ≡ 0 cũng là nghiệm. Nghiệm này không nằm trong họ nghiệm tổng quát, nên là nghiệm kỳ dị .

3. Phương trình thuần nhất.

Là phương trình có dạng $y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$.

Cách giải: Đặt y = tx. Đạo hàm theo x, được y' = xt' + t. Thế vào phương trình đã cho,được $xt' = f(t) - t$. Nếu $f(t) - t \not\equiv 0$, chia hai vế cho x(f(t) - t) được

$$\frac{dt}{f(t)-t} = \frac{dx}{x} \Rightarrow \underbrace{\int \frac{dt}{f(t)-t}}_{\Phi(t)} = \int \frac{dx}{x} \Rightarrow \ln|x| = \Phi(t) + \ln C \Rightarrow x = Ce^{\Phi\left(\frac{y}{x}\right)}.$$

Nếu f(t)≡t, thì y' = y/x. Nghiệm tổng quát là y = Cx.

Nếu tồn tại t_0 sao cho $f(t_0) = t_0$ thì thử trực tiếp, thấy $y = t_0x$ là nghiệm riêng.

Ví dụ: Giải phương trình $y' = \frac{x+y}{x-y}$.

Giải: Chia tử và mẫu cho x, dễ thấy đây là phương trình thuần nhất. Đặt y = tx, được

$$xt' + t = \frac{1+t}{1-t} \Rightarrow xt' = \frac{1+t}{1-t} - t = \frac{1+t^2}{1-t} \Rightarrow \frac{dx}{x} = \frac{1-t}{1+t^2}dt.$$

Tích phân hai vế, được $\ln|x| = \arctan t - \frac{1}{2}\ln(1+t^2)$ + lnC. Vậy $\sqrt{x^2+y^2} = Ce^{\arctan\left(\frac{y}{x}\right)}$.

4. Phương trình khuyết biến.

a) Phương trình khuyết y. Dạng phương trình là F(x,y') = 0.

+ Nếu giải được y' = f(x) thì nghiệm tổng quát là y = $\int f(x)dx$ + C.

+ Nếu giải được x = g(y') thì đặt y' = t được $dy = tdx = tg'(t)dt \Rightarrow y = \int tg'(t)dt$

Ngoài ra x = g(t). Vậy nghiệm tổng quát dạng tham số là x = g(t); $y = \int tg'(t)dt$

Ví dụ: Giải phương trình $x = y'^2 + y' + 1$.

Giải: Đặt y' = t, được $x = t^2 + t + 1$. Từ đó dy = tdx = t(2t + 1)dt,

$y = \frac{2t^3}{3} + \frac{t}{2} + C$. Nghiệm của phương trình là $y = \frac{2t^3}{3} + \frac{t}{2} + C$; $x = t^2 + t + 1$.

+ Nếu giải được x, y' dạng tham số x = f(t) ; y' = g(t) thì dy = f(t)dx = g(t)f '(t)dt.

Do đó $y = \int g(t)f'(t)dt + C$. Vậy nghiệm tổng quát là $\begin{cases} x = f(t) \\ y = \int g(t)f'(t)dt + C \end{cases}$

Ví dụ: $x^2 + y'^2 = 1$.

Giải: đặt x = cost ; y' = sint. Từ đó $dy = \sin t dx = -\sin^2 t dt = (1 + \cos 2t)dt/2$.

Vậy $y = \frac{t + \sin 2t}{4} + C$. Đáp số { x = cost ; $y = \frac{t + \sin 2t}{4} + C$ }.

b) Phương trình khuyết x. Dạng phương trình là F(y,y') = 0.

+ Nếu giải được y' = f(y) thì $\frac{dy}{f(y)} = dx \Rightarrow x = \int \frac{dy}{\ln|y|} + C$.

+ Nếu giải được y = g(y') thì đặt y' = t. Do dy = tdx nên g'(t)dt = tdx. Vậy

$dx = \frac{g'(t)}{t}dt \Rightarrow x = \int \frac{g'(t)dt}{t} + C$. Vậy nghiệm tổng quát là

$$\begin{cases} x = \int \frac{g'(t)dt}{t} + C \\ y = g(t) \end{cases}$$

Ví dụ: Giải phương trình $y = (y')^2 e^{-y'}$.

Giải: Đặt y' = t, nhận được

$y = t^2e^{-t}$. Có $dy = y'dx \Leftrightarrow (2t - t^2)e^{-t}dt = tdx \Rightarrow dx = (2-t)e^{-t}dt \Rightarrow x = (t-1)e^{-t}$. Vậy nghiệm tổng quát là $x = (t-1)e^{-t} + C;\ y = t^2e^{-t}$.

+ Nếu giải được y, y' dạng tham số y = f(t) ; y' = g(t) thì do dy = y'dx,

nên f '(t)dt = g(t)dx. Do đó $x = \int \frac{f'(t)dt}{g(t)} dt + C$ Vậy nghiệm tổng quát là

$$\begin{cases} y = f(t) \\ x = \int \frac{f'(t)dt}{g(t)} + C \end{cases}$$

Ví dụ: $y^2 + y'^2 = 1$.

Giải: Từ phương trình đã cho, được $y = \cos t$; $y' = \sin t$. Do dy = y'dx

nên costdt = costdx, dt = dx, x = t + C. Đáp số $y = \sin t = \sin(x - C)$.

5. Phương trình tuyến tính.

Là phương trình có dạng y' + p(x)y = f(x).

Nếu f(x) $\equiv$0 thì phương trình trên được gọi là phương trình thuần nhất

a) Giải phương trình thuần nhất y' + p(x)y = 0.

Nếu $y \neq 0$, chia hai vế cho y, phương trình trở thành phân ly biến

$\frac{dy}{y} = p(x)dx,\ \ln|y| = \int p(x)dx$; $y = Ce^{-\int p(x)dx}$. Trường hợp y = 0 cũng là nghiệm

và là nghiệm riêng khi C = 0

b) Giải phương trình không thuần nhất y' + p(x)y = f(x).

Chúng ta tìm nghiệm dưới dạng $y = C(x)e^{-\int p(x)dx}$, trong đó C(x) là hàm số cần tìm.

Tính đạo hàm từ biểu thức của y rồi thế vào phương trình đã cho, được

$$\left(C'_x(x)e^{-\int p(x)dx} - \cancel{p(x)C(x)e^{-\int p(x)dx}}\right) + \cancel{p(x)C(x)e^{-\int p(x)dx}} = f(x)$$

$$C'_x(x) = f(x)e^{\int p(x)dx};\ C(x) = \int f(x)e^{\int p(x)dx}dx$$

Vậy nghiệm tổng quát là $\boxed{y = \left(\int f(x)e^{\int p(x)dx}dx + K\right)e^{-\int p(x)dx}}$.

Phương pháp tìm nghiệm như trên gọi là phương pháp biến thiên hằng số. Nếu đã biết

một nghiệm riêng thì ta dễ dàng tìm được nghiệm tổng quát nhờ định lý sau:

Định lý. Gọi Y(x) là nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất y' + p(x)y = 0

và gọi y*(x) là nghiệm riêng của phương trình không thuần y' + p(x)y = f(x),

thì nghiệm tổng quát của phương trình không thuần nhất là y = Y(x) + y*(x).

Ví dụ 1: Tìm nghiệm riêng của phương trình $y' - \frac{y}{x} = x^2$, y(1) = 1.

Giải: Theo công thức nghiệm tổng quát, được $y = e^{\int \frac{dx}{x}}\left[K + \int x^2 e^{-\int \frac{dx}{x}}\right] = Kx + \frac{x^3}{2}.$

Khi x = 1, thay vào nghiệm tổng quát, được K = 1/2. Vậy nghiệm riêng cần tìm là

$y = x(1 + x^2)/2$.

Ví dụ 2: Giải phương trình $e^y + \left(xe^y - 1\right)y' = 0$.

Giải: Coi x là hàm của y, phương trình đã cho viết thành $e^y x' + (xe^y - 1) = 0$, hay

$x' + x = e^{-y}$. Vậy nghiệm tổng quát là $x = e^{-\int dy}\left(K + \int e^{-y} e^{\int dy} dy\right) = e^{-y}(K + y)$

6. Phương trình Bernoulli.

Là phương trình có dạng $y' + p(x)y = y^\alpha q(x)$ (với $\alpha \neq 1$).

Cách giải: Chia hai vế cho y^α, được $y^{-\alpha} y' + p(x)y^{1-\alpha} = q(x)$. Đặt $z = y^{1-\alpha}$,

được $z' = (1-\alpha)y^{-\alpha}y'$. Phương trình trở thành $z' + (1-\alpha)z = (1-\alpha)q(x)$.

Đây là phương trình tuyến tính đã biết cách giải.

Ví dụ: $y' + \frac{y}{x} = x^2 y^4$.

Giải: Chia hai vế cho y^4 được $y^{-4}y' + \frac{y^{-3}}{x} = x^2$. Đặt $z = y^{-3}$, được $z' = -3y^{-4}y'$.

Phương trình trở thành $y^{-4}y' + \frac{3z}{x} = 3x^2$. Nghiệm tổng quát là

$z = e^{\int \frac{3dx}{x}}\left(K + \int 3x^2 e^{-\int \frac{3dx}{x}}\right) = x^3\left(K + 3\ln|x|\right)$, Thay $z = y^{-3}$, thì $y = \frac{1}{x.\sqrt[3]{K + \ln|x|}}$

7. Phương trình vi phân toàn phần.

Là phương trình dạng P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0,

trong đó P, Q liên tục cùng các đạo hàm riêng của chúng trên miền D nào đó.

Ngoài ra $P'_y = Q'_y,\ \forall(x,y) \in D$.

Cách giải: Với điều kiện đã cho, vế trái của phương trình là vi phân toàn phần của hàm u(x,y) xác định bởi một trong hai công thức sau

$$u(x,y) = \int_{x_0}^{x} P(x_0,y)dx + \int_{y_0}^{y} Q(x,y)dy \text{ hoặc}$$

$$u(x,y) = \int_{x_0}^{x} P(x,y)dx + \int_{y_0}^{y} Q(x,y_0)dy$$

Trong đó (x_0, y_0) là điểm bất kỳ trong miền D. Khi đã có hàm u(x,y) như trên thì nghiệm tổng quát là u(x,y) = C.

Ví dụ: Giải phương trình $(4xy^2 + y)dx + (4x^2y + x)dy = 0$.

Giải: Dễ kiểm tra điều kiện để vế phải là vi phân toàn phần. vậy tích phân tổng quát của phương trình là

$$\int_0^1 0dx + \int_0^1 (4x^2y + x)dy = C \Leftrightarrow 2x^2y^2 + xy = C.$$

Nhận xét: trong trường hợp $P'_y \neq Q'_y,\ \forall(x,y) \in D$ mà tồn tại hàm $\mu = \mu(x,y)$ để phương trình $\mu(x,y)\left[P(x,y)dx + Q(x,y)dy\right] = 0$ là phương trình vi phân toàn phần.Khi đó hàm

$\mu = \mu(x,y)$ được gọi là thừa số tích phân.Nói chung không có phương pháp chung để tìm $\mu = \mu(x,y)$ khi nó phụ thuộc vào cả hai biến x,y.

Đặc biệt khi $\mu = \mu(x)$ thì ta có

$$\left[\mu P\right]'_y = \left[\mu Q\right]'_x \Rightarrow \mu\frac{\partial P}{\partial y} = Q\frac{d\mu}{dx} + \mu\frac{\partial Q}{\partial x} \Rightarrow \frac{d\mu}{\mu} = \frac{P'_y - Q'_x}{Q}$$

Tương tự khi $\mu = \mu(y)$ thì ta cũng tính được $\dfrac{d\mu}{\mu} = -\dfrac{P'_y - Q'_x}{P}$ qua đó ta tìm được thừa số tích phân tương ứng,từ đó có được phương trình vi phân toàn phần và tìm được nghiệm tương ứng.

§2. PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN CẤP HAI

1. Đại cương về phương trình vi phân cấp 2.

Định nghĩa. Phương trình vi phân cấp 2 là phương trình dạng F(x,y,y',y") = 0.

Nếu giải được phương trình trên theo y' thì nó có dạng y" = f(x,y,y').

Bài toán Cauchy. Là bài toán tìm nghiệm của phương trình y' = f(x,y,y') thỏa mãn điều kiện $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y_0'$, trong đó x_0, y_0 ,y_0' là các giá trị cho trước.

Bài toán Cauchy được viết

$$\begin{cases} y' = f(x,y,y') & (3) \\ y\big|_{x=x_0} = y_0\ ;\quad y'\big|_{x=x_0} = y_0' & (4) \end{cases}$$

Điều kiện (4) gọi là điều kiện ban đầu, hay điều kiện Cauchy

Định lý tồn tại và duy nhất nghiệm. Xét bài toán Cauchy (3, 4). Giả sử các hàm số

$f(x,y,y'), \dfrac{\partial f(x,y,y')}{\partial y}, \dfrac{\partial f(x,y,y')}{\partial y'}$ liên tục trên miền $V \subset \mathbb{R}^3$.

Khi đó, với $\forall\left(x_0 y_0, y_0'\right) \in V$,thì trong một lân cận nào đó của điểm x_0, tồn tại nghiệm

duy nhất y = y(x) của phương trình (3) thỏa mãn điều kiện ban đầu (4).

Nghiệm tổng quát. Ta gọi nghiệm tổng quát của phương trình y' = f(x,y,y') là hàm số

$y = \varphi(x, C_1, C_2)$, trong đó C_1,C_2 là hằng số tùy ý, thỏa mãn các điều kiện sau:

a) Hàm số $y = \varphi(x, C_1, C_2)$ thỏa mãn phương trình đã cho với mọi C_1, C_2.

b) $\forall\left(x_0, y_0, y_0'\right) \in D$, với D là miền mà điều kiện tồn tại và duy nhất nghiệm

được

thỏa mãn, luôn tìm được giá trị của các hằng số C_1, C_2 sao cho nghiệm $y = \varphi(x, C_1, C_2)$ thỏa mãn điều kiện ban đầu (4).

Nghiệm riêng, tích phân riêng. Nếu trong công thức nghiệm tổng quát ta cho C_1, C_2 các

giá trị cụ thể thì nghiệm nhận được gọi là nghiệm riêng.

Nghiệm kỳ dị. Có thể tồn tại các nghiệm không nằm trong họ nghiệm tổng quát.

Những nghiệm như vậy gọi là nghiệm kỳ dị.

2. Phương trình khuyết.

a) Phương trình khuyết y, y'. Dạng phương trình F(x,y") = 0.

