Chương 1

SỰ CHÉO HÓA

Đại học Khoa Học Tự Nhiên Tp. Hồ Chí Minh

Nội dung

Chương 1. SỰ CHÉO HÓA

1. Trị riêng và vectơ riêng
2. Không gian con riêng
3. Toán tử và ma trận chéo hóa được
4. Một vài ứng dụng của sự chéo hóa

Một số ký hiệu

- $\boldsymbol{K}$: Trường $(\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C})$
- $\boldsymbol{M_n(K)}$: Tập của tất cả các ma trận vuông cấp n trên trường K.
- $\boldsymbol{I_n}$: Ma trận đơn vị cấp n
- $\operatorname{diag}(\boldsymbol{\lambda_1, \ldots, \lambda_n})$: Ma trận đường chéo

Một số ký hiệu

- $\boldsymbol{K}$: Trường $(\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C})$
- $\boldsymbol{M_n(K)}$: Tập của tất cả các ma trận vuông cấp n trên trường K.
- $\boldsymbol{I_n}$: Ma trận đơn vị cấp n
- $\mathrm{diag}(\boldsymbol{\lambda_1, \ldots, \lambda_n})$: Ma trận đường chéo
- $\boldsymbol{V}$: Không gian vectơ n chiều trên trường K.
- $\boldsymbol{\mathcal{B}_0}$: Cơ sở chính tắc của V.
- $(\boldsymbol{\mathcal{B} \to \mathcal{B}'})$: Ma trận chuyển cơ sở từ $\mathcal{B}$ sang $\mathcal{B}'$
- $[\boldsymbol{f}]_{\boldsymbol{\mathcal{B}}}$: Ma trận biểu diễn ánh xạ tuyến tính f theo cơ sở $\mathcal{B}$

Một số ký hiệu

- $\boldsymbol{K}$: Trường $(\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C})$
- $\boldsymbol{M_n(K)}$: Tập của tất cả các ma trận vuông cấp n trên trường K.
- $\boldsymbol{I_n}$: Ma trận đơn vị cấp n
- $\mathrm{diag}(\boldsymbol{\lambda_1, \ldots, \lambda_n})$: Ma trận đường chéo
- $\boldsymbol{V}$: Không gian vectơ n chiều trên trường K.
- $\boldsymbol{\mathcal{B}_0}$: Cơ sở chính tắc của V.
- $\boldsymbol{(\mathcal{B} \to \mathcal{B}')}$: Ma trận chuyển cơ sở từ $\mathcal{B}$ sang $\mathcal{B}'$
- $\boldsymbol{[f]_{\mathcal{B}}}$: Ma trận biểu diễn ánh xạ tuyến tính f theo cơ sở $\mathcal{B}$
- $\boldsymbol{End_K(V)}$: Tập các toán tử tuyến tính $f : V \to V$
- $\mathbf{Id}_{\boldsymbol{V}}$: Ánh xạ đồng nhất trên V

Giới thiệu

Bài toán 1. Cho $f \in End_K(V)$ là một toán tử tuyến tính.

Giới thiệu

Bài toán 1. Cho $f \in End_K(V)$ là một toán tử tuyến tính. Tồn tại hay không một cơ sở $\mathcal{B}$ của V sao cho $[f]_{\mathcal{B}}$ là ma trận đường chéo?

Giới thiệu

Bài toán 1. Cho $f \in End_K(V)$ là một toán tử tuyến tính. Tồn tại hay không một cơ sở $\mathcal{B}$ của V sao cho $[f]_{\mathcal{B}}$ là ma trận đường chéo?

Bài toán 2. Cho $A \in M_n(K)$ là một ma trận vuông cấp n.

Giới thiệu

Bài toán 1. Cho $f \in End_K(V)$ là một toán tử tuyến tính. Tồn tại hay không một cơ sở $\mathcal{B}$ của V sao cho $[f]_{\mathcal{B}}$ là ma trận đường chéo?

Bài toán 2. Cho $A \in M_n(K)$ là một ma trận vuông cấp n. Tồn tại hay không một ma trận khả nghịch P sao cho $P^{-1}AP$ là ma trận đường chéo?

Nhắc lại.

Nếu $\mathcal{B} = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ là cơ sở của V thì

$$[f]_{\mathcal{B}} = ([f(u_1)]_{\mathcal{B}}\,[f(u_2)]_{\mathcal{B}} \ldots [f(u_n)]_{\mathcal{B}}).$$

Nhắc lại.

Nếu $\mathcal{B} = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ là cơ sở của V thì

$$\boldsymbol{[f]_{\mathcal{B}} = ([f(u_1)]_{\mathcal{B}}\, [f(u_2)]_{\mathcal{B}} \ldots [f(u_n)]_{\mathcal{B}})}.$$

Ví dụ. Cho toán tử tuyến tính $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ xác định bởi

$$f(x_1, x_2) = (3x_1 + 4x_2, 6x_1 + 5x_2).$$

và cơ sở $\mathcal{B} = \{u_1 = (-1, 1), u_2 = (2, 3)\}$. Tìm $[f]_{\mathcal{B}}$?

Nhắc lại.

Nếu $\mathcal{B} = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ là cơ sở của V thì

$$[f]_{\mathcal{B}} = ([f(u_1)]_{\mathcal{B}}\, [f(u_2)]_{\mathcal{B}} \ldots [f(u_n)]_{\mathcal{B}}).$$

Ví dụ. Cho toán tử tuyến tính $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ xác định bởi

$$f(x_1, x_2) = (3x_1 + 4x_2, 6x_1 + 5x_2).$$

và cơ sở $\mathcal{B} = \{u_1 = (-1, 1), u_2 = (2, 3)\}$. Tìm $[f]_{\mathcal{B}}$?

Đáp án.

$$[f]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}.$$

Ví dụ. Cho $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ -3 & -5 & -3 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ và $P = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
Tìm P^{-1} và tính $P^{-1}AP$?

Ví dụ. Cho $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ -3 & -5 & -3 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ và $P = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
Tìm P^{-1} và tính $P^{-1}AP$?

Đáp án. $P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Ví dụ. Cho $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ -3 & -5 & -3 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ và $P = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
Tìm P^{-1} và tính $P^{-1}AP$?

Đáp án. $P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

$P^{-1}AP$

Ví dụ. Cho $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ -3 & -5 & -3 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ và $P = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
Tìm P^{-1} và tính $P^{-1}AP$?

Đáp án. $P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

$$P^{-1}AP = (P^{-1}A)P$$

Ví dụ. Cho $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ -3 & -5 & -3 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ và $P = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
Tìm P^{-1} và tính $P^{-1}AP$?

Đáp án. $P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

$$P^{-1}AP = (P^{-1}A)P = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ -2 & -4 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ví dụ. Cho $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ -3 & -5 & -3 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ và $P = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
Tìm P^{-1} và tính $P^{-1}AP$?

Đáp án. $$P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{aligned} P^{-1}AP = (P^{-1}A)P &= \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ -2 & -4 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

1.1. Trị riêng và vectơ riêng

Định nghĩa. Cho $f \in End_K(V)$.

1.1. Trị riêng và vectơ riêng

Định nghĩa. Cho $f \in End_K(V)$. Vectơ $v \in V$ được gọi là một ***vectơ riêng*** của f nếu:

1.1. Trị riêng và vectơ riêng

Định nghĩa. Cho $f \in End_K(V)$. Vectơ $v \in V$ được gọi là một ***vectơ riêng*** của f nếu:

(i) $v \neq 0$;

1.1. Trị riêng và vectơ riêng

Định nghĩa. Cho $f \in End_K(V)$. Vectơ $v \in V$ được gọi là một ***vectơ riêng*** của f nếu:

(i) $v \neq 0$;

(ii) tồn tại $\boldsymbol{\lambda} \in K$ sao cho $f(v) = \boldsymbol{\lambda} v$.

1.1. Trị riêng và vectơ riêng

Định nghĩa. Cho $f \in End_K(V)$. Vectơ $v \in V$ được gọi là một ***vectơ riêng*** của f nếu:

(i) $v \neq 0$;

(ii) tồn tại $\boldsymbol{\lambda} \in K$ sao cho $f(v) = \boldsymbol{\lambda} v$.

Khi đó ta nói $\boldsymbol{\lambda}$ là một ***trị riêng*** của f,

1.1. Trị riêng và vectơ riêng

Định nghĩa. Cho $f \in End_K(V)$. Vectơ $v \in V$ được gọi là một ***vectơ riêng*** của f nếu:

(i) $v \neq 0$;

(ii) tồn tại $\boldsymbol{\lambda} \in K$ sao cho $f(v) = \boldsymbol{\lambda} v$.

Khi đó ta nói $\boldsymbol{\lambda}$ là một ***trị riêng*** của f, và v là ***vectơ riêng ứng với trị riêng*** $\boldsymbol{\lambda}$.

1.1. Trị riêng và vectơ riêng

Định nghĩa. Cho $f \in End_K(V)$. Vectơ $v \in V$ được gọi là một ***vectơ riêng*** của f nếu:

(i) $v \neq 0$;

(ii) tồn tại $\boldsymbol{\lambda} \in K$ sao cho $f(v) = \boldsymbol{\lambda} v$.

Khi đó ta nói $\boldsymbol{\lambda}$ là một ***trị riêng*** của f, và v là ***vectơ riêng ứng với trị riêng*** $\boldsymbol{\lambda}$.

Nhận xét. *Nếu v là vectơ riêng ứng với trị riêng* $\boldsymbol{\lambda}$

1.1. Trị riêng và vectơ riêng

Định nghĩa. Cho $f \in End_K(V)$. Vectơ $v \in V$ được gọi là một ***vectơ riêng*** của f nếu:

(i) $v \neq 0$;

(ii) tồn tại $\boldsymbol{\lambda} \in K$ sao cho $f(v) = \boldsymbol{\lambda} v$.

Khi đó ta nói $\boldsymbol{\lambda}$ là một ***trị riêng*** của f, và v là ***vectơ riêng ứng với trị riêng $\boldsymbol{\lambda}$***.

Nhận xét. *Nếu v là vectơ riêng ứng với trị riêng $\boldsymbol{\lambda}$ thì μv $(\mu \neq 0)$ cũng là vectơ riêng ứng với trị riêng $\boldsymbol{\lambda}$.*

1.1. Trị riêng và vectơ riêng

Định nghĩa. Cho $f \in End_K(V)$. Vectơ $v \in V$ được gọi là một ***vectơ riêng*** của f nếu:

(i) $v \neq 0$;

(ii) tồn tại $\boldsymbol{\lambda} \in K$ sao cho $f(v) = \boldsymbol{\lambda} v$.

Khi đó ta nói $\boldsymbol{\lambda}$ là một ***trị riêng*** của f, và v là ***vectơ riêng ứng với trị riêng*** $\boldsymbol{\lambda}$.

Nhận xét. *Nếu v là vectơ riêng ứng với trị riêng $\boldsymbol{\lambda}$ thì μv $(\mu \neq 0)$ cũng là vectơ riêng ứng với trị riêng $\boldsymbol{\lambda}$.*

Ví dụ. Cho toán tử tuyến tính $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ xác định bởi

$$f(x_1, x_2) = (x_1 + 2x_2, -x_1 + 4x_2).$$

Chứng tỏ $\boldsymbol{\lambda} = 2$ là một trị riêng của f.

$$f(x_1, x_2) = (x_1 + 2x_2, -x_1 + 4x_2) \text{ và } \boldsymbol{\lambda} = 2$$

$$f(x_1, x_2) = (x_1 + 2x_2, -x_1 + 4x_2) \text{ và } \boldsymbol{\lambda} = 2$$

Giải. Giả sử $v = (x_1, x_2)$.

$$f(x_1, x_2) = (x_1 + 2x_2, -x_1 + 4x_2) \text{ và } \boldsymbol{\lambda} = 2$$

Giải. Giả sử $v = (x_1, x_2)$. Xét phương trình $f(v) = \boldsymbol{\lambda} v$

$$f(x_1, x_2) = (x_1 + 2x_2, -x_1 + 4x_2) \text{ và } \boldsymbol{\lambda} = 2$$

Giải. Giả sử $v = (x_1, x_2)$. Xét phương trình $f(v) = \boldsymbol{\lambda} v$

$$f(v) = \boldsymbol{\lambda} v$$

$$f(x_1, x_2) = (x_1 + 2x_2, -x_1 + 4x_2) \text{ và } \boldsymbol{\lambda} = 2$$

Giải. Giả sử $v = (x_1, x_2)$. Xét phương trình $f(v) = \boldsymbol{\lambda} v$

$$\begin{aligned} & f(v) = \boldsymbol{\lambda} v \\ \Leftrightarrow \quad & (x_1 + 2x_2, -x_1 + 4x_2) = 2(x_1, x_2) \end{aligned}$$

$$f(x_1, x_2) = (x_1 + 2x_2, -x_1 + 4x_2) \text{ và } \boldsymbol{\lambda} = 2$$

Giải. Giả sử $v = (x_1, x_2)$. Xét phương trình $f(v) = \boldsymbol{\lambda} v$

$$\begin{aligned} & f(v) = \boldsymbol{\lambda} v \\ \Leftrightarrow \quad & (x_1 + 2x_2, -x_1 + 4x_2) = 2(x_1, x_2) \\ \Leftrightarrow \quad & (-x_1 + 2x_2, -x_1 + 2x_2) = (0, 0) \end{aligned}$$

$$f(x_1, x_2) = (x_1 + 2x_2, -x_1 + 4x_2) \text{ và } \boldsymbol{\lambda} = 2$$

Giải. Giả sử $v = (x_1, x_2)$. Xét phương trình $f(v) = \boldsymbol{\lambda} v$

$$\begin{aligned}
& f(v) = \boldsymbol{\lambda} v \\
\Leftrightarrow\ & (x_1 + 2x_2, -x_1 + 4x_2) = 2(x_1, x_2) \\
\Leftrightarrow\ & (-x_1 + 2x_2, -x_1 + 2x_2) = (0, 0) \\
\Leftrightarrow\ & \begin{cases} -x_1 + 2x_2 = 0, \\ -x_1 + 2x_2 = 0. \end{cases}
\end{aligned}$$

$$f(x_1, x_2) = (x_1 + 2x_2, -x_1 + 4x_2) \text{ và } \boldsymbol{\lambda} = 2$$

Giải. Giả sử $v = (x_1, x_2)$. Xét phương trình $f(v) = \boldsymbol{\lambda} v$

$$\begin{aligned} & f(v) = \boldsymbol{\lambda} v \\ \Leftrightarrow \quad & (x_1 + 2x_2, -x_1 + 4x_2) = 2(x_1, x_2) \\ \Leftrightarrow \quad & (-x_1 + 2x_2, -x_1 + 2x_2) = (0, 0) \\ \Leftrightarrow \quad & \begin{cases} -x_1 + 2x_2 = 0, \\ -x_1 + 2x_2 = 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Chọn $v = (2, 1)$.

$$f(x_1, x_2) = (x_1 + 2x_2, -x_1 + 4x_2) \text{ và } \boldsymbol{\lambda} = 2$$

Giải. Giả sử $v = (x_1, x_2)$. Xét phương trình $f(v) = \boldsymbol{\lambda} v$

$$\begin{aligned} & f(v) = \boldsymbol{\lambda} v \\ \Leftrightarrow\ & (x_1 + 2x_2, -x_1 + 4x_2) = 2(x_1, x_2) \\ \Leftrightarrow\ & (-x_1 + 2x_2, -x_1 + 2x_2) = (0, 0) \\ \Leftrightarrow\ & \begin{cases} -x_1 + 2x_2 = 0, \\ -x_1 + 2x_2 = 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Chọn $v = (2, 1)$. Ta có $f(v) = 2v$.

$$f(x_1,x_2) = (x_1+2x_2, -x_1+4x_2) \text{ và } \boldsymbol{\lambda} = 2$$

Giải. Giả sử $v = (x_1, x_2)$. Xét phương trình $f(v) = \boldsymbol{\lambda} v$

$$\begin{aligned} & f(v) = \boldsymbol{\lambda} v \\ \Leftrightarrow\ & (x_1+2x_2, -x_1+4x_2) = 2(x_1,x_2) \\ \Leftrightarrow\ & (-x_1+2x_2, -x_1+2x_2) = (0,0) \\ \Leftrightarrow\ & \begin{cases} -x_1+2x_2 = 0, \\ -x_1+2x_2 = 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Chọn $v = (2,1)$. Ta có $f(v) = 2v$. Suy ra $\boldsymbol{\lambda} = 2$ là một trị riêng của f.

Định nghĩa. Cho $f \in End_K(V)$ và $\mathcal{B}$ là một cơ sở của V.

Định nghĩa. Cho $f \in End_K(V)$ và $\mathcal{B}$ là một cơ sở của V. Ta đặt $A := [f]_{\mathcal{B}}$,

Định nghĩa. Cho $f \in End_K(V)$ và $\mathcal{B}$ là một cơ sở của V. Ta đặt $A := [f]_{\mathcal{B}}$, khi đó ***đa thức đặc trưng*** của f được định nghĩa là

Định nghĩa. Cho $f \in End_K(V)$ và $\mathcal{B}$ là một cơ sở của V. Ta đặt $A := [f]_{\mathcal{B}}$, khi đó ***đa thức đặc trưng*** của f được định nghĩa là

$$\boldsymbol{P_f(\lambda)} := \det(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{\lambda I_n}).$$

Định nghĩa. Cho $f \in End_K(V)$ và $\mathcal{B}$ là một cơ sở của V. Ta đặt $A := [f]_{\mathcal{B}}$, khi đó ***đa thức đặc trưng*** của f được định nghĩa là

$$\boldsymbol{P_f(\lambda)} := \det(\boldsymbol{A - \lambda I_n}).$$

Nhận xét. *Đa thức đặc trưng của f không phụ thuộc vào cách chọn cơ sở của không gian V.*

Định nghĩa. Cho $f \in End_K(V)$ và $\mathcal{B}$ là một cơ sở của V. Ta đặt $A := [f]_{\mathcal{B}}$, khi đó ***đa thức đặc trưng*** của f được định nghĩa là

$$P_f(\lambda) := \det(A - \lambda I_n).$$

Nhận xét. *Đa thức đặc trưng của f không phụ thuộc vào cách chọn cơ sở của không gian V.*

Giải thích. Giả sử $\mathcal{B}$ và $\mathcal{B}'$ là hai cơ sở của V.

Định nghĩa. Cho $f \in End_K(V)$ và $\mathcal{B}$ là một cơ sở của V. Ta đặt $A := [f]_{\mathcal{B}}$, khi đó ***đa thức đặc trưng*** của f được định nghĩa là

$$\boldsymbol{P_f(\lambda) :=} \det\boldsymbol{(A - \lambda I_n)}.$$

Nhận xét. *Đa thức đặc trưng của f không phụ thuộc vào cách chọn cơ sở của không gian V.*

Giải thích. Giả sử $\mathcal{B}$ và $\mathcal{B}'$ là hai cơ sở của V. Khi đó

$$[f]_{\mathcal{B}'} = (\mathcal{B} \to \mathcal{B}')^{-1}[f]_{\mathcal{B}}(\mathcal{B} \to \mathcal{B}').$$

Định nghĩa. Cho $f \in End_K(V)$ và $\mathcal{B}$ là một cơ sở của V. Ta đặt $A := [f]_{\mathcal{B}}$, khi đó ***đa thức đặc trưng*** của f được định nghĩa là

$$\boldsymbol{P_f(\lambda)} := \det(\boldsymbol{A - \lambda I_n}).$$

Nhận xét. *Đa thức đặc trưng của f không phụ thuộc vào cách chọn cơ sở của không gian V.*

Giải thích. Giả sử $\mathcal{B}$ và $\mathcal{B}'$ là hai cơ sở của V. Khi đó

$$[f]_{\mathcal{B}'} = (\mathcal{B} \to \mathcal{B}')^{-1}[f]_{\mathcal{B}}(\mathcal{B} \to \mathcal{B}').$$

Đặt $A := [f]_{\mathcal{B}}$, $A' := [f]_{\mathcal{B}'}$ và $P := (\mathcal{B} \to \mathcal{B}')$,

Định nghĩa. Cho $f \in End_K(V)$ và $\mathcal{B}$ là một cơ sở của V. Ta đặt $A := [f]_{\mathcal{B}}$, khi đó ***đa thức đặc trưng*** của f được định nghĩa là

$$\boldsymbol{P_f(\lambda)} := \det(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{\lambda I_n}).$$

Nhận xét. *Đa thức đặc trưng của f không phụ thuộc vào cách chọn cơ sở của không gian V.*

Giải thích. Giả sử $\mathcal{B}$ và $\mathcal{B}'$ là hai cơ sở của V. Khi đó

$$[f]_{\mathcal{B}'} = (\mathcal{B} \to \mathcal{B}')^{-1}[f]_{\mathcal{B}}(\mathcal{B} \to \mathcal{B}').$$

Đặt $A := [f]_{\mathcal{B}}$, $A' := [f]_{\mathcal{B}'}$ và $P := (\mathcal{B} \to \mathcal{B}')$, ta có

$$|A' - \boldsymbol{\lambda} I_n|$$

Định nghĩa. Cho $f \in End_K(V)$ và $\mathcal{B}$ là một cơ sở của V. Ta đặt $A := [f]_{\mathcal{B}}$, khi đó ***đa thức đặc trưng*** của f được định nghĩa là

$$\boldsymbol{P_f(\lambda)} := \det(\boldsymbol{A - \lambda I_n}).$$

Nhận xét. *Đa thức đặc trưng của f không phụ thuộc vào cách chọn cơ sở của không gian V.*

Giải thích. Giả sử $\mathcal{B}$ và $\mathcal{B}'$ là hai cơ sở của V. Khi đó

$$[f]_{\mathcal{B}'} = (\mathcal{B} \to \mathcal{B}')^{-1}[f]_{\mathcal{B}}(\mathcal{B} \to \mathcal{B}').$$

Đặt $A := [f]_{\mathcal{B}}$, $A' := [f]_{\mathcal{B}'}$ và $P := (\mathcal{B} \to \mathcal{B}')$, ta có

$$|A' - \lambda I_n| \;=\; |P^{-1}AP - \lambda I_n|$$

Định nghĩa. Cho $f \in End_K(V)$ và $\mathcal{B}$ là một cơ sở của V. Ta đặt $A := [f]_{\mathcal{B}}$, khi đó ***đa thức đặc trưng*** của f được định nghĩa là

$$\boldsymbol{P_f(\lambda)} := \det(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{\lambda I_n}).$$

Nhận xét. *Đa thức đặc trưng của f không phụ thuộc vào cách chọn cơ sở của không gian V.*

Giải thích. Giả sử $\mathcal{B}$ và $\mathcal{B}'$ là hai cơ sở của V. Khi đó

$$[f]_{\mathcal{B}'} = (\mathcal{B} \to \mathcal{B}')^{-1}[f]_{\mathcal{B}}(\mathcal{B} \to \mathcal{B}').$$

Đặt $A := [f]_{\mathcal{B}}$, $A' := [f]_{\mathcal{B}'}$ và $P := (\mathcal{B} \to \mathcal{B}')$, ta có

$$\begin{aligned} |A' - \lambda I_n| &= |P^{-1}AP - \lambda I_n| \\ &= |P^{-1}(A - \lambda I_n)P| \end{aligned}$$

Định nghĩa. Cho $f \in End_K(V)$ và $\mathcal{B}$ là một cơ sở của V. Ta đặt $A := [f]_{\mathcal{B}}$, khi đó ***đa thức đặc trưng*** của f được định nghĩa là

$$\boldsymbol{P_f(\lambda) :=} \det\boldsymbol{(A - \lambda I_n)}.$$

Nhận xét. *Đa thức đặc trưng của f không phụ thuộc vào cách chọn cơ sở của không gian V.*

Giải thích. Giả sử $\mathcal{B}$ và $\mathcal{B}'$ là hai cơ sở của V. Khi đó

$$\boldsymbol{[f]_{\mathcal{B}'} = (\mathcal{B} \to \mathcal{B}')^{-1}[f]_{\mathcal{B}}(\mathcal{B} \to \mathcal{B}')}.$$

Đặt $A := [f]_{\mathcal{B}}$, $A' := [f]_{\mathcal{B}'}$ và $P := (\mathcal{B} \to \mathcal{B}')$, ta có

$$\begin{aligned} |A' - \boldsymbol{\lambda} I_n| &= |P^{-1}AP - \boldsymbol{\lambda} I_n| \\ &= |P^{-1}(A - \boldsymbol{\lambda} I_n)P| \\ &= |P^{-1}||A - \boldsymbol{\lambda} I_n||P| \end{aligned}$$

Định nghĩa. Cho $f \in End_K(V)$ và $\mathcal{B}$ là một cơ sở của V. Ta đặt $A := [f]_{\mathcal{B}}$, khi đó ***đa thức đặc trưng*** của f được định nghĩa là

$$\boldsymbol{P_f(\lambda)} := \det(\boldsymbol{A - \lambda I_n}).$$

Nhận xét. *Đa thức đặc trưng của f không phụ thuộc vào cách chọn cơ sở của không gian V.*

Giải thích. Giả sử $\mathcal{B}$ và $\mathcal{B}'$ là hai cơ sở của V. Khi đó

$$[f]_{\mathcal{B}'} = (\mathcal{B} \to \mathcal{B}')^{-1}[f]_{\mathcal{B}}(\mathcal{B} \to \mathcal{B}').$$

Đặt $A := [f]_{\mathcal{B}}$, $A' := [f]_{\mathcal{B}'}$ và $P := (\mathcal{B} \to \mathcal{B}')$, ta có

$$\begin{aligned} |A' - \lambda I_n| &= |P^{-1}AP - \lambda I_n| \\ &= |P^{-1}(A - \lambda I_n)P| \\ &= |P^{-1}||A - \lambda I_n||P| \\ &= |A - \lambda I_n|. \end{aligned}$$

Ví dụ. Cho toán tử tuyến tính $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ xác định bởi

$$f(x_1, x_2, x_3) = (3x_1 + x_2 + x_3, 2x_1 + 4x_2 + 2x_3, x_1 + x_2 + 3x_3).$$

Tìm đa thức đặc trưng của f?

