Chương 0

ÔN TẬP ĐẠI SỐ A1

Đại học Khoa Học Tự Nhiên Tp. Hồ Chí Minh

Các phép biến đổi sơ cấp trên dòng

Các phép biến đổi sơ cấp trên dòng

Định nghĩa. Cho $A \in M_{m\times n}(K)$. Ta gọi ***phép biến đổi sơ cấp trên dòng***, viết tắt là phép ***BĐSCTD*** trên A, là một trong ba loại biến đổi sau:

Các phép biến đổi sơ cấp trên dòng

Định nghĩa. Cho $A \in M_{m\times n}(K)$. Ta gọi ***phép biến đổi sơ cấp trên dòng***, viết tắt là phép ***BĐSCTD*** trên A, là một trong ba loại biến đổi sau:

Loại 1. Hoán vị hai dòng i và j $(i \neq j)$.

Ký hiệu : $\boldsymbol{d_i \leftrightarrow d_j}$

Các phép biến đổi sơ cấp trên dòng

Định nghĩa. Cho $A \in M_{m\times n}(K)$. Ta gọi ***phép biến đổi sơ cấp trên dòng***, viết tắt là phép ***BĐSCTD*** trên A, là một trong ba loại biến đổi sau:

Loại 1. Hoán vị hai dòng i và j $(i \neq j)$.

Ký hiệu : $\boldsymbol{d_i \leftrightarrow d_j}$

Loại 2. Nhân dòng i với một số $\alpha \neq 0$.

Ký hiệu: $\boldsymbol{\alpha d_i}$

Các phép biến đổi sơ cấp trên dòng

Định nghĩa. Cho $A \in M_{m\times n}(K)$. Ta gọi ***phép biến đổi sơ cấp trên dòng***, viết tắt là phép ***BĐSCTD*** trên A, là một trong ba loại biến đổi sau:

Loại 1. Hoán vị hai dòng i và j $(i \neq j)$.
Ký hiệu : $\boldsymbol{d_i \leftrightarrow d_j}$

Loại 2. Nhân dòng i với một số $\alpha \neq 0$.
Ký hiệu: $\boldsymbol{\alpha d_i}$

Loại 3. Cộng vào dòng i với β lần dòng j $(j \neq i)$.
Ký hiệu: $\boldsymbol{d_i + \beta d_j}$

Các phép biến đổi sơ cấp trên dòng

Định nghĩa. Cho $A \in M_{m\times n}(K)$. Ta gọi ***phép biến đổi sơ cấp trên dòng***, viết tắt là phép ***BĐSCTD*** trên A, là một trong ba loại biến đổi sau:

Loại 1. Hoán vị hai dòng i và j $(i \neq j)$.
Ký hiệu : $\boldsymbol{d_i \leftrightarrow d_j}$

Loại 2. Nhân dòng i với một số $\alpha \neq 0$.
Ký hiệu: $\boldsymbol{\alpha d_i}$

Loại 3. Cộng vào dòng i với β lần dòng j $(j \neq i)$.
Ký hiệu: $\boldsymbol{d_i + \beta d_j}$

Trong thực hành chúng ta có thể sử dụng phép biến đổi: nhân dòng i với một số $\alpha \neq 0$ sau đó cộng thêm β lần dòng j $(j \neq i)$.
Ký hiệu: $\boldsymbol{\alpha d_i + \beta d_j}$

Ví dụ.

Cho ma trận $A = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 7 & -1 & -2 & -2 \\ 2 & 14 & 2 & 7 & 0 \\ 6 & 42 & 3 & 13 & -3 \end{pmatrix}$.

a) Tìm dạng bậc thang của A. Từ đó xác định hạng của A.

b) Tìm ma trận dạng bậc thang rút gọn của A.

Ví dụ.

Cho ma trận $A = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 7 & -1 & -2 & -2 \\ 2 & 14 & 2 & 7 & 0 \\ 6 & 42 & 3 & 13 & -3 \end{pmatrix}$.

a) Tìm dạng bậc thang của A. Từ đó xác định hạng của A.

b) Tìm ma trận dạng bậc thang rút gọn của A.

Giải. b)

$$\begin{pmatrix} 1 & 7 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 7 & -1 & -2 & -2 \\ 2 & 14 & 2 & 7 & 0 \\ 6 & 42 & 3 & 13 & -3 \end{pmatrix}$$

Ví dụ.

Cho ma trận $A = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 7 & -1 & -2 & -2 \\ 2 & 14 & 2 & 7 & 0 \\ 6 & 42 & 3 & 13 & -3 \end{pmatrix}$.

a) Tìm dạng bậc thang của A. Từ đó xác định hạng của A.

b) Tìm ma trận dạng bậc thang rút gọn của A.

Giải. b)

$$\begin{pmatrix} 1 & 7 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 7 & -1 & -2 & -2 \\ 2 & 14 & 2 & 7 & 0 \\ 6 & 42 & 3 & 13 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow[d_4-6d_1]{\substack{d_2-d_1 \\ d_3-2d_1}}$$

Ví dụ.

Cho ma trận $A = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 7 & -1 & -2 & -2 \\ 2 & 14 & 2 & 7 & 0 \\ 6 & 42 & 3 & 13 & -3 \end{pmatrix}$.

a) Tìm dạng bậc thang của A. Từ đó xác định hạng của A.

b) Tìm ma trận dạng bậc thang rút gọn của A.

Giải. b)

$$\begin{pmatrix} 1 & 7 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 7 & -1 & -2 & -2 \\ 2 & 14 & 2 & 7 & 0 \\ 6 & 42 & 3 & 13 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow[d_4-6d_1]{\substack{d_2-d_1 \\ d_3-2d_1}} \begin{pmatrix} 1 & 7 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -5 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & -5 & -3 \end{pmatrix}$$

Ví dụ.

Cho ma trận $A = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 7 & -1 & -2 & -2 \\ 2 & 14 & 2 & 7 & 0 \\ 6 & 42 & 3 & 13 & -3 \end{pmatrix}$.

a) Tìm dạng bậc thang của A. Từ đó xác định hạng của A.

b) Tìm ma trận dạng bậc thang rút gọn của A.

Giải. b)

$$\begin{pmatrix} 1 & 7 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 7 & -1 & -2 & -2 \\ 2 & 14 & 2 & 7 & 0 \\ 6 & 42 & 3 & 13 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow[d_4-6d_1]{\substack{d_2-d_1 \\ d_3-2d_1}} \begin{pmatrix} 1 & 7 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -5 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & -5 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[d_4+3d_2]{\substack{-\frac{1}{2}d_2 \\ d_1-d_2}}$$

Ví dụ.

Cho ma trận $A = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 7 & -1 & -2 & -2 \\ 2 & 14 & 2 & 7 & 0 \\ 6 & 42 & 3 & 13 & -3 \end{pmatrix}$.

a) Tìm dạng bậc thang của A. Từ đó xác định hạng của A.

b) Tìm ma trận dạng bậc thang rút gọn của A.

Giải. b)

$$\begin{pmatrix} 1 & 7 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 7 & -1 & -2 & -2 \\ 2 & 14 & 2 & 7 & 0 \\ 6 & 42 & 3 & 13 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow[d_4 - 6d_1]{\substack{d_2 - d_1 \\ d_3 - 2d_1}} \begin{pmatrix} 1 & 7 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -5 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & -5 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[d_4 + 3d_2]{\substack{-\frac{1}{2}d_2 \\ d_1 - d_2}} \begin{pmatrix} 1 & 7 & 0 & \frac{1}{2} & -1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{5}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{5}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

Ví dụ.

Cho ma trận $A = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 7 & -1 & -2 & -2 \\ 2 & 14 & 2 & 7 & 0 \\ 6 & 42 & 3 & 13 & -3 \end{pmatrix}$.

a) Tìm dạng bậc thang của A. Từ đó xác định hạng của A.

b) Tìm ma trận dạng bậc thang rút gọn của A.

Giải. b)

$$\begin{pmatrix} 1 & 7 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 7 & -1 & -2 & -2 \\ 2 & 14 & 2 & 7 & 0 \\ 6 & 42 & 3 & 13 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow[d_4-6d_1]{\substack{d_2-d_1 \\ d_3-2d_1}} \begin{pmatrix} 1 & 7 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -5 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & -5 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[d_4+3d_2]{\substack{-\frac{1}{2}d_2 \\ d_1-d_2}} \begin{pmatrix} 1 & 7 & 0 & \frac{1}{2} & -1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{5}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{5}{2} & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[d_4-\frac{5}{2}d_3]{\substack{d_1-\frac{1}{2}d_3 \\ d_2-\frac{5}{2}d_3}}$$

Ví dụ.

Cho ma trận $A = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 7 & -1 & -2 & -2 \\ 2 & 14 & 2 & 7 & 0 \\ 6 & 42 & 3 & 13 & -3 \end{pmatrix}$.

a) Tìm dạng bậc thang của A. Từ đó xác định hạng của A.

b) Tìm ma trận dạng bậc thang rút gọn của A.

Giải. b)

$$\begin{pmatrix} 1 & 7 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 7 & -1 & -2 & -2 \\ 2 & 14 & 2 & 7 & 0 \\ 6 & 42 & 3 & 13 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow[d_4-6d_1]{\substack{d_2-d_1 \\ d_3-2d_1}} \begin{pmatrix} 1 & 7 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -5 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & -5 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[d_4+3d_2]{\substack{-\frac{1}{2}d_2 \\ d_1-d_2}} \begin{pmatrix} 1 & 7 & 0 & \frac{1}{2} & -1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{5}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{5}{2} & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[d_4-\frac{5}{2}d_3]{\substack{d_1-\frac{1}{2}d_3 \\ d_2-\frac{5}{2}d_3}} \begin{pmatrix} 1 & 7 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Hệ phương trình tuyến tính

Hệ phương trình tuyến tính

Ví dụ. Giải hệ phương trình sau:

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & + & 2x_2 & - & 3x_3 & + & 5x_4 & = & 1; \\ x_1 & + & 3x_2 & - & 13x_3 & + & 22x_4 & = & -1; \\ 3x_1 & + & 5x_2 & + & x_3 & - & 2x_4 & = & 5; \\ 2x_1 & + & 3x_2 & + & 4x_3 & - & 7x_4 & = & 4, \end{array}\right.$$

Hệ phương trình tuyến tính

Ví dụ. Giải hệ phương trình sau:

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & + & 2x_2 & - & 3x_3 & + & 5x_4 & = & 1; \\ x_1 & + & 3x_2 & - & 13x_3 & + & 22x_4 & = & -1; \\ 3x_1 & + & 5x_2 & + & x_3 & - & 2x_4 & = & 5; \\ 2x_1 & + & 3x_2 & + & 4x_3 & - & 7x_4 & = & 4, \end{array}\right.$$

Giải. Ma trận hóa hệ phương trình,

Hệ phương trình tuyến tính

Ví dụ. Giải hệ phương trình sau:

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & + & 2x_2 & - & 3x_3 & + & 5x_4 & = & 1; \\ x_1 & + & 3x_2 & - & 13x_3 & + & 22x_4 & = & -1; \\ 3x_1 & + & 5x_2 & + & x_3 & - & 2x_4 & = & 5; \\ 2x_1 & + & 3x_2 & + & 4x_3 & - & 7x_4 & = & 4, \end{array}\right.$$