Đặt y' = t, được F(x,t') = 0. Đây là phương trình cấp 1 khuyết biến t đã biết cách giải.

Nếu nghiệm của phương trình này là t = f(x,C) thì nghiệm phương trình ban đầu là

y = T(x,C) + D, trong đó T(x) là nguyên hàm của f(x).

Ví dụ: Giải phương trình $y'' = x^2 + xe^x + 1$.

Giải:

$$y' = \int\left(x^2 + xe^x + 1\right)dx = \frac{x^3}{3} + xe^x - e^x + x + C \Rightarrow y = \frac{x^4}{12} + \frac{x^2}{2} + xe^x + Cx + D$$

b) Phương trình khuyết y. Dạng phương trình là F(x,y',y") = 0.

Đặt y' = t, được F(x,t,t') = 0. Đó là phương trình cấp 1 đối với t.

Ví dụ: Giải phương trình $y''\left(1 + x^2\right) = 2xy'$; $y|_{x=0} = 1$, $y'|_{x=0} = 3$.

Đặt t = y', được $t'(1 + x^2) = 2xt$ $\frac{t'}{t} = \frac{2x}{1+x^2} \Leftrightarrow \ln|t| = \int \frac{2xdx}{1+x^2} = \ln\left(1+x^2\right) + \ln C$

$\Leftrightarrow t = C\left(1+x^2\right) \Leftrightarrow y' = C\left(1+x^2\right) \Leftrightarrow y = \frac{C}{3}x^3 + Cx + D$

Thay điều kiện đầu được $y|_{x=0} = D = 1$; $y'|_{x=0} = C = 3$. Nên $y = x^3 + 3x + 1$.

c) Phương trình khuyết x. Dạng phương trình là F(y,y',y")= 0.

Đặt y' = t, được $y" = t'_y.y'_x = t\,t'_y$. Thế vào phương trình, được $F(y, t, t\,t'_y) = 0$. Đây là phương trình cấp 1 đối với t(y).

Ví dụ: Giải phương trình $2yy" = y'^2 + 1$.

Đặt y' = t, được $y'' = t.t'_y$. Thế vào phương trình đã cho, được $2y\,t\,t'_y = t^2 + 1$;

$\frac{2tdt}{t^2+1} = \frac{dy}{y} \Leftrightarrow \ln\left(t^2+1\right) = \ln|y| + \ln C \Leftrightarrow y = C\left(t^2+1\right)$.

Mặt khác, do y' = t, nên dy = tdx. Thế y từ kết quả trên vào đây,

được $C2tdt = tdx \Leftrightarrow x = 2Ct + D$.

Đáp số $y = C(t^2 + 1)$; $x = 2Ct + D$ (dễ dàng viết dàng tường minh).

3. Phương trình tuyến tính thuần nhất.

Đó là phương trình dạng y" + p(x)y' + q(x)y = 0. (5)

a) Cấu trúc nghiệm tổng quát.

Định lý. Nếu $y_1(x)$ và $y_2(x)$ là hai nghiệm của phương trình thuần nhất (5),

thì $y(x) = Cy_1(x) + Dy_2(x)$ cũng là nghiệm của phương trình này.

Nếu có thêm điều kiện hai nghiệm riêng $y_1(x)$ và $y_2(x)$ độc lập tuyến tính thì nghiệm

$y = C\,y_1(x) + D\,y_2(x)$ là nghiệm tổng quát của (5).

(Hai hàm số $y_1(x)$, $y_2(x)$ được gọi là độc lập tuyến tính nếu phân thức $y_1(x)/y_2(x)$

không đồng nhất bằng hằng số)

Chứng minh: Dễ kiểm tra rằng nếu $y_1(x)$ và $y_2(x)$ là các nghiệm của (5) thì y(x) cũng là nghiệm của (5). Ta sẽ chứng minh y(x) là nghiệm tổng quát. Xét điều kiện đầu bất kỳ $y|_{x=x_0} = y_0$; $y'|_{x=x_0} = y_0'$. Khi đó $\begin{cases} y_0 = Cy_1(x_0) + Dy_2(x_0) \\ y_0' = Cy_1'(x_0) + Dy_2'(x_0) \end{cases}$

Đây là hệ phương trình đại số tuyến tính với định thức của hệ khác 0(do giải thiết về tính độc lập tuyến tính của y_1 và y_2). Vậy, hệ luôn có nghiệm, tức là luôn tìm được các hằng số C, D để nghiệm y thỏa mãn điều kiện ban đầu. ĐFCM.

Định lý trên cho thấy, để tìm nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất, chỉ việc tìm hai nghiệm riêng độc lập tuyến tính là được. Người ta chưa có cách chung để tìm hai nghiệm này. Tuy nhiên, nếu đã biết một nghiệm riêng thì có thể tìm được nghiệm riêng thứ hai bằng phương pháp dưới đây.

b) Phương pháp tìm nghiệm riêng thứ hai.

Bổ đề . Nếu $y_1(x)$, $y_2(x)$ là hai nghiệm riêng của phương trình (5) thì định thức Wronsky $W = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix}$ thỏa mãn hệ thức $W = Ce^{-\int p(x)dx}$.

Chứng minh. Vì $y_1(x)$, $y_2(x)$ là hai nghiệm của phương trình (5), nên

$$\begin{cases} y_1'' + p(x)y_1' + q(x)y_1 = 0 \\ y_2'' + p(x)y_2' + q(x)y_2 = 0 \end{cases}$$

Nhân hệ thức đầu với $-y_2$, sau với y_1, rồi cộng lại, được

$[y_1y_2'' - y_2y_1''] + p(x)[y_1y_2' - y_2y_1'] = 0$ Mà

$W = [y_1y_2' - y_2y_1']$, $W' = [y_1'y_2' + y_1y_2'' - y_2'y_1' - y_2y_1''] = [y_1y_2'' - y_2y_1'']$.

Thế vào kết quả trên, được

$$W' + p(x)W = 0 \Rightarrow \int \frac{dW}{W} = -\int p(x)dx \Rightarrow W(x) = Ce^{-\int p(x)dx}$$. ĐFCM.

Định lý. Nếu $y_1(x) \neq 0$ là một nghiệm riêng của phương trình (5) thì nghiệm riêng thứ hai $y_2(x)$, độc lập với $y_1(x)$ tìm được theo công thức

$$y_2(x) = y_1(x)\int\left[\frac{1}{y_1^2(x)}e^{-\int p(x)dx}dx\right]$$

Chứng minh. Theo bổ đề, có

$$W = Ce^{-\int p(x)dx} \Leftrightarrow y_1y_2' - y_2y_1' = Ce^{-\int p(x)dx} \Leftrightarrow \frac{y_1y_2' - y_2y_1'}{y_1^2} = \frac{C}{y_1^2}e^{-\int p(x)dx} \Leftrightarrow$$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{y_2}{y_1}\right) = \frac{C}{y_1^2}e^{-\int p(x)dx} \Leftrightarrow \frac{y_2}{y_1} = \int \frac{C}{y_1^2}e^{-\int p(x)dx}dx + D \overset{(C=1,D=0)}{\Leftrightarrow} y_2 = y_1\int \frac{1}{y_1^2}e^{-\int p(x)dx}dx$$

Ví dụ: Giải phương trình $\left(1-x^2\right)y'' + 2xy' - 2y = 0$, biết một nghiệm riêng y = x.

Giải: Chia hai vế cho 1- x^2, thì

$$p(x) = \frac{2x}{1-x^2} \Rightarrow -\int p(x)dx = -\int \frac{2xdx}{1-x^2} = \ln\left(x^2-1\right).$$

Vậy nghiệm thứ hai là

$$y_2(x) = y_1(x)\int\left[\frac{1}{y_1^2(x)}e^{-\int p(x)dx}dx\right] = x\int\left[\frac{1}{x^2}e^{-\int p(x)dx}dx\right] = x\int \frac{e^{\ln\left(x^2-1\right)}}{x^2}dx = x\left(x + \frac{1}{x}\right)$$

Từ đó nghiệm tổng quát y = Cx + D(x^2 + 1).

4. Phương trình tuyến tính không thuần nhất.

Là phương trình có dạng $y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x)$. (6)

Định lý. Nghiệm tổng quát của phương trình tuyến tính không thuần (6) bằng tổng của nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất tương ứng (5) với một nghiệm riêng nào đó của phương trình không thuần (6).

Nói cách khác, nghiệm tổng quát của (6) là y = Y(x) + y*(x), trong đó Y(x) là nghiệm tổng quát của (5), y*(x) là nghiệm riêng của (6).

a) Phương pháp biến thiên hằng số. Giả sử đã biết nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất (5) là $Y(x) = Cy_1(x) + Dy_2(x)$. Chỉ còn phải tìm nghiệm riêng của (6) là xong. Ta Coi C, D là các hàm phụ thuộc x, và phải tìm các hàm số này để biểu thức $y(x) = C(x)y_1(x) + D(x)y_2(x)$ là nghiệm của phương trình (6).

Có $y' = Cy_1' + C'y_1 + Dy_2' + D'y_2$. Chọn C, D sao cho $C'y_1 + D'y_2 = 0$. Khi đó

$$y' = Cy_1' + Dy_2' \quad (7)$$

Lấy đạo hàm, được $y'' = C'y_1' + Cy_1'' + D'y_2' + Dy_2''$. Thế y' và y" vào phương trình (6), được

$$\left[C'y_1' + Cy_1'' + D'y_2' + Dy_2''\right] + p\left[Cy_1' + Dy_2'\right] + q\left[Cy_1 + Dy_2\right] = f(x);$$

$$C\left[y_1'' + py_1' + qy_1\right] + D\left[y_2'' + py_2' + qy_2\right] + C'y_1' + D'y_2' = f(x).$$

Vì y_1, y_2 là nghiệm của phương trình thuần nhất, nên

$$C'y_1' + D'y_2' = f(x) \quad (8)$$

Tổng hợp điều kiện (7) (8) nhân được kết quả:

Định lý: Biểu thức $y = Cy_1 + Dy_2$ là nghiệm riêng của phương trình không thuần nhất (6) , nếu thỏa mãn hệ $\begin{cases} C'y_1 + D'y_2 = 0 \\ C'y_1' + D'y_2' = f(x) \end{cases}$

Hệ trên là hệ đại số tuyến tính với ẩn C', D'. Từ đó tìm được C, D.

Ví dụ: Giải phương trình $\left(1 - x^2\right)y'' + 2xy' - 2y = 1 - x^2$, biết một nghiệm riêng của phương trình thuần nhất tương ứng là y = x. (xem ví dụ ở mục trên)

Giải: Phương trình viết thành $y'+\frac{2x}{1-x^2}y'-\frac{2}{1-x^2}y=1$

Theo bài giải đã có ở trên, nghiệm tổng quát của phương tình thuần nhất tương ứng là

Y = Cx + D(x^2 + 1), ở đây y_1 = x ; y_2 = x^2 + 1.

Để tìm nghiệm riêng, ta giải hệ

$$\begin{cases} C'x+D'\left(x^2+1\right)=0 \\ C'\quad +D'2x \qquad =1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C'=-1-\dfrac{2}{x^2-1} \\ D'=\dfrac{x}{x^2-1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C=-x-\ln\left|\dfrac{x-1}{x+1}\right| \\ D=\dfrac{1}{2}\ln\left|x^2-1\right| \end{cases}$$

Vậy nghiệm riêng là $y^*=-x^2-x\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|+\frac{x^2+1}{2}\ln\left|x^2-1\right|$. Nghiệm tổng quát là

$$y=Cx+D\left(x^2+1\right)+-x^2-x\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|+\frac{x^2+1}{2}\ln\left|x^2-1\right|$$

5. Phương trình tuyến tính có hệ số không đổi.

Đó là phương trình có dạng y" + py' + qy = f(x), trong đó p, q là các hằng số.

1) Giải phương trình thuần nhất

$$y''+py'+qy=0 \qquad (9)$$

Ta sẽ tìm các nghiệm riêng độc lập tuyến tính của phương trình thuần nhất dưới dạng

y = e^{kx}, trong đó k là hằng số cần tìm. Có y' = ke^{kx} ; y" = k^2e^{kx}. Thế y", y' , y vào phương trình đã cho, được

$$k^2e^{kx}+kpe^{kx}+qe^{kx}=0 \quad \text{hay} \quad k^2+pk+q=0 \quad (10)$$

phương trình (10) được gọi là phương trình đặc trưng. Xét các trường hợp:

a) Nếu (10) có hai nghiệm đơn k_1, k_2. Khi đó phương trình thuần nhất (9) có hai nghiệm riêng $y_1 = e^{k_1 x}$; $y_2 = e^{k_2 x}$. Hai nghiệm này độc lập tuyến tính. Vậy nghiệm tổng quát là $y = Ce^{k_1 x} + De^{k_2 x}$.

b) Nếu (10) có nghiệm kép k_0. Khi đó phương trình thuần nhất (9) có một nghiệm riêng $y_1 = e^{k_0 x}$. Nghiệm tổng quát là $y = (C + Dx)e^{k_0 x}$.

c) Nếu (10) có nghiệm phức k = $a \pm bi$. Khi đó phương trình thuần nhất (9) có hai nghiệm riêng

$$y_1 = e^{(a+bi)x} = e^{ax}(\cos b\varphi + i\sin b\varphi)\,;\; y_2 = e^{(a-bi)x} = e^{ax}(\cos b\varphi - i\sin b\varphi).$$

Từ đó, $\overline{z}_1 = \dfrac{y_1 + y_2}{2} = e^{ax}\cos b\varphi$; $\overline{z}_2 = \dfrac{y_1 - y_2}{2i} = e^{ax}\sin b\varphi$ cũng là hai nghiệm riêng. Chúng độc lập tuyến tính, vậy nghiệm tổng quát là

$$y = (C\cos b\varphi + D\sin b\varphi)e^{ax}.$$

Ví dụ: Tìm nghiệm tổng quát của các phương trình sau

(a) $y'' - 3y' + 2y = 0$

(b) $y'' + 4y' + 4y = 0$

(c) $y'' + 2y' + 5y = 0$

Giải: (a) Phương trình đặc trưng k^2 - 3k + 2 = 0, k = 1, k = 2. Nghiệm tổng quát là

$$y = Ce^{x} + De^{2x}.$$

(b) Phương trình đặc trưng k^2 + 4k + 4 = 0, k = -2 là nghiệm kép. Nghiệm tổng quát của phương trình vi phân là $y = (C + Dx)e^{-2x}$.

(c) Phương trình đặc trưng $k^2 + 2k + 5 = 0$, $(k + 1)^2 + 4 = 0$, $k = -1 \pm 2i$. Nghiệm tổng quát của phương trình vi phân là $y = (C\cos 2\varphi + D\sin 2\varphi)e^{-x}$.