Ví dụ. Cho toán tử tuyến tính $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ xác định bởi

$$f(x_1, x_2, x_3) = (3x_1 + x_2 + x_3, 2x_1 + 4x_2 + 2x_3, x_1 + x_2 + 3x_3).$$

Tìm đa thức đặc trưng của f?

Giải. Ma trận biểu diễn f theo cơ sở chính tắc là

Ví dụ. Cho toán tử tuyến tính $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ xác định bởi

$$f(x_1, x_2, x_3) = (3x_1 + x_2 + x_3, 2x_1 + 4x_2 + 2x_3, x_1 + x_2 + 3x_3).$$

Tìm đa thức đặc trưng của f?

Giải. Ma trận biểu diễn f theo cơ sở chính tắc là

$$A = [f]_{\mathcal{B}_0} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Ví dụ. Cho toán tử tuyến tính $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ xác định bởi

$$f(x_1, x_2, x_3) = (3x_1 + x_2 + x_3, 2x_1 + 4x_2 + 2x_3, x_1 + x_2 + 3x_3).$$

Tìm đa thức đặc trưng của f?

Giải. Ma trận biểu diễn f theo cơ sở chính tắc là

$$A = [f]_{\mathcal{B}_0} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Khi đó

$$P_f(\boldsymbol{\lambda})$$

Ví dụ. Cho toán tử tuyến tính $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ xác định bởi

$$f(x_1, x_2, x_3) = (3x_1 + x_2 + x_3, 2x_1 + 4x_2 + 2x_3, x_1 + x_2 + 3x_3).$$

Tìm đa thức đặc trưng của f?

Giải. Ma trận biểu diễn f theo cơ sở chính tắc là

$$A = [f]_{\mathcal{B}_0} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Khi đó

$$P_f(\boldsymbol{\lambda}) = |A - \boldsymbol{\lambda} I_3|$$

Ví dụ. Cho toán tử tuyến tính $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ xác định bởi

$$f(x_1, x_2, x_3) = (3x_1 + x_2 + x_3, 2x_1 + 4x_2 + 2x_3, x_1 + x_2 + 3x_3).$$

Tìm đa thức đặc trưng của f?

Giải. Ma trận biểu diễn f theo cơ sở chính tắc là

$$A = [f]_{\mathcal{B}_0} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Khi đó

$$\begin{aligned} P_f(\lambda) &= |A - \lambda I_3| \\ &= \begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 & 1 \\ 2 & 4-\lambda & 2 \\ 1 & 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} \end{aligned}$$

Ví dụ. Cho toán tử tuyến tính $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ xác định bởi

$$f(x_1, x_2, x_3) = (3x_1 + x_2 + x_3, 2x_1 + 4x_2 + 2x_3, x_1 + x_2 + 3x_3).$$

Tìm đa thức đặc trưng của f?

Giải. Ma trận biểu diễn f theo cơ sở chính tắc là

$$A = [f]_{\mathcal{B}_0} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Khi đó

$$\begin{aligned} P_f(\boldsymbol{\lambda}) &= |A - \boldsymbol{\lambda} I_3| \\ &= \begin{vmatrix} 3-\boldsymbol{\lambda} & 1 & 1 \\ 2 & 4-\boldsymbol{\lambda} & 2 \\ 1 & 1 & 3-\boldsymbol{\lambda} \end{vmatrix} \\ &= -\boldsymbol{\lambda}^3 + 10\boldsymbol{\lambda}^2 - 28\boldsymbol{\lambda} + 24. \end{aligned}$$

Mệnh đề. $\boldsymbol{\lambda}$ *là trị riêng của toán tử* f *khi và chỉ khi nó là nghiệm của phương trình đặc trưng*

$$P_f(t) = 0.$$

Mệnh đề. $\boldsymbol{\lambda}$ *là trị riêng của toán tử f khi và chỉ khi nó là nghiệm của phương trình đặc trưng*

$$P_f(t) = 0.$$

Ví dụ. Cho toán tử tuyến tính $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ xác định bởi

$$f(x_1, x_2) = (x_1 + 2x_2, -x_1 + 4x_2).$$

Tìm trị riêng của f?

Mệnh đề. $\boldsymbol{\lambda}$ *là trị riêng của toán tử f khi và chỉ khi nó là nghiệm của phương trình đặc trưng*

$$P_f(t) = 0.$$

Ví dụ. Cho toán tử tuyến tính $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ xác định bởi

$$f(x_1, x_2) = (x_1 + 2x_2, -x_1 + 4x_2).$$

Tìm trị riêng của f?

Giải. Đa thức đặc trưng của f là

Mệnh đề. $\boldsymbol{\lambda}$ *là trị riêng của toán tử f khi và chỉ khi nó là nghiệm của phương trình đặc trưng*

$$P_f(t) = 0.$$

Ví dụ. Cho toán tử tuyến tính $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ xác định bởi

$$f(x_1, x_2) = (x_1 + 2x_2, -x_1 + 4x_2).$$

Tìm trị riêng của f?

Giải. Đa thức đặc trưng của f là

$$P_f(\boldsymbol{\lambda}) = \boldsymbol{\lambda}^2 - 5\boldsymbol{\lambda} + 6 = (\boldsymbol{\lambda} - 2)(\boldsymbol{\lambda} - 3).$$

Mệnh đề. $\boldsymbol{\lambda}$ *là trị riêng của toán tử f khi và chỉ khi nó là nghiệm của phương trình đặc trưng*

$$P_f(t) = 0.$$

Ví dụ. Cho toán tử tuyến tính $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ xác định bởi

$$f(x_1, x_2) = (x_1 + 2x_2, -x_1 + 4x_2).$$

Tìm trị riêng của f?

Giải. Đa thức đặc trưng của f là

$$P_f(\boldsymbol{\lambda}) = \boldsymbol{\lambda}^2 - 5\boldsymbol{\lambda} + 6 = (\boldsymbol{\lambda} - 2)(\boldsymbol{\lambda} - 3).$$

Như vậy toán tử f có hai trị riêng là $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 3$.

1.2. Không gian riêng

1.2. Không gian riêng

Định nghĩa. Cho $f \in End_K(V)$.

1.2. Không gian riêng

Định nghĩa. Cho $f \in End_K(V)$. Nếu $\boldsymbol{\lambda}$ là một trị riêng của f thì

$$\boldsymbol{E(\lambda) := \{v \in V \mid f(v) = \lambda v\}}$$

là một không gian con của V

1.2. Không gian riêng

Định nghĩa. Cho $f \in End_K(V)$. Nếu $\boldsymbol{\lambda}$ là một trị riêng của f thì

$$\boldsymbol{E(\lambda) := \{v \in V \mid f(v) = \lambda v\}}$$

là một không gian con của V và ta gọi nó là ***không gian riêng*** của f *ứng với trị riêng* $\boldsymbol{\lambda}$.

Định nghĩa. Cho $f \in End_K(V)$. Nếu $\boldsymbol{\lambda}$ là một trị riêng của f thì

$$\boldsymbol{E(\lambda) := \{v \in V \mid f(v) = \lambda v\}}$$

là một không gian con của V và ta gọi nó là ***không gian riêng*** của f *ứng với trị riêng* $\boldsymbol{\lambda}$.

Nhận xét.

$$E(\boldsymbol{\lambda}) = \{v \in V \mid (f - \boldsymbol{\lambda}\mathrm{Id}_V)(v) = 0\}$$

Định nghĩa. Cho $f \in End_K(V)$. Nếu $\boldsymbol{\lambda}$ là một trị riêng của f thì

$$\boldsymbol{E(\lambda) := \{v \in V |\ f(v) = \lambda v\}}$$

là một không gian con của V và ta gọi nó là ***không gian riêng*** của f *ứng với trị riêng* $\boldsymbol{\lambda}$.

Nhận xét.

$$\begin{aligned} E(\boldsymbol{\lambda}) &= \{v \in V \,|\, (f - \boldsymbol{\lambda}\mathrm{Id}_V)(v) = 0\} \\ &= Ker(f - \boldsymbol{\lambda}\mathrm{Id}_V). \end{aligned}$$

1.2. Không gian riêng

Định nghĩa. Cho $f \in End_K(V)$. Nếu $\boldsymbol{\lambda}$ là một trị riêng của f thì

$$\boldsymbol{E(\lambda) := \{v \in V \mid f(v) = \lambda v\}}$$

là một không gian con của V và ta gọi nó là ***không gian riêng*** của f *ứng với trị riêng* $\boldsymbol{\lambda}$.

Nhận xét.

$$\begin{aligned} E(\boldsymbol{\lambda}) &= \{v \in V \mid (f - \boldsymbol{\lambda}\mathrm{Id}_V)(v) = 0\} \\ &= Ker(f - \boldsymbol{\lambda}\mathrm{Id}_V). \end{aligned}$$

Ngoài ra, nếu $f \in End_K(K^n)$ *có ma trận biểu diễn theo cơ sở chính tắc là* A

1.2. Không gian riêng

Định nghĩa. Cho $f \in End_K(V)$. Nếu $\boldsymbol{\lambda}$ là một trị riêng của f thì

$$\boldsymbol{E(\lambda) := \{v \in V \mid f(v) = \lambda v\}}$$

là một không gian con của V và ta gọi nó là ***không gian riêng*** của f *ứng với trị riêng* $\boldsymbol{\lambda}$.

Nhận xét.

$$\begin{aligned} E(\boldsymbol{\lambda}) &= \{v \in V \mid (f - \boldsymbol{\lambda}\mathrm{Id}_V)(v) = 0\} \\ &= Ker(f - \boldsymbol{\lambda}\mathrm{Id}_V). \end{aligned}$$

Ngoài ra, nếu $f \in End_K(K^n)$ *có ma trận biểu diễn theo cơ sở chính tắc là* A *thì* $E(\lambda)$ *chính là không gian nghiệm của hệ phương trình*

$$\boldsymbol{(A - \lambda I_n)X = 0}.$$

Ví dụ. Cho toán tử tuyến tính $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ xác định bởi

$$f(x_1, x_2, x_3) = (3x_1 - 2x_2, -2x_1 + 3x_2, 5x_3).$$

Tìm các trị riêng của f và không gian riêng ứng với các trị riêng này?

Ví dụ. Cho toán tử tuyến tính $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ xác định bởi

$$f(x_1, x_2, x_3) = (3x_1 - 2x_2, -2x_1 + 3x_2, 5x_3).$$

Tìm các trị riêng của f và không gian riêng ứng với các trị riêng này?

Giải. Ma trận biểu diễn f theo cơ sở chính tắc là

Ví dụ. Cho toán tử tuyến tính $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ xác định bởi

$$f(x_1, x_2, x_3) = (3x_1 - 2x_2, -2x_1 + 3x_2, 5x_3).$$

Tìm các trị riêng của f và không gian riêng ứng với các trị riêng này?

Giải. Ma trận biểu diễn f theo cơ sở chính tắc là

$$A = [f]_{\mathcal{B}_0} = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

Ví dụ. Cho toán tử tuyến tính $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ xác định bởi

$$f(x_1, x_2, x_3) = (3x_1 - 2x_2, -2x_1 + 3x_2, 5x_3).$$

Tìm các trị riêng của f và không gian riêng ứng với các trị riêng này?

Giải. Ma trận biểu diễn f theo cơ sở chính tắc là

$$A = [f]_{\mathcal{B}_0} = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

- Đa thức đặc trưng

Ví dụ. Cho toán tử tuyến tính $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ xác định bởi

$$f(x_1, x_2, x_3) = (3x_1 - 2x_2, -2x_1 + 3x_2, 5x_3).$$

Tìm các trị riêng của f và không gian riêng ứng với các trị riêng này?

Giải. Ma trận biểu diễn f theo cơ sở chính tắc là

$$A = [f]_{\mathcal{B}_0} = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

- Đa thức đặc trưng

$$P_f(\boldsymbol{\lambda})$$

Ví dụ. Cho toán tử tuyến tính $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ xác định bởi

$$f(x_1, x_2, x_3) = (3x_1 - 2x_2, -2x_1 + 3x_2, 5x_3).$$

Tìm các trị riêng của f và không gian riêng ứng với các trị riêng này?

Giải. Ma trận biểu diễn f theo cơ sở chính tắc là

$$A = [f]_{\mathcal{B}_0} = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

- Đa thức đặc trưng

$$P_f(\boldsymbol{\lambda}) = |A - \boldsymbol{\lambda} I_3|$$

Ví dụ. Cho toán tử tuyến tính $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ xác định bởi

$$f(x_1, x_2, x_3) = (3x_1 - 2x_2, -2x_1 + 3x_2, 5x_3).$$

Tìm các trị riêng của f và không gian riêng ứng với các trị riêng này?

Giải. Ma trận biểu diễn f theo cơ sở chính tắc là

$$A = [f]_{\mathcal{B}_0} = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

- Đa thức đặc trưng

$$P_f(\boldsymbol{\lambda}) = |A - \boldsymbol{\lambda} I_3| = -(\boldsymbol{\lambda} - 5)^2(\boldsymbol{\lambda} - 1).$$

Ví dụ. Cho toán tử tuyến tính $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ xác định bởi

$$f(x_1, x_2, x_3) = (3x_1 - 2x_2, -2x_1 + 3x_2, 5x_3).$$

Tìm các trị riêng của f và không gian riêng ứng với các trị riêng này?

Giải. Ma trận biểu diễn f theo cơ sở chính tắc là

$$A = [f]_{\mathcal{B}_0} = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

- Đa thức đặc trưng

$$P_f(\boldsymbol{\lambda}) = |A - \boldsymbol{\lambda} I_3| = -(\boldsymbol{\lambda} - 5)^2(\boldsymbol{\lambda} - 1).$$

- Trị riêng

Ví dụ. Cho toán tử tuyến tính $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ xác định bởi

$$f(x_1, x_2, x_3) = (3x_1 - 2x_2, -2x_1 + 3x_2, 5x_3).$$

Tìm các trị riêng của f và không gian riêng ứng với các trị riêng này?

Giải. Ma trận biểu diễn f theo cơ sở chính tắc là

$$A = [f]_{\mathcal{B}_0} = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

- Đa thức đặc trưng

$$P_f(\boldsymbol{\lambda}) = |A - \boldsymbol{\lambda} I_3| = -(\boldsymbol{\lambda} - 5)^2(\boldsymbol{\lambda} - 1).$$

- Trị riêng

$$P_f(\lambda) = 0$$

Ví dụ. Cho toán tử tuyến tính $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ xác định bởi

$$f(x_1, x_2, x_3) = (3x_1 - 2x_2, -2x_1 + 3x_2, 5x_3).$$

Tìm các trị riêng của f và không gian riêng ứng với các trị riêng này?

Giải. Ma trận biểu diễn f theo cơ sở chính tắc là

$$A = [f]_{\mathcal{B}_0} = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

- Đa thức đặc trưng

$$P_f(\boldsymbol{\lambda}) = |A - \boldsymbol{\lambda} I_3| = -(\boldsymbol{\lambda} - 5)^2(\boldsymbol{\lambda} - 1).$$

- Trị riêng

$$P_f(\lambda) = 0 \Leftrightarrow \lambda = 5 \text{ (bội 2)}, \ \lambda = 1 \text{ (bội 1)}.$$

Ví dụ. Cho toán tử tuyến tính $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ xác định bởi

$$f(x_1, x_2, x_3) = (3x_1 - 2x_2, -2x_1 + 3x_2, 5x_3).$$

Tìm các trị riêng của f và không gian riêng ứng với các trị riêng này?

Giải. Ma trận biểu diễn f theo cơ sở chính tắc là

$$A = [f]_{\mathcal{B}_0} = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

- Đa thức đặc trưng

$$P_f(\boldsymbol{\lambda}) = |A - \boldsymbol{\lambda} I_3| = -(\boldsymbol{\lambda} - 5)^2(\boldsymbol{\lambda} - 1).$$

- Trị riêng

$$P_f(\lambda) = 0 \Leftrightarrow \lambda = 5 \text{ (bội 2)},\ \lambda = 1 \text{ (bội 1)}.$$

Vậy f có 2 trị riêng là $\lambda_1 = 5$ (bội 2), $\lambda_2 = 1$ (bội 1).

- Không gian riêng

- Không gian riêng

- Với $\lambda_1 = 5$,

- Không gian riêng

- Với $\lambda_1 = 5$, không gian riêng $E(5)$ là không gian nghiệm của hệ

$$(A - 5I_3)X = 0$$

- Không gian riêng

- Với $\lambda_1 = 5$, không gian riêng $E(5)$ là không gian nghiệm của hệ

$$(A - 5I_3)X = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -2 & -2 & 0 \\ -2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- Không gian riêng

- Với $\lambda_1 = 5$, không gian riêng $E(5)$ là không gian nghiệm của hệ

$$(A - 5I_3)X = \color{red}{0} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -2 & -2 & 0 \\ -2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -2x_1 - 2x_2 = 0; \\ -2x_1 - 2x_2 = 0. \end{cases} \qquad (1)$$

- Không gian riêng

- Với $\lambda_1 = 5$, không gian riêng $E(5)$ là không gian nghiệm của hệ

$$(A - 5I_3)X = {\color{red}0} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -2 & -2 & 0 \\ -2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -2x_1 - 2x_2 = 0; \\ -2x_1 - 2x_2 = 0. \end{cases} \qquad (1)$$

Giải hệ (1) ta tìm được nghiệm tổng quát

- Không gian riêng

- Với $\lambda_1 = 5$, không gian riêng $E(5)$ là không gian nghiệm của hệ

$$(A - 5I_3)X = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -2 & -2 & 0 \\ -2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -2x_1 - 2x_2 = 0; \\ -2x_1 - 2x_2 = 0. \end{cases} \qquad (1)$$

Giải hệ (1) ta tìm được nghiệm tổng quát

$$(x_1, x_2, x_3) = (-t, t, s), \quad t, s \in \mathbb{R}.$$

- Không gian riêng

- Với $\lambda_1 = 5$, không gian riêng $E(5)$ là không gian nghiệm của hệ

$$(A - 5I_3)X = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -2 & -2 & 0 \\ -2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -2x_1 - 2x_2 = 0; \\ -2x_1 - 2x_2 = 0. \end{cases} \qquad (1)$$

Giải hệ (1) ta tìm được nghiệm tổng quát

$$(x_1, x_2, x_3) = (-t, t, s), \quad t, s \in \mathbb{R}.$$

Suy ra $E(5)$ có $\dim E(5) = 2$

- Không gian riêng

- Với $\lambda_1 = 5$, không gian riêng $E(5)$ là không gian nghiệm của hệ

$$(A - 5I_3)X = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -2 & -2 & 0 \\ -2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -2x_1 - 2x_2 = 0; \\ -2x_1 - 2x_2 = 0. \end{cases} \qquad (1)$$

Giải hệ (1) ta tìm được nghiệm tổng quát

$$(x_1, x_2, x_3) = (-t, t, s), \quad t, s \in \mathbb{R}.$$

Suy ra $E(5)$ có $\dim E(5) = 2$ với cơ sở

$$\mathcal{B}_1 = \{(-1, 1, 0); (0, 0, 1)\}.$$

- Với $\lambda_2 = 1$,

- Với $\lambda_2 = 1$, không gian $E(1)$ là không gian nghiệm của hệ

- Với $\lambda_2 = 1$, không gian $E(1)$ là không gian nghiệm của hệ

$$(A - I_3)X = 0$$

- Với $\lambda_2 = 1$, không gian $E(1)$ là không gian nghiệm của hệ

$$(A - I_3)X = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- Với $\lambda_2 = 1$, không gian $E(1)$ là không gian nghiệm của hệ

$$(A - I_3)X = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} 2x_1 & - & 2x_2 & & & = & 0; \\ -2x_1 & + & 2x_2 & & & = & 0; \\ & & & & 4x_3 & = & 0. \end{array} \right. \qquad (2)$$

- Với $\lambda_2 = 1$, không gian $E(1)$ là không gian nghiệm của hệ

$$(A - I_3)X = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} 2x_1 & - & 2x_2 & & & = & 0; \\ -2x_1 & + & 2x_2 & & & = & 0; \\ & & & & 4x_3 & = & 0. \end{array} \right. \tag{2}$$

Giải hệ (2) ta tìm được nghiệm tổng quát

- Với $\lambda_2 = 1$, không gian $E(1)$ là không gian nghiệm của hệ

$$(A - I_3)X = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} 2x_1 & - & 2x_2 & & & = & 0; \\ -2x_1 & + & 2x_2 & & & = & 0; \\ & & & & 4x_3 & = & 0. \end{array} \right. \qquad (2)$$

Giải hệ (2) ta tìm được nghiệm tổng quát

$$(x_1, x_2, x_3) = (t, t, 0), \quad t \in \mathbb{R}.$$

- Với $\lambda_2 = 1$, không gian $E(1)$ là không gian nghiệm của hệ

$$(A - I_3)X = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} 2x_1 & - & 2x_2 & & & = & 0; \\ -2x_1 & + & 2x_2 & & & = & 0; \\ & & & & 4x_3 & = & 0. \end{array} \right. \tag{2}$$

Giải hệ (2) ta tìm được nghiệm tổng quát

$$(x_1, x_2, x_3) = (t, t, 0), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Suy ra $E(1)$ có $\dim E(1) = 1$

- Với $\lambda_2 = 1$, không gian $E(1)$ là không gian nghiệm của hệ

$$(A - I_3)X = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} 2x_1 & - & 2x_2 & & & = & 0; \\ -2x_1 & + & 2x_2 & & & = & 0; \\ & & & & 4x_3 & = & 0. \end{array} \right. \tag{2}$$

Giải hệ (2) ta tìm được nghiệm tổng quát

$$(x_1, x_2, x_3) = (t, t, 0), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Suy ra $E(1)$ có $\dim E(1) = 1$ với cơ sở

$$\mathcal{B}_2 = \{(1, 1, 0)\}.$$

Nhắc lại. Cho $W_1, W_2, \ldots, W_n$ là các không gian con của V.