Giải. Ma trận hóa hệ phương trình, ta có

$$\tilde{A} = \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 2 & -3 & 5 & 1 \\ 1 & 3 & -13 & 22 & -1 \\ 3 & 5 & 1 & -2 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & -7 & 4 \end{array}\right)$$

Hệ phương trình tuyến tính

Ví dụ. Giải hệ phương trình sau:

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & + & 2x_2 & - & 3x_3 & + & 5x_4 & = & 1; \\ x_1 & + & 3x_2 & - & 13x_3 & + & 22x_4 & = & -1; \\ 3x_1 & + & 5x_2 & + & x_3 & - & 2x_4 & = & 5; \\ 2x_1 & + & 3x_2 & + & 4x_3 & - & 7x_4 & = & 4, \end{array}\right.$$

Giải. Ma trận hóa hệ phương trình, ta có

$$\tilde{A} = \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 2 & -3 & 5 & 1 \\ 1 & 3 & -13 & 22 & -1 \\ 3 & 5 & 1 & -2 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & -7 & 4 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[d_4-2d_1]{\substack{d_2-d_1 \\ d_3-3d_1}}$$

Ví dụ. Giải hệ phương trình sau:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 5x_4 = 1; \\ x_1 + 3x_2 - 13x_3 + 22x_4 = -1; \\ 3x_1 + 5x_2 + x_3 - 2x_4 = 5; \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 - 7x_4 = 4, \end{cases}$$

Giải. Ma trận hóa hệ phương trình, ta có

$$\tilde{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -3 & 5 & 1 \\ 1 & 3 & -13 & 22 & -1 \\ 3 & 5 & 1 & -2 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & -7 & 4 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[d_4 - 2d_1]{\substack{d_2 - d_1 \\ d_3 - 3d_1}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -3 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & -10 & 17 & -2 \\ 0 & -1 & 10 & -17 & 2 \\ 0 & -1 & 10 & -17 & 2 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 2 & -3 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & -10 & 17 & -2 \\ 0 & -1 & 10 & -17 & 2 \\ 0 & -1 & 10 & -17 & 2 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 2 & -3 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & -10 & 17 & -2 \\ 0 & -1 & 10 & -17 & 2 \\ 0 & -1 & 10 & -17 & 2 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[d_4+d_2]{\substack{d_1-2d_2 \\ d_3+d_2}}$$

$$
\left(\begin{array}{rrrr|r}
1 & 2 & -3 & 5 & 1 \\
0 & 1 & -10 & 17 & -2 \\
0 & -1 & 10 & -17 & 2 \\
0 & -1 & 10 & -17 & 2
\end{array}\right)
$$

$$
\xrightarrow[d_4+d_2]{\substack{d_1-2d_2 \\ d_3+d_2}}
\left(\begin{array}{rrrr|r}
\color{red}{\mathbf{1}} & 0 & 17 & -29 & 5 \\
0 & \color{red}{\mathbf{1}} & -10 & 17 & -2 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}\right).
$$

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 2 & -3 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & -10 & 17 & -2 \\ 0 & -1 & 10 & -17 & 2 \\ 0 & -1 & 10 & -17 & 2 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[d_4+d_2]{\substack{d_1-2d_2 \\ d_3+d_2}} \left(\begin{array}{rrrr|r} \mathbf{1} & 0 & 17 & -29 & 5 \\ 0 & \mathbf{1} & -10 & 17 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Vậy hệ đã cho có hai ẩn tự do là x_3, x_4.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -3 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & -10 & 17 & -2 \\ 0 & -1 & 10 & -17 & 2 \\ 0 & -1 & 10 & -17 & 2 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[d_4+d_2]{\substack{d_1-2d_2 \\ d_3+d_2}} \left(\begin{array}{cccc|c} \mathbf{1} & 0 & 17 & -29 & 5 \\ 0 & \mathbf{1} & -10 & 17 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Vậy hệ đã cho có hai ẩn tự do là x_3, x_4. Cho $x_3 = t, x_4 = s$, ta tính được

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -3 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & -10 & 17 & -2 \\ 0 & -1 & 10 & -17 & 2 \\ 0 & -1 & 10 & -17 & 2 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[d_4+d_2]{\substack{d_1-2d_2 \\ d_3+d_2}} \left(\begin{array}{cccc|c} \mathbf{1} & 0 & 17 & -29 & 5 \\ 0 & \mathbf{1} & -10 & 17 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Vậy hệ đã cho có hai ẩn tự do là x_3, x_4. Cho $x_3 = t, x_4 = s$, ta tính được

$$\begin{cases} x_1 = 5 - 17t + 29s; \\ \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -3 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & -10 & 17 & -2 \\ 0 & -1 & 10 & -17 & 2 \\ 0 & -1 & 10 & -17 & 2 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[d_4+d_2]{\substack{d_1-2d_2 \\ d_3+d_2}} \left(\begin{array}{cccc|c} \mathbf{1} & 0 & 17 & -29 & 5 \\ 0 & \mathbf{1} & -10 & 17 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Vậy hệ đã cho có hai ẩn tự do là x_3, x_4. Cho $x_3 = t, x_4 = s$, ta tính được

$$\begin{cases} x_1 = 5 - 17t + 29s; \\ x_2 = -2 + 10t - 17s. \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -3 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & -10 & 17 & -2 \\ 0 & -1 & 10 & -17 & 2 \\ 0 & -1 & 10 & -17 & 2 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[d_4+d_2]{\substack{d_1-2d_2 \\ d_3+d_2}} \left(\begin{array}{cccc|c} \color{red}{\mathbf{1}} & 0 & 17 & -29 & 5 \\ 0 & \color{red}{\mathbf{1}} & -10 & 17 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Vậy hệ đã cho có hai ẩn tự do là x_3, x_4. Cho $x_3 = t, x_4 = s$, ta tính được

$$\begin{cases} x_1 = 5 - 17t + 29s; \\ x_2 = -2 + 10t - 17s. \end{cases}$$

Vậy hệ đã cho có vô số nghiệm với hai ẩn tự do

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 2 & -3 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & -10 & 17 & -2 \\ 0 & -1 & 10 & -17 & 2 \\ 0 & -1 & 10 & -17 & 2 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[d_4+d_2]{\substack{d_1-2d_2 \\ d_3+d_2}} \left(\begin{array}{rrrr|r} \color{red}{\mathbf{1}} & 0 & 17 & -29 & 5 \\ 0 & \color{red}{\mathbf{1}} & -10 & 17 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Vậy hệ đã cho có hai ẩn tự do là x_3, x_4. Cho $x_3 = t, x_4 = s$, ta tính được

$$\begin{cases} x_1 = 5 - 17t + 29s; \\ x_2 = -2 + 10t - 17s. \end{cases}$$

Vậy hệ đã cho có vô số nghiệm với hai ẩn tự do

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) = (5 - 17t + 29s, -2 + 10t - 17s, t, s)$$

với $s, t \in \mathbb{R}$ tùy ý.

Ma trận khả nghịch

Ma trận khả nghịch

Định lý. *Cho* $A \in M_n(K)$. *Khi đó các khẳng định sau tương đương:*

Ma trận khả nghịch

Định lý. *Cho* $A \in M_n(K)$. *Khi đó các khẳng định sau tương đương:*

(i) A *khả nghịch.*

Ma trận khả nghịch

Định lý. *Cho* $A \in M_n(K)$. *Khi đó các khẳng định sau tương đương:*

(i) *A khả nghịch.*

(ii) $r(A) = n$.

Ma trận khả nghịch

Định lý. *Cho* $A \in M_n(K)$*. Khi đó các khẳng định sau tương đương:*

(i) A *khả nghịch.*

(ii) $r(A) = n$.

(iii) $A \sim I_n$.

Ma trận khả nghịch

Định lý. *Cho $A \in M_n(K)$. Khi đó các khẳng định sau tương đương:*

(i) *A khả nghịch.*

(ii) $r(A) = n$.

(iii) $A \sim I_n$.

(iv) *Tồn tại các phép BĐSCTD $\varphi_1, \ldots, \varphi_k$ biến ma trận A thành ma trận đơn vị I_n:*

$$A \xrightarrow{\varphi_1} A_1 \longrightarrow \cdots \xrightarrow{\varphi_k} A_k = I_n.$$

Ma trận khả nghịch

Định lý. *Cho $A \in M_n(K)$. Khi đó các khẳng định sau tương đương:*

(i) *A khả nghịch.*

(ii) $r(A) = n$.

(iii) $A \sim I_n$.

(iv) *Tồn tại các phép BĐSCTD $\varphi_1, \ldots, \varphi_k$ biến ma trận A thành ma trận đơn vị I_n:*

$$A \xrightarrow{\varphi_1} A_1 \longrightarrow \cdots \xrightarrow{\varphi_k} A_k = I_n.$$

Hơn nữa, khi đó qua chính các phép BĐSCTD $\varphi_1, \cdots, \varphi_k$, ma trận đơn vị I_n sẽ biến thành ma trận nghịch đảo A^{-1}:

$$I_n \xrightarrow{\varphi_1} B_1 \longrightarrow \cdots \xrightarrow{\varphi_k} B_k = A^{-1}.$$

Phương pháp tìm ma trận nghịch đảo

Phương pháp tìm ma trận nghịch đảo

Lập $(A|I_n)$ và dùng các phép BĐSCTD đưa A về dạng ma trận bậc thang rút gọn:

Phương pháp tìm ma trận nghịch đảo

Lập $(A|I_n)$ và dùng các phép BĐSCTD đưa A về dạng ma trận bậc thang rút gọn:

$$(A\,|I_n\,) \xrightarrow{\varphi_1} (\,A_1|\,B_1) \longrightarrow \cdots \xrightarrow{\varphi_p} (\,A_p|\,B_p) \longrightarrow \cdots .$$

Phương pháp tìm ma trận nghịch đảo

Lập $(A|I_n)$ và dùng các phép BĐSCTD đưa A về dạng ma trận bậc thang rút gọn:

$$(A\,|I_n) \xrightarrow{\varphi_1} (A_1|\,B_1) \longrightarrow \cdots \xrightarrow{\varphi_p} (A_p|\,B_p) \longrightarrow \cdots .$$

Trong quá trình biến đổi có thể xảy ra hai trường hợp sau:

Phương pháp tìm ma trận nghịch đảo

Lập $(A|I_n)$ và dùng các phép BĐSCTD đưa A về dạng ma trận bậc thang rút gọn:

$$(A\,|I_n) \xrightarrow{\varphi_1} (\,A_1|\,B_1) \longrightarrow \cdots \xrightarrow{\varphi_p} (\,A_p|\,B_p) \longrightarrow \cdots .$$

Trong quá trình biến đổi có thể xảy ra hai trường hợp sau:

- **Trường hợp 1**: Tồn tại p sao cho trong dãy biến đổi trên, ma trận A_p có ít nhất một dòng hay một cột bằng 0. Khi đó A không khả nghịch.