2) Phương trình có vế phải đặc biệt.

Xét phương trình y'' + py' + qy = f(x). Trong trường hợp tổng quát, ta đã biết cách giải phương trình thuần nhất, nên có thể dùng phương pháp biến thiên hằng số để tìm một nghiệm riêng, từ đó tìm được nghiệm tổng quát của phương trình không thuần nhất đã cho.

Trường hợp vế phải f(x) có dạng đặc biệt, chúng ta tìm được nghiệm riêng một cách nhanh chóng như trình bày dưới đây.

a) Trường hợp $f(x) = P(x)e^{\alpha x}$, (P(x) là đa thức bậc n cho trước).

Ta sẽ xác định dạng của nghiệm riêng y*(x), tùy theo các trường hợp α có là nghiệm của phương trình đặc trưng hay không

+ Nếu α không là nghiệm của phương trình đặc trưng, $y^* = e^{\alpha x}Q(x)$.

+ Nếu α là nghiệm đơn của phương trình đặc trưng, $y^* = xe^{\alpha x}Q(x)$.

+ Nếu α là nghiệm kép của phương trình đặc trưng, $y^* = x^2e^{\alpha x}Q(x)$.

Ví dụ: Tìm nghiệm tổng quát của các phương trình sau

(a) $y'' - 3y' + 2y = 2x$

(b) $y'' - 3y' + 2y = xe^x$

(c) $y'' - 2y' + y = 2(x+1)e^x$

Giải: (a) Phương trình đặc trưng $k^2 - 3k + 2 = 0$, k = 1, k = 2. Nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất tương ứng là $Y = Ce^x + De^{2x}$.

Vế phải $f(x) = 2xe^{0x}$, ($\alpha = 0$). Vậy tìm nghiệm riêng dạng y* = ax + b. Tính các đạo hàm của y* rồi thế vào phương trình đã cho, được

$- 3a + 2(ax + b) \equiv 2x$, từ đó a = 1, b = 3/2.

Đáp số $y = Ce^x + De^{2x} + x + 3/2$.

(b) Vế phải $f(x) = xe^x$. Có $\alpha = 1$ là một nghiệm riêng của phương trình đặc trưng. Vậy tìm nghiệm riêng dạng $y^* = x(ax + b)e^x = (ax^2 + bx)e^x$. Tính các đạo hàm:

$$(y^*)' = \left(ax^2 + bx + 2ax + b\right)e^x = \left[ax^2 + \left(b + 2a\right)x + b\right]e^x.$$

$$(y^*)'' = \left[ax^2 + \left(b + 2a\right)x + b + 2ax + b + 2a\right]e^x = \left[ax^2 + \left(b + 4a\right)x + 2a + 2b\right]e^x$$

Thế vào phương trình đã cho, được

$$VF = \left\{\begin{array}{l} \quad [ax^2 + (b + 4a)x + 2a + 2b]e^x \\ -3[ax^2 + (b + 2a)x + b \qquad]e^x \\ +2[ax^2 + \qquad bx \qquad]e^x \end{array}\right\} = \left(-2ax + 2a - b\right)e^x \equiv xe^x \Rightarrow \begin{cases} a = -\dfrac{1}{2} \\ b = -1 \end{cases}$$

Đáp số $y = Ce^x + De^{2x} - \left(\dfrac{x}{2} - 1\right)e^x$.

(c) Phương trình đặc trưng $k^2 - 2k + 1 = 0$, $\alpha = 1$ là nghiêm kép. Nghiệm riêng có dạng $y = \left(ax^3 + bx^2\right)e^x$. Tính các đạo hàm:

$$(y^*)' = \left(ax^3 + bx^2 + 3ax^2 + 2bx\right)e^x = \left[ax^3 + \left(b + 3a\right)x^2 + 2bx\right]e^x.$$

$$(y^*)'' = \left[\left(ax^3 + \left(b + 3a\right)x^2 + 2bx\right) + 3ax^2 + 2\left(b + 3a\right)x + 2b\right]e^x$$

$$= \left[ax^3 + \left(b + 6a\right)x^2 + \left(4b + 6a\right)x + 2b\right]e^x$$

Thế vào phương trình đã cho, được

$$VF=\left\{\begin{array}{lllr} & [ax^3+(b+6a)x^2+(4a+6b)x+2b]e^x \\ -2[ax^3+(b+3a)x^2+ & & 2bx &]e^x \\ +[ax^3+ & bx^2+ & &]e^x \end{array}\right\} = \begin{cases} \left(\left(4a+2b\right)x+2b\right)e^x \\ \equiv\left(2x+2\right)e^x \end{cases} \Rightarrow a=-1;\ b=1$$

Đáp số $y=\left(C+Dx\right)e^x+\left(1-x\right)e^x$.

b) Trường hợp $f\left(x\right)=e^{ax}\left[P\left(x\right)\cos bx+Q\left(x\right)\sin bx\right]$,ở đó P(x) và Q(x) là đa thức

Ta sẽ xác định dạng của nghiệm riêng Y(x), tùy theo các trường hợp $a\pm ib$ có là nghiệm của phương trình đặc trưng hay không

+ Nếu $a\pm ib$ không là nghiệm của phương trình đặc trưng, tìm Y dạng

$$Y=e^{ax}\left[U\left(x\right)\text{cos}bx+V\left(x\right)\text{sin}bx\right].$$

+ Nếu $a\pm ib$ là nghiệm của phương trình đặc trưng, tìm Y dạng

$$Y=xe^{ax}\left[U\left(x\right)\text{cos}bx+V\left(x\right)\text{sin}bx\right].$$

Trong đó, U và V là đa thức cần tìm có bậc bằng bậc cao nhất của P và Q.

Ví dụ: Tìm nghiệm tổng quát của các phương trình sau

(a) $y''-3y'+2y=4\sin x-2\cos x$

(b) $y''+y=\cos x$.

Giải: (a) Phương trình đặc trưng k^2 - 3k + 2 = 0, k = 1, k = 2. Nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất tương ứng là Y = Ce^x + De^{2x}.

Vế phải f(x) = sinx + cosx. Có I không là nghiệm của phương trình đặc trưng.

Bậc cao nhất của các đa thức P, Q là 0.

Vậy ta tìm nghiệm riêng dạng y* = asinx + bcosx. Tính các đạo hàm của y*

$$(y^*)'=a\cos x-b\sin x\ ;\ (y^*)''=-a\sin x-b\cos x.$$

Thế vào phương trình đã cho, được

$$-a\sin x - b\cos x - 3(a\cos x - b\sin x) + 2(a\sin x + b\cos x) = 4\sin x - 2\cos x$$

$$(a+3b)\sin x + (b-3a)\cos x = 4\sin x - 2\cos x \Rightarrow a=1\,;\ b=1.$$

Đáp số $y = Ce^{x} + De^{2x} + \sin x + \cos x$.

(b) Phương trình đặc trưng $k^2 + 1 = 0$, $\pm i$ là nghiệm . Bậc cao nhất của các đa thức

P, Q là 0. Vậy nghiệm riêng có dạng $y = ax\sin x + bx\cos x$. Có:

$$(y^*)' = (a - bx)\sin x + (b + ax)\cos x$$

$$(y^*)'' = (-b - b - ax)\sin x + (a + a - bx)\cos x = (-2b - ax)\sin x + (2a - bx)\cos x$$

Thế vào phương trình đã cho, được

$$(-2b - ax)\sin x + (2a - bx)\cos x + ax\ \sin x + bx\ \cos x \equiv$$

$-2b\sin x + 2a\cos x \equiv 2\cos x$. Từ đó a = 1, b = 0.

Đáp số $y = C\cos x + D\sin x + x\sin x$.

c) Trường hợp $f(x) = [P(x)\cos bx + Q(x)\sin bx]e^{ax}$.

Đặt y = ze^{ax}, sẽ đưa về dạng đã xét.

Ví dụ: Giải phương trình $y'' + 2y' + 2y = xe^{-x}\sin x$.

Giải: Đặt $y = ze^{-x}$. Có $y' = (z' - z)e^{-x}; y'' = (z'' - 2z' + z)e^{-x}$. Thế vào phương trình đã cho, được z" + z = xsinx

Theo cách giải của phần (b), tìm được nghiệm tổng quát của phương trình này là $y = \dfrac{C\cos x + D\sin x + (\sin x - x\cos x)}{4}$. Vậy nghiệm của phương trình đã cho là

$$y = \frac{C\cos x + D\sin x + (\sin x - x\cos x)}{4}e^{-x}.$$

d) Trường hợp $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$, trong đó $f_1(x)$, $f_2(x)$ có dạng như đã xét.

Áp dụng nguyên lý chồng chất nghiệm sau đây:

Định lý(Nguyên lý chồng chất nghiệm). Cho phương trình

$$y''+p(x)y'+q(x)y=f_1(x)+f_2(x) \quad (11)$$

Nếu $y^*_1(x)$ là nghiệm riêng của phương trình $y''+p(x)y'+q(x)y=f_1(x)$ và $y^*_2(x)$ là nghiệm riêng của phương trình $y''+p(x)y'+q(x)y=f_2(x)$, thì $y^*=y^*_1(x)+y^*_2(x)$ là nghiệm riêng của phương trình (11).

Chứng minh định lý là dễ dàng.

Ví dụ: Giải phương trình $y'' - y' = 2\cos^2 x$

Giải: Nghiệm của phương trình thuần nhất là $Y=C + De^x$

Để tìm nghiệm riêng, ta phân tích vế phải: $2\cos^2 x = 1 + \cos 2x$. Vậy xét hai phương trình:

(1) $y''-y'=1$. Nghiệm là $y_1=-x$.

(2) $y''-y'=\cos 2x$. Nghiệm là $y_2=-\frac{2}{10}\cos 2x-\frac{1}{10}\sin 2x$.

Đáp số: $y=C + De^x - x-\frac{2}{10}\cos 2x-\frac{1}{10}\sin 2x$

§3. HỆ PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN

1. Đại cương

Định nghĩa. Hệ phương trình tuyến tính chuẩn tắc cấp 1 là hệ có dạng

$$\begin{cases} y_2' = f_1(x, y_1, y_2, ..., y_n) \\ y_2' = f_2(x, y_1, y_2, ..., y_n) \\ ... \\ y_2' = f_n(x, y_1, y_2, ..., y_n) \end{cases} \qquad (12)$$

Nghiệm tổng quát của hệ (12) là bộ n hàm số $y_i(x, C_1, ... , C_n)$, i = 1, 2, ..., n, với $C_1, ... ,C_n$ là các hằng số tuỳ ý, thỏa mãn các điều kiện sau:

(i) Thỏa mãn (12) với mọi $C_1, ... ,C_n$.

(ii) Với mọi điểm $(x_0, y_1^0, y_2^0, ... , y_n^0)$ của không gian R^{n+1}, mà ở đó điều kiện tồn tại và duy nhất nghiệm được thỏa mãn, luôn tìm được các giá trị của $C_1, ... , C_n$ sao cho các hàm số $y_i(x, C_1, ... ,C_n)$, i = 1, ... , n thỏa mãn điều kiện đầu

$$y\big|_{x=x_0} = y_i^0 \ \ \forall i = 1,...,n$$

Nghiệm riêng là nghiệm có được bằng cách cho $C_1, ... , C_n$ trong họ nghiệm tổng quát các giá trị xác định.

Đường dòng của trường véc tơ. Giả sử trong miền D của không gian R^n, cho trước một trường véc tơ $\vec{F}(x) = (f_1(x), f_2(x), ..., f_n(x))$. Ta gọi đường dòng của trường F là một đường cong (C) sao cho tiếp tuyến tại mỗi điểm của nó là đồng phương với F tại điểm đó.

2. Cách giải hệ phương trình vi phân.

Xét hệ (12). Ta luôn đưa hệ về một phương trình cấp cao bằng cách khử những hàm số chưa biết từ các phương trình của hệ. Phương pháp này được gọi là phương pháp khử. Minh họa phương pháp bằng ví dụ dưới đây.

Ví dụ 1: Giải hệ $\begin{cases} y' = 5y + 4z \ (1) \\ z' = 4y + 5z \ (2) \end{cases}$

Giải: Lấy đạo hàm hai vế (1), rồi thế z' từ phương trình (2), được

$$y'' = 5y' + 4z' = 5y' + 4(4y + 5z) = 5y' + 16y + 20z. \quad (3)$$

Khử z từ (1), được z = (y' - 5y) / 4. Thế vào (3), nhận được

$$y'' = 5y' + 16y + 5(y' - 5y) = 10y' - 9y \text{ , hay } y'' - 10y' + 9y = 0\,(4).$$

Nghiệm của phương trình (4) là $y = Ce^{x} + De^{9x}$. Thế nghiệm này vào (1) được

$$z = \frac{1}{4}\left[Ce^{x} + 9De^{9x} - 5Ce^{x} - 5De^{9x}\right] = -Ce^{x} + De^{9x}.$$

Đáp số $z = Ce^{x} + De^{9x}$; $z = -Ce^{x} + De^{9x}$

Ví dụ 2: Giải hệ $\begin{cases} y' = y + z & (1) \\ z' = y + z + x & (2) \end{cases}$

Giải: Lấy đạo hàm hai vế (1), rồi thế z' từ phương trình (2), được

$$y'' = y' + z' = y' + (y + z + x) = y' + y + z + x \quad (3)$$

Khử z từ (1), được $z = y' - y$. Thế vào (3), nhận được y'' - 2y' = x (4).

Nghiệm của phương trình (4) là $y = C + De^{2x} + \frac{x^2}{4} - \frac{x}{4}$. Thế y vào phương trình (1) được $z = -C + De^{2x} + \frac{x^2}{4} - \frac{x}{4} - \frac{1}{4}$.

Đáp số : $y = C + De^{2x} + \frac{x^2}{4} - \frac{x}{4}$; $z = -C + De^{2x} + \frac{x^2}{4} - \frac{x}{4} - \frac{1}{4}$.

PHẦN II. LÝ THUYẾT CHUỖI

§1. ĐẠI CƯƠNG VỀ HỆ CHUỖI SỐ

1. Chuỗi số

Định nghĩa: Với mỗi số tự nhiên n, cho tương ứng với 1 số thực a_n ta có dãy số ký hiệu là { a_n }

Cho dãy số { a_n }, ta gọi tổng vô hạn $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots$.là chuỗi số, ký hiệu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$,

a_n là số hạng tổng quát.