Nhắc lại. Cho $W_1, W_2, \ldots, W_n$ là các không gian con của V. Ta nói W là *không gian tổng trực tiếp* của W_1, W_2, $\ldots$, W_n,

Nhắc lại. Cho $W_1, W_2, \ldots, W_n$ là các không gian con của V. Ta nói W là *không gian tổng trực tiếp* của W_1, W_2, $\ldots$, W_n, ký hiệu

$$W = W_1 \oplus W_2 \oplus \ldots \oplus W_n$$

Nhắc lại. Cho $W_1, W_2, \ldots, W_n$ là các không gian con của V. Ta nói W là *không gian tổng trực tiếp* của W_1, W_2, $\ldots$, W_n, ký hiệu

$$W = W_1 \oplus W_2 \oplus \ldots \oplus W_n$$

nếu $W = W_1 + W_2 + \cdots + W_n$

Nhắc lại. Cho $W_1, W_2, \ldots, W_n$ là các không gian con của V. Ta nói W là *không gian tổng trực tiếp* của W_1, W_2, $\ldots$, W_n, ký hiệu

$$W = W_1 \oplus W_2 \oplus \ldots \oplus W_n$$

nếu $W = W_1 + W_2 + \cdots + W_n$ và với mọi $i \in \overline{1, n}$

$$W_i \bigcap \Big(\sum_{i \neq j = 1}^{n} W_j \Big) = \{0\}.$$

Nhắc lại. Cho $W_1, W_2, \dots, W_n$ là các không gian con của V. Ta nói W là *không gian tổng trực tiếp* của W_1, W_2, $\dots$, W_n, ký hiệu

$$W = W_1 \oplus W_2 \oplus \dots \oplus W_n$$

nếu $W = W_1 + W_2 + \cdots + W_n$ và với mọi $i \in \overline{1, n}$

$$W_i \bigcap \Big(\sum_{i \neq j = 1}^{n} W_j \Big) = \{0\}.$$

Mệnh đề. *Cho $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ là các trị riêng khác nhau của toán tử tuyến tính f.*

Nhắc lại. Cho $W_1, W_2, \ldots, W_n$ là các không gian con của V. Ta nói W là *không gian tổng trực tiếp* của W_1, W_2, ..., W_n, ký hiệu

$$W = W_1 \oplus W_2 \oplus \ldots \oplus W_n$$

nếu $W = W_1 + W_2 + \cdots + W_n$ và với mọi $i \in \overline{1, n}$

$$W_i \bigcap \Big(\sum_{i \neq j = 1}^{n} W_j \Big) = \{0\}.$$

Mệnh đề. *Cho $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ là các trị riêng khác nhau của toán tử tuyến tính f. Khi đó $E(\lambda_1) + \cdots + E(\lambda_p)$ là một tổng trực tiếp.*

Nhắc lại. Cho $W_1, W_2, \ldots, W_n$ là các không gian con của V. Ta nói W là *không gian tổng trực tiếp* của W_1, W_2, $\ldots$, W_n, ký hiệu

$$W = W_1 \oplus W_2 \oplus \ldots \oplus W_n$$

nếu $W = W_1 + W_2 + \cdots + W_n$ và với mọi $i \in \overline{1, n}$

$$W_i \bigcap \Big(\sum_{i \neq j = 1}^{n} W_j \Big) = \{0\}.$$

Mệnh đề. *Cho $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ là các trị riêng khác nhau của toán tử tuyến tính f. Khi đó $E(\lambda_1) + \cdots + E(\lambda_p)$ là một tổng trực tiếp.*

Mệnh đề. *Cho $f \in End_K(V)$. Nếu $\boldsymbol{\lambda}$ là một trị riêng bội m của f thì* $\dim E(\boldsymbol{\lambda}) \leq m$.

Nhắc lại. Cho $W_1, W_2, \ldots, W_n$ là các không gian con của V. Ta nói W là *không gian tổng trực tiếp* của W_1, W_2, $\ldots$, W_n, ký hiệu

$$W = W_1 \oplus W_2 \oplus \ldots \oplus W_n$$

nếu $W = W_1 + W_2 + \cdots + W_n$ và với mọi $i \in \overline{1, n}$

$$W_i \bigcap \Big(\sum_{i \neq j = 1}^{n} W_j \Big) = \{0\}.$$

Mệnh đề. *Cho $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ là các trị riêng khác nhau của toán tử tuyến tính f. Khi đó $E(\lambda_1) + \cdots + E(\lambda_p)$ là một tổng trực tiếp.*

Mệnh đề. *Cho $f \in End_K(V)$. Nếu $\boldsymbol{\lambda}$ là một trị riêng bội m của f thì* $\dim E(\boldsymbol{\lambda}) \leq m$.

Chứng minh. Giả sử $\dim E(\boldsymbol{\lambda}) > m$.

Nhắc lại. Cho $W_1, W_2, \ldots, W_n$ là các không gian con của V. Ta nói W là *không gian tổng trực tiếp* của W_1, W_2, ..., W_n, ký hiệu

$$W = W_1 \oplus W_2 \oplus \ldots \oplus W_n$$

nếu $W = W_1 + W_2 + \cdots + W_n$ và với mọi $i \in \overline{1, n}$

$$W_i \bigcap \Big(\sum_{i \neq j = 1}^{n} W_j \Big) = \{0\}.$$

Mệnh đề. *Cho $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ là các trị riêng khác nhau của toán tử tuyến tính f. Khi đó $E(\lambda_1) + \cdots + E(\lambda_p)$ là một tổng trực tiếp.*

Mệnh đề. *Cho $f \in End_K(V)$. Nếu $\boldsymbol{\lambda}$ là một trị riêng bội m của f thì* $\dim E(\boldsymbol{\lambda}) \leq m$.

Chứng minh. Giả sử $\dim E(\boldsymbol{\lambda}) > m$. Khi đó tồn tại $v_1, \ldots, v_m, v_{m+1}$ là các vectơ độc lập tuyến tính của $E(\boldsymbol{\lambda})$.

Bổ túc họ các vectơ này thành một cơ sở $\mathcal{B}$ của V:

$$\mathcal{B} = (v_1, \ldots, v_m, v_{m+1}, w_{m+2}, \ldots, w_n).$$

Bổ túc họ các vectơ này thành một cơ sở $\mathcal{B}$ của V:

$$\mathcal{B} = (v_1, \ldots, v_m, v_{m+1}, w_{m+2}, \ldots, w_n).$$

Ta có

$$[f]_{\mathcal{B}} = \left(\begin{array}{ccc|c} \boldsymbol{\lambda} & & 0 & \\ & \ddots & & A \\ 0 & & \boldsymbol{\lambda} & \\ \hline & 0 & & B \end{array}\right).$$

Bổ túc họ các vectơ này thành một cơ sở $\mathcal{B}$ của V:

$$\mathcal{B} = (v_1, \ldots, v_m, v_{m+1}, w_{m+2}, \ldots, w_n).$$

Ta có

$$[f]_{\mathcal{B}} = \left(\begin{array}{ccc|c} \boldsymbol{\lambda} & & 0 & \\ & \ddots & & A \\ 0 & & \boldsymbol{\lambda} & \\ \hline & 0 & & B \end{array}\right).$$

Từ đó suy ra

$$P_f(t) = \det \left(\begin{array}{ccc|c} \boldsymbol{\lambda} - t & & 0 & \\ & \ddots & & A \\ 0 & & \boldsymbol{\lambda} - t & \\ \hline & 0 & & B - tI_{n-m-1} \end{array}\right)$$

Bổ túc họ các vectơ này thành một cơ sở $\mathcal{B}$ của V:

$$\mathcal{B} = (v_1, \ldots, v_m, v_{m+1}, w_{m+2}, \ldots, w_n).$$

Ta có

$$[f]_{\mathcal{B}} = \left(\begin{array}{ccc|c} \boldsymbol{\lambda} & & 0 & \\ & \ddots & & A \\ 0 & & \boldsymbol{\lambda} & \\ \hline & 0 & & B \end{array}\right).$$

Từ đó suy ra

$$\begin{aligned} P_f(t) &= \det \left(\begin{array}{ccc|c} \boldsymbol{\lambda} - t & & 0 & \\ & \ddots & & A \\ 0 & & \boldsymbol{\lambda} - t & \\ \hline & 0 & & B - tI_{n-m-1} \end{array}\right) \\ &= (\boldsymbol{\lambda} - t)^{m+1} \det(B - tI_{n-m-1}). \end{aligned}$$

Bổ túc họ các vectơ này thành một cơ sở $\mathcal{B}$ của V:

$$\mathcal{B} = (v_1, \ldots, v_m, v_{m+1}, w_{m+2}, \ldots, w_n).$$

Ta có

$$[f]_{\mathcal{B}} = \left(\begin{array}{ccc|c} \boldsymbol{\lambda} & & 0 & \\ & \ddots & & A \\ 0 & & \boldsymbol{\lambda} & \\ \hline & 0 & & B \end{array}\right).$$

Từ đó suy ra

$$\begin{aligned} P_f(t) &= \det \left(\begin{array}{ccc|c} \boldsymbol{\lambda} - t & & 0 & \\ & \ddots & & A \\ 0 & & \boldsymbol{\lambda} - t & \\ \hline & 0 & & B - tI_{n-m-1} \end{array}\right) \\ &= (\boldsymbol{\lambda} - t)^{m+1} \det(B - tI_{n-m-1}). \end{aligned}$$

Suy ra $\boldsymbol{\lambda}$ là trị riêng bội lớn hơn hoặc bằng $m+1$ (mâu thuẫn). ∎

1.3. Toán tử và ma trận chéo hóa được

Toán tử chéo hóa được

1.3. Toán tử và ma trận chéo hóa được

Toán tử chéo hóa được

Định nghĩa. Cho $f \in End_K(V)$.

1.3. Toán tử và ma trận chéo hóa được

Toán tử chéo hóa được

Định nghĩa. Cho $f \in End_K(V)$. Toán tử f được gọi là ***chéo hóa được*** nếu tồn tại một cơ sở $\mathcal{B}$ của V sao cho $[f]_{\mathcal{B}}$ là ma trận đường chéo.

Định nghĩa. Cho $f \in End_K(V)$. Toán tử f được gọi là ***chéo hóa được*** nếu tồn tại một cơ sở $\mathcal{B}$ của V sao cho $[f]_{\mathcal{B}}$ là ma trận đường chéo.

Định lý. *Toán tử tuyến tính $f \in End_K(V)$ chéo hóa được khi và chỉ khi tồn tại một cơ sở của V gồm toàn các vectơ riêng của f.*

Định nghĩa. Cho $f \in End_K(V)$. Toán tử f được gọi là ***chéo hóa được*** nếu tồn tại một cơ sở $\mathcal{B}$ của V sao cho $[f]_{\mathcal{B}}$ là ma trận đường chéo.

Định lý. *Toán tử tuyến tính $f \in End_K(V)$ chéo hóa được khi và chỉ khi tồn tại một cơ sở của V gồm toàn các vectơ riêng của f.*

Chứng minh. **($\Rightarrow$)** Giả sử f chéo hóa được,

1.3. Toán tử và ma trận chéo hóa được

Toán tử chéo hóa được

Định nghĩa. Cho $f \in End_K(V)$. Toán tử f được gọi là ***chéo hóa được*** nếu tồn tại một cơ sở $\mathcal{B}$ của V sao cho $[f]_{\mathcal{B}}$ là ma trận đường chéo.

Định lý. *Toán tử tuyến tính $f \in End_K(V)$ chéo hóa được khi và chỉ khi tồn tại một cơ sở của V gồm toàn các vectơ riêng của f.*

Chứng minh. ($\Rightarrow$) Giả sử f chéo hóa được, nghĩa là tồn tại một cơ sở $\mathcal{B} = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ sao cho $[f]_{\mathcal{B}} = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$.

Định nghĩa. Cho $f \in End_K(V)$. Toán tử f được gọi là ***chéo hóa được*** nếu tồn tại một cơ sở $\mathcal{B}$ của V sao cho $[f]_{\mathcal{B}}$ là ma trận đường chéo.

Định lý. *Toán tử tuyến tính $f \in End_K(V)$ chéo hóa được khi và chỉ khi tồn tại một cơ sở của V gồm toàn các vectơ riêng của f.*

Chứng minh. ($\Rightarrow$) Giả sử f chéo hóa được, nghĩa là tồn tại một cơ sở $\mathcal{B} = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ sao cho $[f]_{\mathcal{B}} = \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$. Khi đó,

$$f(v_1) = \lambda_1 v_1,$$

Định nghĩa. Cho $f \in End_K(V)$. Toán tử f được gọi là ***chéo hóa được*** nếu tồn tại một cơ sở $\mathcal{B}$ của V sao cho $[f]_{\mathcal{B}}$ là ma trận đường chéo.

Định lý. *Toán tử tuyến tính $f \in End_K(V)$ chéo hóa được khi và chỉ khi tồn tại một cơ sở của V gồm toàn các vectơ riêng của f.*

Chứng minh. **($\Rightarrow$)** Giả sử f chéo hóa được, nghĩa là tồn tại một cơ sở $\mathcal{B} = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ sao cho $[f]_{\mathcal{B}} = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$. Khi đó,

$$f(v_1) = \lambda_1 v_1,\ f(v_2) = \lambda_2 v_2,$$

Định nghĩa. Cho $f \in End_K(V)$. Toán tử f được gọi là ***chéo hóa được*** nếu tồn tại một cơ sở $\mathcal{B}$ của V sao cho $[f]_{\mathcal{B}}$ là ma trận đường chéo.

Định lý. *Toán tử tuyến tính $f \in End_K(V)$ chéo hóa được khi và chỉ khi tồn tại một cơ sở của V gồm toàn các vectơ riêng của f.*

Chứng minh. **($\Rightarrow$)** Giả sử f chéo hóa được, nghĩa là tồn tại một cơ sở $\mathcal{B} = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ sao cho $[f]_{\mathcal{B}} = \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$. Khi đó,

$$f(v_1) = \lambda_1 v_1,\ f(v_2) = \lambda_2 v_2,\ \ldots,\ f(v_n) = \lambda_n v_n,$$

Toán tử chéo hóa được

Định nghĩa. Cho $f \in End_K(V)$. Toán tử f được gọi là ***chéo hóa được*** nếu tồn tại một cơ sở $\mathcal{B}$ của V sao cho $[f]_{\mathcal{B}}$ là ma trận đường chéo.

Định lý. *Toán tử tuyến tính $f \in End_K(V)$ chéo hóa được khi và chỉ khi tồn tại một cơ sở của V gồm toàn các vectơ riêng của f.*

Chứng minh. (⇒) Giả sử f chéo hóa được, nghĩa là tồn tại một cơ sở $\mathcal{B} = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ sao cho $[f]_{\mathcal{B}} = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$. Khi đó,

$$f(v_1) = \lambda_1 v_1,\ f(v_2) = \lambda_2 v_2,\ \ldots,\ f(v_n) = \lambda_n v_n,$$

nghĩa là $v_1, v_2, \ldots, v_n$ đều là các vectơ riêng của f.

(⇐) Giả sử $\mathcal{B} = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ là cơ sở gồm toàn các vectơ riêng của f.

($\Leftarrow$) Giả sử $\mathcal{B} = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ là cơ sở gồm toàn các vectơ riêng của f. Khi đó

$$f(v_1) = \lambda_1 v_1,\ f(v_1) = \lambda_2 v_2, \ldots, f(v_n) = \lambda_n v_n.$$

($\Leftarrow$) Giả sử $\mathcal{B} = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ là cơ sở gồm toàn các vectơ riêng của f. Khi đó

$$f(v_1) = \lambda_1 v_1,\ f(v_1) = \lambda_2 v_2, \ldots, f(v_n) = \lambda_n v_n.$$

Do đó

$$[f]_{\mathcal{B}} = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n).$$

(⇐) Giả sử $\mathcal{B} = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ là cơ sở gồm toàn các vectơ riêng của f. Khi đó

$$f(v_1) = \lambda_1 v_1,\ f(v_1) = \lambda_2 v_2, \ldots, f(v_n) = \lambda_n v_n.$$

Do đó

$$[f]_{\mathcal{B}} = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n).$$

Định lý. *Toán tử tuyến tính $f \in End_K(V)$ chéo hóa được khi và chỉ khi các điều kiện dưới đây được thỏa*

($\Leftarrow$) Giả sử $\mathcal{B} = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ là cơ sở gồm toàn các vectơ riêng của f. Khi đó

$$f(v_1) = \lambda_1 v_1,\ f(v_1) = \lambda_2 v_2, \ldots, f(v_n) = \lambda_n v_n.$$

Do đó

$$[f]_{\mathcal{B}} = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n).$$

Định lý. *Toán tử tuyến tính $f \in End_K(V)$ chéo hóa được khi và chỉ khi các điều kiện dưới đây được thỏa*

(*i*) $P_f(\boldsymbol{\lambda})$ *phân rã trên* K, *nghĩa là* $P_f(\boldsymbol{\lambda})$ *có thể phân tích thành dạng*

$$\boldsymbol{P_f(\lambda) = (-1)^n(\lambda - \lambda_1)^{m_1} \ldots (\lambda - \lambda_p)^{m_p}}$$

với $\lambda_1, \ldots, \lambda_p \in K$ *và* $m_1 + \cdots + m_p = n$.

($\Leftarrow$) Giả sử $\mathcal{B} = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ là cơ sở gồm toàn các vectơ riêng của f. Khi đó

$$f(v_1) = \lambda_1 v_1,\ f(v_1) = \lambda_2 v_2, \ldots, f(v_n) = \lambda_n v_n.$$

Do đó

$$[f]_{\mathcal{B}} = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n).$$

Định lý. *Toán tử tuyến tính $f \in End_K(V)$ chéo hóa được khi và chỉ khi các điều kiện dưới đây được thỏa*

(i) $P_f(\lambda)$ *phân rã trên* K*, nghĩa là* $P_f(\lambda)$ *có thể phân tích thành dạng*

$$\boldsymbol{P_f(\lambda) = (-1)^n(\lambda - \lambda_1)^{m_1} \ldots (\lambda - \lambda_p)^{m_p}}$$

với $\lambda_1, \ldots, \lambda_p \in K$ *và* $m_1 + \cdots + m_p = n.$

(ii) $\forall i \in \overline{1, p},\ \dim \boldsymbol{E(\lambda_i) = m_i}.$

($\Leftarrow$) Giả sử $\mathcal{B} = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ là cơ sở gồm toàn các vectơ riêng của f. Khi đó

$$f(v_1) = \lambda_1 v_1,\ f(v_1) = \lambda_2 v_2, \ldots, f(v_n) = \lambda_n v_n.$$

Do đó

$$[f]_{\mathcal{B}} = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n).$$

Định lý. *Toán tử tuyến tính $f \in End_K(V)$ chéo hóa được khi và chỉ khi các điều kiện dưới đây được thỏa*

(i) *$P_f(\boldsymbol{\lambda})$ phân rã trên K, nghĩa là $P_f(\boldsymbol{\lambda})$ có thể phân tích thành dạng*

$$\boldsymbol{P_f(\lambda) = (-1)^n(\lambda - \lambda_1)^{m_1} \ldots (\lambda - \lambda_p)^{m_p}}$$

với $\lambda_1, \ldots, \lambda_p \in K$ và $m_1 + \cdots + m_p = n$.

(ii) $\forall i \in \overline{1,p}$, $\dim \boldsymbol{E(\lambda_i) = m_i}$.

Hệ quả. *Nếu f có n trị riêng khác nhau thì f chéo hóa được.*

Ví dụ. Xét toán tử tuyến tính $f \in End_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^3)$ được xác định bởi

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + 2x_2 - 2x_3, 3x_1 + 2x_2 - 4x_3, 2x_1 - x_2).$$

Hỏi f có chéo hóa được không?

Ví dụ. Xét toán tử tuyến tính $f \in End_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^3)$ được xác định bởi

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + 2x_2 - 2x_3, 3x_1 + 2x_2 - 4x_3, 2x_1 - x_2).$$

Hỏi f có chéo hóa được không?

Giải. Ma trận biểu diễn f theo cơ sở chính tắc là

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 3 & 2 & -4 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ví dụ. Xét toán tử tuyến tính $f \in End_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^3)$ được xác định bởi

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + 2x_2 - 2x_3, 3x_1 + 2x_2 - 4x_3, 2x_1 - x_2).$$

Hỏi f có chéo hóa được không?

Giải. Ma trận biểu diễn f theo cơ sở chính tắc là

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 3 & 2 & -4 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Đa thức đặc trưng của f là $P_f(\boldsymbol{\lambda}) = |A - \boldsymbol{\lambda} I_3|$

Ví dụ. Xét toán tử tuyến tính $f \in End_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^3)$ được xác định bởi

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + 2x_2 - 2x_3, 3x_1 + 2x_2 - 4x_3, 2x_1 - x_2).$$

Hỏi f có chéo hóa được không?

Giải. Ma trận biểu diễn f theo cơ sở chính tắc là

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 3 & 2 & -4 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Đa thức đặc trưng của f là $P_f(\lambda) = |A - \lambda I_3| = (1 - \lambda)(\lambda^2 - 2\lambda - 6)$.

Ví dụ. Xét toán tử tuyến tính $f \in End_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^3)$ được xác định bởi

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + 2x_2 - 2x_3, 3x_1 + 2x_2 - 4x_3, 2x_1 - x_2).$$

Hỏi f có chéo hóa được không?

Giải. Ma trận biểu diễn f theo cơ sở chính tắc là

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 3 & 2 & -4 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Đa thức đặc trưng của f là $P_f(\boldsymbol{\lambda}) = |A - \boldsymbol{\lambda} I_3| = (1 - \boldsymbol{\lambda})(\boldsymbol{\lambda}^2 - 2\boldsymbol{\lambda} - 6)$.

Suy ra f có 3 giá trị riêng khác nhau là

$$\lambda_1 = 1, \lambda_2 = \frac{1 + \sqrt{7}}{2}, \lambda_3 = \frac{1 - \sqrt{7}}{2}.$$

Ví dụ. Xét toán tử tuyến tính $f \in End_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^3)$ được xác định bởi

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + 2x_2 - 2x_3, 3x_1 + 2x_2 - 4x_3, 2x_1 - x_2).$$

Hỏi f có chéo hóa được không?

Giải. Ma trận biểu diễn f theo cơ sở chính tắc là

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 3 & 2 & -4 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Đa thức đặc trưng của f là $P_f(\boldsymbol{\lambda}) = |A - \boldsymbol{\lambda} I_3| = (1 - \boldsymbol{\lambda})(\boldsymbol{\lambda}^2 - 2\boldsymbol{\lambda} - 6)$.

