Các dạng toán

Dạng chính tắc:

$$\min c^T x$$
$$Ax = b$$
$$x \geq 0$$

Dạng chuẩn:

$$\min c^T x$$
$$Ax \leq b$$
$$x \geq 0$$

Dạng tổng quát:

$$\min c^T x$$
$$a_i^T x \geq b_i, \qquad i \in M_1$$
$$a_i^T x \leq b_i, \qquad i \in M_2$$
$$a_i^T x = b_i, \qquad i \in M_3$$
$$x_j \geq 0, \qquad j \in N_1$$
$$x_j \leq 0, \qquad j \in N_2$$

với M_1, M_2, M_3, N_1 và N_2 là tập hợp chỉ số nào đó.

Phương pháp hình học

B1: Vẽ miền chấp nhận được của RB

- Vẽ từng phương trình
- Chọn miền

B2: Tìm miền chấp nhận được (tô)

B3: Vẽ dường hàm mục tiêu

- Vẽ phương
- Xác định hướng trượt (min /max)

B4: Ktra/Xác định nghiệm tối ưu, giá trị TN,

Có 4 trường hợp

- Nghiệm duy nhất
- Vô số nghiệm
- Vô nghiệm
- Không giới nội

Đường mức:

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 = \alpha \ (\alpha = \mathrm{BSCNN}(a_1, a_2))$$

Phương pháp đơn hình dạng từ vựng

B1: Xét bài toán ở dạng chuẩn.

$$\min \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$
$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i, \qquad i = 1, \dots, m$$
$$x_j \geq 0, \qquad j = 1, \dots, n$$

B2: Đưa biến bù và đặt mục tiêu là z.

$$z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

$$w_i = b_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j\,, \qquad i = 1, \dots, m$$

B3: Chọn biến vào là biến có hệ số âm (nhỏ) nhất. Biến ra là biến sao cho

$$x_i = \overline{b_\iota} - \overline{a_{\iota k}} x_k, \qquad i \in B$$

chọn x_k thỏa

$$x_k = \min_{i \in B} \frac{b_i}{a_{ik}}$$

Phương pháp đơn hình dạng từ vựng, trường hợp vế phải các ràng buộc đều không âm

B1: Xét $b_i < 0$. Chọn từ vựng xuất phát là x_0.

$$\min x_0$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j - x_0 \le b_i, \qquad i = 1, \dots, m$$

$$x_j \ge 0, \qquad j = 0,1, \dots, n$$

B2: Chọn hệ số âm nhất như bình thương.
B3: Nếu giá trị $x_0 = 0$. Vậy nghiệm bài toán bổ trợ là nghiệm tối ưu của bài toán gốc.
B4: Giải bài toán pha 2 khi thế các giá trị của bài toán bổ trợ vào bài toán gốc.
B5: Nếu giá trị $x_0 \neq 0$. Vậy nghiệm bài toán bổ trợ không là nghiệm tối ưu của bài toán gốc.
Lưu ý: Nếu không có tỉ số $\frac{\overline{a_{\iota k}}}{\overline{b_\iota}}$ nào dương thì bài toán không giới nội.

Phương pháp đơn hình dạng bảng

Viết bài toán dưới dạng ma trận. Lưu ý: nên làm trước dạng tự vựng để làm dạng bảng dễ hơn.

Định lý 3.1.1: Nếu thuật toán đơn hình kéo dài vô hạn thì nó phải xoay vòng.

Phương pháp Bland

Giống như phương pháp thông thường. Chỉ khác là biến vào là biến có chỉ số nhỏ nhất trong các biến có hệ số âm.

Định nghĩa 4.1.1:

(a) Điểm x của tập lồi S được gọi là điểm cực biên nếu x không thể là tổ hợp lồi của hai điểm của S khác x, tức là không có $y \in S$, khác x và $\gamma \in [0,1]$ để $x = (1-\gamma)y + \gamma z$.

(b) Điểm x của tập lồi S được gọi là đỉnh của S, nếu có một siêu phẳng sao cho S nằm hoàn toàn ở một phía của nó và siêu phẳng cắt S chỉ có điểm x này, tức là $\exists d \in \mathbb{R}^n, d \neq 0$ sao cho $d^T x < d^T y \ \forall y \in S, y \neq x$.

Định nghĩa 4.1.2: Xét tập lồi đa diện P trong $\mathbb{R}^n$, xác định bởi các đẳng thức và bất đẳng thức.

(a) $x^* \in \mathbb{R}^n$ là nghiệm cơ sở của P tương đương là của hệ đẳng thức tuyến tính và bất đẳng thức tuyến tính, nếu nó thỏa mọi ràng buộc đẳng thức và trong số mọi ràng buộc được thỏa chặt, tức là với dấu =, có n ràng buộc độc lập tuyến tính

(b) Nghiệm cơ sở thỏa mọi ràng buộc được gọi là nghiệm cơ sở chấp nhận được.

Định lý 4.1.2: Giả sử P là một tập lồi đa diện và $x^* \in P$. Khi đó có ba khẳng định tương đương

(a) x^* là đỉnh.

(b) x^* là điểm cực biên.

(c) x^* là nghiệm cơ sở chấp nhận được.

Phương pháp đối ngẫu

Đổi bài toán như sau:

$\min c^T x$ $a_i^T x = b_i, \quad i \in M_1$ $a_i^T x \le b_i, \quad i \in M_2$ $a_i^T \ge b_i, \quad i \in M_3$ $x_j \ge 0, \quad j \in N_1$ $x_j \le 0, \quad j \in N_2$ x_j tự do, $\quad j \in N_3$	$\max y^T b$ y_i tự do, $\quad i \in M_1$ $y_i \le 0, \quad i \in M_2$ $y_i \ge 0, \quad i \in M_3$ $y^T A_j \le c_j^T, \quad j \in N_1$ $y^T A_j \ge c_j^T, \quad j \in N_2$ $y^T A_j = c_j^T, \quad j \in N_3$

Dựa trên bảng quan hệ sau:

GỐC	min	max	ĐỐI NGẪU
ràng buộc	$= b_i$ $\le b_i$ $\ge b_i$	tự do ≤ 0 ≥ 0	biến
biến	≥ 0 ≤ 0 tự do	$\le c_j$ $\ge c_j$ $= c_j$	ràng buộc