$S_n = a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n$ là tổng riêng thứ n. Nếu $\lim_{n\to\infty} S_n = S$ thì ta bảo là chuỗi hội tụ, có tổng S viết: $\sum_{n\to 1}^{\infty} a_n = S$

Khi dãy $\{S_n\}$phân kì thì ta bảo chuỗi $\sum_{n\to 1}^{\infty} a_n$ phân kỳ.

Ví dụ 1. Xét sự hội tụ và tính $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$

Ta có: $S_n = 1+q+q^2+q^3+\ldots+q^n = \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q}$,

$\lim_{n\to\infty} S_n = \dfrac{1}{1-q}$, $|q| <1$

Phân kỳ khi $|q| \geq 1$.

Suy ra : $\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \dfrac{1}{1-q}$ khi $|q|<1$

Nhận xét:

- $\sum_{n\to 1}^{\infty} a_n$ hội tụ thì $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ (điều kiện cần để chuỗi hội tụ)

Chứng minh: Có $a_n=S_n-S_{n-1}$; $\lim_{a\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} (S_n-S_{n-1})=0$

- $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$ hoặc không tồn tại thì chuỗi phân kỳ $\sum_{n\to 1}^{\infty} a_n$ phân kỳ.

- Thay đổi một số hữu hạn số hạng đầu không làm thay đổi tính hội tụ hay phân kỳ của chuỗi.

2. Tính chất

Giả sử : $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, $\lim_{n\to\infty} b_n = b$

$$\lim_{n\to\infty}(\alpha a_n + \beta b_n) = \alpha a + \beta b$$

$$\lim_{n\to\infty}(a_n b_n) = a.b$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}, b \neq 0$$

§2. CHUỖI SỐ DƯƠNG

1. Định nghĩa

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad , a_n > 0$$

Nhận xét: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ hội tụ khi và chỉ khi S_n bị chặn.

Trong bài này ta chỉ giả thiết xét các chuỗi số dương.

2. Các định lý so sánh

Định lý 1.Cho hai chuỗi số dương, $a_n \le b_n$, n tùy ý hoặc từ 1 lúc nào đó trở đi.

$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ hội tụ $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ hội tụ

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ phân kỳ $\Rightarrow$ $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ phân kỳ

Chứng minh.

$a_1+a_2+\ldots+a_n \le b_1+b_2+\ldots.b_n$

$0< S_n < T_n$

Ví dụ 1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n+1}$ chuỗi dương.

Ta có: $3^n+1 > 3^n \Rightarrow \frac{1}{3^n+1} < \frac{1}{3^n}$. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n} = \frac{1}{1-\frac{1}{3}}$ hội tụ.

Suy ra chuỗi đã cho $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n+1}$ hội tụ.

Ví dụ 2. $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\ln n}$ chuỗi dương.

Ta có: ln n < n $\Rightarrow 0<\frac{1}{n}<\frac{1}{\ln n}$. $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n}$ phân kỳ.

Suy ra $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\ln n}$ phân kỳ.

Định lí 2. Cho hai chuỗi số dương, $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=k\neq 0\Rightarrow\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ và $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ cùng hội tụ hoặc cùng phân kỳ.

Nhận xét: Đối với các chuỗi số dương $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ và $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$:

1. Nếu $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=0$ và $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ hội tụ $\Rightarrow\sum_{n=1}^{\infty}a_n$

2. Nếu $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\infty$ và $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ phân kỳ $\Rightarrow\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ phân kỳ.

Ví dụ 3. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+2}{2n^3-3}$ chuỗi dương

Ta có: $\frac{n+2}{2n^3-3}=\frac{n}{2n^3}.\frac{1+\frac{2}{n}}{1-\frac{3}{2n^3}}=\frac{1}{2n^2}.\frac{1+\frac{2}{n}}{1-\frac{3}{2n^3}}$ mà $\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{n+2}{2n^3}:\frac{1}{2n^2})=1$

Mà $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n^2}$ hội tụ Suy ra : $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+2}{2n^3-3}$ hội tụ

3. Các tiêu chuẩn hội tụ

a, Tiêu chuẩn D'Alembert $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=l$

-Khi l<1 $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ hội tụ

-Khi l>1 $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ phân kỳ

Chứng minh:

- l<1: từ $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l$, chọn $\varepsilon > 0$ đủ bé để

l+ε <1 $\Rightarrow$ $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ <l+ε,∀ n≥n_0.

Mặt khác có $a_n = \frac{a_n}{a_{n-1}} \cdot \frac{a_{n-1}}{a_{n-2}} \cdots \frac{a_{n_0+1}}{a_{n_0}} . a_{n_0} \le (l+\varepsilon)^{n-n_0} . a_{n_0} \to 0, n \to \infty$

Do đó $\lim_{n\to\infty} a_n = l$

- l>1: từ $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l$, chọn ε đủ bé để l-ε

> 1 $\Rightarrow$ $\frac{a_{n+1}}{a_n} > l - \varepsilon > 1 \Rightarrow a_{n+1} > a_n$

$\Rightarrow$ Phân kỳ

Nhận xét khi l=1 thì không có kết luận gì.

Ví dụ 3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$

Ta có: $a_n = \frac{1}{n!} > 0$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{(n+1)!} : \frac{1}{n!} = \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{(n+1)!} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+n} = 0 < 1$$

Vậy suy ra: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}$ hội tụ

b, Tiêu chuẩn Cauchy

Giả sử $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=l$

Nếu l<1 $\Rightarrow\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ hội tụ

Nếu l>1 $\Rightarrow\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ phân kỳ

Nhận xét. Nếu l=1 không có kết luận gì.

Ví dụ 4. $\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{2n-1}{3n+2})^n$

Ta có:

$a_n=\frac{2n-1}{3n+2}>0$ $\qquad\qquad$ $\sqrt[n]{a_n}=\frac{2n-1}{3n+2}$

Mà $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\frac{2}{3}<1$. Suy ra chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n-1}{3n+2}\right)^n$ hội tụ

c, Tiêu chuẩn tích phân

Có mối liên hệ hay không giữa $\int_a^{\infty}f(x)dx=\lim\limits_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)dx$ và $\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\lim\limits_{k\to\infty}\sum_{n=1}^{k}a_n$

$\int_1^n f(x)dx\le a_1+a_{a2}+...+a_n\le a_1+\int_1^n f(x)dx$

Nếu f(x) là hàm liên tục, dương giảm ∀ x≥1 và $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0,\ f_n=a_n$ khi đó

$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ và $\int_1^{\infty}f(x)dx$ cùng hội tụ hoặc cùng phân kỳ.

Ví dụ 5. $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln n}$

f(x)=$\frac{1}{x\ln x}$ dương giảm với x≥2 và có $\lim_{x\to+\infty} f(x)=0$

$$\int_2^{\infty} f(x)dx=\lim_{b\to\infty}\int_2^b\frac{d(\ln x)}{\ln x}=\lim_{b\to\infty}\ln(\ln x)\,|_2^b=\lim_{n\to\infty}(\ln(\ln b)-\ln(\ln 2))=\infty$$

$\int_1^{+\infty} f(x)dx$ phân kỳ

$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln n}$ phân kỳ

Tổng quát có thể xét $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(n\ln n)^q}$ hội tụ chỉ khi q >1

§3. CHUỖI SỐ CÓ DẤU VỚI HẠNG TỬ BẤT KỲ

1. Chuỗi với số hạng có dấu bất kỳ

Định nghĩa: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ được gọi là hội tụ tuyệt đối $\Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ hội tụ. Chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ được gọi là bán hội tụ $\Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ phân kỳ và $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ hội tụ.

Định lý. $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ hội tụ $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ hội tụ

Ví dụ 1. Xét sự hội tụ tuyệt đối của chuỗi số sau $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{\frac{n^2+n}{2}} \cdot \frac{n}{2^n}$

Xét $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$ ta có: $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{2} < 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$ hội tụ

Vậy $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{\frac{n^2+n}{2}} \cdot \frac{n}{2^n}$ hội tụ

Nhận xét: Nếu $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ phân kỳ theo tiêu chuẩn D'lambert hoặc Cauchy $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ phân kỳ.

2. Chuỗi đan dấu

Định nghĩa. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n$, $a_n>0$ được gọi là chuỗi đan dấu

Định lý Leibnitz: Dãy $\{a_n\}$ giảm, $a_n>0$, $\lim_{n\to\infty} a_n \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n$ hội tụ và có $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n \le a_1$

Chứng minh:

-Với n=2m:

có $S_{2m}=(a_1-a_2)+(a_3-a_4)+...+(a_{2m-1}-a_{2m}) \Rightarrow \{S_{2m}\}$ tăng

$S_{2m}= a_1-(a_2-a_3)-(a_4-a_5)-...-(a_{2m-2}-a_{2m-1})-a_{2m}<a_1 \Rightarrow \{S_{2m}\}$

Từ đó ∃ $\lim\limits_{m\to\infty} S_{2m}=S$ và có $S \le a_1$

-Với n=2m+1

$S_{2m+1}=S_{2m}+a_{2m+1}$

Do $\lim\limits_{m\to\infty} a_{2m+1}=0 \Rightarrow \lim\limits_{m\to\infty} S_{2m+1}=S$

Định lý được chứng minh

Ví dụ 2. Xét sự hội tụ tuyệt đối và bán hội tụ tuyệt đối của chuỗi số sau:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}$$

Ta có: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}$ là chuỗi đan dấu

$\{\frac{1}{\sqrt{n}}\}$ giảm và có $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}=0$. Hội tụ theo tiêu chuẩn Laibnitz

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$ phân kỳ $\Rightarrow$ bán hội tụ

3. Tính chất của chuỗi hội tụ tuyệt đối

- $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n|=S \Rightarrow$ chuỗi số nhận được từ chuỗi này bằng cách đổi thứ tự các số hạng và nhóm tùy ý các số hạng cũng hội tụ tuyệt đối và có tổng S.

-Cho $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S$, $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ phân kỳ $\Rightarrow$ có thể thay đổi thứ tự các số hạng của nó để chuỗi thu được hội tụ và có tổng là một số bất kỳ cho trước hoặc trở nên phân kỳ.

Định nghĩa. Cho $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ và $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ khi đó ta định nghĩa cho phép nhân chuỗi:

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n . \sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} c_n$, ở đó $c_n = \sum_{k=1}^{n} a_k b_{n+1-k}$

- $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = S_1$, $\sum_{n=1}^{\infty} |b_n| = S_2 \Rightarrow$ $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| . \sum_{n=1}^{\infty} |b_n| = S_1 S_2$

Ví dụ 3. Xét sự hội tụ của tích các chuỗi số sau: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n}}$ và $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1}}$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n}}$ hội tụ tuyệt đối và $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1}}$ hội tụ tuyệt đối

Vậy: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n}} . \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1}}$ hội tụ

§4. CHUỖI HÀM SỐ

1. Chuỗi hàm số hội tụ

Định nghĩa: Cho dãy hàm số **{**$u_n(x)$} xác định X, ta định nghĩa chuỗi hàm số

$$u_1(x)+u_2(x)+...=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x) \qquad (1)$$

$\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ hội tụ tại $x_0 \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty}u_n(x_0)$ hội tụ

$\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ phân kì tại $x_0 \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty}u_n(x_0)$ phân kỳ

Tập các điểm hội tụ của (1) gọi là tập hội tụ của nó. Tổng các chuỗi hàm số là hàm số xác định trong tập hội tụ của nó.

Ví dụ 1. Tìm tập hợp hội tụ chuỗi hàm số sau: $\sum_{n=1}^{\infty}x^{n-1}$

Xét chuỗi số: $\sum_{n=1}^{\infty}|x_0^{\ n-1}|$

+) $\sum_{n=1}^{\infty}|x_0^{\ n-1}|$ hội tụ với $|x_0|<1$ và phân kỳ tại $|x_0|\geq 1$

Tập hội tụ là $|x|<1$

2. Chuỗi hàm số hội tụ đều

Định nghĩa. $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ hội tụ đều đến S(x) trên tập X

$\Leftrightarrow$ $\varepsilon > 0$ bé tùy ý $\exists\, n_0 \in$ N: $\forall n > n_0(\varepsilon)$, ta có $|S_n(x)-S(x)| < \varepsilon$, $\forall x \in X$

Ý nghĩa hình học với n đủ lớn, $S_n(x)$ thuộc dải $(S(x) – \varepsilon;\ S(x)+ \varepsilon)$

Tiêu chuẩn Cauchy. $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ hội tụ đều trên tập hợp X $\subset \mathbb{R}$ $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0$ bé tùy ý $\exists$ $n_0(\varepsilon) \in$ N: p>q> $n_0(\varepsilon)$, ta có | $S_p(x)$-$S_q(x)$|< ε, ∀x∈ N

Tiêu chuẩn Weierstrass. Nếu có $|u_n(x)| \le a_n$, ∀n∈ N, ∀x∈ X và $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ hội tụ $\Rightarrow$ $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ hội tụ tuyệt đối và đều trên X.

Tiêu chuẩn Dirichlet. $U_n=v_n w_n$, $|V_n|$ đơn điệu không tăng và $\to 0$, $|\sum_{k=1}^{n} w_k| \le c, \forall n \Rightarrow$ hội tụ đều.

Ví dụ 2. Xét sự hội tụ đều của chỗi hàm $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{x^2+n^2}$

$\left|\frac{(-1)^{n-1}}{x^2+n^2}\right| \le \frac{1}{n^2}, \forall x$ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ hội tụ

Chuỗi đã cho hội tụ tuyệt đối và đều trên $\mathbb{R}$

3. Tính chất của chuỗi hàm số hội tụ đều

Định lí 1. Chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ hội tụ đều về S(x) trên X, $u_n(x)$ liên tục trên X, với ∀n∈ N$\Rightarrow$S(x) liên tục trên X.

Định lí 2. $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ hội tụ đều đến S(x) trên [a;b], $u_n(x)$ liên tục trên [a;b], ∀n$\Rightarrow$

$$\int_a^b S(x)dx = \int_a^b \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b u_n(x)dx$$

Định lí 3. $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$=S(x) trên (a;b), các hàm u_n(x) khả vi liên tục trên (a;b), $\sum_{n=1}^{\infty} u'_n(x)$ hội tụ đều trên (a;b)$\Rightarrow S(x)$ khả vi trên (a;b) và có S'(x)=($\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$)'= $\sum_{n=1}^{\infty} u'_n(x)$

Ví dụ 3. Xét tính khả vi của hàm sau : f(x)=$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x}{n+x}$

x≠-n là chuỗi đan dấu hội tụ theo Leibnitz

u'$_n$(x)=$\frac{n}{(n+x)^2}$ liên tục $\forall x \neq -n$, $\sum_{n=1}^{\infty} u_n^{'}$ hội tụ đêu theo tiêu chuẩn Diichlet

$f^{'}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{(n+x)^2}$, x≠-n

§5. CHUỖI LŨY THỪA

1. Định nghĩa

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_n x^n + ... \qquad (1)$$

Ký hiệu là $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, ở đó a_n là số thực , x là biến số.