Phương pháp tìm ma trận nghịch đảo

Lập $(A|I_n)$ và dùng các phép BĐSCTD đưa A về dạng ma trận bậc thang rút gọn:

$$(A\,|I_n) \xrightarrow{\varphi_1} (A_1|\,B_1) \longrightarrow \cdots \xrightarrow{\varphi_p} (A_p|\,B_p) \longrightarrow \cdots .$$

Trong quá trình biến đổi có thể xảy ra hai trường hợp sau:

- **Trường hợp 1**: Tồn tại p sao cho trong dãy biến đổi trên, ma trận A_p có ít nhất một dòng hay một cột bằng 0. Khi đó A không khả nghịch.
- **Trường hợp 2**: Mọi ma trận A_i trong dãy biến đổi trên đều không có dòng hay cột bằng 0.

Phương pháp tìm ma trận nghịch đảo

Lập $(A|I_n)$ và dùng các phép BĐSCTD đưa A về dạng ma trận bậc thang rút gọn:

$$(A\,|I_n)\xrightarrow{\varphi_1}(A_1|\,B_1)\longrightarrow\cdots\xrightarrow{\varphi_p}(A_p|\,B_p)\longrightarrow\cdots.$$

Trong quá trình biến đổi có thể xảy ra hai trường hợp sau:

- **Trường hợp 1**: Tồn tại p sao cho trong dãy biến đổi trên, ma trận A_p có ít nhất một dòng hay một cột bằng 0. Khi đó A không khả nghịch.
- **Trường hợp 2**: Mọi ma trận A_i trong dãy biến đổi trên đều không có dòng hay cột bằng 0. Khi đó ma trận cuối cùng của dãy trên có dạng $(I_n|B)$. Ta có A khả nghịch và $A^{-1}=B$.

Ví dụ. Cho $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$. Xét tính khả nghịch của A và tìm A^{-1} (nếu có).

Ví dụ. Cho $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$. Xét tính khả nghịch của A và tìm A^{-1} (nếu có).

Giải.

$$(A|I_3) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Ví dụ. Cho $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$. Xét tính khả nghịch của A và tìm A^{-1} (nếu có).

Giải.

$$(A|I_3) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[d_3 - d_1]{d_2 - d_1}$$

Ví dụ. Cho $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$. Xét tính khả nghịch của A và tìm A^{-1} (nếu có).

Giải.

$$(A|I_3) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[d_3-d_1]{d_2-d_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Ví dụ. Cho $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$. Xét tính khả nghịch của A và tìm A^{-1} (nếu có).

Giải.

$$(A|I_3) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[d_3 - d_1]{d_2 - d_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[d_3 - d_2]{d_1 - d_2}$$

Ví dụ. Cho $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$. Xét tính khả nghịch của A và tìm A^{-1} (nếu có).

Giải.

$$(A|I_3) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[d_3 - d_1]{d_2 - d_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[d_3 - d_2]{d_1 - d_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

Ví dụ. Cho $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$. Xét tính khả nghịch của A và tìm A^{-1} (nếu có).

Giải.

$$(A|I_3) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[d_3 - d_1]{d_2 - d_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[d_3 - d_2]{d_1 - d_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{d_2 - d_3}$$

Ví dụ. Cho $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$. Xét tính khả nghịch của A và tìm A^{-1} (nếu có).

Giải.

$$(A|I_3) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[d_3 - d_1]{d_2 - d_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[d_3 - d_2]{d_1 - d_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{d_2 - d_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

Ví dụ. Cho $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$. Xét tính khả nghịch của A và tìm A^{-1} (nếu có).

Giải.

$$(A|I_3) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[d_3-d_1]{d_2-d_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[d_3-d_2]{d_1-d_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{d_2-d_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

$$(I_3|A^{-1})$$

Ví dụ. Xét tính khả nghịch của A và tìm A^{-1} (nếu có)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 5 & 4 & 7 \\ 3 & 7 & 8 & 12 \\ 4 & 8 & 14 & 19 \end{pmatrix}$$

Ví dụ. Xét tính khả nghịch của A và tìm A^{-1} (nếu có)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 5 & 4 & 7 \\ 3 & 7 & 8 & 12 \\ 4 & 8 & 14 & 19 \end{pmatrix}$$

Giải.

$$(A|I_4) =$$

Ví dụ. Xét tính khả nghịch của A và tìm A^{-1} (nếu có)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 5 & 4 & 7 \\ 3 & 7 & 8 & 12 \\ 4 & 8 & 14 & 19 \end{pmatrix}$$

Giải.

$$(A|I_4) = \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 4 & 7 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 7 & 8 & 12 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 8 & 14 & 19 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Ví dụ. Xét tính khả nghịch của A và tìm A^{-1} (nếu có)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 5 & 4 & 7 \\ 3 & 7 & 8 & 12 \\ 4 & 8 & 14 & 19 \end{pmatrix}$$

Giải.

$$(A|I_4) = \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 4 & 7 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 7 & 8 & 12 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 8 & 14 & 19 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[d_4 - 4d_1]{\substack{d_2 - 2d_1 \\ d_3 - 3d_1}}$$

Ví dụ. Xét tính khả nghịch của A và tìm A^{-1} (nếu có)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 5 & 4 & 7 \\ 3 & 7 & 8 & 12 \\ 4 & 8 & 14 & 19 \end{pmatrix}$$

Giải.

$$(A|I_4) = \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 4 & 7 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 7 & 8 & 12 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 8 & 14 & 19 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[d_4-4d_1]{\substack{d_2-2d_1 \\ d_3-3d_1}} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & -4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & -4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & -4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[d_3-d_2]{d_1-2d_2}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & -4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[d_3-d_2]{d_1-2d_2} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 7 & 6 & 5 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & -4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$
\left(\begin{array}{cccc|cccc}
1 & 2 & 3 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0\\
0 & 1 & -2 & -1 & -2 & 1 & 0 & 0\\
0 & 1 & -1 & 0 & -3 & 0 & 1 & 0\\
0 & 0 & 2 & 3 & -4 & 0 & 0 & 1
\end{array}\right)
$$

$$
\xrightarrow[d_3-d_2]{d_1-2d_2}
\left(\begin{array}{cccc|cccc}
1 & 0 & 7 & 6 & 5 & -2 & 0 & 0\\
0 & 1 & -2 & -1 & -2 & 1 & 0 & 0\\
0 & 0 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0\\
0 & 0 & 2 & 3 & -4 & 0 & 0 & 1
\end{array}\right)
$$

$$
\xrightarrow[d_4-2d_3]{\substack{d_1-7d_3\\ d_2+2d_3}}
$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & -4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[d_3-d_2]{d_1-2d_2} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 7 & 6 & 5 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & -4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[d_4-2d_3]{\substack{d_1-7d_3 \\ d_2+2d_3}} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 12 & 5 & -7 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -4 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 2 & -2 & 1 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & -4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[d_3-d_2]{d_1-2d_2} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 7 & 6 & 5 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & -4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[d_4-2d_3]{\substack{d_1-7d_3 \\ d_2+2d_3}} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 12 & 5 & -7 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -4 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 2 & -2 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[d_3-d_4]{\substack{d_1+d_4 \\ d_2-d_4}}$$

$$\left(\begin{array}{rrrr|rrrr} 1 & 2 & 3 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & -4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[d_3-d_2]{d_1-2d_2} \left(\begin{array}{rrrr|rrrr} 1 & 0 & 7 & 6 & 5 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & -4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[d_4-2d_3]{\substack{d_1-7d_3 \\ d_2+2d_3}} \left(\begin{array}{rrrr|rrrr} 1 & 0 & 0 & -1 & 12 & 5 & -7 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -4 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 2 & -2 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[d_3-d_4]{\substack{d_1+d_4 \\ d_2-d_4}} \left(\begin{array}{rrrr|rrrr} 1 & 0 & 0 & 0 & 10 & 7 & -9 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -2 & -3 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -3 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 2 & -2 & 1 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & -4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[d_3-d_2]{d_1-2d_2} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 7 & 6 & 5 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & -4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[d_4-2d_3]{\substack{d_1-7d_3 \\ d_2+2d_3}} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 12 & 5 & -7 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -4 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 2 & -2 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[d_3-d_4]{\substack{d_1+d_4 \\ d_2-d_4}} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 10 & 7 & -9 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -2 & -3 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -3 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 2 & -2 & 1 \end{array}\right) = (I_4|A^{-1}).$$

Định thức ma trận

Định thức ma trận

Nhắc lại. Cho $A = (a_{ij})_{n\times n} \in M_n(\mathbb{R})$. Khi đó, ta có thể tính định thức của A như sau

Định thức ma trận

Nhắc lại. Cho $A = (a_{ij})_{n\times n} \in M_n(\mathbb{R})$. Khi đó, ta có thể tính định thức của A như sau

$$|A| \xlongequal{\text{dòng } \boldsymbol{i}}$$

Định thức ma trận

Nhắc lại. Cho $A = (a_{ij})_{n\times n} \in M_n(\mathbb{R})$. Khi đó, ta có thể tính định thức của A như sau

$$|A| \xlongequal{\text{dòng } \boldsymbol{i}} \sum_{k=1}^{n} a_{\boldsymbol{i}k}(-1)^{\boldsymbol{i}+k}|A(\boldsymbol{i}|k)|$$

Định thức ma trận

Nhắc lại. Cho $A = (a_{ij})_{n\times n} \in M_n(\mathbb{R})$. Khi đó, ta có thể tính định thức của A như sau

$$|A| \xlongequal{\text{dòng } i} \sum_{k=1}^{n} a_{ik}(-1)^{i+k}|A(i|k)|$$

$$\xlongequal{\text{cột } j}$$

Định thức ma trận

Nhắc lại. Cho $A = (a_{ij})_{n\times n} \in M_n(\mathbb{R})$. Khi đó, ta có thể tính định thức của A như sau

$$|A| \xlongequal{\text{dòng } \boldsymbol{i}} \sum_{k=1}^{n} a_{\boldsymbol{i}k}(-1)^{\boldsymbol{i}+k}|A(\boldsymbol{i}|k)|$$

$$\xlongequal{\text{cột } \boldsymbol{j}} \sum_{k=1}^{n} a_{k\boldsymbol{j}}(-1)^{k+\boldsymbol{j}}|A(k|\boldsymbol{j})|$$

Định thức ma trận

Nhắc lại. Cho $A = (a_{ij})_{n\times n} \in M_n(\mathbb{R})$. Khi đó, ta có thể tính định thức của A như sau

$$|A| \xlongequal{\text{dòng } \boldsymbol{i}} \sum_{k=1}^{n} a_{\boldsymbol{i}k}(-1)^{\boldsymbol{i}+k}|A(\boldsymbol{i}|k)|$$

$$\xlongequal{\text{cột } \boldsymbol{j}} \sum_{k=1}^{n} a_{k\boldsymbol{j}}(-1)^{k+\boldsymbol{j}}|A(k|\boldsymbol{j})|$$

Trong đó trận $\boldsymbol{A(i|j)}$ được gọi là ma trận có được từ A bằng cách ***xóa đi dòng*** i ***và cột*** j của A.