Suy ra f có 3 giá trị riêng khác nhau là

$$\lambda_1 = 1, \lambda_2 = \frac{1 + \sqrt{7}}{2}, \lambda_3 = \frac{1 - \sqrt{7}}{2}.$$

Như vậy f chéo hóa được.

Thuật toán chéo hóa toán tử

Thuật toán chéo hóa toán tử

Bước 1. Chọn một cơ sở bất kỳ $\mathcal{B}$ của V (thông thường là cơ sở chính tắc).

Thuật toán chéo hóa toán tử

Bước 1. Chọn một cơ sở bất kỳ $\mathcal{B}$ của V (thông thường là cơ sở chính tắc). Lập $A = [f]_{\mathcal{B}}$.

Thuật toán chéo hóa toán tử

Bước 1. Chọn một cơ sở bất kỳ $\mathcal{B}$ của V (thông thường là cơ sở chính tắc). Lập $A = [f]_{\mathcal{B}}$.

Bước 2. Tìm đa thức đặc trưng $P_f(\boldsymbol{\lambda}) = |A - \boldsymbol{\lambda} I|$.

Thuật toán chéo hóa toán tử

Bước 1. Chọn một cơ sở bất kỳ $\mathcal{B}$ của V (thông thường là cơ sở chính tắc). Lập $A = [f]_{\mathcal{B}}$.

Bước 2. Tìm đa thức đặc trưng $P_f(\boldsymbol{\lambda}) = |A - \boldsymbol{\lambda} I|$.

- Nếu $P_f(\boldsymbol{\lambda})$ không phân rã thì f không chéo hóa được và thuật toán kết thúc.

Thuật toán chéo hóa toán tử

Bước 1. Chọn một cơ sở bất kỳ $\mathcal{B}$ của V (thông thường là cơ sở chính tắc). Lập $A = [f]_{\mathcal{B}}$.

Bước 2. Tìm đa thức đặc trưng $P_f(\boldsymbol{\lambda}) = |A - \boldsymbol{\lambda} I|$.

- Nếu $P_f(\boldsymbol{\lambda})$ không phân rã thì f không chéo hóa được và thuật toán kết thúc.
- Ngược lại, chuyển sang bước tiếp theo.

Thuật toán chéo hóa toán tử

Bước 1. Chọn một cơ sở bất kỳ $\mathcal{B}$ của V (thông thường là cơ sở chính tắc). Lập $A = [f]_{\mathcal{B}}$.

Bước 2. Tìm đa thức đặc trưng $P_f(\boldsymbol{\lambda}) = |A - \boldsymbol{\lambda} I|$.

- Nếu $P_f(\boldsymbol{\lambda})$ không phân rã thì f không chéo hóa được và thuật toán kết thúc.
- Ngược lại, chuyển sang bước tiếp theo.

Bước 3. Tìm tất cả các nghiệm $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ của $P_f(\boldsymbol{\lambda}) = 0$ và các số bội $m_1, \ldots, m_p$ của chúng.

Thuật toán chéo hóa toán tử

Bước 1. Chọn một cơ sở bất kỳ $\mathcal{B}$ của V (thông thường là cơ sở chính tắc). Lập $A = [f]_{\mathcal{B}}$.

Bước 2. Tìm đa thức đặc trưng $P_f(\boldsymbol{\lambda}) = |A - \boldsymbol{\lambda} I|$.

- Nếu $P_f(\boldsymbol{\lambda})$ không phân rã thì f không chéo hóa được và thuật toán kết thúc.
- Ngược lại, chuyển sang bước tiếp theo.

Bước 3. Tìm tất cả các nghiệm $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ của $P_f(\boldsymbol{\lambda}) = 0$ và các số bội $m_1, \ldots, m_p$ của chúng. Đối với mỗi $i \in \overline{1, p}$, tìm $\dim E(\lambda_i)$.

Thuật toán chéo hóa toán tử

Bước 1. Chọn một cơ sở bất kỳ $\mathcal{B}$ của V (thông thường là cơ sở chính tắc). Lập $A = [f]_{\mathcal{B}}$.

Bước 2. Tìm đa thức đặc trưng $P_f(\boldsymbol{\lambda}) = |A - \boldsymbol{\lambda} I|$.

- Nếu $P_f(\boldsymbol{\lambda})$ không phân rã thì f không chéo hóa được và thuật toán kết thúc.
- Ngược lại, chuyển sang bước tiếp theo.

Bước 3. Tìm tất cả các nghiệm $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ của $P_f(\boldsymbol{\lambda}) = 0$ và các số bội $m_1, \ldots, m_p$ của chúng. Đối với mỗi $i \in \overline{1,p}$, tìm $\dim E(\lambda_i)$.

- Nếu tồn tại một $i \in \overline{1,p}$ sao cho $\dim E(\lambda_i) < m_i$

Thuật toán chéo hóa toán tử

Bước 1. Chọn một cơ sở bất kỳ $\mathcal{B}$ của V (thông thường là cơ sở chính tắc). Lập $A = [f]_{\mathcal{B}}$.

Bước 2. Tìm đa thức đặc trưng $P_f(\boldsymbol{\lambda}) = |A - \boldsymbol{\lambda} I|$.

- Nếu $P_f(\boldsymbol{\lambda})$ không phân rã thì f không chéo hóa được và thuật toán kết thúc.
- Ngược lại, chuyển sang bước tiếp theo.

Bước 3. Tìm tất cả các nghiệm $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ của $P_f(\boldsymbol{\lambda}) = 0$ và các số bội $m_1, \ldots, m_p$ của chúng. Đối với mỗi $i \in \overline{1,p}$, tìm $\dim E(\lambda_i)$.

- Nếu tồn tại một $i \in \overline{1,p}$ sao cho $\dim E(\lambda_i) < m_i$ thì f không chéo hóa được và thuật toán kết thúc.

Thuật toán chéo hóa toán tử

Bước 1. Chọn một cơ sở bất kỳ $\mathcal{B}$ của V (thông thường là cơ sở chính tắc). Lập $A = [f]_{\mathcal{B}}$.

Bước 2. Tìm đa thức đặc trưng $P_f(\boldsymbol{\lambda}) = |A - \boldsymbol{\lambda} I|$.

- Nếu $P_f(\boldsymbol{\lambda})$ không phân rã thì f không chéo hóa được và thuật toán kết thúc.
- Ngược lại, chuyển sang bước tiếp theo.

Bước 3. Tìm tất cả các nghiệm $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ của $P_f(\boldsymbol{\lambda}) = 0$ và các số bội $m_1, \ldots, m_p$ của chúng. Đối với mỗi $i \in \overline{1, p}$, tìm $\dim E(\lambda_i)$.

- Nếu tồn tại một $i \in \overline{1, p}$ sao cho $\dim E(\lambda_i) < m_i$ thì f không chéo hóa được và thuật toán kết thúc.
- Ngược lại, f chéo hóa được và chuyển sang bước tiếp theo.

Bước 4. Với mỗi $i \in \overline{1, p}$, tìm một cơ sở cho $E(\lambda_i)$, gọi là $\mathcal{B}_i$ chẳng hạn.

Bước 4. Với mỗi $i \in \overline{1, p}$, tìm một cơ sở cho $E(\lambda_i)$, gọi là $\mathcal{B}_i$ chẳng hạn. Khi đó $\mathcal{B} = (\mathcal{B}_1, \ldots, \mathcal{B}_p)$ là cơ sở của V.

Bước 4. Với mỗi $i \in \overline{1, p}$, tìm một cơ sở cho $E(\lambda_i)$, gọi là $\mathcal{B}_i$ chẳng hạn. Khi đó $\mathcal{B} = (\mathcal{B}_1, \ldots, \mathcal{B}_p)$ là cơ sở của V. Ta có ma trận biểu diễn f theo $\mathcal{B}$ là

$$[f]_{\mathcal{B}} := \mathrm{diag}(\underbrace{\lambda_1, \ldots, \lambda_1}_{m_1 \text{ lần}}, \ldots, \underbrace{\lambda_r, \ldots, \lambda_r}_{m_r \text{ lần}}).$$

Bước 4. Với mỗi $i \in \overline{1,p}$, tìm một cơ sở cho $E(\lambda_i)$, gọi là $\mathcal{B}_i$ chẳng hạn. Khi đó $\mathcal{B} = (\mathcal{B}_1, \ldots, \mathcal{B}_p)$ là cơ sở của V. Ta có ma trận biểu diễn f theo $\mathcal{B}$ là

$$[f]_{\mathcal{B}} := \operatorname{diag}(\underbrace{\lambda_1, \ldots, \lambda_1}_{m_1 \text{ lần}}, \ldots, \underbrace{\lambda_r, \ldots, \lambda_r}_{m_r \text{ lần}}).$$

Ví dụ. Xét toán tử tuyến tính $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ được xác định bởi

$$f(x_1, x_2, x_3) = (4x_1 + x_2 - x_3, -6x_1 - x_2 + 2x_3, 2x_1 + x_2 + x_3).$$

Hỏi f có chéo hóa được không?

Bước 4. Với mỗi $i \in \overline{1,p}$, tìm một cơ sở cho $E(\lambda_i)$, gọi là $\mathcal{B}_i$ chẳng hạn. Khi đó $\mathcal{B} = (\mathcal{B}_1, \ldots, \mathcal{B}_p)$ là cơ sở của V. Ta có ma trận biểu diễn f theo $\mathcal{B}$ là

$$[f]_{\mathcal{B}} := \operatorname{diag}(\underbrace{\lambda_1, \ldots, \lambda_1}_{m_1 \text{lần}}, \ldots, \underbrace{\lambda_r, \ldots, \lambda_r}_{m_r \text{lần}}).$$

Ví dụ. Xét toán tử tuyến tính $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ được xác định bởi

$$f(x_1, x_2, x_3) = (4x_1 + x_2 - x_3, -6x_1 - x_2 + 2x_3, 2x_1 + x_2 + x_3).$$

Hỏi f có chéo hóa được không?

Giải. Ma trận biểu diễn f theo cơ sở chính tắc là

$$A = [f]_{\mathcal{B}_0}$$

Bước 4. Với mỗi $i \in \overline{1,p}$, tìm một cơ sở cho $E(\lambda_i)$, gọi là $\mathcal{B}_i$ chẳng hạn. Khi đó $\mathcal{B} = (\mathcal{B}_1, \ldots, \mathcal{B}_p)$ là cơ sở của V. Ta có ma trận biểu diễn f theo $\mathcal{B}$ là

$$[f]_{\mathcal{B}} := \operatorname{diag}(\underbrace{\lambda_1, \ldots, \lambda_1}_{m_1 \text{lần}}, \ldots, \underbrace{\lambda_r, \ldots, \lambda_r}_{m_r \text{lần}}).$$

Ví dụ. Xét toán tử tuyến tính $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ được xác định bởi

$$f(x_1, x_2, x_3) = (4x_1 + x_2 - x_3, -6x_1 - x_2 + 2x_3, 2x_1 + x_2 + x_3).$$

Hỏi f có chéo hóa được không?

Giải. Ma trận biểu diễn f theo cơ sở chính tắc là

$$A = [f]_{\mathcal{B}_0} = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -1 \\ -6 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

- Đa thức đặc trưng

- Đa thức đặc trưng

$$P_f(\boldsymbol{\lambda}) = |A - \boldsymbol{\lambda} I_3|$$

- Đa thức đặc trưng

$$P_f(\boldsymbol{\lambda}) = |A - \boldsymbol{\lambda} I_3| = (\boldsymbol{\lambda} - 1)^2(2 - \boldsymbol{\lambda}).$$

- Đa thức đặc trưng

$$P_f(\boldsymbol{\lambda}) = |A - \boldsymbol{\lambda} I_3| = (\boldsymbol{\lambda} - 1)^2(2 - \boldsymbol{\lambda}).$$

Ta thấy $P_f(\boldsymbol{\lambda})$ phân rã trên $\mathbb{R}$.

- Đa thức đặc trưng

$$P_f(\lambda) = |A - \lambda I_3| = (\lambda - 1)^2(2 - \lambda).$$

Ta thấy $P_f(\lambda)$ phân rã trên $\mathbb{R}$.

- Trị riêng

- Đa thức đặc trưng

$$P_f(\boldsymbol{\lambda}) = |A - \boldsymbol{\lambda} I_3| = (\boldsymbol{\lambda} - 1)^2(2 - \boldsymbol{\lambda}).$$

Ta thấy $P_f(\boldsymbol{\lambda})$ phân rã trên $\mathbb{R}$.

- Trị riêng

$$P_f(\boldsymbol{\lambda}) = 0$$

- Đa thức đặc trưng

$$P_f(\lambda) = |A - \lambda I_3| = (\lambda - 1)^2(2 - \lambda).$$

Ta thấy $P_f(\lambda)$ phân rã trên $\mathbb{R}$.

- Trị riêng

$$P_f(\lambda) = 0 \Leftrightarrow \lambda = 1 \text{ (bội 2)}, \quad \lambda = 2 \text{ (bội 1)}.$$

- Đa thức đặc trưng

$$P_f(\boldsymbol{\lambda}) = |A - \boldsymbol{\lambda} I_3| = (\boldsymbol{\lambda} - 1)^2(2 - \boldsymbol{\lambda}).$$

Ta thấy $P_f(\boldsymbol{\lambda})$ phân rã trên $\mathbb{R}$.

- Trị riêng

$$P_f(\boldsymbol{\lambda}) = 0 \Leftrightarrow \boldsymbol{\lambda} = 1 \text{ (bội 2)}, \quad \boldsymbol{\lambda} = 2 \text{ (bội 1)}.$$

Vậy f có 2 trị riêng là $\lambda_1 = 1$ (bội 2), $\lambda_2 = 2$ (bội 1).

- Đa thức đặc trưng

$$P_f(\boldsymbol{\lambda}) = |A - \boldsymbol{\lambda} I_3| = (\boldsymbol{\lambda} - 1)^2(2 - \boldsymbol{\lambda}).$$

Ta thấy $P_f(\boldsymbol{\lambda})$ phân rã trên $\mathbb{R}$.

- Trị riêng

$$P_f(\boldsymbol{\lambda}) = 0 \Leftrightarrow \boldsymbol{\lambda} = 1 \text{ (bội 2)}, \quad \boldsymbol{\lambda} = 2 \text{ (bội 1)}.$$

Vậy f có 2 trị riêng là $\lambda_1 = 1$ (bội 2), $\lambda_2 = 2$ (bội 1).

- Không gian riêng

- Đa thức đặc trưng

$$P_f(\boldsymbol{\lambda}) = |A - \boldsymbol{\lambda} I_3| = (\boldsymbol{\lambda} - 1)^2 (2 - \boldsymbol{\lambda}).$$

Ta thấy $P_f(\boldsymbol{\lambda})$ phân rã trên $\mathbb{R}$.

- Trị riêng

$$P_f(\boldsymbol{\lambda}) = 0 \Leftrightarrow \boldsymbol{\lambda} = 1 \text{ (bội 2)}, \quad \boldsymbol{\lambda} = 2 \text{ (bội 1)}.$$

Vậy f có 2 trị riêng là $\lambda_1 = 1$ (bội 2), $\quad \lambda_2 = 2$ (bội 1).

- Không gian riêng

- Với $\lambda_1 = 1$,

- Đa thức đặc trưng

$$P_f(\boldsymbol{\lambda}) = |A - \boldsymbol{\lambda} I_3| = (\boldsymbol{\lambda} - 1)^2(2 - \boldsymbol{\lambda}).$$

Ta thấy $P_f(\boldsymbol{\lambda})$ phân rã trên $\mathbb{R}$.

- Trị riêng

$$P_f(\boldsymbol{\lambda}) = 0 \Leftrightarrow \boldsymbol{\lambda} = 1 \text{ (bội 2)}, \quad \boldsymbol{\lambda} = 2 \text{ (bội 1)}.$$

Vậy f có 2 trị riêng là $\lambda_1 = 1$ (bội 2), $\quad \lambda_2 = 2$ (bội 1).

- Không gian riêng

• Với $\lambda_1 = 1$, không gian riêng $E(1)$ chính là không gian nghiệm của hệ phương trình $(A - I_3)X = 0$.

- Đa thức đặc trưng

$$P_f(\boldsymbol{\lambda}) = |A - \boldsymbol{\lambda} I_3| = (\boldsymbol{\lambda} - 1)^2(2 - \boldsymbol{\lambda}).$$

Ta thấy $P_f(\boldsymbol{\lambda})$ phân rã trên $\mathbb{R}$.

- Trị riêng

$$P_f(\boldsymbol{\lambda}) = 0 \Leftrightarrow \boldsymbol{\lambda} = 1 \text{ (bội 2)}, \quad \boldsymbol{\lambda} = 2 \text{ (bội 1)}.$$

Vậy f có 2 trị riêng là $\lambda_1 = 1$ (bội 2), $\lambda_2 = 2$ (bội 1).

- Không gian riêng

• Với $\lambda_1 = 1$, không gian riêng $E(1)$ chính là không gian nghiệm của hệ phương trình $(A - I_3)X = 0$. Ta có

$$(A - I_3) = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ -6 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

- Đa thức đặc trưng

$$P_f(\boldsymbol{\lambda}) = |A - \boldsymbol{\lambda} I_3| = (\boldsymbol{\lambda} - 1)^2(2 - \boldsymbol{\lambda}).$$

Ta thấy $P_f(\boldsymbol{\lambda})$ phân rã trên $\mathbb{R}$.

- Trị riêng

$$P_f(\boldsymbol{\lambda}) = 0 \Leftrightarrow \boldsymbol{\lambda} = 1 \text{ (bội 2)}, \quad \boldsymbol{\lambda} = 2 \text{ (bội 1)}.$$

Vậy f có 2 trị riêng là $\lambda_1 = 1$ (bội 2), $\quad \lambda_2 = 2$ (bội 1).

- Không gian riêng

• Với $\lambda_1 = 1$, không gian riêng $E(1)$ chính là không gian nghiệm của hệ phương trình $(A - I_3)X = 0$. Ta có

$$(A - I_3) = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ -6 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

- Đa thức đặc trưng

$$P_f(\boldsymbol{\lambda}) = |A - \boldsymbol{\lambda} I_3| = (\boldsymbol{\lambda} - 1)^2(2 - \boldsymbol{\lambda}).$$

Ta thấy $P_f(\boldsymbol{\lambda})$ phân rã trên $\mathbb{R}$.

- Trị riêng

$$P_f(\boldsymbol{\lambda}) = 0 \Leftrightarrow \boldsymbol{\lambda} = 1 \text{ (bội 2)}, \quad \boldsymbol{\lambda} = 2 \text{ (bội 1)}.$$

Vậy f có 2 trị riêng là $\lambda_1 = 1$ (bội 2), $\lambda_2 = 2$ (bội 1).

- Không gian riêng

• Với $\lambda_1 = 1$, không gian riêng $E(1)$ chính là không gian nghiệm của hệ phương trình $(A - I_3)X = 0$. Ta có

$$(A - I_3) = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ -6 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Vậy, hạng của $A - I_3$ bằng 2,

- Đa thức đặc trưng

$$P_f(\boldsymbol{\lambda}) = |A - \boldsymbol{\lambda} I_3| = (\boldsymbol{\lambda} - 1)^2(2 - \boldsymbol{\lambda}).$$

Ta thấy $P_f(\boldsymbol{\lambda})$ phân rã trên $\mathbb{R}$.

- Trị riêng

$$P_f(\boldsymbol{\lambda}) = 0 \Leftrightarrow \boldsymbol{\lambda} = 1 \text{ (bội 2)}, \quad \boldsymbol{\lambda} = 2 \text{ (bội 1)}.$$

Vậy f có 2 trị riêng là $\lambda_1 = 1$ (bội 2), $\lambda_2 = 2$ (bội 1).

- Không gian riêng

• Với $\lambda_1 = 1$, không gian riêng $E(1)$ chính là không gian nghiệm của hệ phương trình $(A - I_3)X = 0$. Ta có

$$(A - I_3) = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ -6 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Vậy, hạng của $A - I_3$ bằng 2, suy ra $\dim E(1) = 3 - 2 = 1$ nhỏ hơn số bội của trị riêng $\lambda_1 = 1$.

- Đa thức đặc trưng

$$P_f(\boldsymbol{\lambda}) = |A - \boldsymbol{\lambda} I_3| = (\boldsymbol{\lambda} - 1)^2(2 - \boldsymbol{\lambda}).$$

Ta thấy $P_f(\boldsymbol{\lambda})$ phân rã trên $\mathbb{R}$.

- Trị riêng

$$P_f(\boldsymbol{\lambda}) = 0 \Leftrightarrow \boldsymbol{\lambda} = 1 \text{ (bội 2)}, \quad \boldsymbol{\lambda} = 2 \text{ (bội 1)}.$$

Vậy f có 2 trị riêng là $\lambda_1 = 1$ (bội 2), $\lambda_2 = 2$ (bội 1).

- Không gian riêng

• Với $\lambda_1 = 1$, không gian riêng $E(1)$ chính là không gian nghiệm của hệ phương trình $(A - I_3)X = 0$. Ta có

$$(A - I_3) = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ -6 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Vậy, hạng của $A - I_3$ bằng 2, suy ra $\dim E(1) = 3 - 2 = 1$ nhỏ hơn số bội của trị riêng $\lambda_1 = 1$. Do đó toán tử f không chéo hóa được.

Ví dụ. Xét toán tử tuyến tính $f \in End_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^3)$ được xác định bởi

$$f(x_1, x_2, x_3) = (4x_1 + 2x_2 - x_3, -6x_1 - 4x_2 + 3x_3, -6x_1 - 6x_2 + 5x_3).$$

Hỏi f có chéo hóa được hay không? Nếu được, hãy tìm một cơ sở $\mathcal{B}$ của V sao cho $[f]_{\mathcal{B}}$ là ma trận đường chéo.

Ví dụ. Xét toán tử tuyến tính $f \in End_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^3)$ được xác định bởi

$$f(x_1, x_2, x_3) = (4x_1 + 2x_2 - x_3, -6x_1 - 4x_2 + 3x_3, -6x_1 - 6x_2 + 5x_3).$$

Hỏi f có chéo hóa được hay không? Nếu được, hãy tìm một cơ sở $\mathcal{B}$ của V sao cho $[f]_{\mathcal{B}}$ là ma trận đường chéo.

Giải. Ma trận biểu diễn f theo cơ sở chính tắc là

$$A = [f]_{\mathcal{B}_0} = \begin{pmatrix} 4 & 2 & -1 \\ -6 & -4 & 3 \\ -6 & -6 & 5 \end{pmatrix}.$$

Ví dụ. Xét toán tử tuyến tính $f \in End_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^3)$ được xác định bởi

$$f(x_1, x_2, x_3) = (4x_1 + 2x_2 - x_3, -6x_1 - 4x_2 + 3x_3, -6x_1 - 6x_2 + 5x_3).$$

Hỏi f có chéo hóa được hay không? Nếu được, hãy tìm một cơ sở $\mathcal{B}$ của V sao cho $[f]_{\mathcal{B}}$ là ma trận đường chéo.