Ta bảo chuỗi lũy thừa hội tụ (phân kỳ) tại x_0 $\Leftrightarrow$ chuỗi số $\sum_{n=0}^{\infty} a_n {x_0}^n$ hội tụ(phân kì), chuỗi $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ hội tụ trên khoảng (a;b) $\Leftrightarrow$ chuỗi số $\sum_{n=0}^{\infty} a_n {x_0}^n$ hội tụ, x_0 tùy ý ∈ (a;b).

Ví dụ 1. $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + ...$

Đã biết hội tụ khi |x|<1, có $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$

Phân kỳ |x|≥1

Định lý 1(Abel). $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ hội tụ tại $x_0 \neq 0 \Rightarrow$ hội tụ tuyệt đối tại x: $|x|<|x_0|$

Chứng minh:

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n {x_0}^n$ hội tụ tai $x_0 \neq 0$ $\Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n x_0^n = 0 \Rightarrow \left| a_n x_0^n \right| \le M \forall n \ge N_0$

$$\left| a_n x_0^n \right| = \left| a_n x^n \left(\frac{x}{x_0} \right)^n \right| \le M \left| \frac{x}{x_0} \right|^n$$

$\left| \frac{x}{x_0} \right| < 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} M \left| \frac{x}{x_0} \right|^n$ hội tụ (Định lí so sánh 1) $\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ hội tụ tuyệt đối.

Nhận xét. Từ định lí Abel suy ra:

+ Nếu $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ phân kì tai x_0 $\Rightarrow$ phân kỳ tại x: $|x|>|x_0|$

+ Tập hội tụ khác rỗng

Định lý 2. Nếu $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \rho$ (hoặc $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \rho$) thì bán kính hội tụ R của chuỗi lũy thừa $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ được xác định bởi R= $\begin{cases} \frac{1}{\rho}, 0<\rho<\infty \\ 0, \rho = \pm\infty \\ \infty, \rho = 0 \end{cases}$

Nhận xét. Quy ước viết R=0 , R=$\pm\infty$, từ đó có thể phát biểu gọn định lý này như sau: Mọi chuỗi lũy thừa $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ đều có 1 bán kính hội tụ R với 0≤R≤±∞, khi đó chuỗi hội tụ tuyệt đối với |x|<R và phân kì với|x|>R.

Cách tính bán kính hội tụ R: $R = \lim\limits_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$ hoặc $R = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}}$

Ví dụ 2. Tìm khoảng cách hội tụ chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$

$$\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \frac{1}{n^2} : \frac{1}{(n+1)^2} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^2$$

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = 1$$

R=1, chuỗi hội tụ với |x|<1, phân kỳ với |x|>1

Tại |x|=1 có $\left|\frac{x^2}{n^2}\right| = \frac{1}{n^2}$, mặt khác $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ hội tụ do đó chuỗi lũy thừa hội tụ tai |x|=1.

Khoảng hội tụ là [-1;1].

Nhận xét: $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n$ (1) được gọi là chuỗi lũy thừa tại x=a,

Đặt z = x-a có $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ (2), tìm bán kính hội tụ R của chuỗi (2), thì có tập hợp hội tụ của chuỗi (1), cụ thể hội tụ với :-R<x-a<R hay a-R<x<a+R và phân kỳ với x<a-R, hoặc x>a+R; để nhận được khoảng hội tụ ta cần xét tại x=a-R và x=a+R.

2. Các tính chất của chuỗi lũy thừa

a, Chuỗi lũy thừa $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ hội tụ đều trên mọi đoạn [a;b] nằm trong khoảng hội tụ của nó.

b, $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ =S(x) , |x|<R≠0$\Rightarrow$ S(x) liên tục trên khoảng (-R;R).

c, $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ =S(x), |x|<R≠0$\Rightarrow$ S(x) khả tích trên mọi đoạn [a;b]$\subset$ (-R;R) và có

$$\int_a^b \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right) dx = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\int_a^b a_n x^n dx\right)$$

d, $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ =S(x), |x|<R≠0$\Rightarrow$ S(x) khả vi trên khoảng (-R,R) và có:

$$\frac{d}{dx}\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{d}{dx}\left(a_n x^n\right)$$

Nhận xét. Thực chất từ a, ta có: $\lim\limits_{x\to x_0}\left(\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right) = \sum\limits_{n=0}^{\infty}\lim\limits_{x\to x_0}\left(a_n x^n\right)$

Ví dụ 3. Tìm biểu thức chuỗi lũy thừa của ln(1+x)

Miền xác định: |x|<1.

f'(x) $=\dfrac{1}{1+x}$ ở đó đặt f(x)=ln(1+x)

f'(x) $\dfrac{1}{1+x}=\dfrac{1}{1-(-x)}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-x)^n=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n$

$$\int_0^x f'(t)dt=\int_0^x\left(\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n t^n\right)dt$$

$$f(x)-f(0)=\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^x\left[(-1)^n t^n\right]dt=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{n+1}}{n+1}$$

Do f(0)=0 nên có ln(1+x)= $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}\dfrac{x^n}{n}=x-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{3}-\dfrac{x^4}{4}+....$ |x|<1

3. Khai triển thành chuỗi lũy thừa

Định nghĩa. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$ được gọi là chuỗi Taylor của hàm số f(x) tại lân cận điểm x_0.

Nếu x_0=0 ta có $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{f^{(n)}(x_0)}{n!}x^n$ được gọi là chuỗi MacLaurin của hàm số f(x).

Định nghĩa. Nếu $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{f^{(n)}(x_0)}{n!}x^n$ =f(x) ta bảo hàm số f(x) được khai triển thành chuỗi Taylor.

Định lí 3. f(x) có đạo hàm mọi cấp trong lân cận của x_0, $\lim\limits_{n\to\infty} R_n(x) = 0$,

$R_n(x) = \dfrac{f^{(n+1)}(\zeta)}{(n+1)!}(x - x_0), \zeta$ ở giữa x_0 và x $\Rightarrow$ $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$

Định lí 4. f(x) có đạo hàm mọi cấp trong lân cận nào đó của điểm x_0;

$\left|f^{(n)}(\zeta)\right| \le M, \forall \zeta$ thuộc lân cận x_0 nói trên $\Rightarrow f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$

Chú ý. Có hàm khả vi vô hạn không được khai triển thành chuỗi Taylor, ví dụ

$$f(x)= \begin{cases} e^{\frac{-1}{x^2}}, x \ne 0 \\ 0, x = 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow f^{(n)}(0) = 0$, n tự nhiên bất kì

Thật vậy có ngay:

$$f'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0} \frac{e^{\frac{-1}{x^2}} - 0}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{x}}{e^{\frac{1}{x}}} = \lim_{t\to\infty} \frac{t}{e^{t^2}} = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{2te^t} = 0$$

Từ đó có đạo hàm mọi cấp tại x=0 cũng bằng 0.

Chuỗi Taylor của hàm f(x) là 0+0+0+…

Chuỗi này hội tụ, chúng hội tụ về 0

Nên f(x) nói trên không được khai triển thành chuỗi Taylor

Số dư $R_n(x) = \dfrac{f^{(n+1)}(\zeta)}{(n+1)!} x^{n+1}$ nhận được do sử dụng định lý Rolle.

4. Khai triển một số hàm số sơ cấp cơ bản

a) Một số khai triển

1. f(x)= e^x

$$f^{(n)}(0)=1 \qquad \left|f^{(n)}(x)\right|=e^x<e^A=M,\forall x\in(-A;A),A>0$$

$$e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!},\forall x\in(-A;A),A>0\Rightarrow e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!},\forall x\in R$$

2. f(x)=cos(x)

$$f^{(n)}(0)=\cos n\frac{\pi}{2}=\begin{cases}(-1)^k,n=2k\\0,n=2k+1\end{cases} \qquad \left|f^{(n)}(x)\right|=\left|\cos\left(x+n\frac{\pi}{2}\right)\right|\le 1,\forall x\in R$$

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-...+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+...,x\in R$$

3. f(x)=sin(x)

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-...+(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}+...,x\in R$$

4. f(x)= $(1+x)^\alpha,\alpha\in R$

$$f(x)=1+\frac{\alpha}{1!x}+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+...+\frac{\alpha(\alpha-1)...(\alpha-n+1)}{n!}x^n+...,-1<x<1$$

5. f(x)=ln(1+x)

$$ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-...+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+...,-1<x<1$$

6. f(x)=arctan x

$$arctan\ x=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-...+(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{2n-1},x\in R,-1\le x\le 1$$

Ví dụ 4. Khai triển thành chuỗi Maclaurin: $f(x)=a^x,0<a\ne 1$

Ta có: $a^x = e^{x\ln a}$ $\quad e^{x\ln a} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\ln^n a}{n!} x^n, x \in R$

b) Ứng dụng của chuỗi lũy thừa

❖ **Tính gần đúng**

Ví dụ 5. Áp dụng chuỗi lũy thừa tính gần đúng

Sin 18^0 vớ độ chính xác 10^{-5}

$$\sin x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)!} x^{2n-1}$$

$$\text{Sin } 18^0 = \sin\frac{\pi}{10} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)!} \frac{\pi^{2n-1}}{10^{2n-1}}$$

$$|R_n| < \frac{\pi^{2n+1}}{(2n+1)!10^{2n+1}} \le 10^{-5} \Rightarrow n \ge 3$$

❖ **Tính giới hạn**

Ví dụ 6. $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x - x + \frac{x^3}{3!} - \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!}}{x^9}$

Ta có: $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} + 0(x^9)$

$$A = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{x^9}{9!} + 0(x^9)}{x^9} = \frac{1}{9!}$$

§6. CHUỖI FOURIER

1. Chuỗi lượng giác chuỗi fourier

a, Chuỗi lượng giác

Định nghĩa. Chuỗi lượng giác la chuỗi hàm số có dạng

$$a_0+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx), a_n, b_n\in R \qquad (1)$$

+ Nếu $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|, \sum_{n=1}^{\infty}|b_n|$ hội tụ $\Rightarrow$ chuỗi (1) hội tụ tuyệt đối trên R

+ Tuy nhiên $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|, \sum_{n=1}^{\infty}|b_n|$ hội tụ không phải là điều kiện cần để chuỗi (1)hội tụ.

b, Chuỗi Fourier

Bổ đề. ∀ p,k ∈ Z ta có:

1. $\int_{-\pi}^{\pi}\sin kxdx=0$

2. $\int_{-\pi}^{\pi}\cos kxdx=0, k\neq 0$

3. $\int_{-\pi}^{\pi}\cos kx\sin pxdx=0$

4. $\int_{-\pi}^{\pi}\cos kx\cos pxdx=\begin{cases}0, k\neq p\\ \pi, k=p\neq 0\end{cases}$

5. $\int_{-\pi}^{\pi}\sin kx\sin pxdx=\begin{cases}0, k\neq p\\ \pi, k=p\neq 0\end{cases}$

Giả sử f(x) tuần hoàn với chu kỳ 2π và ta có:

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx) \qquad (2)$$

Sử dụng bổ đề trên và tính toán ta có:

$$a_0 = \frac{a_{0b}}{2}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx; a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nxdx, n = 1,2,...$$
$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nxdx, n = 1,2,... \qquad (3)$$

Định nghĩa. Chuỗi lượng giác $\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$ với các hệ số a_0, a_n, b_n

Xác định trong (3) được gọi là chuỗi Fourier của hàm f(x).

2. Điều kiện để hàm số khai triển thành chuỗi Fourier

Định nghĩa. Chuỗi Fourier của hàm f(x) hội tụ về hàm f(x) thì ta bảo hàm f(x) được khai triển thành chuỗi Fourier

Định lý Dirichlet. Cho f(x) tuần hoàn với chu kì 2π, đơn điệu từng khúc và bị chặn trên [-π,π]⇒ chuỗi Fourier của nó hội tụ tại mọi điểm trên đoạn [-π,π] và có S(x)=f(x), tại điểm liên tục của f(x).

Còn tại điểm gián đoạn x=c có $s_c = \frac{f(c+0) - f(c-0)}{2}$

Ví dụ 1. Khai triển thành chuỗi Fourier của hàm số f(x) tuần hoàn với chu kì 2π, xác định như sau:

$$f(x) = \begin{cases} 1, 0 \le x \le \pi \\ -1, -\pi \le x < 0 \end{cases}$$

+) $a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \frac{1}{\pi}(\pi - \pi) = 0$

+) $a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nxdx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} -\cos nxdx + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}\cos nxdx = 0$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nxdx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} -\sin nxdx + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}\sin nxdx = \frac{2}{n\pi}(1-\cos n\pi) = \frac{2}{n\pi}[1-(-1)^n]$$

+) $f(x) = \frac{4}{\pi}\left(\sin x + \frac{1}{3}\sin 3x + \frac{1}{5}\sin 5x + ...\right)$

3. Khai triển hàm chẵn lẻ

a. Nếu f(x) là hàm số chẵn $\Rightarrow f(x)\cos kx$ là hàm chẵn, $f(x)\sin kx$ là hàm lẻ

$$a_k = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos kxdx; b_k = 0, \forall k \in N$$

Ví dụ 2.

$f(x) = \begin{cases} \pi - x, 0 \le x \le \pi \\ \pi + x, -\pi \le x < 0 \end{cases}$ tuần hoàn với chu kỳ 2π, khai triển hàm f(x) thành chuỗi Fourier.