Định thức ma trận

Nhắc lại. Cho $A = (a_{ij})_{n\times n} \in M_n(\mathbb{R})$. Khi đó, ta có thể tính định thức của A như sau

$$|A| \xlongequal{\text{dòng } \boldsymbol{i}} \sum_{k=1}^{n} a_{\boldsymbol{i}k}(-1)^{\boldsymbol{i}+k}|A(\boldsymbol{i}|k)|$$

$$\xlongequal{\text{cột } \boldsymbol{j}} \sum_{k=1}^{n} a_{k\boldsymbol{j}}(-1)^{k+\boldsymbol{j}}|A(k|\boldsymbol{j})|$$

Trong đó trận $\boldsymbol{A(i|j)}$ được gọi là ma trận có được từ A bằng cách ***xóa đi dòng*** i ***và cột*** j của A.

Định lý. *Cho* $A, A' \in M_n(\mathbb{R})$. *Khi đó*

Định thức ma trận

Nhắc lại. Cho $A = (a_{ij})_{n\times n} \in M_n(\mathbb{R})$. Khi đó, ta có thể tính định thức của A như sau

$$|A| \xlongequal{\text{dòng } i} \sum_{k=1}^{n} a_{ik}(-1)^{i+k}|A(i|k)|$$
$$\xlongequal{\text{cột } j} \sum_{k=1}^{n} a_{kj}(-1)^{k+j}|A(k|j)|$$

Trong đó trận $A(i|j)$ được gọi là ma trận có được từ A bằng cách ***xóa đi dòng*** i ***và cột*** j của A.

Định lý. *Cho $A, A' \in M_n(\mathbb{R})$. Khi đó*

(i) *Nếu* $A \xrightarrow[i\neq j]{d_i \leftrightarrow d_j} A'$ *thì*

Định thức ma trận

Nhắc lại. Cho $A = (a_{ij})_{n\times n} \in M_n(\mathbb{R})$. Khi đó, ta có thể tính định thức của A như sau

$$|A| \xlongequal{\text{dòng } \boldsymbol{i}} \sum_{k=1}^{n} a_{\boldsymbol{i}k}(-1)^{\boldsymbol{i}+k}|A(\boldsymbol{i}|k)|$$

$$\xlongequal{\text{cột } \boldsymbol{j}} \sum_{k=1}^{n} a_{k\boldsymbol{j}}(-1)^{k+\boldsymbol{j}}|A(k|\boldsymbol{j})|$$

Trong đó trận $\boldsymbol{A(i|j)}$ được gọi là ma trận có được từ A bằng cách ***xóa đi dòng*** i ***và cột*** j của A.

Định lý. *Cho* $A, A' \in M_n(\mathbb{R})$. *Khi đó*

(i) *Nếu* $A \xrightarrow[i\neq j]{d_i \leftrightarrow d_j} A'$ *thì* $|A'| = -|A|$;

Định thức ma trận

Nhắc lại. Cho $A = (a_{ij})_{n\times n} \in M_n(\mathbb{R})$. Khi đó, ta có thể tính định thức của A như sau

$$|A| \overset{\text{dòng } \boldsymbol{i}}{=\!=\!=} \sum_{k=1}^{n} a_{\boldsymbol{i}k}(-1)^{\boldsymbol{i}+k}|A(\boldsymbol{i}|k)|$$

$$\overset{\text{cột } \boldsymbol{j}}{=\!=\!=} \sum_{k=1}^{n} a_{k\boldsymbol{j}}(-1)^{k+\boldsymbol{j}}|A(k|\boldsymbol{j})|$$

Trong đó trận $\boldsymbol{A(i|j)}$ được gọi là ma trận có được từ A bằng cách ***xóa đi dòng*** i ***và cột*** j của A.

Định lý. *Cho* $A, A' \in M_n(\mathbb{R})$. *Khi đó*

(i) *Nếu* $A \xrightarrow[i\neq j]{d_i \leftrightarrow d_j} A'$ *thì* $|A'| = -|A|$;

(ii) *Nếu* $A \xrightarrow{\alpha d_i} A'$ *thì*

Định thức ma trận

Nhắc lại. Cho $A = (a_{ij})_{n\times n} \in M_n(\mathbb{R})$. Khi đó, ta có thể tính định thức của A như sau

$$|A| \xlongequal{\text{dòng } \boldsymbol{i}} \sum_{k=1}^{n} a_{\boldsymbol{i}k}(-1)^{\boldsymbol{i}+k}|A(\boldsymbol{i}|k)|$$

$$\xlongequal{\text{cột } \boldsymbol{j}} \sum_{k=1}^{n} a_{k\boldsymbol{j}}(-1)^{k+\boldsymbol{j}}|A(k|\boldsymbol{j})|$$

Trong đó trận $\boldsymbol{A(i|j)}$ được gọi là ma trận có được từ A bằng cách ***xóa đi dòng*** i ***và cột*** j của A.

Định lý. *Cho $A, A' \in M_n(\mathbb{R})$. Khi đó*

(i) *Nếu* $A \xrightarrow[i\neq j]{d_i \leftrightarrow d_j} A'$ *thì* $|A'| = -|A|$;

(ii) *Nếu* $A \xrightarrow{\alpha d_i} A'$ *thì* $|A'| = \alpha|A|$;

Định thức ma trận

Nhắc lại. Cho $A = (a_{ij})_{n\times n} \in M_n(\mathbb{R})$. Khi đó, ta có thể tính định thức của A như sau

$$|A| \overset{\text{dòng } \boldsymbol{i}}{=\!=} \sum_{k=1}^{n} a_{\boldsymbol{i}k}(-1)^{\boldsymbol{i}+k}|A(\boldsymbol{i}|k)|$$

$$\overset{\text{cột } \boldsymbol{j}}{=\!=} \sum_{k=1}^{n} a_{k\boldsymbol{j}}(-1)^{k+\boldsymbol{j}}|A(k|\boldsymbol{j})|$$

Trong đó trận $\boldsymbol{A(i|j)}$ được gọi là ma trận có được từ A bằng cách ***xóa đi dòng i và cột j*** của A.

Định lý. *Cho $A, A' \in M_n(\mathbb{R})$. Khi đó*

(i) *Nếu* $A \xrightarrow[i\neq j]{d_i \leftrightarrow d_j} A'$ *thì* $|A'| = -|A|$;

(ii) *Nếu* $A \xrightarrow{\alpha d_i} A'$ *thì* $|A'| = \alpha|A|$;

(iii) *Nếu* $A \xrightarrow[i\neq j]{d_i + \beta d_j} A'$ *thì*

Định thức ma trận

Nhắc lại. Cho $A = (a_{ij})_{n\times n} \in M_n(\mathbb{R})$. Khi đó, ta có thể tính định thức của A như sau

$$|A| \xlongequal{\text{dòng } i} \sum_{k=1}^{n} a_{ik}(-1)^{i+k}|A(i|k)|$$
$$\xlongequal{\text{cột } j} \sum_{k=1}^{n} a_{kj}(-1)^{k+j}|A(k|j)|$$

Trong đó trận $A(i|j)$ được gọi là ma trận có được từ A bằng cách ***xóa đi dòng** i **và cột** j* của A.

Định lý. *Cho $A, A' \in M_n(\mathbb{R})$. Khi đó*

(i) *Nếu* $A \xrightarrow[i\neq j]{d_i \leftrightarrow d_j} A'$ *thì* $|A'| = -|A|$;

(ii) *Nếu* $A \xrightarrow{\alpha d_i} A'$ *thì* $|A'| = \alpha|A|$;

(iii) *Nếu* $A \xrightarrow[i\neq j]{d_i + \beta d_j} A'$ *thì* $|A'| = |A|$.

Lưu ý. Vì $|A^\top| = |A|$ nên trong quá trình tính định thức ta có thể sử dụng các phép biến đổi sơ cấp trên cột.

Lưu ý. Vì $|A^\top| = |A|$ nên trong quá trình tính định thức ta có thể sử dụng các phép biến đổi sơ cấp trên cột.

Ví dụ.(tự làm) Tính định thức các ma trận sau

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 5 & 0 \\ 3 & 2 & 6 & -2 \\ -2 & 1 & 3 & 1 \end{pmatrix};$$

Lưu ý. Vì $|A^\top| = |A|$ nên trong quá trình tính định thức ta có thể sử dụng các phép biến đổi sơ cấp trên cột.

Ví dụ.(tự làm) Tính định thức các ma trận sau

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 5 & 0 \\ 3 & 2 & 6 & -2 \\ -2 & 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & -2 & 0 \\ -3 & 1 & 4 & -2 \\ 4 & 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Lưu ý. Vì $|A^\top| = |A|$ nên trong quá trình tính định thức ta có thể sử dụng các phép biến đổi sơ cấp trên cột.

Ví dụ.(tự làm) Tính định thức các ma trận sau

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 5 & 0 \\ 3 & 2 & 6 & -2 \\ -2 & 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & -2 & 0 \\ -3 & 1 & 4 & -2 \\ 4 & 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Đáp án. $|A| = -19;$

Lưu ý. Vì $|A^\top| = |A|$ nên trong quá trình tính định thức ta có thể sử dụng các phép biến đổi sơ cấp trên cột.

Ví dụ.(tự làm) Tính định thức các ma trận sau

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 5 & 0 \\ 3 & 2 & 6 & -2 \\ -2 & 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & -2 & 0 \\ -3 & 1 & 4 & -2 \\ 4 & 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Đáp án. $|A| = -19; \quad |B| = -30.$

Lưu ý. Vì $|A^\top| = |A|$ nên trong quá trình tính định thức ta có thể sử dụng các phép biến đổi sơ cấp trên cột.

Ví dụ.(tự làm) Tính định thức các ma trận sau

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 5 & 0 \\ 3 & 2 & 6 & -2 \\ -2 & 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & -2 & 0 \\ -3 & 1 & 4 & -2 \\ 4 & 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Đáp án. $|A| = -19; \quad |B| = -30.$

Ví dụ.(tự làm) Tính định thức các ma trận sau

$$C = \begin{pmatrix} 13 & 18 & 6 & -1 & 7 \\ 4 & 7 & 3 & 4 & 1 \\ 7 & 9 & 3 & -1 & 4 \\ 6 & 9 & 3 & -2 & 3 \\ 6 & 3 & 1 & -2 & 3 \end{pmatrix};$$

Lưu ý. Vì $|A^\top| = |A|$ nên trong quá trình tính định thức ta có thể sử dụng các phép biến đổi sơ cấp trên cột.

Ví dụ.(tự làm) Tính định thức các ma trận sau

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 5 & 0 \\ 3 & 2 & 6 & -2 \\ -2 & 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & -2 & 0 \\ -3 & 1 & 4 & -2 \\ 4 & 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Đáp án. $|A| = -19; \quad |B| = -30.$

Ví dụ.(tự làm) Tính định thức các ma trận sau

$$C = \begin{pmatrix} 13 & 18 & 6 & -1 & 7 \\ 4 & 7 & 3 & 4 & 1 \\ 7 & 9 & 3 & -1 & 4 \\ 6 & 9 & 3 & -2 & 3 \\ 6 & 3 & 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}; \quad D = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & -3 & 5 & 1 & 8 \\ -4 & -7 & 2 & -2 & 4 \\ 3 & -5 & 4 & 3 & 5 \\ 8 & 6 & -4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Lưu ý. Vì $|A^\top| = |A|$ nên trong quá trình tính định thức ta có thể sử dụng các phép biến đổi sơ cấp trên cột.