Giải. Ma trận biểu diễn f theo cơ sở chính tắc là

$$A = [f]_{\mathcal{B}_0} = \begin{pmatrix} 4 & 2 & -1 \\ -6 & -4 & 3 \\ -6 & -6 & 5 \end{pmatrix}.$$

- Đa thức đặc trưng

Ví dụ. Xét toán tử tuyến tính $f \in End_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^3)$ được xác định bởi

$$f(x_1, x_2, x_3) = (4x_1 + 2x_2 - x_3, -6x_1 - 4x_2 + 3x_3, -6x_1 - 6x_2 + 5x_3).$$

Hỏi f có chéo hóa được hay không? Nếu được, hãy tìm một cơ sở $\mathcal{B}$ của V sao cho $[f]_{\mathcal{B}}$ là ma trận đường chéo.

Giải. Ma trận biểu diễn f theo cơ sở chính tắc là

$$A = [f]_{\mathcal{B}_0} = \begin{pmatrix} 4 & 2 & -1 \\ -6 & -4 & 3 \\ -6 & -6 & 5 \end{pmatrix}.$$

- Đa thức đặc trưng

$$P_f(\lambda) = |A - \lambda I_3|$$

Ví dụ. Xét toán tử tuyến tính $f \in End_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^3)$ được xác định bởi

$$f(x_1, x_2, x_3) = (4x_1 + 2x_2 - x_3, -6x_1 - 4x_2 + 3x_3, -6x_1 - 6x_2 + 5x_3).$$

Hỏi f có chéo hóa được hay không? Nếu được, hãy tìm một cơ sở $\mathcal{B}$ của V sao cho $[f]_{\mathcal{B}}$ là ma trận đường chéo.

Giải. Ma trận biểu diễn f theo cơ sở chính tắc là

$$A = [f]_{\mathcal{B}_0} = \begin{pmatrix} 4 & 2 & -1 \\ -6 & -4 & 3 \\ -6 & -6 & 5 \end{pmatrix}.$$

- Đa thức đặc trưng

$$P_f(\lambda) = |A - \boldsymbol{\lambda} I_3| = -\boldsymbol{\lambda}^3 + 5\boldsymbol{\lambda}^2 - 8\boldsymbol{\lambda} + 4$$

Ví dụ. Xét toán tử tuyến tính $f \in End_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^3)$ được xác định bởi

$$f(x_1, x_2, x_3) = (4x_1 + 2x_2 - x_3, -6x_1 - 4x_2 + 3x_3, -6x_1 - 6x_2 + 5x_3).$$

Hỏi f có chéo hóa được hay không? Nếu được, hãy tìm một cơ sở $\mathcal{B}$ của V sao cho $[f]_{\mathcal{B}}$ là ma trận đường chéo.

Giải. Ma trận biểu diễn f theo cơ sở chính tắc là

$$A = [f]_{\mathcal{B}_0} = \begin{pmatrix} 4 & 2 & -1 \\ -6 & -4 & 3 \\ -6 & -6 & 5 \end{pmatrix}.$$

- Đa thức đặc trưng

$$P_f(\lambda) = |A - \boldsymbol{\lambda} I_3| = -\boldsymbol{\lambda}^3 + 5\boldsymbol{\lambda}^2 - 8\boldsymbol{\lambda} + 4 = -(\boldsymbol{\lambda} - 1)(\boldsymbol{\lambda} - 2)^2.$$

Ví dụ. Xét toán tử tuyến tính $f \in End_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^3)$ được xác định bởi

$$f(x_1, x_2, x_3) = (4x_1 + 2x_2 - x_3, -6x_1 - 4x_2 + 3x_3, -6x_1 - 6x_2 + 5x_3).$$

Hỏi f có chéo hóa được hay không? Nếu được, hãy tìm một cơ sở $\mathcal{B}$ của V sao cho $[f]_{\mathcal{B}}$ là ma trận đường chéo.

Giải. Ma trận biểu diễn f theo cơ sở chính tắc là

$$A = [f]_{\mathcal{B}_0} = \begin{pmatrix} 4 & 2 & -1 \\ -6 & -4 & 3 \\ -6 & -6 & 5 \end{pmatrix}.$$

- Đa thức đặc trưng

$$P_f(\lambda) = |A - \boldsymbol{\lambda} I_3| = -\boldsymbol{\lambda}^3 + 5\boldsymbol{\lambda}^2 - 8\boldsymbol{\lambda} + 4 = -(\boldsymbol{\lambda} - 1)(\boldsymbol{\lambda} - 2)^2.$$

- Trị riêng

Ví dụ. Xét toán tử tuyến tính $f \in End_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^3)$ được xác định bởi

$$f(x_1, x_2, x_3) = (4x_1 + 2x_2 - x_3, -6x_1 - 4x_2 + 3x_3, -6x_1 - 6x_2 + 5x_3).$$

Hỏi f có chéo hóa được hay không? Nếu được, hãy tìm một cơ sở $\mathcal{B}$ của V sao cho $[f]_{\mathcal{B}}$ là ma trận đường chéo.

Giải. Ma trận biểu diễn f theo cơ sở chính tắc là

$$A = [f]_{\mathcal{B}_0} = \begin{pmatrix} 4 & 2 & -1 \\ -6 & -4 & 3 \\ -6 & -6 & 5 \end{pmatrix}.$$

- Đa thức đặc trưng

$$P_f(\lambda) = |A - \boldsymbol{\lambda} I_3| = -\boldsymbol{\lambda}^3 + 5\boldsymbol{\lambda}^2 - 8\boldsymbol{\lambda} + 4 = -(\boldsymbol{\lambda} - 1)(\boldsymbol{\lambda} - 2)^2.$$

- Trị riêng

$$P_f(\lambda) = 0$$

Ví dụ. Xét toán tử tuyến tính $f \in End_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^3)$ được xác định bởi

$$f(x_1, x_2, x_3) = (4x_1 + 2x_2 - x_3, -6x_1 - 4x_2 + 3x_3, -6x_1 - 6x_2 + 5x_3).$$

Hỏi f có chéo hóa được hay không? Nếu được, hãy tìm một cơ sở $\mathcal{B}$ của V sao cho $[f]_{\mathcal{B}}$ là ma trận đường chéo.

Giải. Ma trận biểu diễn f theo cơ sở chính tắc là

$$A = [f]_{\mathcal{B}_0} = \begin{pmatrix} 4 & 2 & -1 \\ -6 & -4 & 3 \\ -6 & -6 & 5 \end{pmatrix}.$$

- Đa thức đặc trưng

$$P_f(\lambda) = |A - \boldsymbol{\lambda} I_3| = -\boldsymbol{\lambda}^3 + 5\boldsymbol{\lambda}^2 - 8\boldsymbol{\lambda} + 4 = -(\boldsymbol{\lambda} - 1)(\boldsymbol{\lambda} - 2)^2.$$

- Trị riêng

$$P_f(\lambda) = 0 \Leftrightarrow \lambda = 1 \text{ (bội 1)}, \quad \lambda = 2 \text{ (bội 2)}.$$

Ví dụ. Xét toán tử tuyến tính $f \in End_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^3)$ được xác định bởi

$$f(x_1, x_2, x_3) = (4x_1 + 2x_2 - x_3, -6x_1 - 4x_2 + 3x_3, -6x_1 - 6x_2 + 5x_3).$$

Hỏi f có chéo hóa được hay không? Nếu được, hãy tìm một cơ sở $\mathcal{B}$ của V sao cho $[f]_{\mathcal{B}}$ là ma trận đường chéo.

Giải. Ma trận biểu diễn f theo cơ sở chính tắc là

$$A = [f]_{\mathcal{B}_0} = \begin{pmatrix} 4 & 2 & -1 \\ -6 & -4 & 3 \\ -6 & -6 & 5 \end{pmatrix}.$$

- Đa thức đặc trưng

$$P_f(\lambda) = |A - \boldsymbol{\lambda} I_3| = -\boldsymbol{\lambda}^3 + 5\boldsymbol{\lambda}^2 - 8\boldsymbol{\lambda} + 4 = -(\boldsymbol{\lambda} - 1)(\boldsymbol{\lambda} - 2)^2.$$

- Trị riêng

$$P_f(\lambda) = 0 \Leftrightarrow \lambda = 1 \text{ (bội 1)}, \quad \lambda = 2 \text{ (bội 2)}.$$

Vậy f có 2 trị riêng $\lambda_1 = 1$ (bội 1), $\lambda_2 = 2$ (bội 2).

- Không gian riêng

- Không gian riêng

- Với $\lambda_1 = 1$,

- Không gian riêng

• Với $\lambda_1 = 1$, không gian riêng $E(1)$ chính là không gian nghiệm của hệ phương trình $(A - I_3)X = 0$.

- Không gian riêng

• Với $\lambda_1 = 1$, không gian riêng $E(1)$ chính là không gian nghiệm của hệ phương trình $(A - I_3)X = 0$. Ta có

$$A - I_3 = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ -6 & -5 & 3 \\ -6 & -6 & 4 \end{pmatrix}$$

- Không gian riêng

• Với $\lambda_1 = 1$, không gian riêng $E(1)$ chính là không gian nghiệm của hệ phương trình $(A - I_3)X = 0$. Ta có

$$A - I_3 = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ -6 & -5 & 3 \\ -6 & -6 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow[d_3+2d_1]{d_2+2d_1} \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

- Không gian riêng

• Với $\lambda_1 = 1$, không gian riêng $E(1)$ chính là không gian nghiệm của hệ phương trình $(A - I_3)X = 0$. Ta có

$$A - I_3 = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ -6 & -5 & 3 \\ -6 & -6 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow[d_3+2d_1]{d_2+2d_1} \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[d_3-2d_2]{d_1+2d_2} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

- Không gian riêng

• Với $\lambda_1 = 1$, không gian riêng $E(1)$ chính là không gian nghiệm của hệ phương trình $(A - I_3)X = 0$. Ta có

$$A - I_3 = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ -6 & -5 & 3 \\ -6 & -6 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow[d_3+2d_1]{d_2+2d_1} \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$
$$\xrightarrow[d_3-2d_2]{d_1+2d_2} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Chọn $x_3 = t$, ta tìm được nghiệm tổng quát là

$$(x_1, x_2, x_3) = (-\frac{1}{3}t, t, t), \quad t \in \mathbb{R}.$$

- Không gian riêng

• Với $\lambda_1 = 1$, không gian riêng $E(1)$ chính là không gian nghiệm của hệ phương trình $(A - I_3)X = 0$. Ta có

$$A - I_3 = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ -6 & -5 & 3 \\ -6 & -6 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow[d_3+2d_1]{d_2+2d_1} \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[d_3-2d_2]{d_1+2d_2} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Chọn $x_3 = t$, ta tìm được nghiệm tổng quát là

$$(x_1, x_2, x_3) = (-\frac{1}{3}t, t, t), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Suy ra $E(1)$ có $\dim E(1) = 1$ với cơ sở $\mathcal{B}_1 = \{u_1 = (1, -3, -3)\}$.

- Với $\lambda_1 = 2$,

• Với $\lambda_1 = 2$, không gian riêng $E(2)$ chính là không gian nghiệm của hệ phương trình $(A - 2I_3)X = 0$.

• Với $\lambda_1 = 2$, không gian riêng $E(2)$ chính là không gian nghiệm của hệ phương trình $(A - 2I_3)X = 0$. Ta có

$$A - 2I_3 = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ -6 & -6 & 3 \\ -6 & -6 & 3 \end{pmatrix}$$

• Với $\lambda_1 = 2$, không gian riêng $E(2)$ chính là không gian nghiệm của hệ phương trình $(A - 2I_3)X = 0$. Ta có

$$A - 2I_3 = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ -6 & -6 & 3 \\ -6 & -6 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[d_3+3d_1]{d_2+3d_1} \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

• Với $\lambda_1 = 2$, không gian riêng $E(2)$ chính là không gian nghiệm của hệ phương trình $(A - 2I_3)X = 0$. Ta có

$$A - 2I_3 = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ -6 & -6 & 3 \\ -6 & -6 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[d_3+3d_1]{d_2+3d_1} \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Chọn $x_1 = t, x_2 = s$, ta tìm được nghiệm tổng quát là

$$(x_1, x_2, x_3) = (t, s, 2t + 2s), \quad t, s \in \mathbb{R}.$$

• Với $\lambda_1 = 2$, không gian riêng $E(2)$ chính là không gian nghiệm của hệ phương trình $(A - 2I_3)X = 0$. Ta có

$$A - 2I_3 = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ -6 & -6 & 3 \\ -6 & -6 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[d_3+3d_1]{d_2+3d_1} \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Chọn $x_1 = t, x_2 = s$, ta tìm được nghiệm tổng quát là

$$(x_1, x_2, x_3) = (t, s, 2t + 2s), \quad t, s \in \mathbb{R}.$$

Suy ra $E(2)$ có $\dim E(2) = 2$ với cơ sở

$$\mathcal{B}_2 = \{u_2 = (1, 0, 2); u_3 = (0, 1, 2)\}.$$

• Với $\lambda_1 = 2$, không gian riêng $E(2)$ chính là không gian nghiệm của hệ phương trình $(A - 2I_3)X = 0$. Ta có

$$A - 2I_3 = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ -6 & -6 & 3 \\ -6 & -6 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[d_3+3d_1]{d_2+3d_1} \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Chọn $x_1 = t, x_2 = s$, ta tìm được nghiệm tổng quát là

$$(x_1, x_2, x_3) = (t, s, 2t + 2s), \quad t, s \in \mathbb{R}.$$

Suy ra $E(2)$ có $\dim E(2) = 2$ với cơ sở

$$\mathcal{B}_2 = \{u_2 = (1, 0, 2); u_3 = (0, 1, 2)\}.$$

Do số chiều của các không gian riêng đều bằng số bội của trị riêng tương ứng nên f chéo hóa được.

• Với $\lambda_1 = 2$, không gian riêng $E(2)$ chính là không gian nghiệm của hệ phương trình $(A - 2I_3)X = 0$. Ta có

$$A - 2I_3 = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ -6 & -6 & 3 \\ -6 & -6 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[d_3+3d_1]{d_2+3d_1} \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Chọn $x_1 = t, x_2 = s$, ta tìm được nghiệm tổng quát là

$$(x_1, x_2, x_3) = (t, s, 2t + 2s), \quad t, s \in \mathbb{R}.$$

Suy ra $E(2)$ có $\dim E(2) = 2$ với cơ sở

$$\mathcal{B}_2 = \{u_2 = (1, 0, 2); u_3 = (0, 1, 2)\}.$$

Do số chiều của các không gian riêng đều bằng số bội của trị riêng tương ứng nên f chéo hóa được. Hơn nữa cơ sở cần tìm là

$$\mathcal{B} = \{u_1 = (1, -3, -3); u_2 = (1, 0, 2); u_3 = (0, 1, 2)\}$$

và

$$[f]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

và

$$[f]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Ví dụ.(tự làm) Cho toán tử tuyến tính $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ xác định bởi

$$f(x_1, x_2, x_3) = (-4x_1 - 3x_2 - 3x_3, -x_1 - x_3, 7x_1 + 5x_2 + 6x_3).$$

Hỏi f có chéo hóa được hay không? Nếu được, hãy tìm một cơ sở $\mathcal{B}$ của V sao cho $[f]_{\mathcal{B}}$ là ma trận đường chéo.

và

$$[f]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Ví dụ.(tự làm) Cho toán tử tuyến tính $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ xác định bởi

$$f(x_1, x_2, x_3) = (-4x_1 - 3x_2 - 3x_3, -x_1 - x_3, 7x_1 + 5x_2 + 6x_3).$$

Hỏi f có chéo hóa được hay không? Nếu được, hãy tìm một cơ sở $\mathcal{B}$ của V sao cho $[f]_{\mathcal{B}}$ là ma trận đường chéo.

Ma trận chéo hóa được

Nhắc lại. Cho $A, B \in M_n(K)$. A được gọi là ***đồng dạng*** với B nếu tồn tại ma trận khả nghịch P sao cho $A = P^{-1}BP$. Ký hiệu $\boldsymbol{A \sim B}$.

Ma trận chéo hóa được

Nhắc lại. Cho $A, B \in M_n(K)$. A được gọi là ***đồng dạng*** với B nếu tồn tại ma trận khả nghịch P sao cho $A = P^{-1}BP$. Ký hiệu $\boldsymbol{A \sim B}$.

Lưu ý. Quan hệ đồng dạng là một quan hệ tương đương, nghĩa là:

Ma trận chéo hóa được

Nhắc lại. Cho $A, B \in M_n(K)$. A được gọi là ***đồng dạng*** với B nếu tồn tại ma trận khả nghịch P sao cho $A = P^{-1}BP$. Ký hiệu $\boldsymbol{A \sim B}$.

Lưu ý. Quan hệ đồng dạng là một quan hệ tương đương, nghĩa là:

- $\forall A \in M_n(K)$, $A \sim A$.

Ma trận chéo hóa được

Nhắc lại. Cho $A, B \in M_n(K)$. A được gọi là ***đồng dạng*** với B nếu tồn tại ma trận khả nghịch P sao cho $A = P^{-1}BP$. Ký hiệu $\boldsymbol{A \sim B}$.

Lưu ý. Quan hệ đồng dạng là một quan hệ tương đương, nghĩa là:

- $\forall A \in M_n(K)$, $A \sim A$.
- $\forall A, B \in M_n(K)$, nếu $A \sim B$ thì $B \sim A$.

Ma trận chéo hóa được

Nhắc lại. Cho $A, B \in M_n(K)$. A được gọi là ***đồng dạng*** với B nếu tồn tại ma trận khả nghịch P sao cho $A = P^{-1}BP$. Ký hiệu $\boldsymbol{A \sim B}$.

Lưu ý. Quan hệ đồng dạng là một quan hệ tương đương, nghĩa là:

- $\forall A \in M_n(K)$, $A \sim A$.
- $\forall A, B \in M_n(K)$, nếu $A \sim B$ thì $B \sim A$.
- $\forall A, B, C \in M_n(K)$, nếu $A \sim B$ và $B \sim C$ thì $A \sim C$.

Ma trận chéo hóa được

Nhắc lại. Cho $A, B \in M_n(K)$. A được gọi là ***đồng dạng*** với B nếu tồn tại ma trận khả nghịch P sao cho $A = P^{-1}BP$. Ký hiệu $\boldsymbol{A \sim B}$.

Lưu ý. Quan hệ đồng dạng là một quan hệ tương đương, nghĩa là:

- $\forall A \in M_n(K)$, $A \sim A$.
- $\forall A, B \in M_n(K)$, nếu $A \sim B$ thì $B \sim A$.
- $\forall A, B, C \in M_n(K)$, nếu $A \sim B$ và $B \sim C$ thì $A \sim C$.

Định nghĩa. Cho $A \in M_n(K)$. Ma trận A được gọi là ***chéo hóa được*** nếu nó đồng dạng với ma trận đường chéo.

Nhắc lại. Cho $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ là hai cơ sở của V và f là toán tử tuyến tính trên V. Khi đó

$$[f]_{\mathcal{B}'} = (\mathcal{B} \to \mathcal{B}')^{-1}[f]_{\mathcal{B}}(\mathcal{B} \to \mathcal{B}').$$

Nhắc lại. Cho $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ là hai cơ sở của V và f là toán tử tuyến tính trên V. Khi đó
$$[f]_{\mathcal{B}'} = (\mathcal{B} \to \mathcal{B}')^{-1}[f]_{\mathcal{B}}(\mathcal{B} \to \mathcal{B}').$$

Giả sử f chéo hóa được bằng cơ sở $\mathcal{B}'$ và xem xét A là ma trận biểu diễn f theo cơ sở $\mathcal{B}$.

Nhắc lại. Cho $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ là hai cơ sở của V và f là toán tử tuyến tính trên V. Khi đó
$$[f]_{\mathcal{B}'} = (\mathcal{B} \to \mathcal{B}')^{-1}[f]_{\mathcal{B}}(\mathcal{B} \to \mathcal{B}').$$

Giả sử f chéo hóa được bằng cơ sở $\mathcal{B}'$ và xem xét A là ma trận biểu diễn f theo cơ sở $\mathcal{B}$. Ta đặt

$$D := [f]_{\mathcal{B}'} \text{ và } P := (\mathcal{B} \to \mathcal{B}').$$

Nhắc lại. Cho $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ là hai cơ sở của V và f là toán tử tuyến tính trên V. Khi đó
$$[f]_{\mathcal{B}'} = (\mathcal{B} \to \mathcal{B}')^{-1}[f]_{\mathcal{B}}(\mathcal{B} \to \mathcal{B}').$$

Giả sử f chéo hóa được bằng cơ sở $\mathcal{B}'$ và xem xét A là ma trận biểu diễn f theo cơ sở $\mathcal{B}$. Ta đặt

$$D := [f]_{\mathcal{B}'} \text{ và } P := (\mathcal{B} \to \mathcal{B}').$$

Khi đó
$$A = P^{-1}DP.$$

Nhắc lại. Cho $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ là hai cơ sở của V và f là toán tử tuyến tính trên V. Khi đó
$$[f]_{\mathcal{B}'} = (\mathcal{B} \to \mathcal{B}')^{-1}[f]_{\mathcal{B}}(\mathcal{B} \to \mathcal{B}').$$

Giả sử f chéo hóa được bằng cơ sở $\mathcal{B}'$ và xem xét A là ma trận biểu diễn f theo cơ sở $\mathcal{B}$. Ta đặt

$$D := [f]_{\mathcal{B}'} \text{ và } P := (\mathcal{B} \to \mathcal{B}').$$

Khi đó
$$A = P^{-1}DP.$$

Suy ra A chéo hóa được.

Nhắc lại. Cho $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ là hai cơ sở của V và f là toán tử tuyến tính trên V. Khi đó
$$[f]_{\mathcal{B}'} = (\mathcal{B} \to \mathcal{B}')^{-1}[f]_{\mathcal{B}}(\mathcal{B} \to \mathcal{B}').$$

Giả sử f chéo hóa được bằng cơ sở $\mathcal{B}'$ và xem xét A là ma trận biểu diễn f theo cơ sở $\mathcal{B}$. Ta đặt

$$D := [f]_{\mathcal{B}'} \text{ và } P := (\mathcal{B} \to \mathcal{B}').$$

Khi đó
$$A = P^{-1}DP.$$

Suy ra A chéo hóa được.

Như vậy bài toán chéo hóa ma trận A chính là bài toán chéo hóa toán tử f với A là ma trận biểu diễn của f theo một cơ sở nào đó.

Nhắc lại. Cho $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ là hai cơ sở của V và f là toán tử tuyến tính trên V. Khi đó

$$[f]_{\mathcal{B}'} = (\mathcal{B} \to \mathcal{B}')^{-1}[f]_{\mathcal{B}}(\mathcal{B} \to \mathcal{B}').$$

Giả sử f chéo hóa được bằng cơ sở $\mathcal{B}'$ và xem xét A là ma trận biểu diễn f theo cơ sở $\mathcal{B}$. Ta đặt

$$D := [f]_{\mathcal{B}'} \text{ và } P := (\mathcal{B} \to \mathcal{B}').$$

Khi đó

$$A = P^{-1}DP.$$

Suy ra A chéo hóa được.

Như vậy bài toán chéo hóa ma trận A chính là bài toán chéo hóa toán tử f với A là ma trận biểu diễn của f theo một cơ sở nào đó.

Tương tự như trên toán tử, ta cũng có các định nghĩa về việc chéo hóa trên ma trận.

Thuật toán chéo hóa ma trận

Thuật toán chéo hóa ma trận

Bước 1. Tìm đa thức đặc trưng $P_A(\boldsymbol{\lambda}) = |A - \boldsymbol{\lambda} I|$.

Thuật toán chéo hóa ma trận

Bước 1. Tìm đa thức đặc trưng $P_A(\boldsymbol{\lambda}) = |A - \boldsymbol{\lambda} I|$.