+)f(-x)=f(x)

+)b_k=0,∀ k∈N

+) $a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(\pi - x)dx = \frac{2}{\pi}\left(\pi x - \frac{x^2}{2}\right)\Big|_0^{\pi} = \pi$

$$a_k = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos kxdx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(\pi - x)\cos kxdx = \frac{2}{k}\sin kx\Big|_0^{\pi} - \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} xd\left(\frac{\sin kx}{k}\right)$$

$$= \frac{-2}{\pi}\left[\frac{x\sin kx}{k}\Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi}\frac{\sin kx}{k}dx\right] = \frac{2}{\pi}\frac{-\cos kx}{k^2}\Big|_0^{\pi} = \frac{2}{\pi k^2}(1-\cos k\pi) = \frac{2}{\pi k^2}\left(1-(-1)^k\right)$$

+) $f(x) = \frac{\pi}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{2}{\pi k^2}(1-(-1))\cos kx = \frac{\pi}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{4}{(2n+1)^2}\cos(2n+1)x$

b. Nếu hàm f(x) là hàm số lẻ $\Rightarrow f(x)\cos kx$ là hàm lẻ, $f(x)\sin kx$ là hàm chẵn,

$\Rightarrow$ a_k=0; $b_k = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin kx dx; \forall k \in N$

Ví dụ 3. Cho hàm số f(x)=x, $-\pi \le x \le \pi$, tuần hoàn với chu kì 2π và khai triển hàm f(x) thành chuỗi fourier

+) hàm f(x) lẻ

+) $a_k = 0, \forall k \in N^*$

+) $$b_k = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin kx dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\sin kx dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} xd\left(\frac{-\cos kx}{k}\right)$$

$$= \frac{2}{\pi}\left[-\frac{x\cos kx}{k}\Big|_0^{\pi} + \int_0^{\pi}\frac{\cos kx}{k}dx\right] = \frac{2}{\pi}\left[\frac{-\pi\cos k\pi}{k} + \frac{\sin kx}{k^2}\Big|_0^{\pi}\right] = \frac{2}{k}(-1)^{k+1}$$

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{2}{k}\sin kx$$

c. Nếu f(x) tuần hoàn với chu kì 2l, đơn điệu từng khúc và bị chặn trên đoạn [-l;l]. Đổi biến $x' = \frac{\pi}{l}x \Rightarrow f(x) = f\left(\frac{\pi}{l}x'\right) \equiv F(x')$ tuần hoàn với chu kỳ 2π. Sử dụng khai triển fourier cho hàm này ta có:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos n\frac{\pi}{l}x + b_n\sin n\frac{\pi}{l}x)$$

ở đó $a_0 = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)dx, a_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos n\frac{\pi x}{l}dx, \forall n \in N$;

$$b_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin n\frac{\pi x}{l}dx, \forall n \in N$$

d. Nếu f(x) đơn điệu từng khúc và bị chặn trên [a;b], muốn khai triển f(x) thành chuỗi Fourier, ta xây dựng hàm số g(x) tuần hoàn với chu kì ≥(b-a) sao cho g(x)=f(x),∀x∈[a;b]

Khai triển hàm g(x) thành chuỗi Fourier thì tổng của chuỗi bằng f(x) tại ∀x∈[a;b](trừ ra có chăng là các điểm gián đoạn của f(x). Vì hàm g(x) không duy nhất nên có nhiều chuỗi Fourier biểu diễn hàm số f(x), nói riêng nếu hàm số g(x) chẵn thì chuỗi Fourier của nó chỉ gồm những hàm số cosin, còn nếu hàm số g(x) lẻ thì chuỗi Forier của nó chỉ gòm những hàm số sin.

PHẦN III. PHƯƠNG PHÁP TOÁN TỬ LAPLACE

§1. PHÉP BIẾN ĐỔI LAPLACE VÀ PHÉP BIẾN ĐỔI LAPLACE NGƯỢC

1. Phép biến đổi Laplace

Phép biến đổi Laplace: $\mathcal{L}\{f(t)\}s = F(s)$ biến phương trình vi phân với ẩn hàm f(t) thành 1 phương trình đại số vớ ẩn hàm F(s) có lời giải được tìm ra dễ hơn nhiều. Chẳng hạn như đối với phương trình vi phân cấp cao

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1} y' + a_n y = f(x),$$

Với điều kiện ban đầu nhận được công thức có nghiệm tường minh biểu diễn qua tích chập Laplace.

Giải một phương trình vi phân cấp cao với hệ số hàm số (điều này không thể làm được với các phương pháp dã biết), chẳng hạn

$$xy'' - (4x+1)y' + 2(2x+1)y = 0$$

Giải hệ phương trình vi phân tuyến tính cấp cao

$$\begin{cases} y_1^{(n)} = \sum\limits_{k=1}^{n} a_{1k} y_k + f_1(x) \\ \vdots \\ y_n^{(n)} = \sum\limits_{k=n}^{n} a_{nk} y_k + f_n(x) \end{cases}$$

Giải một hệ phương trình vi phân tuyến tính cấp cao với hệ số hàm số.

2. Định nghĩa.

F(s)= $\mathcal{L}\{f(t)\}(s) = \int\limits_0^{\infty} e^{-st} f(t)dt$, ở đó s,f(t)∈ℂ. Nhưng trong §này ta chỉ cần sử dụng s, f(t)∈ℝ

Ví dụ 1. Tính $\mathcal{L}\{1\}(s)=\int_0^\infty e^{-st}dt=\left[-\frac{1}{s}e^{-st}\right]_0^\infty=\lim_{b\to\infty}\left[-\frac{1}{s}e^{-bs}+\frac{1}{s}\right]=\frac{1}{s}, s>0$

Không tồn tại $\mathcal{L}\{1\}(s)$ khi s≤0

Ví dụ 2. $f(t)=e^{at}, t\geq 0$. Tính $\mathcal{L}(e^{at}), a\in\mathbb{R}$

$$\mathcal{L}\{e^{at}\}(s)=\int_0^\infty e^{-st}e^{at}dt=\int_0^\infty e^{-(s-a)}dt=\lim_{b\to\infty}\left(-\frac{e^{(s-a)t}}{s-a}\right)\Bigg|_0^b$$

$$=\lim_{b\to\infty}\frac{1}{s-a}\left(1-e^{-(s-a)b}\right)=\frac{1}{s-a}$$, nếu s>a

Phân kì khi s≤a (2)

Ví dụ 3. Cho f(t)=t^a,a>-1. Tính $\mathcal{L}\{f(t)\}$ và $\mathcal{L}\{t^n\}, n\in\mathbb{N}$

$$\mathcal{L}\{t^a\}(s)=\int_0^\infty e^{-st}t^a dt$$

Đặt u=st$\Longrightarrow t=\frac{u}{s}, dt=\frac{du}{s}$ có: $\mathcal{L}\{t^a\}=\frac{1}{s^{a+1}}\int_0^\infty e^{-u}u^a du=\frac{\Gamma(a+1)}{s^{a+1}}$, s>0

$\mathcal{L}\{t^n\}=\frac{n!}{s^{n+1}}$, s>0

3. Tính chất của phép biến đổi Laplace

Định lý 1. Tính tuyến của phép biến đổi Laplace

Cho α, β là hằng số và ∃ $\mathcal{L}\{f(t)\}(s)$ và $\mathcal{L}\{g(t)\}(s)$, khi đó

$\mathcal{L}\{\alpha f(t)+\beta g(t)\}(s)=\alpha\mathcal{L}\{f(t)\}(s)+\beta\mathcal{L}\{g(t)\}(s)$,∀s

Chứng minh:

$$\mathcal{L}\{\alpha f+\beta g\}(s)=\int_0^\infty e^{-st}(\alpha f(t)+\beta g(t))dt$$

$$=\lim_{b\to\infty}\int_0^\infty e^{-st}(\alpha f(t)+\beta g(t))dt=\lim_{b\to\infty}\int_0^b e^{-st}(\alpha f(t)dt+\lim_{b\to\infty}\int_0^b e^{-st}\beta g(t)dt$$

$$=\alpha\int_0^\infty e^{-st}\alpha f(t)dt+\beta\int_0^\infty e^{-st}g(t)dt=\alpha\mathcal{L}\{f\}+\beta\mathcal{L}\{g\}$$

Ví dụ 4. Tính $\mathcal{L}\left\{3t^2+4t^{\frac{3}{2}}\right\}$

Ta có:

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}$$

$$\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)=\Gamma\left(\frac{3}{2}+1\right)=\frac{3}{2}\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{3}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}+1\right)=\frac{3}{2}.\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{4}\sqrt{\pi}$$

$$\mathcal{L}\left\{3t^2+4t^{\frac{3}{2}}\right\}=3\mathcal{L}\{t^2\}+4\mathcal{L}\left\{t^{\frac{3}{2}}\right\}$$

Sử dụng (2) ta có:

$$\mathcal{L}\{t^2\}=\frac{\Gamma(3)}{s^3}=\frac{2!}{s^3}, s>0$$

$$\mathcal{L}\left\{t^{\frac{3}{2}}\right\}=\frac{\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)}{s^{\frac{5}{2}}}=\frac{3\sqrt{\pi}}{4.s^{\frac{5}{2}}}$$

$$\mathcal{L}\left\{3t^2+4t^{\frac{3}{2}}\right\}=3.\frac{2!}{s^3}+4\frac{\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)}{s^{\frac{5}{2}}}=\frac{6}{s^3}+3\sqrt{\frac{\pi}{s^5}}$$

Ví dụ 5. Tính $\mathcal{L}\{\cosh kt\},\mathcal{L}\{\sinh kt\},\mathcal{L}\{\cos kt\},\mathcal{L}\{\sin kt\}$

$$\mathcal{L}\{\cosh kt\} = \mathcal{L}\left\{\frac{e^{kt}+e^{-kt}}{2}\right\} = \frac{1}{2}\left(\mathcal{L}\{e^{kt}\}+\mathcal{L}\{e^{-kt}\}\right)$$

Theo ví dụ 2 có $\mathcal{L}\{\cosh kt\} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s-k}+\frac{1}{s+k}\right) = \frac{s}{s^2-k^2}, s>k>0$

Tương tự $\mathcal{L}\{\sinh kt\} = \frac{k}{s^2-k^2}, s>k>0$

$$\mathcal{L}\{\cos kt\}(s) = \int_0^\infty e^{-st}\cos kt dt = \frac{e^{-st}}{s^2+k^2}(k\sin kt - s\cos kt)\Big|_0^\infty = \frac{s}{s^2+k^2}$$

(hoặc $\mathcal{L}\{\cos kt\} = \mathcal{L}\left\{\frac{e^{ikt}+e^{-ikt}}{2}\right\} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s-ik}+\frac{1}{s+ik}\right) = \frac{s}{s^2+k^2}, s>0$)

Tương tự $\mathcal{L}\{\sin kt\} = \frac{k}{s^2+k^2}, s>0$

4. Phép biến đổi Laplace ngược

Định nghĩa. Nếu $F(s)=\mathcal{L}\{f(t)\}(s)$ thì ta gọi f(t) là biến đổi Laplace ngược của F(s) và viết f(t)=$\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$

Ví dụ 6. $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+k^2}\right\} = \cos kt, s>0; \mathcal{L}\left\{\frac{s}{s^2-k^2}\right\}, s>k>0$

f(t)	F(s)
1	$\frac{1}{s}$ (s>0)
t	$\frac{1}{s^2}$ (s>0)
t^n ($n\geq 0$)	$\frac{n!}{s^{n+1}}$ (s>0)

t^n (a>-1)	$\frac{\Gamma(a+1)}{s^{a+1}}$ (s>0) $\Gamma(s)=\int_0^\infty t^{s-1}e^{-t}dt$ (Re s>0)
e^{at}	$\frac{1}{s-a}$ (s>a)
cos kt	$\frac{s}{s^2+k^2}$ (s>a)
sin kt	$\frac{k}{s^2+k^2}$ (s>a)
cosh kt	$\frac{s}{s^2-k^2}$ $(s>\lvert k\rvert)$
sinh kt	$\frac{k}{s^2-k^2}$ $(s>\lvert k\rvert)$
u(t-a)	$\frac{e^{-as}}{s}$ (s>0)

Nhận xét. Phép biến đổi Laplace có tính chất tuyến tính.

Thật vậy, ta có:

$$\alpha F+\beta G=\alpha\mathcal{L}\{f\}+\beta\mathcal{L}\{g\}=\mathcal{L}\{\alpha f+\beta g\}=\mathcal{L}\left\{\alpha\mathcal{L}^{-1}\{F\}+\beta\mathcal{L}^{-1}\{G\}\right\}$$

Từ đó và định nghĩa có $\mathcal{L}\{\alpha f+\beta g\}=\mathcal{L}\left\{\alpha\mathcal{L}^{-1}\{F\}+\beta\mathcal{L}^{-1}\{G\}\right\}$.

Định nghĩa. Hàm số f(t) được gọi là liên tục từng khúc trên [a;b] nếu như f(t) liên tục trên mỗi khoảng nhỏ (ở đó [a;b] được chia thành hữu hạn khoảng nhỏ); f(t) có giới hạn hữu hạn khi t tiến tới hai điểm biên của mỗi đoạn này.

Ví dụ 7. Tính $\mathcal{L}\{u_a(t)\}, a>0, u_a(t)=u(t-a)=\begin{cases}0 & t<a\\ 1 & t\ge a\end{cases}$

$$\mathcal{L}\{u_a(t)\} = \int_0^\infty e^{-st}u_a(t)\,dt = \int_0^\infty e^{-st}dt = \lim_{b\to\infty}\left(-\frac{e^{-st}}{s}\right)\Bigg|_{t=a}^{b}$$

$$= \frac{1}{s}\lim_{b\to\infty}\left(e^{-sa} - e^{-sb}\right) = \frac{e^{-as}}{s}, s>0, a>0$$

Định nghĩa. Hàm f được gọi là bậc mũ khi t→∞ nếu tồn tai các hằng số không âm M,c,T sao cho $|f(t)| \le Me^{ct}, \forall t \ge T$

Định lý 2. Sự tồn tại của phép biến đổi Laplace

Nếu hàm f liên tục từng khúc với t≥0 và là bậc mũ khi t→∞ tì tồn tại $\mathcal{L}\{f(t)\}(s), \forall s > c$

Chứng minh:

Từ giả thiết f là bậc mũ khi t→∞ $\Rightarrow |f(t)| \le Me^{ct}, \forall t \ge 0$

Ta có: $\int_0^\infty \left|e^{-st}f(t)\right|dt = \int_0^b e^{-st}\left|f(t)\right|dt \le \int_0^b e^{-st}Me^{ct}dt = M\int_0^b e^{-(s-c)t}dt \le \frac{M}{s-c}, s>c$

Cho b→+∞ có $\left|F(s)\right| \le \int_0^\infty \left|e^{-st}f(t)\right|dt \le \frac{M}{s-c}$

Cho s→+∞$\Rightarrow \exists F(s), s>c$ và có

Hệ quả. Nếu f(t) thảo mãn giá trị của định lý 2 thì $\lim_{s\to+\infty} F(s) = 0$

Chú ý. Một hàm hữu tỉ (bậc tử nhỏ hơn bậc mẫu) là ảnh của phép bến đổi Laplace

Định lý 2 không là điều kiện cần, ví dụ:

Hàm $f(t)=\frac{1}{\sqrt{t}}$ không liên tục từng khúc tại t=0 và là bậc mũ khi t→+∞, nhưng ở ví dụ 3 có $\mathcal{L}\left\{t^{\frac{-1}{2}}\right\}=\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{s^{\frac{1}{2}}}=\sqrt{\frac{\pi}{s}}$

Định lý 3. Sự biến đổi duy nhất của Laplace nghịch đảo

Giả sử rằng hàm f(t),g(t) thảo mãn giả thiết của định lý 2 để tồn tại

$$F(s)=\mathcal{L}\{f(t)\}(s),G(s)=\mathcal{L}\{g(t)\}(s)$$

Nếu F(s)=G(s), ∀s>c thì có f(t)=g(t) tại t mà cả hai hàm liên tục

Chú ý hai hàm liên tục từng khúc, là bậc mũ và bằng nhau qua phép biến đổi Lalace thì có thể khác nhau tại những điểm gián đoạn cô lập. Điều này không quan trọng trong hầu hết các ứng dụng thực tế.