Ví dụ.(tự làm) Tính định thức các ma trận sau

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 5 & 0 \\ 3 & 2 & 6 & -2 \\ -2 & 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & -2 & 0 \\ -3 & 1 & 4 & -2 \\ 4 & 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Đáp án. $|A| = -19; \quad |B| = -30.$

Ví dụ.(tự làm) Tính định thức các ma trận sau

$$C = \begin{pmatrix} 13 & 18 & 6 & -1 & 7 \\ 4 & 7 & 3 & 4 & 1 \\ 7 & 9 & 3 & -1 & 4 \\ 6 & 9 & 3 & -2 & 3 \\ 6 & 3 & 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}; \quad D = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & -3 & 5 & 1 & 8 \\ -4 & -7 & 2 & -2 & 4 \\ 3 & -5 & 4 & 3 & 5 \\ 8 & 6 & -4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Đáp án. $|C| = 24;$

Lưu ý. Vì $|A^\top| = |A|$ nên trong quá trình tính định thức ta có thể sử dụng các phép biến đổi sơ cấp trên cột.

Ví dụ.(tự làm) Tính định thức các ma trận sau

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 5 & 0 \\ 3 & 2 & 6 & -2 \\ -2 & 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & -2 & 0 \\ -3 & 1 & 4 & -2 \\ 4 & 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Đáp án. $|A| = -19; \quad |B| = -30.$

Ví dụ.(tự làm) Tính định thức các ma trận sau

$$C = \begin{pmatrix} 13 & 18 & 6 & -1 & 7 \\ 4 & 7 & 3 & 4 & 1 \\ 7 & 9 & 3 & -1 & 4 \\ 6 & 9 & 3 & -2 & 3 \\ 6 & 3 & 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}; \quad D = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & -3 & 5 & 1 & 8 \\ -4 & -7 & 2 & -2 & 4 \\ 3 & -5 & 4 & 3 & 5 \\ 8 & 6 & -4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Đáp án. $|C| = 24; \quad |D| = -174.$

Ma trận phụ hợp

Ma trận phụ hợp

Định nghĩa. Cho $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$. Đặt $C = (c_{ij})$ với

$$c_{ij} = (-1)^{i+j}|A(i,j)|$$

là phần bù đại số của a_{ij}.

Ma trận phụ hợp

Định nghĩa. Cho $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$. Đặt $C = (c_{ij})$ với

$$c_{ij} = (-1)^{i+j}|A(i,j)|$$

là phần bù đại số của a_{ij}. Ta gọi ma trận chuyển vị $C^\top$ của C là ***ma trận phụ hợp*** của A,

Ma trận phụ hợp

Định nghĩa. Cho $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$. Đặt $C = (c_{ij})$ với

$$\boldsymbol{c_{ij} = (-1)^{i+j}|A(i,j)|}$$

là phần bù đại số của a_{ij}. Ta gọi ma trận chuyển vị $C^\top$ của C là ***ma trận phụ hợp*** của A, ký hiệu là $\mathrm{adj}(\boldsymbol{A})$.

Ma trận phụ hợp

Định nghĩa. Cho $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$. Đặt $C = (c_{ij})$ với

$$c_{ij} = (-1)^{i+j}|A(i,j)|$$

là phần bù đại số của a_{ij}. Ta gọi ma trận chuyển vị $C^\top$ của C là ***ma trận phụ hợp*** của A, ký hiệu là $\mathrm{adj}(A)$.

Ví dụ. Cho $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 3 & 4 & -2 \end{pmatrix}$. Tìm ma trận phụ hợp của A?

Ma trận phụ hợp

Định nghĩa. Cho $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$. Đặt $C = (c_{ij})$ với

$$c_{ij} = (-1)^{i+j}|A(i,j)|$$

là phần bù đại số của a_{ij}. Ta gọi ma trận chuyển vị $C^\top$ của C là ***ma trận phụ hợp*** của A, ký hiệu là $\mathrm{adj}(A)$.

Ví dụ. Cho $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 3 & 4 & -2 \end{pmatrix}$. Tìm ma trận phụ hợp của A?

Giải. Ta có $C = \begin{pmatrix} -6 & 10 & 11 \\ 10 & -7 & 1 \\ 7 & -2 & -8 \end{pmatrix}$

Ma trận phụ hợp

Định nghĩa. Cho $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$. Đặt $C = (c_{ij})$ với

$$c_{ij} = (-1)^{i+j}|A(i,j)|$$

là phần bù đại số của a_{ij}. Ta gọi ma trận chuyển vị $C^\top$ của C là ***ma trận phụ hợp*** của A, ký hiệu là $\mathrm{adj}(A)$.

Ví dụ. Cho $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 3 & 4 & -2 \end{pmatrix}$. Tìm ma trận phụ hợp của A?

Giải. Ta có $C = \begin{pmatrix} -6 & 10 & 11 \\ 10 & -7 & 1 \\ 7 & -2 & -8 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathrm{adj}(A) = \begin{pmatrix} -6 & 10 & 7 \\ 10 & -7 & -2 \\ 11 & 1 & -8 \end{pmatrix}$.

Nhận diện ma trận khả nghịch

Định lý. *Ma trận vuông A khả nghịch khi và chỉ khi* $|A| \neq 0$.

Nhận diện ma trận khả nghịch

Định lý. *Ma trận vuông A khả nghịch khi và chỉ khi $|A| \neq 0$. Hơn nữa,*

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\operatorname{adj}(A).$$

Nhận diện ma trận khả nghịch

Định lý. *Ma trận vuông A khả nghịch khi và chỉ khi $|A| \neq 0$. Hơn nữa,*

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\operatorname{adj}(A).$$

Ví dụ. Cho $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 0 \end{pmatrix}$. Hỏi A có khả nghịch hay không? Nếu có, hãy tìm ma trận nghịch đảo của A.

Nhận diện ma trận khả nghịch

Định lý. *Ma trận vuông A khả nghịch khi và chỉ khi $|A| \neq 0$. Hơn nữa,*

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\operatorname{adj}(A).$$

Ví dụ. Cho $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 0 \end{pmatrix}$. Hỏi A có khả nghịch hay không? Nếu có, hãy tìm ma trận nghịch đảo của A.

Đáp án.

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\operatorname{adj}(A) =$$

Nhận diện ma trận khả nghịch

Định lý. *Ma trận vuông A khả nghịch khi và chỉ khi $|A| \neq 0$. Hơn nữa,*

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\operatorname{adj}(A).$$

Ví dụ. Cho $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 0 \end{pmatrix}$. Hỏi A có khả nghịch hay không? Nếu có, hãy tìm ma trận nghịch đảo của A.

Đáp án.

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\operatorname{adj}(A) = \frac{1}{-2}\begin{pmatrix} -4 & 4 & -2 \\ 3 & -3 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Tổ hợp tuyến tính

Tổ hợp tuyến tính

Định nghĩa. Cho $u_1, u_2, \ldots, u_m \in V$. Một ***tổ hợp tuyến tính*** của $u_1, u_2, \ldots, u_m$ là một vectơ có dạng

Tổ hợp tuyến tính

Định nghĩa. Cho $u_1, u_2, \ldots, u_m \in V$. Một ***tổ hợp tuyến tính*** của $u_1, u_2, \ldots, u_m$ là một vectơ có dạng

$$u = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \cdots + \alpha_m u_m \quad \text{với } \alpha_i \in K.$$

Tổ hợp tuyến tính

Định nghĩa. Cho $u_1, u_2, \dots, u_m \in V$. Một ***tổ hợp tuyến tính*** của $u_1, u_2, \dots, u_m$ là một vectơ có dạng

$$u = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \cdots + \alpha_m u_m \quad \text{với } \alpha_i \in K.$$

Khi đó, đẳng thức trên được gọi là ***dạng biểu diễn*** của u theo các vectơ $u_1, u_2, \dots, u_m$.

Tổ hợp tuyến tính

Định nghĩa. Cho $u_1, u_2, \ldots, u_m \in V$. Một ***tổ hợp tuyến tính*** của $u_1, u_2, \ldots, u_m$ là một vectơ có dạng

$$u = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \cdots + \alpha_m u_m \quad \text{với } \alpha_i \in K.$$

Khi đó, đẳng thức trên được gọi là ***dạng biểu diễn*** của u theo các vectơ $u_1, u_2, \ldots, u_m$.

Để kiểm tra u là tổ hợp tuyến tính của $u_1, u_2, ..., u_m$ trong $\mathbb{R}^n$ ta áp dụng các bước sau:

Tổ hợp tuyến tính

Định nghĩa. Cho $u_1, u_2, \ldots, u_m \in V$. Một ***tổ hợp tuyến tính*** của $u_1, u_2, \ldots, u_m$ là một vectơ có dạng

$$u = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \cdots + \alpha_m u_m \quad \text{với } \alpha_i \in K.$$

Khi đó, đẳng thức trên được gọi là ***dạng biểu diễn*** của u theo các vectơ $u_1, u_2, \ldots, u_m$.

Để kiểm tra u là tổ hợp tuyến tính của $u_1, u_2, ..., u_m$ trong $\mathbb{R}^n$ ta áp dụng các bước sau:

Bước 1. Lập ma trận mở rộng $(u_1^\top \ u_2^\top \ \ldots \ u_m^\top \mid u^\top) \quad (\star)$

Tổ hợp tuyến tính

Định nghĩa. Cho $u_1, u_2, \dots, u_m \in V$. Một ***tổ hợp tuyến tính*** của $u_1, u_2, \dots, u_m$ là một vectơ có dạng

$$u = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \cdots + \alpha_m u_m \quad \text{với } \alpha_i \in K.$$

Khi đó, đẳng thức trên được gọi là ***dạng biểu diễn*** của u theo các vectơ $u_1, u_2, \dots, u_m$.

Để kiểm tra u là tổ hợp tuyến tính của $u_1, u_2, ..., u_m$ trong $\mathbb{R}^n$ ta áp dụng các bước sau:

Bước 1. Lập ma trận mở rộng $(u_1^\top \ u_2^\top \ \dots \ u_m^\top \mid u^\top) \quad (\star)$

Bước 2. Giải hệ phương trình $(\star)$.

Tổ hợp tuyến tính

Định nghĩa. Cho $u_1, u_2, \ldots, u_m \in V$. Một ***tổ hợp tuyến tính*** của $u_1, u_2, \ldots, u_m$ là một vectơ có dạng

$$u = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \cdots + \alpha_m u_m \quad \text{với } \alpha_i \in K.$$

Khi đó, đẳng thức trên được gọi là ***dạng biểu diễn*** của u theo các vectơ $u_1, u_2, \ldots, u_m$.

Để kiểm tra u là tổ hợp tuyến tính của $u_1, u_2, ..., u_m$ trong $\mathbb{R}^n$ ta áp dụng các bước sau:

Bước 1. Lập ma trận mở rộng $(u_1^\top \ u_2^\top \ \ldots \ u_m^\top \mid u^\top) \quad (\star)$

Bước 2. Giải hệ phương trình $(\star)$.