- Nếu $P_A(\boldsymbol{\lambda})$ không phân rã

Thuật toán chéo hóa ma trận

Bước 1. Tìm đa thức đặc trưng $P_A(\boldsymbol{\lambda}) = |A - \boldsymbol{\lambda} I|$.

- Nếu $P_A(\boldsymbol{\lambda})$ không phân rã thì A không chéo hóa được và thuật toán kết thúc.

Thuật toán chéo hóa ma trận

Bước 1. Tìm đa thức đặc trưng $P_A(\boldsymbol{\lambda}) = |A - \boldsymbol{\lambda} I|$.

- Nếu $P_A(\boldsymbol{\lambda})$ không phân rã thì A không chéo hóa được và thuật toán kết thúc.
- Ngược lại, chuyển sang bước tiếp theo.

Thuật toán chéo hóa ma trận

Bước 1. Tìm đa thức đặc trưng $P_A(\boldsymbol{\lambda}) = |A - \boldsymbol{\lambda} I|$.

- Nếu $P_A(\boldsymbol{\lambda})$ không phân rã thì A không chéo hóa được và thuật toán kết thúc.
- Ngược lại, chuyển sang bước tiếp theo.

Bước 2. Tìm tất cả các nghiệm $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ của $P_A(\boldsymbol{\lambda}) = 0$ và các số bội $m_1, \ldots, m_p$ của chúng.

Thuật toán chéo hóa ma trận

Bước 1. Tìm đa thức đặc trưng $P_A(\boldsymbol{\lambda}) = |A - \boldsymbol{\lambda} I|$.

- Nếu $P_A(\boldsymbol{\lambda})$ không phân rã thì A không chéo hóa được và thuật toán kết thúc.
- Ngược lại, chuyển sang bước tiếp theo.

Bước 2. Tìm tất cả các nghiệm $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ của $P_A(\boldsymbol{\lambda}) = 0$ và các số bội $m_1, \ldots, m_p$ của chúng. Đối với mỗi $i \in \overline{1, p}$ tìm số chiều của của không gian nghiệm $E(\lambda_i)$ của hệ phương trình $(A - \lambda_i I)X = 0$.

Thuật toán chéo hóa ma trận

Bước 1. Tìm đa thức đặc trưng $P_A(\boldsymbol{\lambda}) = |A - \boldsymbol{\lambda} I|$.

- Nếu $P_A(\boldsymbol{\lambda})$ không phân rã thì A không chéo hóa được và thuật toán kết thúc.
- Ngược lại, chuyển sang bước tiếp theo.

Bước 2. Tìm tất cả các nghiệm $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ của $P_A(\boldsymbol{\lambda}) = 0$ và các số bội $m_1, \ldots, m_p$ của chúng. Đối với mỗi $i \in \overline{1,p}$ tìm số chiều của của không gian nghiệm $E(\lambda_i)$ của hệ phương trình $(A - \lambda_i I)X = 0$.

- Nếu tồn tại một $i \in \overline{1,p}$ sao cho $\dim E(\lambda_i) < m_i$ thì A không chéo hóa được và thuật toán kết thúc.

Thuật toán chéo hóa ma trận

Bước 1. Tìm đa thức đặc trưng $P_A(\boldsymbol{\lambda}) = |A - \boldsymbol{\lambda} I|$.

- Nếu $P_A(\boldsymbol{\lambda})$ không phân rã thì A không chéo hóa được và thuật toán kết thúc.
- Ngược lại, chuyển sang bước tiếp theo.

Bước 2. Tìm tất cả các nghiệm $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ của $P_A(\boldsymbol{\lambda}) = 0$ và các số bội $m_1, \ldots, m_p$ của chúng. Đối với mỗi $i \in \overline{1,p}$ tìm số chiều của của không gian nghiệm $E(\lambda_i)$ của hệ phương trình $(A - \lambda_i I)X = 0$.

- Nếu tồn tại một $i \in \overline{1,p}$ sao cho $\dim E(\lambda_i) < m_i$ thì A không chéo hóa được và thuật toán kết thúc.
- Ngược lại, A chéo hóa được và chuyển sang bước tiếp theo.

Bước 3. Với mỗi $i \in \overline{1, p}$, tìm một cơ sở $\mathcal{B}_i$ cho $E(\lambda_i)$,

Bước 3. Với mỗi $i \in \overline{1, p}$, tìm một cơ sở $\mathcal{B}_i$ cho $E(\lambda_i)$, Ta đặt P là ma trận có được bằng cách dựng các vectơ trong $\mathcal{B}_i$ thành các cột.

Bước 3. Với mỗi $i \in \overline{1,p}$, tìm một cơ sở $\mathcal{B}_i$ cho $E(\lambda_i)$, Ta đặt P là ma trận có được bằng cách dựng các vectơ trong $\mathcal{B}_i$ thành các cột. Khi đó ma trận P làm chéo A và $P^{-1}AP$ là ma trận đường chéo

$$\text{diag}(\underbrace{\lambda_1, \ldots, \lambda_1}_{m_1 \text{lần}}, \ldots, \underbrace{\lambda_r, \ldots, \lambda_r}_{m_r \text{lần}}).$$

Bước 3. Với mỗi $i \in \overline{1,p}$, tìm một cơ sở $\mathcal{B}_i$ cho $E(\lambda_i)$, Ta đặt P là ma trận có được bằng cách dựng các vectơ trong $\mathcal{B}_i$ thành các cột. Khi đó ma trận P làm chéo A và $P^{-1}AP$ là ma trận đường chéo

$$\operatorname{diag}(\underbrace{\lambda_1, \ldots, \lambda_1}_{m_1 \text{ lần}}, \ldots, \underbrace{\lambda_r, \ldots, \lambda_r}_{m_r \text{ lần}}).$$

Ví dụ. Cho ma trận thực $A = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & -2 \\ -3 & -1 & 0 \end{pmatrix}$. Tìm trị riêng và vectơ riêng của A. Xác định cơ sở, số chiều của các không gian riêng tương ứng.

Bước 3. Với mỗi $i \in \overline{1, p}$, tìm một cơ sở $\mathcal{B}_i$ cho $E(\lambda_i)$, Ta đặt P là ma trận có được bằng cách dựng các vectơ trong $\mathcal{B}_i$ thành các cột. Khi đó ma trận P làm chéo A và $P^{-1}AP$ là ma trận đường chéo

$$\operatorname{diag}(\underbrace{\lambda_1, \ldots, \lambda_1}_{m_1 \text{lần}}, \ldots, \underbrace{\lambda_r, \ldots, \lambda_r}_{m_r \text{lần}}).$$

Ví dụ. Cho ma trận thực $A = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & -2 \\ -3 & -1 & 0 \end{pmatrix}$. Tìm trị riêng và vectơ riêng của A. Xác định cơ sở, số chiều của các không gian riêng tương ứng.

Giải. - Đa thức đặc trưng

Bước 3. Với mỗi $i \in \overline{1,p}$, tìm một cơ sở $\mathcal{B}_i$ cho $E(\lambda_i)$, Ta đặt P là ma trận có được bằng cách dựng các vectơ trong $\mathcal{B}_i$ thành các cột. Khi đó ma trận P làm chéo A và $P^{-1}AP$ là ma trận đường chéo

$$\mathrm{diag}(\underbrace{\lambda_1,\ldots,\lambda_1}_{m_1\,\text{lần}},\ldots,\underbrace{\lambda_r,\ldots,\lambda_r}_{m_r\,\text{lần}}).$$

Ví dụ. Cho ma trận thực $A = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & -2 \\ -3 & -1 & 0 \end{pmatrix}$. Tìm trị riêng và vectơ riêng của A. Xác định cơ sở, số chiều của các không gian riêng tương ứng.

Giải. - Đa thức đặc trưng

$$P_A(\lambda) = |A - \lambda I_3|$$

Bước 3. Với mỗi $i \in \overline{1,p}$, tìm một cơ sở $\mathcal{B}_i$ cho $E(\lambda_i)$, Ta đặt P là ma trận có được bằng cách dựng các vectơ trong $\mathcal{B}_i$ thành các cột. Khi đó ma trận P làm chéo A và $P^{-1}AP$ là ma trận đường chéo

$$\operatorname{diag}(\underbrace{\lambda_1,\ldots,\lambda_1}_{m_1\,\text{lần}},\ldots,\underbrace{\lambda_r,\ldots,\lambda_r}_{m_r\,\text{lần}}).$$

Ví dụ. Cho ma trận thực $A = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & -2 \\ -3 & -1 & 0 \end{pmatrix}$. Tìm trị riêng và vectơ riêng của A. Xác định cơ sở, số chiều của các không gian riêng tương ứng.

Giải. - Đa thức đặc trưng

$$P_A(\lambda) = |A - \lambda I_3| = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 3 & 2 \\ 1 & 1-\lambda & -2 \\ -3 & -1 & -\lambda \end{vmatrix} =$$

Bước 3. Với mỗi $i \in \overline{1,p}$, tìm một cơ sở $\mathcal{B}_i$ cho $E(\lambda_i)$, Ta đặt P là ma trận có được bằng cách dựng các vectơ trong $\mathcal{B}_i$ thành các cột. Khi đó ma trận P làm chéo A và $P^{-1}AP$ là ma trận đường chéo

$$\mathrm{diag}(\underbrace{\lambda_1, \ldots, \lambda_1}_{m_1 \text{lần}}, \ldots, \underbrace{\lambda_r, \ldots, \lambda_r}_{m_r \text{lần}}).$$

Ví dụ. Cho ma trận thực $A = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & -2 \\ -3 & -1 & 0 \end{pmatrix}$. Tìm trị riêng và vectơ riêng của A. Xác định cơ sở, số chiều của các không gian riêng tương ứng.

Giải. - Đa thức đặc trưng

$$P_A(\lambda) = |A - \lambda I_3| = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 3 & 2 \\ 1 & 1-\lambda & -2 \\ -3 & -1 & -\lambda \end{vmatrix} = -(\lambda-4)(\lambda^2+4).$$

- Trị riêng

- Trị riêng

$$P_A(\lambda) = 0 \Leftrightarrow \lambda = 4.$$

- Trị riêng

$$P_A(\lambda) = 0 \Leftrightarrow \lambda = 4.$$

Do đó ma trận A chỉ có một trị riêng $\lambda = 4$ (bội 1).

- Trị riêng

$$P_A(\lambda) = 0 \Leftrightarrow \lambda = 4.$$

Do đó ma trận A chỉ có một trị riêng $\lambda = 4$ (bội 1).

- Không gian riêng $E(4)$ là không gian nghiệm của hệ phương trình $(A - 4I_3)X = 0$.

- Trị riêng

$$P_A(\lambda) = 0 \Leftrightarrow \lambda = 4.$$

Do đó ma trận A chỉ có một trị riêng $\lambda = 4$ (bội 1).

- Không gian riêng $E(4)$ là không gian nghiệm của hệ phương trình $(A - 4I_3)X = 0$. Ta có

$$(A - 4I_3) = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 1 & -3 & -2 \\ -3 & -1 & -4 \end{pmatrix}$$

- Trị riêng

$$P_A(\lambda) = 0 \Leftrightarrow \lambda = 4.$$

Do đó ma trận A chỉ có một trị riêng $\lambda = 4$ (bội 1).

- Không gian riêng $E(4)$ là không gian nghiệm của hệ phương trình $(A - 4I_3)X = 0$. Ta có

$$(A - 4I_3) = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 1 & -3 & -2 \\ -3 & -1 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow[d_3+3d_1]{\substack{-d_1 \\ d_2-d_1}} \begin{pmatrix} 1 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -10 & -10 \end{pmatrix}$$

- Trị riêng
$$P_A(\lambda) = 0 \Leftrightarrow \lambda = 4.$$
Do đó ma trận A chỉ có một trị riêng $\lambda = 4$ (bội 1).

- Không gian riêng $E(4)$ là không gian nghiệm của hệ phương trình $(A - 4I_3)X = 0$. Ta có

$$(A - 4I_3) = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 1 & -3 & -2 \\ -3 & -1 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow[d_3+3d_1]{\substack{-d_1 \\ d_2-d_1}} \begin{pmatrix} 1 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -10 & -10 \end{pmatrix}$$
$$\xrightarrow[d_2 \leftrightarrow d_3]{\substack{-\frac{1}{10}d_3 \\ d_1+3d_3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- Trị riêng

$$P_A(\lambda) = 0 \Leftrightarrow \lambda = 4.$$

Do đó ma trận A chỉ có một trị riêng $\lambda = 4$ (bội 1).

- Không gian riêng $E(4)$ là không gian nghiệm của hệ phương trình $(A - 4I_3)X = 0$. Ta có

$$(A - 4I_3) = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 1 & -3 & -2 \\ -3 & -1 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow[d_3+3d_1]{\substack{-d_1 \\ d_2-d_1}} \begin{pmatrix} 1 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -10 & -10 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[d_2 \leftrightarrow d_3]{\substack{-\frac{1}{10}d_3 \\ d_1+3d_3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ta có nghiệm tổng quát

$$(x_1, x_2, x_3) = (-t, -t, t), \quad t \in \mathbb{R}.$$

- Trị riêng

$$P_A(\lambda) = 0 \Leftrightarrow \lambda = 4.$$

Do đó ma trận A chỉ có một trị riêng $\lambda = 4$ (bội 1).

- Không gian riêng $E(4)$ là không gian nghiệm của hệ phương trình $(A - 4I_3)X = 0$. Ta có

$$(A - 4I_3) = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 1 & -3 & -2 \\ -3 & -1 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow[d_3+3d_1]{\substack{-d_1 \\ d_2-d_1}} \begin{pmatrix} 1 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -10 & -10 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[d_2 \leftrightarrow d_3]{\substack{-\frac{1}{10}d_3 \\ d_1+3d_3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ta có nghiệm tổng quát

$$(x_1, x_2, x_3) = (-t, -t, t), \quad t \in \mathbb{R}. \qquad \text{chọn } t = 1$$

Suy ra $\dim E(4) = 1$ với cơ sở $\mathcal{B} = \{(-1, -1, 1)\}$.

Ví dụ. Chéo hóa ma trận thực

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ -3 & -5 & -3 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ví dụ. Chéo hóa ma trận thực

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ -3 & -5 & -3 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Giải. - Đa thức đặc trưng

$$P_A(\boldsymbol{\lambda}) = |A - \boldsymbol{\lambda} I_3|$$

Ví dụ. Chéo hóa ma trận thực

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ -3 & -5 & -3 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Giải. - Đa thức đặc trưng

$$P_A(\boldsymbol{\lambda}) = |A - \boldsymbol{\lambda} I_3| = \begin{vmatrix} 1-\boldsymbol{\lambda} & 3 & 3 \\ -3 & -5-\boldsymbol{\lambda} & -3 \\ 3 & 3 & 1-\boldsymbol{\lambda} \end{vmatrix}$$

Ví dụ. Chéo hóa ma trận thực

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ -3 & -5 & -3 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Giải. - Đa thức đặc trưng

$$P_A(\lambda) = |A - \lambda I_3| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 3 & 3 \\ -3 & -5-\lambda & -3 \\ 3 & 3 & 1-\lambda \end{vmatrix} = -(\lambda - 1)(\lambda + 2)^2.$$

Ví dụ. Chéo hóa ma trận thực

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ -3 & -5 & -3 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Giải. - Đa thức đặc trưng

$$P_A(\boldsymbol{\lambda}) = |A - \boldsymbol{\lambda} I_3| = \begin{vmatrix} 1-\boldsymbol{\lambda} & 3 & 3 \\ -3 & -5-\boldsymbol{\lambda} & -3 \\ 3 & 3 & 1-\boldsymbol{\lambda} \end{vmatrix} = -(\boldsymbol{\lambda}-1)(\boldsymbol{\lambda}+2)^2.$$

- Trị riêng

$$P_A(\boldsymbol{\lambda}) = 0 \Leftrightarrow \boldsymbol{\lambda} = 1\,(\text{bội } 1), \boldsymbol{\lambda} = -2\,(\text{bội } 2).$$

Ví dụ. Chéo hóa ma trận thực

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ -3 & -5 & -3 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Giải. - Đa thức đặc trưng

$$P_A(\boldsymbol{\lambda}) = |A - \boldsymbol{\lambda} I_3| = \begin{vmatrix} 1-\boldsymbol{\lambda} & 3 & 3 \\ -3 & -5-\boldsymbol{\lambda} & -3 \\ 3 & 3 & 1-\boldsymbol{\lambda} \end{vmatrix} = -(\boldsymbol{\lambda} - 1)(\boldsymbol{\lambda} + 2)^2.$$

- Trị riêng

$$P_A(\boldsymbol{\lambda}) = 0 \Leftrightarrow \boldsymbol{\lambda} = 1\,(\text{bội } 1), \boldsymbol{\lambda} = -2\,(\text{bội } 2).$$

Vậy A có 2 trị riêng là $\lambda_1 = 1\,(\text{bội } 1), \lambda_2 = -2\,(\text{bội } 2).$

- Không gian riêng

- Không gian riêng

- Với $\lambda_1 = 1$,

- Không gian riêng

• Với $\lambda_1 = 1$, không gian riêng $E(1)$ là không gian nghiệm của hệ phương trình $(A - I_3)X = 0$.

- Không gian riêng

• Với $\lambda_1 = 1$, không gian riêng $E(1)$ là không gian nghiệm của hệ phương trình $(A - I_3)X = 0$. Ta có

$$(A - I_3) = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 3 \\ -3 & -6 & -3 \\ 3 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

- Không gian riêng

• Với $\lambda_1 = 1$, không gian riêng $E(1)$ là không gian nghiệm của hệ phương trình $(A - I_3)X = 0$. Ta có

$$(A - I_3) = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 3 \\ -3 & -6 & -3 \\ 3 & 3 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[d_3 - 3d_1]{\substack{-\frac{1}{3}d_2 \\ d_1 \leftrightarrow d_2}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & -3 \\ 0 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

- Không gian riêng

• Với $\lambda_1 = 1$, không gian riêng $E(1)$ là không gian nghiệm của hệ phương trình $(A - I_3)X = 0$. Ta có

$$(A - I_3) = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 3 \\ -3 & -6 & -3 \\ 3 & 3 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[d_3 - 3d_1]{\substack{-\frac{1}{3}d_2 \\ d_1 \leftrightarrow d_2}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & -3 \\ 0 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[d_3 - 3d_2]{\substack{-\frac{1}{3}d_2 \\ d_1 - 2d_2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- Không gian riêng

• Với $\lambda_1 = 1$, không gian riêng $E(1)$ là không gian nghiệm của hệ phương trình $(A - I_3)X = 0$. Ta có

$$(A - I_3) = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 3 \\ -3 & -6 & -3 \\ 3 & 3 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[d_3 - 3d_1]{\substack{-\frac{1}{3}d_2 \\ d_1 \leftrightarrow d_2}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & -3 \\ 0 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[d_3 - 3d_2]{\substack{-\frac{1}{3}d_2 \\ d_1 - 2d_2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ta có nghiệm tổng quát

$$(x_1, x_2, x_3) = (t, -t, t), \quad t \in \mathbb{R}.$$

- Không gian riêng

• Với $\lambda_1 = 1$, không gian riêng $E(1)$ là không gian nghiệm của hệ phương trình $(A - I_3)X = 0$. Ta có

$$(A - I_3) = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 3 \\ -3 & -6 & -3 \\ 3 & 3 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[d_3 - 3d_1]{\substack{-\frac{1}{3}d_2 \\ d_1 \leftrightarrow d_2}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & -3 \\ 0 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[d_3 - 3d_2]{\substack{-\frac{1}{3}d_2 \\ d_1 - 2d_2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ta có nghiệm tổng quát

$$(x_1, x_2, x_3) = (t, -t, t), \quad t \in \mathbb{R}. \qquad \text{chọn } t = 1$$

Suy ra $E(1)$ có $\dim E(1) = 1$ với cơ sở $\mathcal{B}_1 = \{u_1 = (1, -1, 1)\}$.

- Với $\lambda_2 = -2$,

• Với $\lambda_2 = -2$, không gian riêng $E(-2)$ là không gian nghiệm của hệ phương trình $(A + 2I_3)X = 0$.

• Với $\lambda_2 = -2$, không gian riêng $E(-2)$ là không gian nghiệm của hệ phương trình $(A + 2I_3)X = 0$. Ta có

$$(A + 2I_3) = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ -3 & -3 & -3 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

• Với $\lambda_2 = -2$, không gian riêng $E(-2)$ là không gian nghiệm của hệ phương trình $(A + 2I_3)X = 0$. Ta có

$$(A + 2I_3) = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ -3 & -3 & -3 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[d_3 - 3d_1]{\substack{-\frac{1}{3}d_1 \\ d_2 + 3d_1}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

• Với $\lambda_2 = -2$, không gian riêng $E(-2)$ là không gian nghiệm của hệ phương trình $(A + 2I_3)X = 0$. Ta có

$$(A+2I_3) = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ -3 & -3 & -3 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[d_3-3d_1]{\substack{-\frac{1}{3}d_1 \\ d_2+3d_1}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ta có nghiệm tổng quát

$$(x_1, x_2, x_3) = (-t - s, t, s), \quad t, s \in \mathbb{R}.$$

• Với $\lambda_2 = -2$, không gian riêng $E(-2)$ là không gian nghiệm của hệ phương trình $(A + 2I_3)X = 0$. Ta có

$$(A+2I_3) = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ -3 & -3 & -3 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[d_3-3d_1]{\substack{-\frac{1}{3}d_1 \\ d_2+3d_1}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ta có nghiệm tổng quát

$$(x_1, x_2, x_3) = (-t - s, t, s), \quad t, s \in \mathbb{R}.$$

Suy ra $E(1)$ có $\dim E(1) = 2$ với cơ sở

$$\mathcal{B}_2 = \{u_2 = (-1, 1, 0), u_3 = \{-1, 0, 1\}\}.$$

• Với $\lambda_2 = -2$, không gian riêng $E(-2)$ là không gian nghiệm của hệ phương trình $(A + 2I_3)X = 0$. Ta có

$$(A + 2I_3) = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ -3 & -3 & -3 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[d_3 - 3d_1]{\substack{-\frac{1}{3}d_1 \\ d_2 + 3d_1}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ta có nghiệm tổng quát

$$(x_1, x_2, x_3) = (-t - s, t, s), \quad t, s \in \mathbb{R}.$$

Suy ra $E(1)$ có $\dim E(1) = 2$ với cơ sở

$$\mathcal{B}_2 = \{u_2 = (-1, 1, 0), u_3 = \{-1, 0, 1\}\}.$$

Vì các không gian $E(\lambda_i)$ của A có số chiều bằng số bội của các trị riêng tương ứng nên A chéo hóa được.