§2. PHÉP BIẾN ĐỔI CỦA BÀI TOÁN VỚI GIÁ TRỊ BAN ĐẦU

1. Phép biến đổi của đạo hàm

Định lý 1. Cho f(t) liên tục và trơn từng khúc với t≥0 và là bậc mũ khi t→+∞ , tức tồn tại hằng số không âm c, M và T thoả mãn:

$$\left|f\left(t\right)\right| = Me^{ct}, t \geq T \qquad (2.1)$$

Khi đó tồn tại $\mathcal{L}\left\{f'(t)\right\}$ với s > c và có:

$$\mathcal{L}\left\{f'(t)\right\} = s\mathcal{L}\left\{f\left(t\right)\right\} - f\left(0\right) = sF(s) - f(0)$$

Chứng minh:

$$\mathcal{L}\left\{f'(t)\right\} = \int_0^\infty e^{-st} f'(t)dt = \int_0^\infty e^{-st} df\left(t\right) = e^{-st} f(t)\Big|_0^\infty + s\int_0^\infty e^{-st} f(t)dt$$

Do $\left|f\left(t\right)\right| = Me^{ct}, t \geq T \Rightarrow e^{-st} f(t) \xrightarrow{t\to\infty} 0$ khi s>c

Từ định lí 2 (bài 1) $\Rightarrow \int_0^\infty e^{-st} f\left(t\right)dt$ hội tụ với s>0

Từ đó $\mathcal{L}\left\{f'\right\}(s) = s\mathcal{L}\left\{f\right\}(s) - f\left(0\right)$

Định nghĩa. Hàm f được gọi là trơn từng khúc trên [a;b] ⇔ nó khả vi trên [a;b] trừ ra hữu hạn điểm và f'(t) liên tục từng khức trên [a;b]

2. Nghiệm của bài toán giá trị ban đầu. Hệ quả. Phép biến đổi của đạo hàm bậc cao

Giả sử rằng các hàm số $f, f', \dots, f^{(n-1)}$ liên tục và trơn từng khúc với t≥0 và là bậc mũ khi t→+∞. Khi đó tồn tại $\mathcal{L}\left\{f^{(n)}(t)\right\}$ với s>c và có

$$\mathcal{L}\left\{f^{(n)}(t)\right\} = s^n\mathcal{L}\left\{f\left(t\right)\right\} - s^{n-1}f(0) - s^{n-2}f'(0) - \dots - f^{(n-1)}(0)$$
$$= s^nF(s) - s^{n-1}f(0) - s^{n-2}f'(0) - \dots - f^{(n-1)}(0)$$

Ví dụ 1. Sử dụng định lý 1, chứng minh rằng $\mathcal{L}\left\{t^n e^{at}\right\} = \dfrac{n!}{(s-a)^{n+1}}, n = 1, 2, 3, \ldots$

Chứng minh bằng quy nạp

+) n=1:

$$f(t) = te^{at} \Rightarrow f'(t) = ate^{at} + e^{at} \Rightarrow sF(s) - f(0) = aF(s) + \frac{1}{s-a} \Rightarrow F(s) = \frac{1}{(s-a)^2}$$

+) n=k: $\mathcal{L}\left\{t^k e^{at}\right\} = \dfrac{k!}{(s-a)^{k+1}}$

+) $\mathcal{L}\left\{t^{k+1} e^{at}\right\} = \dfrac{k+1}{s-a}\mathcal{L}\left\{t^k e^{at}\right\} = \dfrac{k+1}{s-a}\dfrac{k!}{\left(s-a^{k+1}\right)} = \dfrac{(k+1)!}{(s-a)^{k+2}}$

Ví dụ 2. Giải phương trình: $x'' - x' - 6x = 0$ với điều kiện x(0)=2,x’(0)=-1

Ta có: $\mathcal{L}\left\{x'(t)\right\} = sX(s) - 2$

$$\mathcal{L}\left\{x''(t)\right\} = s^2 X(x) - sx(0) - x'(0) = s^2 X(s) - 2s + 1$$

Thay vào phương trình đã cho có:

$$(s^2 X(s) - 2s + 1) - (sX(s) - 2) - 6X(s) = 0 \Leftrightarrow \left(s^2 - s - 6\right)X(s) - 2s + 3 = 0$$

X(s)= $\dfrac{2s-3}{s^2-s-6} = \dfrac{2s-3}{(s-a)(s+2)} = \dfrac{3}{5}.\dfrac{1}{s-3} + \dfrac{7}{5}.\dfrac{1}{s+2}$

Do $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{s-a}\right\} = e^{at}$ nên có $x(t) = \dfrac{3}{5}e^{3t} + \dfrac{7}{5}e^{-2t}$ là nghiệm của bài toán giá trị ban đầu .

Ví dụ 3. Giải bài toán với điều kiện ban đầu: $x'' + 4x = \sin 3t, x(0) = x'(0) = 0$

Từ điều kiện ban đầu có: $\mathcal{L}\left\{x''(t)\right\} = s^2 X(s) - sx(0) - x'(0) = s^2 X(s)$

Ta có: $\mathcal{L}\left\{\sin 3t\right\} = \dfrac{3}{s^2 + 3^2}$

Thay vào ta có:

$$s^2X(s)+4X(s)=\frac{3}{s^2+9}\Leftrightarrow X(s)=\frac{3}{\left(s^2+9\right)\left(s^2+4\right)}=\frac{As+B}{\left(s^2+4\right)}+\frac{Cs+D}{\left(s^2+9\right)}$$

Đồng nhất hệ số ta có A=C=0, B=3/5, D=-3/5, do đó

$$X(s)=\frac{3}{10}.\frac{2}{s^2+4}-\frac{1}{5}.\frac{3}{s^2+9}$$

Do $\mathcal{L}\{\sin 2t\}=\frac{2}{s^2+4},\mathcal{L}\{\sin 3t\}=\frac{3}{s^2+3^2}$ nên ta có $x(t)=\frac{3}{10}\sin 2t-\frac{1}{5}\sin 3t$

Nhận xét: Như vậy phương pháp biến đổi Laplace cho lời giải trực tiếp tìm nghiệm của bài toán giá trị ban đầu mà không cần phân biệt đó là phương trình vi phân thuần nhất hay là không thuần nhất.

3. Hệ phương trình vi phân tuyến tính

Phép biến đổi Laplace có khả năng biến đổi hệ phương trình vi phân tuyến tính thành một hê phương trình đại số tuyến tính

Ví dụ 4. Giải hệ phương trình vi phân tuyến tính

$\begin{cases}2x''=-6x+2y\\ y''=2x-2y+40\sin 3t\end{cases}$ với điều kiện ban đầu $x(0)=x'(0)=y(0)=y'(0)=0$

Từ điều kiện ban đầu có: $\mathcal{L}\{x''(t)\}=s^2X(s)-sx(0)-x'(0)=s^2X(s)$

Tương tự $\mathcal{L}\{y''(t)\}=s^2Y(s)$

Do $\mathcal{L}\{\sin 3t\}=\frac{3}{s^2+9}$, thay vào hệ phương trình có hệ phương trình sau:

$$\begin{cases}2s^2X(s)=-6X(s)+2Y(s)\\ s^2Y(s)=2X(s)-2Y(s)+\dfrac{120}{s^2+9}\end{cases}=\begin{cases}\left(s^2+3\right)X(s)-Y(s)=0\\ -2X(s)+\left(s^2+2\right)Y(s)=\dfrac{120}{s^2+9}\end{cases}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} (s^2+3) & -1 \\ -2 & (s^2+2) \end{vmatrix} = (s^2+1)(s^2+4)$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ \dfrac{120}{s^2+9} & s^2+2 \end{vmatrix} = \frac{120}{s^2+9} \qquad \Delta_2 = \begin{vmatrix} s^2+3 & 0 \\ -2 & \dfrac{120}{s^2+9} \end{vmatrix} = \frac{120(s^2+3)}{s^2+9}$$

Do đó $X(s) = \dfrac{120}{(s^2+4)(s^2+9)(s^2+1)} = \dfrac{5}{s^2+1} - \dfrac{8}{s^2+4} + \dfrac{3}{s^2+9}$

Do đó $x(t) = 5\sin t - \sin 2t + \sin 3t$

Tương tự có $Y(s) = \dfrac{120(s^2+3)}{(s^2+4)(s^2+9)(s^2+1)} = \dfrac{10}{s^2+1} + \dfrac{8}{s^2+4} - \dfrac{18}{s^2+9}$

nên có $y(t) = 10\sin t + 4\sin 2t - 6\sin 3t$

4. Những kỹ thuật biến đổi bổ sung

Định lý 2. Phép biến đổi của tích phân

Nếu f(t) liên tục từng khúc với t≥0 và là bậc mũ khi t→+∞ thì

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(\tau)d\tau\right\} = \frac{1}{s}\mathcal{L}\{f(t)\} = \frac{F(s)}{s} \text{ với s>c}$$

Hay là: $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{F(s)}{s}\right\} = \displaystyle\int_0^t f(\tau)d\tau = \int_0^t \mathcal{L}^{-1}\{F\}(\tau)d\tau$

Chứng minh:

+) f liên tục từng khúc $\Rightarrow g(t) = \displaystyle\int_0^t f(\tau)d\tau$ liên tục, trơn từng khúc với t≥0 và

có $|g(t)| \le \displaystyle\int_0^t |f(\tau)d\tau| \le M\int_0^t e^{c\tau}d\tau = \frac{M}{C}(e^{ct}-1) < \frac{M}{C}e^{ct}$

$\Rightarrow g(t)$ là hàm bậc mũ khi t→∞

+) Sử dụng định lý 1 ta có $\mathcal{L}\left\{f(t)\right\} = \mathcal{L}\left\{g'(t)\right\} = s\mathcal{L}\left\{g(t)\right\} - g(0)$

Do g(0)=0 nên ta có $\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(\tau)d\tau\right\} = \mathcal{L}\left\{g(t)\right\} = \frac{1}{s}\mathcal{L}\left\{f(t)\right\}$

Ví dụ 5. Tìm nghịch đảo của phép biến đổi Laplace của $G(s) = \frac{1}{s^2(s-a)}$

Ta có $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s(s-a)}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{\frac{1}{s-a}}{s}\right\} = \int_0^t \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-a}\right\}d\tau = \int_0^t e^{a\tau}d\tau = \frac{1}{a}\left(e^{a\tau}-1\right)$

Từ đó và tiếp tục có

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2(s-a)}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{\frac{1}{s-a}}{s}\right\} = \int_0^t \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s(s-a)}\right\}d\tau = \int_0^t \frac{1}{a}(e^{a\tau}-1)d\tau = \left[\frac{1}{a}\left(\frac{1}{a}e^{a\tau}-\tau\right)\right]_0^t$$

$$= \frac{1}{a^2}\left(e^{at}-at-1\right)$$

§3. PHÉP TỊNH TIẾN VÀ PHÂN THỨC ĐƠN GIẢN

1. Mở đầu

Phương trình vi phân tuyến tính với hệ số hằng có nghiệm là biến đổi Laplace nghịch đảo của hàm hữu tỉ $R(s)=\dfrac{P(s)}{Q(s)}$

Cần đưa ra kỹ thuật cho phép tính $\mathcal{L}^{-1}\{R(s)\}$ được thuận lợi.

2. Quy tắc phân thức đơn giản

a) Quy tắc 1. Phân thức đơn giản tuyến tính

Nếu Q(s) có (s-a)^n thì R(s) có các số hạng sau:

$$\frac{A_1}{s-a}+\frac{A_2}{(s-a)^2}+\ldots+\frac{A_n}{(s-a)^n},A_i\in i,i=\overline{1,n}$$

b) Quy tắc 2. Phân thức đơn giản bậc 2

Nếu Q(s) có $\left((s-a)^2+b^2\right)^n$ thì R(s) có dạng:

$$\frac{A_1s+B_1}{(s-a)^2+b^2}+\frac{A_2s+B_2}{\left[(s-a)^2+b^2\right]^2}+\ldots+\frac{A_ns+B_n}{\left[(s-a)^2+b^2\right]^n}\text{ ở đó }A_i,B_i\in i,i=\overline{1,n}$$

Định lý 1. Biến đổi trên trục s

Nếu $F(s)=\mathcal{L}\{f(t)\}$ tồn tại với s>c, thì tồn tại
$\mathcal{L}\{e^{at}f(t)\}=F(s-a)\equiv\mathcal{L}\{f(t)\}(s-a)$

Hay tương đương với $\mathcal{L}^{-1}\{F(s-a)\}=e^{at}f(t)\equiv e^{at}\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}(t)$

Chứng minh:

Ta có: $F(s-a)=\int\limits_0^\infty e^{-(s-a)t}f(t)dt=\int\limits_0^\infty e^{-st}\left[e^{at}f(t)\right]dt=\mathcal{L}\{e^{at}f(t)\},s-a>c$

Từ kết quả này có:

f(t)	F(s)
$e^{at}t^n$	$\dfrac{n!}{(s-a)^{n+1}}, s>a \quad (2.1)$
$e^{at}\cos(kt)$	$\dfrac{s-a}{(s-a)^2+k^2}, s>a \quad (2.2)$
$e^{at}\sin(kt)$	$\dfrac{k}{(s-a)^2+k^2}, s>a \quad (2.3)$

Ví dụ 1. Tìm phép biến đổi Laplace ngược của $R(s)=\dfrac{s^2+1}{s^3-2s^2-8s}$

$$R(s)=\frac{s^2+1}{s(s+2)(s-4)}=\frac{A}{s}+\frac{B}{s+2}+\frac{C}{s-4}$$

$$s^2+1=A(s+2)(s-4)+Bs(s-4)+Cs(s+2)$$

Thay s=0, s=-2, và s=4 ta có:

-8A=1, 12B=5, 24C=17 $\Leftrightarrow \quad A=\dfrac{-1}{8}, B=\dfrac{5}{12}, C=\dfrac{17}{24}$

$$R(s)=\frac{-1}{8}.\frac{1}{s}+\frac{5}{12}.\frac{1}{s+2}+\frac{17}{24}.\frac{1}{s-4}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\{R(s)\}=\frac{-1}{8}+\frac{5}{12}e^{-2t}+\frac{17}{24}e^{4t}$$

3. Sự cộng hưởng và nhân tử tích lặp bậc 2

Hay dùng hai phép biến đổi Laplace ngược của hàm phân thức đơn giản trong trường hợp phân tích lặp bậc hai.