- Nếu $(\star)$ **vô nghiệm**, kết luận u không phải là tổ hợp tuyến tính của $u_1, u_2, ..., u_m$.

Tổ hợp tuyến tính

Định nghĩa. Cho $u_1, u_2, \ldots, u_m \in V$. Một ***tổ hợp tuyến tính*** của $u_1, u_2, \ldots, u_m$ là một vectơ có dạng

$$u = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \cdots + \alpha_m u_m \quad \text{với } \alpha_i \in K.$$

Khi đó, đẳng thức trên được gọi là ***dạng biểu diễn*** của u theo các vectơ $u_1, u_2, \ldots, u_m$.

Để kiểm tra u là tổ hợp tuyến tính của $u_1, u_2, ..., u_m$ trong $\mathbb{R}^n$ ta áp dụng các bước sau:

Bước 1. Lập ma trận mở rộng $(u_1^\top \ u_2^\top \ \ldots \ u_m^\top \mid u^\top) \quad (\star)$

Bước 2. Giải hệ phương trình $(\star)$.

- Nếu $(\star)$ **vô nghiệm**, kết luận u không phải là tổ hợp tuyến tính của $u_1, u_2, ..., u_m$.
- Nếu $(\star)$ **có nghiệm** $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ thì u là tổ hợp tuyến tính của $u_1, u_2, ..., u_m$ và có dạng biểu diễn là

Ví dụ. Xét xem $u = (-3, 1, 4)$ có là tổ hợp tuyến tính của các vectơ $u_1 = (1, 2, 1), u_2 = (-1, -1, 1), u_3 = (-2, 1, 1)$ hay không?

Ví dụ. Xét xem $u = (-3, 1, 4)$ có là tổ hợp tuyến tính của các vectơ $u_1 = (1, 2, 1), u_2 = (-1, -1, 1), u_3 = (-2, 1, 1)$ hay không?

Giải. Lập $(u_1^\top \ u_2^\top \ u_3^\top \mid u^\top)$

Ví dụ. Xét xem $u = (-3, 1, 4)$ có là tổ hợp tuyến tính của các vectơ $u_1 = (1, 2, 1), u_2 = (-1, -1, 1), u_3 = (-2, 1, 1)$ hay không?

Giải. Lập $(u_1^\top \ u_2^\top \ u_3^\top \mid u^\top) = \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & -2 & -3 \\ 2 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \end{array}\right)$

Ví dụ. Xét xem $u = (-3, 1, 4)$ có là tổ hợp tuyến tính của các vectơ $u_1 = (1, 2, 1), u_2 = (-1, -1, 1), u_3 = (-2, 1, 1)$ hay không?

Giải. Lập $(u_1^\top \ u_2^\top \ u_3^\top \mid u^\top) = \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & -2 & -3 \\ 2 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \end{array}\right)$

$$\xrightarrow[d_3 - d_1]{d_2 - 2d_1}$$

Ví dụ. Xét xem $u = (-3, 1, 4)$ có là tổ hợp tuyến tính của các vectơ $u_1 = (1, 2, 1), u_2 = (-1, -1, 1), u_3 = (-2, 1, 1)$ hay không?

Giải. Lập $(u_1^\top \ u_2^\top \ u_3^\top \mid u^\top) = \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & -2 & -3 \\ 2 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \end{array}\right)$

$$\xrightarrow[d_3 - d_1]{d_2 - 2d_1} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 5 & 7 \\ 0 & 2 & 3 & 7 \end{array}\right)$$

Ví dụ. Xét xem $u = (-3, 1, 4)$ có là tổ hợp tuyến tính của các vectơ $u_1 = (1, 2, 1), u_2 = (-1, -1, 1), u_3 = (-2, 1, 1)$ hay không?

Giải. Lập $(u_1^\top \ u_2^\top \ u_3^\top \mid u^\top) = \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & -2 & -3 \\ 2 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \end{array}\right)$

$$\xrightarrow[d_3 - d_1]{d_2 - 2d_1} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 5 & 7 \\ 0 & 2 & 3 & 7 \end{array}\right) \xrightarrow[d_3 - 2d_2]{d_1 + d_2}$$

Ví dụ. Xét xem $u = (-3, 1, 4)$ có là tổ hợp tuyến tính của các vectơ $u_1 = (1, 2, 1), u_2 = (-1, -1, 1), u_3 = (-2, 1, 1)$ hay không?

Giải. Lập $(u_1^\top \ u_2^\top \ u_3^\top \mid u^\top) = \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & -2 & -3 \\ 2 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \end{array}\right)$

$$\xrightarrow[d_3 - d_1]{d_2 - 2d_1} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 5 & 7 \\ 0 & 2 & 3 & 7 \end{array}\right) \xrightarrow[d_3 - 2d_2]{d_1 + d_2} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 5 & 7 \\ 0 & 0 & -7 & -7 \end{array}\right)$$

Ví dụ. Xét xem $u = (-3, 1, 4)$ có là tổ hợp tuyến tính của các vectơ $u_1 = (1, 2, 1), u_2 = (-1, -1, 1), u_3 = (-2, 1, 1)$ hay không?

Giải. Lập $(u_1^\top \ u_2^\top \ u_3^\top \mid u^\top) = \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & -2 & -3 \\ 2 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \end{array}\right)$

$$\xrightarrow[d_3-d_1]{d_2-2d_1} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 5 & 7 \\ 0 & 2 & 3 & 7 \end{array}\right) \xrightarrow[d_3-2d_2]{d_1+d_2} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 5 & 7 \\ 0 & 0 & -7 & -7 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\substack{d_1-3d_3 \\ d_2-5d_3}]{\frac{-1}{7}d_3}$$

Ví dụ. Xét xem $u = (-3, 1, 4)$ có là tổ hợp tuyến tính của các vectơ $u_1 = (1, 2, 1), u_2 = (-1, -1, 1), u_3 = (-2, 1, 1)$ hay không?

Giải. Lập $(u_1^\top \ u_2^\top \ u_3^\top \mid u^\top) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -2 & -3 \\ 2 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \end{array}\right)$

$$\xrightarrow[d_3 - d_1]{d_2 - 2d_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 5 & 7 \\ 0 & 2 & 3 & 7 \end{array}\right) \xrightarrow[d_3 - 2d_2]{d_1 + d_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 5 & 7 \\ 0 & 0 & -7 & -7 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\substack{d_1 - 3d_3 \\ d_2 - 5d_3}]{\frac{-1}{7} d_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right).$$

Ví dụ. Xét xem $u = (-3, 1, 4)$ có là tổ hợp tuyến tính của các vectơ $u_1 = (1, 2, 1), u_2 = (-1, -1, 1), u_3 = (-2, 1, 1)$ hay không?

Giải. Lập $(u_1^\top\ u_2^\top\ u_3^\top \mid u^\top) = \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & -2 & -3 \\ 2 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \end{array}\right)$

$$\xrightarrow[d_3 - d_1]{d_2 - 2d_1} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 5 & 7 \\ 0 & 2 & 3 & 7 \end{array}\right) \xrightarrow[d_3 - 2d_2]{d_1 + d_2} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 5 & 7 \\ 0 & 0 & -7 & -7 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\substack{d_1 - 3d_3 \\ d_2 - 5d_3}]{\frac{-1}{7} d_3} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right).$$

Hệ phương trình có nghiệm duy nhất $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (1, 2, 1)$.

Ví dụ. Xét xem $u = (-3, 1, 4)$ có là tổ hợp tuyến tính của các vectơ $u_1 = (1, 2, 1), u_2 = (-1, -1, 1), u_3 = (-2, 1, 1)$ hay không?

Giải. Lập $(u_1^\top \ u_2^\top \ u_3^\top \mid u^\top) = \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & -2 & -3 \\ 2 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \end{array}\right)$

$$\xrightarrow[d_3 - d_1]{d_2 - 2d_1} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 5 & 7 \\ 0 & 2 & 3 & 7 \end{array}\right) \xrightarrow[d_3 - 2d_2]{d_1 + d_2} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 5 & 7 \\ 0 & 0 & -7 & -7 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\substack{d_1 - 3d_3 \\ d_2 - 5d_3}]{\frac{-1}{7} d_3} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right).$$

Hệ phương trình có nghiệm duy nhất $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (1, 2, 1)$.

Vậy u là tổ hợp tuyến tính của u_1, u_2, u_3.

Ví dụ. Xét xem $u = (-3, 1, 4)$ có là tổ hợp tuyến tính của các vectơ $u_1 = (1, 2, 1), u_2 = (-1, -1, 1), u_3 = (-2, 1, 1)$ hay không?

Giải. Lập $(u_1^\top \; u_2^\top \; u_3^\top \mid u^\top) = \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & -2 & -3 \\ 2 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \end{array}\right)$

$$\xrightarrow[d_3-d_1]{d_2-2d_1} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 5 & 7 \\ 0 & 2 & 3 & 7 \end{array}\right) \xrightarrow[d_3-2d_2]{d_1+d_2} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 5 & 7 \\ 0 & 0 & -7 & -7 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\substack{d_1-3d_3 \\ d_2-5d_3}]{\frac{-1}{7}d_3} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right).$$

Hệ phương trình có nghiệm duy nhất $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (1, 2, 1)$.

Vậy u là tổ hợp tuyến tính của u_1, u_2, u_3.

Dạng biểu diễn của u là $u = u_1 + 2u_2 + u_3$.

Độc lập và phụ thuộc tuyến tính

Định nghĩa. Cho $u_1, u_2, \ldots, u_m \in V$. Xét phương trình

$$\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \cdots + \alpha_m u_m = 0. \qquad (*)$$

Độc lập và phụ thuộc tuyến tính

Định nghĩa. Cho $u_1, u_2, \ldots, u_m \in V$. Xét phương trình

$$\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \cdots + \alpha_m u_m = 0. \qquad (*)$$

- Nếu $(*)$ chỉ có nghiệm tầm thường $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_m = 0$ thì ta nói $u_1, u_2, \ldots, u_m$ (hay $\{u_1, u_2, \ldots, u_m\}$) ***độc lập tuyến tính***.

Độc lập và phụ thuộc tuyến tính

Định nghĩa. Cho $u_1, u_2, \dots, u_m \in V$. Xét phương trình

$$\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \cdots + \alpha_m u_m = 0. \qquad (*)$$

- Nếu $(*)$ chỉ có nghiệm tầm thường $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_m = 0$ thì ta nói $u_1, u_2, \dots, u_m$ (hay $\{u_1, u_2, \dots, u_m\}$) ***độc lập tuyến tính***.
- Nếu $(*)$ có nghiệm không tầm thường thì ta nói $u_1, u_2, \dots, u_m$ (hay $\{u_1, u_2, \dots, u_m\}$) ***phụ thuộc tuyến tính***.