Lập ma trận P bằng cách lần lượt dựng các vectơ trong

$$\mathcal{B}_1 = \{u_1 = (1, -1, 1)\} \text{ và } \mathcal{B}_2 = \{u_2 = (-1, 1, 0), u_3 = \{-1, 0, 1\}\}$$

thành các cột

Lập ma trận P bằng cách lần lượt dựng các vectơ trong

$$\mathcal{B}_1 = \{u_1 = (1, -1, 1)\} \text{ và } \mathcal{B}_2 = \{u_2 = (-1, 1, 0), u_3 = \{-1, 0, 1\}\}$$

thành các cột

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Lập ma trận P bằng cách lần lượt dựng các vectơ trong

$$\mathcal{B}_1 = \{u_1 = (1,-1,1)\} \text{ và } \mathcal{B}_2 = \{u_2 = (-1,1,0), u_3 = \{-1,0,1\}\}$$

thành các cột

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Khi đó

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Lập ma trận P bằng cách lần lượt dựng các vectơ trong

$$\mathcal{B}_1 = \{u_1 = (1, -1, 1)\} \text{ và } \mathcal{B}_2 = \{u_2 = (-1, 1, 0), u_3 = \{-1, 0, 1\}\}$$

thành các cột

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Khi đó

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Ví dụ.(tự làm) Chéo hóa ma trận thực

$$\begin{pmatrix} 1 & -4 & -4 \\ 8 & -11 & -8 \\ -8 & 8 & 5 \end{pmatrix}$$

1.4. Một vài ứng dụng sự chéo hóa

1.4. Một vài ứng dụng sự chéo hóa

1. **Tính lũy thừa của ma trận**
2. **Tính lũy thừa của toán tử tuyến tính**
3. **Tìm một dãy số thỏa công thức truy hồi**
4. **Giải hệ phương trình vi phân tuyến tính hệ số hằng**

1.4.1. Tính lũy thừa của ma trận

Ví dụ. Cho $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$. Tính A^n?

1.4.1. Tính lũy thừa của ma trận

Ví dụ. Cho $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$. Tính A^n?

Bài toán. Cho $A \in M_n(K)$ và A chéo hóa được trên K. Tìm A^k?

1.4.1. Tính lũy thừa của ma trận

Ví dụ. Cho $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$. Tính A^n?

Bài toán. Cho $A \in M_n(K)$ và A chéo hóa được trên K. Tìm A^k?

Giải. Vì A chéo hóa được trên K nên tồn tại một ma trận khả nghịch P sao cho

$$P^{-1}AP = D \tag{1}$$

là một ma trận đường chéo.

1.4.1. Tính lũy thừa của ma trận

Ví dụ. Cho $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$. Tính A^n?

Bài toán. Cho $A \in M_n(K)$ và A chéo hóa được trên K. Tìm A^k?

Giải. Vì A chéo hóa được trên K nên tồn tại một ma trận khả nghịch P sao cho

$$P^{-1}AP = D \tag{1}$$

là một ma trận đường chéo. Giả sử

$$D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n).$$

1.4.1. Tính lũy thừa của ma trận

Ví dụ. Cho $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$. Tính A^n?

Bài toán. Cho $A \in M_n(K)$ và A chéo hóa được trên K. Tìm A^k?

Giải. Vì A chéo hóa được trên K nên tồn tại một ma trận khả nghịch P sao cho

$$P^{-1}AP = D \tag{1}$$

là một ma trận đường chéo. Giả sử

$$D = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n).$$

Từ (1) ta có $A = PDP^{-1}$

1.4.1. Tính lũy thừa của ma trận

Ví dụ. Cho $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$. Tính A^n?

Bài toán. Cho $A \in M_n(K)$ và A chéo hóa được trên K. Tìm A^k?

Giải. Vì A chéo hóa được trên K nên tồn tại một ma trận khả nghịch P sao cho

$$P^{-1}AP = D \tag{1}$$

là một ma trận đường chéo. Giả sử

$$D = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n).$$

Từ (1) ta có $A = PDP^{-1}$ nên

$$A^k = (PDP^{-1})^k$$

1.4.1. Tính lũy thừa của ma trận

Ví dụ. Cho $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$. Tính A^n?

Bài toán. Cho $A \in M_n(K)$ và A chéo hóa được trên K. Tìm A^k?

Giải. Vì A chéo hóa được trên K nên tồn tại một ma trận khả nghịch P sao cho

$$P^{-1}AP = D \tag{1}$$

là một ma trận đường chéo. Giả sử

$$D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n).$$

Từ (1) ta có $A = PDP^{-1}$ nên

$$A^k = (PDP^{-1})^k = PD^kP^{-1}$$

1.4.1. Tính lũy thừa của ma trận

Ví dụ. Cho $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$. Tính A^n?

Bài toán. Cho $A \in M_n(K)$ và A chéo hóa được trên K. Tìm A^k?

Giải. Vì A chéo hóa được trên K nên tồn tại một ma trận khả nghịch P sao cho

$$P^{-1}AP = D \tag{1}$$

là một ma trận đường chéo. Giả sử

$$D = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n).$$

Từ (1) ta có $A = PDP^{-1}$ nên

$$A^k = (PDP^{-1})^k = PD^kP^{-1} = P\operatorname{diag}(\lambda_1^k, \ldots, \lambda_n^k)P^{-1}.$$

Giải.

- Đa thức đặc trưng

$$P_A(\boldsymbol{\lambda}) = (\boldsymbol{\lambda} - 2)(\boldsymbol{\lambda} - 3).$$

Giải.

- Đa thức đặc trưng

$$P_A(\boldsymbol{\lambda}) = (\boldsymbol{\lambda} - 2)(\boldsymbol{\lambda} - 3).$$

- Trị riêng

$$A \text{ có 2 trị riêng là } \lambda_1 = 2,\ \lambda_2 = 3.$$

Giải.

- Đa thức đặc trưng

$$P_A(\boldsymbol{\lambda}) = (\boldsymbol{\lambda} - 2)(\boldsymbol{\lambda} - 3).$$

- Trị riêng

$$A \text{ có 2 trị riêng là } \lambda_1 = 2,\ \lambda_2 = 3.$$

- Không gian riêng

$$E(2) = \langle u = (-1, 1)\rangle \text{ và } E(3) = \langle v = (-1, 2)\rangle.$$

Giải.

- Đa thức đặc trưng

$$P_A(\boldsymbol{\lambda}) = (\boldsymbol{\lambda} - 2)(\boldsymbol{\lambda} - 3).$$

- Trị riêng

$$A \text{ có 2 trị riêng là } \lambda_1 = 2,\ \lambda_2 = 3.$$

- Không gian riêng

$$E(2) = \langle u = (-1, 1)\rangle \text{ và } E(3) = \langle v = (-1, 2)\rangle.$$

Vậy $P = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ là ma trận làm chéo A và

$$D = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Giải.

- Đa thức đặc trưng

$$P_A(\boldsymbol{\lambda}) = (\boldsymbol{\lambda} - 2)(\boldsymbol{\lambda} - 3).$$

- Trị riêng

$$A \text{ có 2 trị riêng là } \lambda_1 = 2,\ \lambda_2 = 3.$$

- Không gian riêng

$$E(2) = \langle u = (-1, 1)\rangle \text{ và } E(3) = \langle v = (-1, 2)\rangle.$$

Vậy $P = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ là ma trận làm chéo A và

$$D = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Ta có

$$A = PDP^{-1}.$$

Do đó

$$A^n = PD^nP^{-1}.$$

Do đó

$$A^n = PD^nP^{-1}.$$

Do D là ma trận đường chéo nên dễ dàng tính được

$$D^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & 3^n \end{pmatrix}.$$

Do đó

$$A^n = PD^nP^{-1}.$$

Do D là ma trận đường chéo nên dễ dàng tính được

$$D^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & 3^n \end{pmatrix}.$$

Tiếp theo, tính được

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Do đó

$$A^n = PD^nP^{-1}.$$

Do D là ma trận đường chéo nên dễ dàng tính được

$$D^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & 3^n \end{pmatrix}.$$

Tiếp theo, tính được

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ta có

$$A^n = PD^nP^{-1} = \begin{pmatrix} 2^{n+1} - 3^n & 2^n - 3^n \\ -2^{n+1} + 2.3^n & -2^n + 2.3^n \end{pmatrix}.$$

Do đó

$$A^n = PD^nP^{-1}.$$

Do D là ma trận đường chéo nên dễ dàng tính được

$$D^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & 3^n \end{pmatrix}.$$

Tiếp theo, tính được

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ta có

$$A^n = PD^nP^{-1} = \begin{pmatrix} 2^{n+1} - 3^n & 2^n - 3^n \\ -2^{n+1} + 2.3^n & -2^n + 2.3^n \end{pmatrix}.$$

Ví dụ.(tự làm) Cho $A = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$. Tìm công thức A^n?

1.4.2. Tính lũy thừa của toán tử

Bài toán. Cho f là một toán tử chéo hóa được trên V. Tìm công thức của f^k?

1.4.2. Tính lũy thừa của toán tử

Bài toán. Cho f là một toán tử chéo hóa được trên V. Tìm công thức của f^k?

Giải. Vì f chéo hóa được nên tồn tại một cơ sở $\mathcal{B} = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ của V sao cho $[f]_{\mathcal{B}}$ là ma trận đường chéo.

1.4.2. Tính lũy thừa của toán tử

Bài toán. Cho f là một toán tử chéo hóa được trên V. Tìm công thức của f^k?

Giải. Vì f chéo hóa được nên tồn tại một cơ sở $\mathcal{B} = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ của V sao cho $[f]_{\mathcal{B}}$ là ma trận đường chéo. Giả sử

$$[f]_{\mathcal{B}} = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n).$$

1.4.2. Tính lũy thừa của toán tử

Bài toán. Cho f là một toán tử chéo hóa được trên V. Tìm công thức của f^k?

Giải. Vì f chéo hóa được nên tồn tại một cơ sở $\mathcal{B} = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ của V sao cho $[f]_{\mathcal{B}}$ là ma trận đường chéo. Giả sử

$$[f]_{\mathcal{B}} = \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n).$$

Gọi $\mathcal{B}_0$ là cơ sở chính tắc của V, ta dễ dàng lập ma trận $[f]_{\mathcal{B}_0}$.

1.4.2. Tính lũy thừa của toán tử

Bài toán. Cho f là một toán tử chéo hóa được trên V. Tìm công thức của f^k?

Giải. Vì f chéo hóa được nên tồn tại một cơ sở $\mathcal{B} = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ của V sao cho $[f]_{\mathcal{B}}$ là ma trận đường chéo. Giả sử

$$[f]_{\mathcal{B}} = \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n).$$

Gọi $\mathcal{B}_0$ là cơ sở chính tắc của V, ta dễ dàng lập ma trận $[f]_{\mathcal{B}_0}$. Khi đó

$$[f]_{\mathcal{B}} = (\mathcal{B}_0 \to \mathcal{B})^{-1}[f]_{\mathcal{B}_0}(\mathcal{B}_0 \to \mathcal{B})$$

1.4.2. Tính lũy thừa của toán tử

Bài toán. Cho f là một toán tử chéo hóa được trên V. Tìm công thức của f^k?

Giải. Vì f chéo hóa được nên tồn tại một cơ sở $\mathcal{B} = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ của V sao cho $[f]_{\mathcal{B}}$ là ma trận đường chéo. Giả sử

$$[f]_{\mathcal{B}} = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n).$$

Gọi $\mathcal{B}_0$ là cơ sở chính tắc của V, ta dễ dàng lập ma trận $[f]_{\mathcal{B}_0}$. Khi đó

$$[f]_{\mathcal{B}} = (\mathcal{B}_0 \to \mathcal{B})^{-1}[f]_{\mathcal{B}_0}(\mathcal{B}_0 \to \mathcal{B})$$

hay

$$[f]_{\mathcal{B}_0} = (\mathcal{B}_0 \to \mathcal{B})[f]_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}_0 \to \mathcal{B})^{-1}.$$

1.4.2. Tính lũy thừa của toán tử

Bài toán. Cho f là một toán tử chéo hóa được trên V. Tìm công thức của f^k?

Giải. Vì f chéo hóa được nên tồn tại một cơ sở $\mathcal{B} = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ của V sao cho $[f]_{\mathcal{B}}$ là ma trận đường chéo. Giả sử

$$[f]_{\mathcal{B}} = \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n).$$

Gọi $\mathcal{B}_0$ là cơ sở chính tắc của V, ta dễ dàng lập ma trận $[f]_{\mathcal{B}_0}$. Khi đó

$$[f]_{\mathcal{B}} = (\mathcal{B}_0 \to \mathcal{B})^{-1}[f]_{\mathcal{B}_0}(\mathcal{B}_0 \to \mathcal{B})$$

hay

$$[f]_{\mathcal{B}_0} = (\mathcal{B}_0 \to \mathcal{B})[f]_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}_0 \to \mathcal{B})^{-1}.$$

Do đó

$$([f]_{\mathcal{B}_0})^k = (\mathcal{B}_0 \to \mathcal{B})([f]_{\mathcal{B}})^k(\mathcal{B}_0 \to \mathcal{B})^{-1}.$$

Hơn nữa

$$[f^k]_{\mathcal{B}_0} = ([f]_{\mathcal{B}_0})^k.$$

Hơn nữa

$$[f^k]_{\mathcal{B}_0} = ([f]_{\mathcal{B}_0})^k.$$

Suy ra

$$[f^k]_{\mathcal{B}_0} = (\mathcal{B}_0 \to \mathcal{B})([f]_{\mathcal{B}})^k(\mathcal{B}_0 \to \mathcal{B})^{-1}.$$

Hơn nữa
$$[f^k]_{\mathcal{B}_0} = ([f]_{\mathcal{B}_0})^k.$$
Suy ra
$$[f^k]_{\mathcal{B}_0} = (\mathcal{B}_0 \to \mathcal{B})([f]_{\mathcal{B}})^k(\mathcal{B}_0 \to \mathcal{B})^{-1}.$$
Ngoài ra ta có

- $([f]_{\mathcal{B}})^k = \mathrm{diag}(\lambda_1^k, \lambda_2^k, \ldots, \lambda_n^k)$.

Hơn nữa

$$[f^k]_{\mathcal{B}_0} = ([f]_{\mathcal{B}_0})^k.$$

Suy ra

$$[f^k]_{\mathcal{B}_0} = (\mathcal{B}_0 \to \mathcal{B})([f]_{\mathcal{B}})^k(\mathcal{B}_0 \to \mathcal{B})^{-1}.$$

Ngoài ra ta có

- $([f]_{\mathcal{B}})^k = \mathrm{diag}(\lambda_1^k, \lambda_2^k, \dots, \lambda_n^k)$.
- $(\mathcal{B}_0 \to \mathcal{B}) = (u_1^\top \, u_2^\top \, \dots \, u_n^\top)$.

Hơn nữa
$$[f^k]_{\mathcal{B}_0} = ([f]_{\mathcal{B}_0})^k.$$
Suy ra
$$[f^k]_{\mathcal{B}_0} = (\mathcal{B}_0 \to \mathcal{B})([f]_{\mathcal{B}})^k(\mathcal{B}_0 \to \mathcal{B})^{-1}.$$
Ngoài ra ta có

- $([f]_{\mathcal{B}})^k = \mathrm{diag}(\lambda_1^k, \lambda_2^k, \ldots, \lambda_n^k)$.
- $(\mathcal{B}_0 \to \mathcal{B}) = (u_1^\top \, u_2^\top \, \ldots \, u_n^\top)$.

Do đó, ta dễ dàng tính $[f^k]_{\mathcal{B}_0}$.

Hơn nữa

$$[f^k]_{\mathcal{B}_0} = ([f]_{\mathcal{B}_0})^k.$$

Suy ra

$$[f^k]_{\mathcal{B}_0} = (\mathcal{B}_0 \to \mathcal{B})([f]_{\mathcal{B}})^k(\mathcal{B}_0 \to \mathcal{B})^{-1}.$$

Ngoài ra ta có

- $([f]_{\mathcal{B}})^k = \mathrm{diag}(\lambda_1^k, \lambda_2^k, \ldots, \lambda_n^k)$.
- $(\mathcal{B}_0 \to \mathcal{B}) = (u_1^\top \, u_2^\top \, \ldots \, u_n^\top)$.

Do đó, ta dễ dàng tính $[f^k]_{\mathcal{B}_0}$. Từ đó suy ra được công thức của f^k.

Hơn nữa
$$[f^k]_{\mathcal{B}_0} = ([f]_{\mathcal{B}_0})^k.$$
Suy ra
$$[f^k]_{\mathcal{B}_0} = (\mathcal{B}_0 \to \mathcal{B})([f]_{\mathcal{B}})^k(\mathcal{B}_0 \to \mathcal{B})^{-1}.$$
Ngoài ra ta có

- $([f]_{\mathcal{B}})^k = \mathrm{diag}(\lambda_1^k, \lambda_2^k, \ldots, \lambda_n^k)$.
- $(\mathcal{B}_0 \to \mathcal{B}) = (u_1^\top \; u_2^\top \; \ldots \; u_n^\top)$.

Do đó, ta dễ dàng tính $[f^k]_{\mathcal{B}_0}$. Từ đó suy ra được công thức của f^k.

Ví dụ. Cho toán tử tuyến tính $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ xác định bởi
$$f(x_1, x_2) = (x_1 - x_2, 2x_1 + 4x_2).$$
Tìm công thức f^n?

Giải.

Bước 1. Tiến hành chéo hóa toán tử ta được tìm được một cơ sở $\mathcal{B} = (u_1 = (-1, 1), u_2 = (-1, 2))$ và

$$[f]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Giải.

Bước 1. Tiến hành chéo hóa toán tử ta được tìm được một cơ sở $\mathcal{B} = (u_1 = (-1, 1), u_2 = (-1, 2))$ và

$$[f]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Bước 2. Ta có

$$(\mathcal{B}_0 \to \mathcal{B}) = (u_1^\top \ u_2^\top) = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Giải.

Bước 1. Tiến hành chéo hóa toán tử ta được tìm được một cơ sở $\mathcal{B} = (u_1 = (-1, 1), u_2 = (-1, 2))$ và

$$[f]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Bước 2. Ta có

$$(\mathcal{B}_0 \to \mathcal{B}) = (u_1^\top \ u_2^\top) = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

và

$$(\mathcal{B}_0 \to \mathcal{B})^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Giải.

Bước 1. Tiến hành chéo hóa toán tử ta được tìm được một cơ sở $\mathcal{B} = (u_1 = (-1, 1), u_2 = (-1, 2))$ và

$$[f]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Bước 2. Ta có

$$(\mathcal{B}_0 \to \mathcal{B}) = (u_1^\top \ u_2^\top) = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

và

$$(\mathcal{B}_0 \to \mathcal{B})^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ngoài ra

$$[f]_{\mathcal{B}} = (\mathcal{B}_0 \to \mathcal{B})^{-1}[f]_{\mathcal{B}_0}(\mathcal{B}_0 \to \mathcal{B})$$

Giải.

Bước 1. Tiến hành chéo hóa toán tử ta được tìm được một cơ sở $\mathcal{B} = (u_1 = (-1, 1), u_2 = (-1, 2))$ và

$$[f]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Bước 2. Ta có

$$(\mathcal{B}_0 \to \mathcal{B}) = (u_1^\top \ u_2^\top) = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

và

$$(\mathcal{B}_0 \to \mathcal{B})^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ngoài ra

$$[f]_{\mathcal{B}} = (\mathcal{B}_0 \to \mathcal{B})^{-1}[f]_{\mathcal{B}_0}(\mathcal{B}_0 \to \mathcal{B})$$

hay

$$[f]_{\mathcal{B}_0} = (\mathcal{B}_0 \to \mathcal{B})[f]_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}_0 \to \mathcal{B})^{-1}.$$

Suy ra

$$([f]_{\mathcal{B}_0})^n \quad = \quad (\mathcal{B}_0 \to \mathcal{B})([f]_{\mathcal{B}})^n(\mathcal{B}_0 \to \mathcal{B})^{-1}$$

Suy ra

$$\begin{aligned}([f]_{\mathcal{B}_0})^n &= (\mathcal{B}_0 \to \mathcal{B})([f]_{\mathcal{B}})^n(\mathcal{B}_0 \to \mathcal{B})^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}^n\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Suy ra

$$\begin{aligned}
([f]_{\mathcal{B}_0})^n &= (\mathcal{B}_0 \to \mathcal{B})([f]_{\mathcal{B}})^n(\mathcal{B}_0 \to \mathcal{B})^{-1} \\
&= \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}^n\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & 3^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Suy ra

$$\begin{aligned}
([f]_{\mathcal{B}_0})^n &= (\mathcal{B}_0 \to \mathcal{B})([f]_{\mathcal{B}})^n(\mathcal{B}_0 \to \mathcal{B})^{-1}\\
&= \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & 3^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix} 2^{n+1} - 3^n & 2^n - 3^n \\ -2^{n+1} + 2.3^n & -2^n + 2.3^n \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Suy ra

$$\begin{aligned}
([f]_{\mathcal{B}_0})^n &= (\mathcal{B}_0 \to \mathcal{B})([f]_{\mathcal{B}})^n(\mathcal{B}_0 \to \mathcal{B})^{-1} \\
&= \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & 3^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 2^{n+1} - 3^n & 2^n - 3^n \\ -2^{n+1} + 2.3^n & -2^n + 2.3^n \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Như vậy công thức của f^n là

$$f^n(x_1, x_2) = ((2^{n+1} - 3^n)x_1 + (2^n - 3^n)x_2, (-2^{n+1} + 2.3^n)x_1 + (-2^n + 2.3^n)x_2).$$

1.4.3. Tìm một dãy số thỏa công thức truy hồi

1.4.3. Tìm một dãy số thỏa công thức truy hồi

Minh họa cho trường hợp hai dãy số.

1.4.3. Tìm một dãy số thỏa công thức truy hồi

Minh họa cho trường hợp hai dãy số.

Ví dụ. Giả sử các dãy số thực $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ và $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ thỏa các công thức truy hồi

$$\begin{cases} u_{n+1} = u_n - v_n; \\ v_{n+1} = 2u_n + 4v_n, \end{cases} \text{ với } \begin{cases} u_0 = 2; \\ v_0 = 1. \end{cases} \tag{1}$$

Tìm công thức tính các số hạng tổng quát của u_n và v_n.

1.4.3. Tìm một dãy số thỏa công thức truy hồi

Minh họa cho trường hợp hai dãy số.

Ví dụ. Giả sử các dãy số thực $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ và $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ thỏa các công thức truy hồi

$$\begin{cases} u_{n+1} = u_n - v_n; \\ v_{n+1} = 2u_n + 4v_n, \end{cases} \text{ với } \begin{cases} u_0 = 2; \\ v_0 = 1. \end{cases} \qquad (1)$$

Tìm công thức tính các số hạng tổng quát của u_n và v_n.

Đặt

$$X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} \text{ và } A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}. \qquad (2)$$

1.4.3. Tìm một dãy số thỏa công thức truy hồi

Minh họa cho trường hợp hai dãy số.

Ví dụ. Giả sử các dãy số thực $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ và $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ thỏa các công thức truy hồi

$$\begin{cases} u_{n+1} = u_n - v_n; \\ v_{n+1} = 2u_n + 4v_n, \end{cases} \text{ với } \begin{cases} u_0 = 2; \\ v_0 = 1. \end{cases} \tag{1}$$

Tìm công thức tính các số hạng tổng quát của u_n và v_n.

Đặt

$$X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} \text{ và } A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}. \tag{2}$$

Công thức (1) được viết lại như sau:

$$X_{n+1} = AX_n \text{ với } X_0 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{3}$$

1.4.3. Tìm một dãy số thỏa công thức truy hồi

Minh họa cho trường hợp hai dãy số.

Ví dụ. Giả sử các dãy số thực $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ và $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ thỏa các công thức truy hồi

$$\begin{cases} u_{n+1} = u_n - v_n; \\ v_{n+1} = 2u_n + 4v_n, \end{cases} \quad \text{với} \quad \begin{cases} u_0 = 2; \\ v_0 = 1. \end{cases} \tag{1}$$

Tìm công thức tính các số hạng tổng quát của u_n và v_n.