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{\left(s^2+k^2\right)^2}\right\}=\frac{1}{2k}t\sin kt \;;\; \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{\left(s^2+k^2\right)^2}\right\}=\frac{1}{2k^3}\left(\sin kt-kt\cos kt\right)$$

Ví dụ 2. Sử dụng phép biến đổi Laplace để gải bài toán với giá trị ban đầu

$$x''+\omega_0^2 x=F_0\sin\omega t; x(0)=0=x'(0)$$

Tác động phép biến đổi Laplace vào có $s^2X\left(s\right)+\omega_0^2X(s)=\dfrac{F_0\omega}{s^2+\omega^2}$

$$X(s)=\frac{F_0\omega}{\left(s^2+\omega^2\right)\left(s^2+\omega_0^2\right)}=\frac{F_0\omega}{\omega^2-\omega_0^2}\left(\frac{1}{s^2+\omega_0^2}-\frac{1}{s^2+\omega^2}\right),\omega\neq\omega_0\Rightarrow \text{ tìm được x(t)}$$

Nếu $\omega=\omega_0$ ta có $X(s)=\dfrac{F_0\omega_0}{\left(s^2+\omega_0^2\right)}$ khi đó $x(t)=\dfrac{F_0}{2\omega_0^2}\left(\sin\omega_0 t-\omega_0 t\cos\omega_0 t\right)$

§4. ĐẠO HÀM, TÍCH PHÂN VÀ TÍCH CÁC PHÉP BIẾN ĐỔI

1. Mở đầu

Phép biến đổi Laplace của nghiệm của một phương trình vi phân đôi khi là tích của các biến đổi của hai hàm đã biết.

Chẳng hạn, xét bài toán với giá trị ban đầu $x''+x=\cos t; x(0)=x'(0)=0$

Tác động phép biến đổi Laplace ta có:

$$s^2X(s)-sx(0)-x'(0)+X(s)=\frac{s}{s^2+1}\Leftrightarrow X(s)=\frac{s}{s^2+1}.\frac{1}{s^2+1}=\mathcal{L}\{\cos t\}\mathcal{L}\{\sin t\}$$

Mặt khác ta có $\mathcal{L}\{\cos t\sin t\}=\mathcal{L}\left\{\frac{1}{2}\sin 2t\right\}=\frac{1}{2}.\frac{2}{s^2+2^2}=\frac{1}{s^2+4}\neq\frac{s}{\left(s^2+1\right)^2}$

Do đó $\mathcal{L}\{\cos t\sin t\}\neq\mathcal{L}\{\cos t\}.\mathcal{L}\{\sin t\}$

Rõ ràng rằng, để giải được bài toán trên, ta cần tìm hàm h(t) sao cho

$$\mathcal{L}\{h(t)\}=\mathcal{L}\{\cos t\}.\mathcal{L}\{\sin t\}$$

2. Tích chập của hai hàm

Định nghĩa. Tích chập đối với phép biến đổi Laplace của 2 hàm f,g liên tục từng khúc được định nghĩa với như sau:

$$(f*g)(t)=\int_0^t f(\tau)g(t-\tau)\,d\tau, t\geq 0$$

Tích chập là giao hoán

Ví dụ 1. Tính (cos t)*(sin t)

Ta có:

$$(\cos t)*(\sin t)=\int_0^t \cos\tau\sin(t-\tau)=\int_0^t \frac{1}{2}\left[\sin t-\sin(2\tau-t)\right]d\tau$$

$$=\frac{1}{2}\left[\tau\sin t+\frac{1}{2}\cos(2\tau-t)\right]_{\tau=0}^{t}=\frac{1}{2}\left[t\sin t+\frac{1}{2}\cos t-\frac{1}{2}\cos(-t)\right]=\frac{1}{2}t\sin t$$

Định lí 1. Giả sử f(t), g(t) liên tục từng khúc với t≥0; $|f(t)|,|g(t)|$ bị chặn bởi Me^{ct} khi $t\to+\infty$, các số M,c không âm.

Khi đó ta có $\mathcal{L}\{f(t)*g(t)\}=\mathcal{L}\{f(t)\}\mathcal{L}\{g(t)\}$ và $\mathcal{L}^{-1}\{F(s)G(s)\}=f(t)*g(t)$

Chứng minh:

Có $G(s)=\int_0^\infty e^{-su}g(u)du \overset{u=t-\tau}{=} \int_0^\infty e^{-s(t-\tau)}g(t-\tau)dt$

Do đó $G(s)=e^{s\tau}\int_0^\infty e^{-st}g(t-\tau)dt$

Với g(u)≡0 khi u<0, có

$$F(s)G(s)=G(s)\int_0^\infty e^{-s\tau}f(\tau)d\tau=\int_0^\infty e^{-s\tau}f(\tau)G(s)d\tau$$

$$=\int_0^\infty e^{-s\tau}f(\tau)\left(e^{s\tau}\int_0^\infty e^{-st}g(t-\tau)dt\right)d\tau=\int_0^\infty\left(\int_0^\infty e^{-st}f(\tau)g(t-\tau)dt\right)d\tau$$

Từ giả thiết đã cho đổi thứ tự lấy tích phân có:

$$F(s)G(s)=\int_0^\infty e^{-st}\left(\int_0^\infty f(\tau)e^{-st}g(t-\tau)d\tau\right)dt=\int_0^\infty e^{-st}\left(\int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau\right)dt=\int_0^\infty e^{-st}\left[f(t)*g(t)\right]dt$$

Do đó $F(s)G(s)=\mathcal{L}\{f(t)*g(t)\}$

3. Vi phân của phép biến đổi

Định lí 2. Giả sử f(t) liên tục từng khúc với t ≥0, $|f(t)| \le Me^{ct}$ khi t→+∞, các số M,c không âm thì có $\mathcal{L}\{-tf(t)\} = F'(s), s > c$

3.1

$$\Leftrightarrow f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = -\frac{1}{t}\mathcal{L}^{-1}\{F'(s)\} \qquad 3.2$$

Tổng quát ta có: $\mathcal{L}\{t^n f(t)\} = (-1)^n F^{(n)}(s), n = 1,2,3...$

3.3

Chứng minh:

Từ giả thiết $\Rightarrow \int_0^\infty e^{-st} f(t)dt$ hội tụ tuyệt đối đều và $\frac{\partial}{\partial s}\left(e^{-st} f(t)\right)$ liên tục,s>c

Do đó $F'(s) = \frac{d}{ds}\int_0^\infty e^{-st} f(t)dt = \int_0^\infty \frac{d}{ds}(e^{-st} f(t))dt = \int_0^\infty e^{-st}\left(-tf(t)\right)dt = \mathcal{L}\{-tf(t)\}$

Ta có chứng minh 3.3 bằng phương pháp quy nạp toán học. thật vậy, n=1, ta có: $\mathcal{L}\{tf(t)\} = -F'(s)$

Giả sử n=k, tức có $\mathcal{L}\{t^k f(t)\} = (-1)^k F^{(k)}(s)$

Ta chứng minh đúng với n=k+1, thật vậy

$$\mathcal{L}\{t^{k+1} f(t)\} = \mathcal{L}\{t.t^k f(t)\} = -\frac{d}{ds}\mathcal{L}\{t^k f(t)\} = -\frac{d}{ds}\left((-1)^k F^{(k)}(s)\right) = (-1)^{k+1} F^{(k+1)}(s)$$

Ví dụ 2. Tìm $\mathcal{L}\{t^2 \sin kt\}$

Từ 3.3 ta có

$$\mathcal{L}\{t^2 \sin kt\} = (-1)^2 \frac{d^2}{ds^2}\left(\frac{k}{s^2+k^2}\right) = \frac{d^2}{ds^2}\frac{k}{s^2+k^2} = \frac{d}{ds}\left(\frac{-2ks}{\left(s^2+k^2\right)^2}\right) = \frac{6ks^2-2k^3}{\left(s^2+k^2\right)^3}$$

4. Tích phân của phép biến đổi

Định lí 3. Cho f(t) liên tục từng khúc đối với t≥0, $\exists \lim\limits_{t\to 0^+} \dfrac{f(t)}{t}, |f(t)| \le Me^{ct}$ khi t→+∞, các số M, c không âm có $\mathcal{L}\left\{\dfrac{f(t)}{t}\right\} = \int\limits_s^\infty F(\sigma)d\sigma$ s>c   4.1

$$\Leftrightarrow f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = t\mathcal{L}^{-1}\left\{\int\limits_0^\infty F(\sigma)d\sigma\right\} \qquad 4.2$$

Chứng minh:

Từ giả thiết $\Rightarrow \int\limits_0^\infty e^{-st} f(t)dt$ hội tụ tuyệt đối và đều, s>c

Ta có : $\int\limits_s^\infty F(\sigma)d\sigma = \int\limits_s^\infty \left(\int\limits_0^\infty e^{-\sigma t} f(t)dt\right)d\sigma$

Từ đó đổi thứ tự lấy tích phân ta có :

$$\int\limits_s^\infty F(\sigma)d\sigma = \int\limits_s^\infty \left(\int\limits_0^\infty e^{-\sigma t} f(t)d\sigma\right)dt = \int\limits_0^\infty \left.\frac{e^{-\sigma t}}{-t}\right|_{\sigma=s}^{\infty} f(t)dt = \int\limits_0^\infty e^{-st}\frac{f(t)}{t}dt = \mathcal{L}\left\{\frac{f(t)}{t}\right\}$$

Ví dụ 3. Tìm $\mathcal{L}\left\{\dfrac{\sinh t}{t}\right\}$

Ta có $\lim\limits_{t\to 0^+}\dfrac{\sinh t}{t} = \lim\limits_{t\to 0^+}\dfrac{\cosh t}{1} = 1$

$$\mathcal{L}\left\{\frac{sinht}{t}\right\} = \int\limits_s^\infty \mathcal{L}\{\sinh t\}d\sigma = \int\limits_s^\infty \frac{d\sigma}{\sigma^2-1} = \frac{1}{2}\int\limits_s^\infty\left(\frac{1}{\sigma-1} - \frac{1}{\sigma+1}\right)d\sigma = \frac{1}{2}\left[\ln\frac{\sigma-1}{\sigma+1}\right]_s^\infty = \frac{1}{2}\ln\frac{s+1}{s-1}$$

$$\mathcal{L}\left\{\frac{\sinh t}{t}\right\} = \frac{1}{2}\ln\frac{s+1}{s-1}$$

5. Phép biến đổi của hàm liên tục từng khúc

a) Đặt vấn đề

Các mô hình toán học trong hệ cơ học hay hệ điện trường liên quan đến các hàm không liên tục tương ứng với các lực bên ngoài bất ngờ đảo chiều bật hay tắt.

Hàm đơn giản bật, tắt là hàm bậc thang đơn vị tại t=a (hàm Heaviside)

$$u_a(t) = u(t-a) = \begin{cases} 0 & t < a \\ 1 & t \geq a \end{cases}$$

b) Phép tịnh tiến trên trục t

Định lí 4. Nếu $\mathcal{L}\{f(t)\}$ tồn tại với s>c, thì có

$$\mathcal{L}\{u(t-a)f(t-a)\} = e^{-as}F(s) = e^{-as}\mathcal{L}\{f\}$$

5.1

$$\mathcal{L}^{-1}\{e^{-as}F(s)\} = u(t-a)f(t-a) = u(t-a)\mathcal{L}^{-1}\{F\}(t-a) \quad s>c+a \qquad 5.2$$

Chứng minh:

Ta có: $e^{-as}F(s) = \int_0^\infty e^{-s(\tau+a)} f(\tau)d\tau$

Đổi biến t=τ+a, ta có $e^{-as}F(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t-a)dt$

Do $u(t-a)(t-a) = \begin{cases} 0 & t < a \\ f(t-a) & t \geq a \end{cases}$

Nên có $e^{-as}F(s) = \int_0^\infty e^{-st}u(t-a)f(t-a)dt = \mathcal{L}\{u(t-a)f(t-a)\}$

Ví dụ 4. Cho $f(t) = \frac{1}{2}t^2$ .Tính $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-as}}{s^3}\right\}$

Từ 5.2 có $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-as}}{s^3}\right\} = u(t-a)\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^3}\right\}(t-a) = u(t-a)\frac{1}{2}(t-a)^2$

$$=\begin{cases} 0 & t<a \\ \frac{1}{2}(t-a)^2 & t\ge a \end{cases}$$

Ta có một số bảng tra cứu tổng hợp từ các bài toán đã cho:

	f(t)	$\mathcal{L}\{f(t)\}(s)$
1	$e^{at}f(t)$	$\mathcal{L}\{f(t)\}(s-a)$
2	u(t-a)f(t-a)	$e^{-as}\mathcal{L}\{f(t)\}(s)e$
3	$t^n f(t)$	$(-1)^n\frac{d^n}{ds^n}\mathcal{L}\{f(t)\}(s)$
4	(f*g)(t)	$\mathcal{L}\{f(t)\}(s)\mathcal{L}\{g(t)\}(s)$
5	$\frac{f(t)}{t}$	$\int_s^\infty \mathcal{L}\{f(t)\}(\tau)d\tau$
6	$f^{(n)}(t)$	$s^n\mathcal{L}\{f(t)\}(s)-s^{n-1}f(0)-s^{n-2}f'(0)-...-f^{(n-1)}(0)$
7	$\int_0^t f(\tau)d\tau$	$\frac{1}{s}\mathcal{L}\{f(t)\}(s)$

	F(s)	$\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}(t)$
1	F(s)	$-\frac{1}{t}\mathcal{L}^{-1}\{F'(s)\}(t)$

2	F(s)	$t\mathcal{L}^{-1}\left\{\int_s^{\infty} F(\delta)d\delta\right\}(t)$
3	F(s-a)	$e^{at}\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}(t)$
4	$e^{-as}F(s)$	$u(t-a)\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}(t-a)$
5	F(s)G(s)	$\left(\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}*\mathcal{L}^{-1}\{G(s)\}\right)(t)$
6	$\frac{F(s)}{s}$	$\int_0^t \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}(\tau)d\tau$