Độc lập và phụ thuộc tuyến tính

Định nghĩa. Cho $u_1, u_2, \dots, u_m \in V$. Xét phương trình

$$\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \cdots + \alpha_m u_m = 0. \qquad (*)$$

- Nếu $(*)$ chỉ có nghiệm tầm thường $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_m = 0$ thì ta nói $u_1, u_2, \dots, u_m$ (hay $\{u_1, u_2, \dots, u_m\}$) ***độc lập tuyến tính***.
- Nếu $(*)$ có nghiệm không tầm thường thì ta nói $u_1, u_2, \dots, u_m$ (hay $\{u_1, u_2, \dots, u_m\}$) ***phụ thuộc tuyến tính***.

Nói cách khác,

▷ Nếu phương trình $(*)$ có nghiệm duy nhất thì $u_1, u_2, \dots, u_m$ độc lập tuyến tính.

Độc lập và phụ thuộc tuyến tính

Định nghĩa. Cho $u_1, u_2, \ldots, u_m \in V$. Xét phương trình

$$\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \cdots + \alpha_m u_m = 0. \tag{$*$}$$

- Nếu $(*)$ chỉ có nghiệm tầm thường $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_m = 0$ thì ta nói $u_1, u_2, \ldots, u_m$ (hay $\{u_1, u_2, \ldots, u_m\}$) ***độc lập tuyến tính***.
- Nếu $(*)$ có nghiệm không tầm thường thì ta nói $u_1, u_2, \ldots, u_m$ (hay $\{u_1, u_2, \ldots, u_m\}$) ***phụ thuộc tuyến tính***.

Nói cách khác,

- ▷ Nếu phương trình $(*)$ có nghiệm duy nhất thì $u_1, u_2, \ldots, u_m$ độc lập tuyến tính.
- ▷ Nếu phương trình $(*)$ có vô số nghiệm thì $u_1, u_2, \ldots, u_m$ phụ thuộc tuyến tính.

Thuật toán kiểm tra tính độc lập tuyến tính của các vectơ $u_1, u_2, \ldots, u_m$ trong K^n

Thuật toán kiểm tra tính độc lập tuyến tính của các vectơ $u_1, u_2, \ldots, u_m$ trong K^n

Bước 1. Lập ma trận A bằng cách xếp $u_1, u_2, \ldots, u_m$ thành các cột hoặc thành các dòng.

Thuật toán kiểm tra tính độc lập tuyến tính của các vectơ $u_1, u_2, \ldots, u_m$ trong K^n

Bước 1. Lập ma trận A bằng cách xếp $u_1, u_2, \ldots, u_m$ thành các cột hoặc thành các dòng.

Bước 2. Xác định hạng $r(A)$ của A.

Thuật toán kiểm tra tính độc lập tuyến tính của các vectơ $u_1, u_2, \ldots, u_m$ trong K^n

Bước 1. Lập ma trận A bằng cách xếp $u_1, u_2, \ldots, u_m$ thành các cột hoặc thành các dòng.

Bước 2. Xác định hạng $r(A)$ của A.

- Nếu $r(A) = m$ thì $u_1, u_2, \ldots, u_m$ **độc lập tuyến tính**.

Thuật toán kiểm tra tính độc lập tuyến tính của các vectơ $u_1, u_2, \ldots, u_m$ trong K^n

Bước 1. Lập ma trận A bằng cách xếp $u_1, u_2, \ldots, u_m$ thành các cột hoặc thành các dòng.

Bước 2. Xác định hạng $r(A)$ của A.

- Nếu $r(A) = m$ thì $u_1, u_2, \ldots, u_m$ **độc lập tuyến tính**.
- Nếu $r(A) < m$ thì $u_1, u_2, \ldots, u_m$ **phụ thuộc tuyến tính**.

Thuật toán kiểm tra tính độc lập tuyến tính của các vectơ $u_1, u_2, \ldots, u_m$ trong K^n

Bước 1. Lập ma trận A bằng cách xếp $u_1, u_2, \ldots, u_m$ thành các cột hoặc thành các dòng.

Bước 2. Xác định hạng $r(A)$ của A.

- Nếu $\boldsymbol{r(A) = m}$ thì $u_1, u_2, \ldots, u_m$ **độc lập tuyến tính**.
- Nếu $\boldsymbol{r(A) < m}$ thì $u_1, u_2, \ldots, u_m$ **phụ thuộc tuyến tính**.

Trường hợp $m = n$, ta có A là ma trận vuông. Khi đó có thể thay Bước 2 bằng Bước 2' sau đây:

Thuật toán kiểm tra tính độc lập tuyến tính của các vectơ $u_1, u_2, \ldots, u_m$ trong K^n

Bước 1. Lập ma trận A bằng cách xếp $u_1, u_2, \ldots, u_m$ thành các cột hoặc thành các dòng.

Bước 2. Xác định hạng $r(A)$ của A.

- Nếu $\boldsymbol{r(A) = m}$ thì $u_1, u_2, \ldots, u_m$ **độc lập tuyến tính**.
- Nếu $\boldsymbol{r(A) < m}$ thì $u_1, u_2, \ldots, u_m$ **phụ thuộc tuyến tính**.

Trường hợp $m = n$, ta có A là ma trận vuông. Khi đó có thể thay Bước 2 bằng Bước 2' sau đây:

Bước 2'. Tính định thức của A.

Thuật toán kiểm tra tính độc lập tuyến tính của các vectơ $u_1, u_2, \ldots, u_m$ trong K^n

Bước 1. Lập ma trận A bằng cách xếp $u_1, u_2, \ldots, u_m$ thành các cột hoặc thành các dòng.

Bước 2. Xác định hạng $r(A)$ của A.

- Nếu $\boldsymbol{r(A) = m}$ thì $u_1, u_2, \ldots, u_m$ **độc lập tuyến tính**.
- Nếu $\boldsymbol{r(A) < m}$ thì $u_1, u_2, \ldots, u_m$ **phụ thuộc tuyến tính**.

Trường hợp $m = n$, ta có A là ma trận vuông. Khi đó có thể thay Bước 2 bằng Bước 2' sau đây:

Bước 2'. Tính định thức của A.

- Nếu $\det A \neq 0$ thì $u_1, u_2, \ldots, u_m$ độc lập tuyến tính.

Thuật toán kiểm tra tính độc lập tuyến tính của các vectơ $u_1, u_2, \ldots, u_m$ trong K^n

Bước 1. Lập ma trận A bằng cách xếp $u_1, u_2, \ldots, u_m$ thành các cột hoặc thành các dòng.

Bước 2. Xác định hạng $r(A)$ của A.

- Nếu $\boldsymbol{r(A) = m}$ thì $u_1, u_2, \ldots, u_m$ **độc lập tuyến tính**.
- Nếu $\boldsymbol{r(A) < m}$ thì $u_1, u_2, \ldots, u_m$ **phụ thuộc tuyến tính**.

Trường hợp $m = n$, ta có A là ma trận vuông. Khi đó có thể thay Bước 2 bằng Bước 2' sau đây:

Bước 2'. Tính định thức của A.

- Nếu $\det A \neq 0$ thì $u_1, u_2, \ldots, u_m$ độc lập tuyến tính.
- Nếu $\det A = 0$ thì $u_1, u_2, \ldots, u_m$ phụ thuộc tuyến tính.

Ví dụ. Trong không gian $\mathbb{R}^4$ cho các vectơ $u_1 = (-1, 2, -1, 2)$; $u_2 = (2, 2, -4, 2)$; $u_3 = (1, 3, 1, 2)$. Hãy xét xem u_1, u_2, u_3 độc lập tuyến tính hay phụ thuộc tuyến tính?

Ví dụ. Trong không gian $\mathbb{R}^4$ cho các vectơ $u_1 = (-1, 2, -1, 2)$; $u_2 = (2, 2, -4, 2)$; $u_3 = (1, 3, 1, 2)$. Hãy xét xem u_1, u_2, u_3 độc lập tuyến tính hay phụ thuộc tuyến tính?

Giải.

Lập $A = (u_1^\top \; u_2^\top \; u_3^\top)$

Ví dụ. Trong không gian $\mathbb{R}^4$ cho các vectơ $u_1 = (-1, 2, -1, 2)$; $u_2 = (2, 2, -4, 2)$; $u_3 = (1, 3, 1, 2)$. Hãy xét xem u_1, u_2, u_3 độc lập tuyến tính hay phụ thuộc tuyến tính?

Giải.

Lập $A = (u_1^\top \; u_2^\top \; u_3^\top) = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \\ -1 & -4 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

Ví dụ. Trong không gian $\mathbb{R}^4$ cho các vectơ $u_1 = (-1, 2, -1, 2)$; $u_2 = (2, 2, -4, 2)$; $u_3 = (1, 3, 1, 2)$. Hãy xét xem u_1, u_2, u_3 độc lập tuyến tính hay phụ thuộc tuyến tính?

Giải.

Lập $A = (u_1^\top \ u_2^\top \ u_3^\top) = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \\ -1 & -4 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[d_4+2d_1]{\substack{d_2+2d_1 \\ d_3-d_1}}$

Ví dụ. Trong không gian $\mathbb{R}^4$ cho các vectơ $u_1 = (-1, 2, -1, 2)$; $u_2 = (2, 2, -4, 2)$; $u_3 = (1, 3, 1, 2)$. Hãy xét xem u_1, u_2, u_3 độc lập tuyến tính hay phụ thuộc tuyến tính?

Giải.

Lập $A = (u_1^\top \; u_2^\top \; u_3^\top) = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \\ -1 & -4 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[d_4+2d_1]{\substack{d_2+2d_1 \\ d_3-d_1}} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & 6 & 5 \\ 0 & -6 & 0 \\ 0 & 6 & 4 \end{pmatrix}$

Ví dụ. Trong không gian $\mathbb{R}^4$ cho các vectơ $u_1 = (-1, 2, -1, 2)$; $u_2 = (2, 2, -4, 2)$; $u_3 = (1, 3, 1, 2)$. Hãy xét xem u_1, u_2, u_3 độc lập tuyến tính hay phụ thuộc tuyến tính?

Giải.

Lập $A = (u_1^\top \; u_2^\top \; u_3^\top) = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \\ -1 & -4 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[d_4+2d_1]{\substack{d_2+2d_1 \\ d_3-d_1}} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & 6 & 5 \\ 0 & -6 & 0 \\ 0 & 6 & 4 \end{pmatrix}$

$$\xrightarrow[d_4-d_2]{d_3+d_2}$$

Ví dụ. Trong không gian $\mathbb{R}^4$ cho các vectơ $u_1 = (-1, 2, -1, 2)$; $u_2 = (2, 2, -4, 2)$; $u_3 = (1, 3, 1, 2)$. Hãy xét xem u_1, u_2, u_3 độc lập tuyến tính hay phụ thuộc tuyến tính?

Giải.

Lập $A = (u_1^\top \ u_2^\top \ u_3^\top) = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \\ -1 & -4 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[d_4+2d_1]{\substack{d_2+2d_1 \\ d_3-d_1}} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & 6 & 5 \\ 0 & -6 & 0 \\ 0 & 6 & 4 \end{pmatrix}$

$$\xrightarrow[d_4-d_2]{d_3+d_2} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & 6 & 5 \\ 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Ví dụ. Trong không gian $\mathbb{R}^4$ cho các vectơ $u_1 = (-1, 2, -1, 2)$; $u_2 = (2, 2, -4, 2)$; $u_3 = (1, 3, 1, 2)$. Hãy xét xem u_1, u_2, u_3 độc lập tuyến tính hay phụ thuộc tuyến tính?