Đặt

$$X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} \text{ và } A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}. \tag{2}$$

Công thức (1) được viết lại như sau:

$$X_{n+1} = AX_n \text{ với } X_0 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{3}$$

Từ đó tính được $X_n = A^n X_0$.

Sử dụng phương pháp chéo hóa ta tính được

$$A^n = \begin{pmatrix} 2^{n+1} - 3^n & 2^n - 3^n \\ -2^{n+1} + 2.3^n & -2^n + 2.3^n \end{pmatrix}.$$

Sử dụng phương pháp chéo hóa ta tính được

$$A^n = \begin{pmatrix} 2^{n+1} - 3^n & 2^n - 3^n \\ -2^{n+1} + 2.3^n & -2^n + 2.3^n \end{pmatrix}.$$

Suy ra

$$\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^{n+1} - 3^n & 2^n - 3^n \\ -2^{n+1} + 2.3^n & -2^n + 2.3^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Sử dụng phương pháp chéo hóa ta tính được

$$A^n = \begin{pmatrix} 2^{n+1} - 3^n & 2^n - 3^n \\ -2^{n+1} + 2.3^n & -2^n + 2.3^n \end{pmatrix}.$$

Suy ra

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 2^{n+1} - 3^n & 2^n - 3^n \\ -2^{n+1} + 2.3^n & -2^n + 2.3^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2^{n+2} - 2.3^n + 2^n - 3^n \\ -2^{n+2} + 4.3^n - 2^n + 2.3^n \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Sử dụng phương pháp chéo hóa ta tính được

$$A^n = \begin{pmatrix} 2^{n+1} - 3^n & 2^n - 3^n \\ -2^{n+1} + 2.3^n & -2^n + 2.3^n \end{pmatrix}.$$

Suy ra

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 2^{n+1} - 3^n & 2^n - 3^n \\ -2^{n+1} + 2.3^n & -2^n + 2.3^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2^{n+2} - 2.3^n + 2^n - 3^n \\ -2^{n+2} + 4.3^n - 2^n + 2.3^n \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Vậy

$$\begin{cases} u_n = 5.2^n - 3^{n+1}; \\ v_n = -5.2^n + 6.3^n. \end{cases}$$

1.4.4. Giải hpt vi phân tuyến tính hệ số hằng

1.4.4. Giải hpt vi phân tuyến tính hệ số hằng

Ví dụ. Giải hệ phương trình vi phân $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} & = & 2x; \\ \dfrac{dy}{dt} & = & 3y \end{cases}$ với x, y là các hàm khả vi theo biến t.

1.4.4. Giải hpt vi phân tuyến tính hệ số hằng

Ví dụ. Giải hệ phương trình vi phân $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2x; \\ \dfrac{dy}{dt} = 3y \end{cases}$ với x, y là các hàm khả vi theo biến t.

Đáp án.

$$\begin{cases} x = C_1 e^{2t} \\ y = C_2 e^{3t}, \end{cases}$$

trong đó C_1 và C_2 là các hằng số.

Ví dụ. Giải hệ phương trình vi phân $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2x; \\ \dfrac{dy}{dt} = 3y \end{cases}$ với x, y là các hàm khả vi theo biến t.

Đáp án.

$$\begin{cases} x = C_1 e^{2t} \\ y = C_2 e^{3t}, \end{cases}$$

trong đó C_1 và C_2 là các hằng số.

Ví dụ. Giải hệ phương trình vi phân $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x - y; \\ \dfrac{dy}{dt} = 2x + 4y. \end{cases}$

Bài toán. Tìm nghiệm của phương trình vi phân tuyến tính

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} & = & a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n; \\ \dfrac{dx_2}{dt} & = & a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n; \\ \ldots\ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dfrac{dx_n}{dt} & = & a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n, \end{cases} \qquad (1)$$

trong đó mọi $a_{ij} \in K$ và mọi x_i đều là hàm khả vi theo biến t.

Gọi $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Khi đó $X = [x]_{\mathcal{B}_0} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$.

Gọi $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Khi đó $X = [x]_{\mathcal{B}_0} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$. Hệ (1) được viết lại dưới dạng ma trận như sau:

$$\frac{dX}{dt} = AX, \text{ với } A = (a_{ij}) \tag{2}$$

Gọi $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Khi đó $X = [x]_{\mathcal{B}_0} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$. Hệ (1) được viết lại dưới dạng ma trận như sau:

$$\frac{dX}{dt} = AX, \text{ với } A = (a_{ij}) \tag{2}$$

Giả sử A chéo hóa được, nghĩa là tồn tại ma trận chéo D và ma trận khả nghịch P sao cho

$$D = P^{-1}AP. \tag{3}$$

Gọi $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Khi đó $X = [x]_{\mathcal{B}_0} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$. Hệ (1) được viết lại dưới dạng ma trận như sau:

$$\frac{dX}{dt} = AX, \text{ với } A = (a_{ij}) \tag{2}$$

Giả sử A chéo hóa được, nghĩa là tồn tại ma trận chéo D và ma trận khả nghịch P sao cho

$$D = P^{-1}AP. \tag{3}$$

Ngoài ra, ta có thể xem A như ma trận của biểu diễn toán tử tuyến tính $f \in End_K(K^n)$ theo cơ sở chính tắc $\mathcal{B}_0$.

Gọi $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Khi đó $X = [x]_{\mathcal{B}_0} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$. Hệ (1) được viết lại dưới dạng ma trận như sau:

$$\frac{dX}{dt} = AX, \text{ với } A = (a_{ij}) \tag{2}$$

Giả sử A chéo hóa được, nghĩa là tồn tại ma trận chéo D và ma trận khả nghịch P sao cho

$$D = P^{-1}AP. \tag{3}$$

Ngoài ra, ta có thể xem A như ma trận của biểu diễn toán tử tuyến tính $f \in End_K(K^n)$ theo cơ sở chính tắc $\mathcal{B}_0$. Khi đó tồn tại một cơ sở $\mathcal{B} = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ sao cho ma trận

$$D = [f]_{\mathcal{B}} \text{ và } P = (\mathcal{B}_0 \to \mathcal{B}).$$

Gọi $X' = [x]_{\mathcal{B}}$, ta có

$$[x]_{\mathcal{B}} = (\mathcal{B} \to \mathcal{B}_0)[x]_{\mathcal{B}_0} \Leftrightarrow [x]_{\mathcal{B}} = (\mathcal{B}_0 \to \mathcal{B})^{-1}[x]_{\mathcal{B}_0}$$

Gọi $X' = [x]_{\mathcal{B}}$, ta có

$$[x]_{\mathcal{B}} = (\mathcal{B} \to \mathcal{B}_0)[x]_{\mathcal{B}_0} \Leftrightarrow [x]_{\mathcal{B}} = (\mathcal{B}_0 \to \mathcal{B})^{-1}[x]_{\mathcal{B}_0}$$

hay

$$X' = P^{-1}X \tag{4}$$

Gọi $X' = [x]_{\mathcal{B}}$, ta có

$$[x]_{\mathcal{B}} = (\mathcal{B} \to \mathcal{B}_0)[x]_{\mathcal{B}_0} \Leftrightarrow [x]_{\mathcal{B}} = (\mathcal{B}_0 \to \mathcal{B})^{-1}[x]_{\mathcal{B}_0}$$

hay

$$X' = P^{-1}X \tag{4}$$

Lấy vi phân theo t, ta có

$$\frac{dX'}{dt} = P^{-1}\frac{dX}{dt}. \tag{5}$$

Gọi $X' = [x]_{\mathcal{B}}$, ta có

$$[x]_{\mathcal{B}} = (\mathcal{B} \to \mathcal{B}_0)[x]_{\mathcal{B}_0} \Leftrightarrow [x]_{\mathcal{B}} = (\mathcal{B}_0 \to \mathcal{B})^{-1}[x]_{\mathcal{B}_0}$$

hay

$$X' = P^{-1}X \tag{4}$$

Lấy vi phân theo t, ta có

$$\frac{dX'}{dt} = P^{-1}\frac{dX}{dt}. \tag{5}$$

Thế (2) vào (5)

$$\frac{dX'}{dt} = P^{-1}AX. \tag{6}$$

Gọi $X' = [x]_{\mathcal{B}}$, ta có

$$[x]_{\mathcal{B}} = (\mathcal{B} \to \mathcal{B}_0)[x]_{\mathcal{B}_0} \Leftrightarrow [x]_{\mathcal{B}} = (\mathcal{B}_0 \to \mathcal{B})^{-1}[x]_{\mathcal{B}_0}$$

hay

$$X' = P^{-1}X \tag{4}$$

Lấy vi phân theo t, ta có

$$\frac{dX'}{dt} = P^{-1}\frac{dX}{dt}. \tag{5}$$

Thế (2) vào (5)

$$\frac{dX'}{dt} = P^{-1}AX. \tag{6}$$

Từ (3) ta có $P^{-1}A = DP^{-1}$.

Gọi $X' = [x]_{\mathcal{B}}$, ta có

$$[x]_{\mathcal{B}} = (\mathcal{B} \to \mathcal{B}_0)[x]_{\mathcal{B}_0} \Leftrightarrow [x]_{\mathcal{B}} = (\mathcal{B}_0 \to \mathcal{B})^{-1}[x]_{\mathcal{B}_0}$$

hay

$$X' = P^{-1}X \tag{4}$$

Lấy vi phân theo t, ta có

$$\frac{dX'}{dt} = P^{-1}\frac{dX}{dt}. \tag{5}$$

Thế (2) vào (5)

$$\frac{dX'}{dt} = P^{-1}AX. \tag{6}$$

Từ (3) ta có $P^{-1}A = DP^{-1}$. Thế vào (6), ta được

$$\frac{dX'}{dt} = DP^{-1}X. \tag{6}$$

Gọi $X' = [x]_{\mathcal{B}}$, ta có

$$[x]_{\mathcal{B}} = (\mathcal{B} \to \mathcal{B}_0)[x]_{\mathcal{B}_0} \Leftrightarrow [x]_{\mathcal{B}} = (\mathcal{B}_0 \to \mathcal{B})^{-1}[x]_{\mathcal{B}_0}$$

hay

$$X' = P^{-1}X \tag{4}$$

Lấy vi phân theo t, ta có

$$\frac{dX'}{dt} = P^{-1}\frac{dX}{dt}. \tag{5}$$

Thế (2) vào (5)

$$\frac{dX'}{dt} = P^{-1}AX. \tag{6}$$

Từ (3) ta có $P^{-1}A = DP^{-1}$. Thế vào (6), ta được

$$\frac{dX'}{dt} = DP^{-1}X. \tag{6}$$

Mặt khác $X' = P^{-1}X$. Suy ra

$$\frac{dX'}{dt} = DX'. \tag{7}$$

$$\frac{dX'}{dt} = DX'. \tag{7}$$

$$\frac{dX'}{dt} = DX'. \tag{7}$$

Vì D là ma trận đường chéo nên ta dễ dàng tìm ra X'. Sau đó để tìm X ta dùng công thức $X = PX'$.

$$\frac{dX'}{dt} = DX'. \tag{7}$$

Vì D là ma trận đường chéo nên ta dễ dàng tìm ra X'. Sau đó để tìm X ta dùng công thức $X = PX'$.

Tóm lại, nếu A là ma trận chéo hóa được thì hệ (1) có thể được giải qua các bước sau:

$$\frac{dX'}{dt} = DX'. \tag{7}$$

Vì D là ma trận đường chéo nên ta dễ dàng tìm ra X'. Sau đó để tìm X ta dùng công thức $X = PX'$.

Tóm lại, nếu A là ma trận chéo hóa được thì hệ (1) có thể được giải qua các bước sau:

- Bước 1. Chéo hóa ma trận A, nghĩa là tìm ma trận khả nghịch P sao cho $D = P^{-1}AP$ là ma trận chéo.

$$\frac{dX'}{dt} = DX'. \tag{7}$$

Vì D là ma trận đường chéo nên ta dễ dàng tìm ra X'. Sau đó để tìm X ta dùng công thức $X = PX'$.

Tóm lại, nếu A là ma trận chéo hóa được thì hệ (1) có thể được giải qua các bước sau:

- Bước 1. Chéo hóa ma trận A, nghĩa là tìm ma trận khả nghịch P sao cho $D = P^{-1}AP$ là ma trận chéo.
- Bước 2. Giải hệ $\dfrac{dX'}{dt} = DX'$.

$$\frac{dX'}{dt} = DX'. \tag{7}$$

Vì D là ma trận đường chéo nên ta dễ dàng tìm ra X'. Sau đó để tìm X ta dùng công thức $X = PX'$.

Tóm lại, nếu A là ma trận chéo hóa được thì hệ (1) có thể được giải qua các bước sau:

- Bước 1. Chéo hóa ma trận A, nghĩa là tìm ma trận khả nghịch P sao cho $D = P^{-1}AP$ là ma trận chéo.
- Bước 2. Giải hệ $\dfrac{dX'}{dt} = DX'$.
- Bước 3. Tìm X bởi công thức $X = PX'$.

Ví dụ. Giải hệ phương trình vi phân $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x - y; \\ \dfrac{dy}{dt} = 2x + 4y. \end{cases}$

Ví dụ. Giải hệ phương trình vi phân $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x - y; \\ \dfrac{dy}{dt} = 2x + 4y. \end{cases}$

Giải.

Bước 1. Ma trận của hệ là $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$.

Ví dụ. Giải hệ phương trình vi phân $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x - y; \\ \dfrac{dy}{dt} = 2x + 4y. \end{cases}$

Giải.

Bước 1. Ma trận của hệ là $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$.

Tiến hành chéo hóa ma trận A ta tìm được $P = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ làm chéo A và

$$D = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Ví dụ. Giải hệ phương trình vi phân $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x - y; \\ \dfrac{dy}{dt} = 2x + 4y. \end{cases}$

Giải.

Bước 1. Ma trận của hệ là $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$.

Tiến hành chéo hóa ma trận A ta tìm được $P = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ làm chéo A và

$$D = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Bước 2. Xét $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. Đặt $X' = P^{-1}X$, ta có $\dfrac{dX'}{dt} = DX'$

Viết lại hệ $\dfrac{dX'}{dt} = DX'$ thành hệ $\begin{cases} \dfrac{dx'}{dt} & = & 2x'; \\ \dfrac{dy'}{dt} & = & 3y'. \end{cases}$

Viết lại hệ $\dfrac{dX'}{dt} = DX'$ thành hệ $\begin{cases} \dfrac{dx'}{dt} & = & 2x'; \\ \dfrac{dy'}{dt} & = & 3y'. \end{cases}$

Nghiệm của hệ này là

$$\begin{cases} x' & = & C_1 e^{2t} \\ y' & = & C_2 e^{3t}, \end{cases}$$

trong đó C_1 và C_2 là các hằng số.

Viết lại hệ $\dfrac{dX'}{dt} = DX'$ thành hệ $\begin{cases} \dfrac{dx'}{dt} &= 2x'; \\ \dfrac{dy'}{dt} &= 3y'. \end{cases}$

Nghiệm của hệ này là

$$\begin{cases} x' &= C_1 e^{2t} \\ y' &= C_2 e^{3t}, \end{cases}$$

trong đó C_1 và C_2 là các hằng số.

Bước 3. Ta có $X = PX'$. Do đó

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x' - y' \\ -x' + 2y' \end{pmatrix}.$$

Viết lại hệ $\dfrac{dX'}{dt} = DX'$ thành hệ $\begin{cases} \dfrac{dx'}{dt} & = & 2x'; \\ \dfrac{dy'}{dt} & = & 3y'. \end{cases}$

Nghiệm của hệ này là

$$\begin{cases} x' & = & C_1 e^{2t} \\ y' & = & C_2 e^{3t}, \end{cases}$$

trong đó C_1 và C_2 là các hằng số.

Bước 3. Ta có $X = PX'$. Do đó

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x' - y' \\ -x' + 2y' \end{pmatrix}.$$

Suy ra

$$\begin{cases} x & = & -C_1 e^{2t} - C_2 e^{3t}; \\ y & = & -C_1 e^{2t} + 2C_2 e^{3t}. \end{cases}$$

Ví dụ.(tự làm)Giải hệ phương trình vi phân

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -x - 3y - 2z; \\ \dfrac{dy}{dt} = -2x - 2y - 2z; \\ \dfrac{dz}{dt} = 6x + 9y + 7z. \end{cases}$$

Dãy Fibonacci

Dãy Fibonacci là dãy vô hạn các số

$$0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \ldots$$

Mỗi số hạng trong dãy Fibonacci (kể từ số hạng thứ ba) bằng tổng của hai số hạng đứng ngay trước nó

$$F_{k+2} = F_{k+1} + F_k, k \geq 0, F_0 = 0, F_1 = 1.$$

Dãy Fibonacci

Dãy Fibonacci là dãy vô hạn các số

$$0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \ldots$$

Mỗi số hạng trong dãy Fibonacci (kể từ số hạng thứ ba) bằng tổng của hai số hạng đứng ngay trước nó

$$F_{k+2} = F_{k+1} + F_k, k \geq 0, F_0 = 0, F_1 = 1.$$

Câu hỏi. Làm thế nào để tính số hạng F_n mà không cần tính lần lượt từ các số $F_0 = 0, F_1 = 1$?

Dãy Fibonacci

Dãy Fibonacci là dãy vô hạn các số

$$0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \ldots$$

Mỗi số hạng trong dãy Fibonacci (kể từ số hạng thứ ba) bằng tổng của hai số hạng đứng ngay trước nó

$$F_{k+2} = F_{k+1} + F_k, k \geq 0, F_0 = 0, F_1 = 1.$$

Câu hỏi. Làm thế nào để tính số hạng F_n mà không cần tính lần lượt từ các số $F_0 = 0, F_1 = 1$?

Đặt $u_k := \begin{pmatrix} F_{k+1} \\ F_k \end{pmatrix}$ và $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Khi đó

$$u_{k+1} = Au_k.$$

Từ đó suy ra

$$u_k = A^k u_0, \text{ với } u_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (1)$$

Từ đó suy ra

$$u_k = A^k u_0, \text{ với } u_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{1}$$

Vấn đề dẫn đến việc tính A^k. Ta sẽ dùng phương pháp chéo hóa ma trận.

Từ đó suy ra

$$u_k = A^k u_0, \text{ với } u_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{1}$$

Vấn đề dẫn đến việc tính A^k. Ta sẽ dùng phương pháp chéo hóa ma trận.

Đa thức đặc trưng $f_A(\boldsymbol{\lambda}) = \boldsymbol{\lambda}^2 - \boldsymbol{\lambda} - 1$ có hai nghiệm là

$$\lambda_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \lambda_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}. \tag{2}$$

Từ đó suy ra

$$u_k = A^k u_0, \text{ với } u_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{1}$$

Vấn đề dẫn đến việc tính A^k. Ta sẽ dùng phương pháp chéo hóa ma trận.

Đa thức đặc trưng $f_A(\boldsymbol{\lambda}) = \boldsymbol{\lambda}^2 - \boldsymbol{\lambda} - 1$ có hai nghiệm là

$$\lambda_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \lambda_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}. \tag{2}$$

Do đó A chéo hóa được và một dạng chéo của A là

$$D = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}, \text{ với } P = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}. \tag{3}$$

Từ đó suy ra

$$u_k = A^k u_0, \text{ với } u_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{1}$$

Vấn đề dẫn đến việc tính A^k. Ta sẽ dùng phương pháp chéo hóa ma trận.

Đa thức đặc trưng $f_A(\boldsymbol{\lambda}) = \boldsymbol{\lambda}^2 - \boldsymbol{\lambda} - 1$ có hai nghiệm là

$$\lambda_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \lambda_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}. \tag{2}$$

Do đó A chéo hóa được và một dạng chéo của A là

$$D = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}, \text{ với } P = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}. \tag{3}$$

Ta có

$$P^{-1} = \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} \begin{pmatrix} 1 & -\lambda_2 \\ -1 & \lambda_1 \end{pmatrix}. \tag{4}$$

Từ các công thức (1), (3) và (4) ta tính được

$$\begin{pmatrix} F_{k+1} \\ F_k \end{pmatrix} = u_k = A^k u_0 =$$

Từ các công thức (1), (3) và (4) ta tính được

$$\begin{pmatrix} F_{k+1} \\ F_k \end{pmatrix} = u_k = A^k u_0 = \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} \begin{pmatrix} \lambda_1^{k+1} - \lambda_2^{k+2} \\ \lambda_1^k - \lambda_2^k \end{pmatrix}.$$

Từ các công thức (1), (3) và (4) ta tính được

$$\begin{pmatrix} F_{k+1} \\ F_k \end{pmatrix} = u_k = A^k u_0 = \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} \begin{pmatrix} \lambda_1^{k+1} - \lambda_2^{k+2} \\ \lambda_1^k - \lambda_2^k \end{pmatrix}.$$

Từ đó kết hợp với công thức (2) suy ra

$$F_k = \frac{1}{\sqrt{5}} \Big[\Big(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \Big)^k - \Big(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \Big)^k \Big]. \tag{5}$$

Từ các công thức (1), (3) và (4) ta tính được

$$\begin{pmatrix} F_{k+1} \\ F_k \end{pmatrix} = u_k = A^k u_0 = \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} \begin{pmatrix} \lambda_1^{k+1} - \lambda_2^{k+2} \\ \lambda_1^k - \lambda_2^k \end{pmatrix}.$$

Từ đó kết hợp với công thức (2) suy ra

$$F_k = \frac{1}{\sqrt{5}} \Big[\Big(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \Big)^k - \Big(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \Big)^k \Big]. \tag{5}$$

Lưu ý $\left| \dfrac{1-\sqrt{5}}{2} \right| < 1$. Suy ra $\Big(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2} \Big)^k \to 0$ khi $k \to \infty$.

Từ các công thức (1), (3) và (4) ta tính được

$$\begin{pmatrix} F_{k+1} \\ F_k \end{pmatrix} = u_k = A^k u_0 = \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} \begin{pmatrix} \lambda_1^{k+1} - \lambda_2^{k+2} \\ \lambda_1^k - \lambda_2^k \end{pmatrix}.$$

Từ đó kết hợp với công thức (2) suy ra

$$F_k = \frac{1}{\sqrt{5}} \Big[\Big(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \Big)^k - \Big(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \Big)^k \Big]. \tag{5}$$

Lưu ý $\left| \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right| < 1$. Suy ra $\Big(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \Big)^k \to 0$ khi $k \to \infty$. đó, với k càng lớn thì

$$\frac{F_{k+1}}{F_k} \approx \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1,618.$$

Từ các công thức (1), (3) và (4) ta tính được

$$\begin{pmatrix} F_{k+1} \\ F_k \end{pmatrix} = u_k = A^k u_0 = \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} \begin{pmatrix} \lambda_1^{k+1} - \lambda_2^{k+2} \\ \lambda_1^k - \lambda_2^k \end{pmatrix}.$$

Từ đó kết hợp với công thức (2) suy ra

$$F_k = \frac{1}{\sqrt{5}} \Big[\Big(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \Big)^k - \Big(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \Big)^k \Big]. \tag{5}$$

Lưu ý $\left| \dfrac{1-\sqrt{5}}{2} \right| < 1$. Suy ra $\Big(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2} \Big)^k \to 0$ khi $k \to \infty$. đó, với k càng lớn thì

$$\frac{F_{k+1}}{F_k} \approx \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1,618.$$

Con số $1,618$ được những người Hy Lạp cổ đại gọi là ***tỉ lệ vàng***. Tờ giấy $A4$ mà ngày nay chúng ta đang sử dụng chính là hình chữ nhật có tỉ lệ vàng như vậy.