Giải.

$$\text{Lập } A = (u_1^\top \ u_2^\top \ u_3^\top) = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \\ -1 & -4 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[d_4+2d_1]{\substack{d_2+2d_1 \\ d_3-d_1}} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & 6 & 5 \\ 0 & -6 & 0 \\ 0 & 6 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[d_4-d_2]{d_3+d_2} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & 6 & 5 \\ 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{d_4+\frac{1}{5}d_3}$$

Ví dụ. Trong không gian $\mathbb{R}^4$ cho các vectơ $u_1 = (-1, 2, -1, 2)$; $u_2 = (2, 2, -4, 2)$; $u_3 = (1, 3, 1, 2)$. Hãy xét xem u_1, u_2, u_3 độc lập tuyến tính hay phụ thuộc tuyến tính?

Giải.

$$\text{Lập } A = (u_1^\top \; u_2^\top \; u_3^\top) = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \\ -1 & -4 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[d_4+2d_1]{\substack{d_2+2d_1 \\ d_3-d_1}} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & 6 & 5 \\ 0 & -6 & 0 \\ 0 & 6 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[d_4-d_2]{d_3+d_2} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & 6 & 5 \\ 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{d_4+\frac{1}{5}d_3} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & 6 & 5 \\ 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ví dụ. Trong không gian $\mathbb{R}^4$ cho các vectơ $u_1 = (-1, 2, -1, 2)$; $u_2 = (2, 2, -4, 2)$; $u_3 = (1, 3, 1, 2)$. Hãy xét xem u_1, u_2, u_3 độc lập tuyến tính hay phụ thuộc tuyến tính?

Giải.

Lập $A = (u_1^\top\ u_2^\top\ u_3^\top) = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \\ -1 & -4 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[d_4+2d_1]{\substack{d_2+2d_1 \\ d_3-d_1}} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & 6 & 5 \\ 0 & -6 & 0 \\ 0 & 6 & 4 \end{pmatrix}$

$$\xrightarrow[d_4-d_2]{d_3+d_2} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & 6 & 5 \\ 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{d_4+\frac{1}{5}d_3} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & 6 & 5 \\ 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ta có $r(A) = 3$. Suy ra u_1, u_2, u_3 độc lập tuyến tính.

Ví dụ. Trong không gian $\mathbb{R}^5$ cho các vectơ $u_1 = (1, 2, -3, 5, 1)$; $u_2 = (1, 3, -13, 22, -1)$; $u_3 = (3, 5, 1, -2, 5)$. Hãy xét xem u_1, u_2, u_3 độc lập tuyến tính hay phụ thuộc tuyến tính?

Ví dụ. Trong không gian $\mathbb{R}^5$ cho các vectơ $u_1 = (1, 2, -3, 5, 1)$; $u_2 = (1, 3, -13, 22, -1)$; $u_3 = (3, 5, 1, -2, 5)$. Hãy xét xem u_1, u_2, u_3 độc lập tuyến tính hay phụ thuộc tuyến tính?

Giải.

$$\text{Lập} \quad A = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$$

Ví dụ. Trong không gian $\mathbb{R}^5$ cho các vectơ $u_1 = (1, 2, -3, 5, 1)$; $u_2 = (1, 3, -13, 22, -1)$; $u_3 = (3, 5, 1, -2, 5)$. Hãy xét xem u_1, u_2, u_3 độc lập tuyến tính hay phụ thuộc tuyến tính?

Giải.

$$\text{Lập} \quad A = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 5 & 1 \\ 1 & 3 & -13 & 22 & -1 \\ 3 & 5 & 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}$$

Ví dụ. Trong không gian $\mathbb{R}^5$ cho các vectơ $u_1 = (1, 2, -3, 5, 1)$; $u_2 = (1, 3, -13, 22, -1)$; $u_3 = (3, 5, 1, -2, 5)$. Hãy xét xem u_1, u_2, u_3 độc lập tuyến tính hay phụ thuộc tuyến tính?

Giải.

$$\text{Lập} \quad A = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 5 & 1 \\ 1 & 3 & -13 & 22 & -1 \\ 3 & 5 & 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[d_3-3d_1]{d_2-d_1}$$

Ví dụ. Trong không gian $\mathbb{R}^5$ cho các vectơ $u_1 = (1, 2, -3, 5, 1)$; $u_2 = (1, 3, -13, 22, -1)$; $u_3 = (3, 5, 1, -2, 5)$. Hãy xét xem u_1, u_2, u_3 độc lập tuyến tính hay phụ thuộc tuyến tính?

Giải.

$$\text{Lập} \quad A = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 5 & 1 \\ 1 & 3 & -13 & 22 & -1 \\ 3 & 5 & 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[d_3-3d_1]{d_2-d_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & -10 & 17 & -2 \\ 0 & -1 & 10 & -17 & 2 \end{pmatrix}$$

Ví dụ. Trong không gian $\mathbb{R}^5$ cho các vectơ $u_1 = (1, 2, -3, 5, 1)$; $u_2 = (1, 3, -13, 22, -1)$; $u_3 = (3, 5, 1, -2, 5)$. Hãy xét xem u_1, u_2, u_3 độc lập tuyến tính hay phụ thuộc tuyến tính?

Giải.

$$\text{Lập} \quad A = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 5 & 1 \\ 1 & 3 & -13 & 22 & -1 \\ 3 & 5 & 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[d_3 - 3d_1]{d_2 - d_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & -10 & 17 & -2 \\ 0 & -1 & 10 & -17 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{d_3 + d_2}$$

Ví dụ. Trong không gian $\mathbb{R}^5$ cho các vectơ $u_1 = (1, 2, -3, 5, 1)$; $u_2 = (1, 3, -13, 22, -1)$; $u_3 = (3, 5, 1, -2, 5)$. Hãy xét xem u_1, u_2, u_3 độc lập tuyến tính hay phụ thuộc tuyến tính?

Giải.

$$\text{Lập} \quad A = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 5 & 1 \\ 1 & 3 & -13 & 22 & -1 \\ 3 & 5 & 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[d_3-3d_1]{d_2-d_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & -10 & 17 & -2 \\ 0 & -1 & 10 & -17 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{d_3+d_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & -10 & 17 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ví dụ. Trong không gian $\mathbb{R}^5$ cho các vectơ $u_1 = (1, 2, -3, 5, 1)$; $u_2 = (1, 3, -13, 22, -1)$; $u_3 = (3, 5, 1, -2, 5)$. Hãy xét xem u_1, u_2, u_3 độc lập tuyến tính hay phụ thuộc tuyến tính?

Giải.

$$\text{Lập} \quad A = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 5 & 1 \\ 1 & 3 & -13 & 22 & -1 \\ 3 & 5 & 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[d_3 - 3d_1]{d_2 - d_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & -10 & 17 & -2 \\ 0 & -1 & 10 & -17 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{d_3 + d_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & -10 & 17 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ta có $r(A) = 2 < 3$. Suy ra u_1, u_2, u_3 phụ thuộc tuyến tính.

Tập sinh

Tập sinh

Định nghĩa. Cho V là không gian vectơ và S là tập con của V.

Tập sinh

Định nghĩa. Cho V là không gian vectơ và S là tập con của V. Tập S được gọi là ***tập sinh*** của V nếu mọi vectơ của V đều là tổ hợp tuyến tính của S.

Tập sinh

Định nghĩa. Cho V là không gian vectơ và S là tập con của V. Tập S được gọi là ***tập sinh*** của V nếu mọi vectơ của V đều là tổ hợp tuyến tính của S. Khi đó, ta nói S ***sinh ra*** V hoặc V ***được sinh bởi*** S,

Tập sinh

Định nghĩa. Cho V là không gian vectơ và S là tập con của V. Tập S được gọi là ***tập sinh*** của V nếu mọi vectơ của V đều là tổ hợp tuyến tính của S. Khi đó, ta nói S ***sinh ra*** V hoặc V ***được sinh bởi*** S, ký hiệu $\boldsymbol{V = \langle S\rangle}$.

Tập sinh

Định nghĩa. Cho V là không gian vectơ và S là tập con của V. Tập S được gọi là ***tập sinh*** của V nếu mọi vectơ của V đều là tổ hợp tuyến tính của S. Khi đó, ta nói S ***sinh ra*** V hoặc V ***được sinh bởi*** S, ký hiệu $\boldsymbol{V = \langle S \rangle}$.

Ví dụ. Trong không gian $\mathbb{R}^3$, cho

$$S = \{u_1 = (1,1,1); u_2 = (1,2,1); u_3 = (2,3,1)\}.$$

Hỏi S có là tập sinh của $\mathbb{R}^3$ không?

Tập sinh

Định nghĩa. Cho V là không gian vectơ và S là tập con của V. Tập S được gọi là ***tập sinh*** của V nếu mọi vectơ của V đều là tổ hợp tuyến tính của S. Khi đó, ta nói S ***sinh ra*** V hoặc V ***được sinh bởi*** S, ký hiệu $\boldsymbol{V = \langle S \rangle}$.

Ví dụ. Trong không gian $\mathbb{R}^3$, cho

$$S = \{u_1 = (1,1,1); u_2 = (1,2,1); u_3 = (2,3,1)\}.$$

Hỏi S có là tập sinh của $\mathbb{R}^3$ không?

Giải. Với $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, ta kiểm tra xem u có là tổ hợp tuyến tính của u_1, u_2, u_3 không?

Tập sinh

Định nghĩa. Cho V là không gian vectơ và S là tập con của V. Tập S được gọi là ***tập sinh*** của V nếu mọi vectơ của V đều là tổ hợp tuyến tính của S. Khi đó, ta nói S ***sinh ra*** V hoặc V ***được sinh bởi*** S, ký hiệu $\boldsymbol{V = \langle S \rangle}$.

Ví dụ. Trong không gian $\mathbb{R}^3$, cho

$$S = \{u_1 = (1, 1, 1); u_2 = (1, 2, 1); u_3 = (2, 3, 1)\}.$$

Hỏi S có là tập sinh của $\mathbb{R}^3$ không?

Giải. Với $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, ta kiểm tra xem u có là tổ hợp tuyến tính của u_1, u_2, u_3 không?

Lập hệ phương trình

Tập sinh

Định nghĩa. Cho V là không gian vectơ và S là tập con của V. Tập S được gọi là ***tập sinh*** của V nếu mọi vectơ của V đều là tổ hợp tuyến tính của S. Khi đó, ta nói S ***sinh ra*** V hoặc V ***được sinh bởi*** S, ký hiệu $\boldsymbol{V = \langle S \rangle}$.

Ví dụ. Trong không gian $\mathbb{R}^3$, cho

$$S = \{u_1 = (1, 1, 1); u_2 = (1, 2, 1); u_3 = (2, 3, 1)\}.$$

Hỏi S có là tập sinh của $\mathbb{R}^3$ không?

Giải. Với $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, ta kiểm tra xem u có là tổ hợp tuyến tính của u_1, u_2, u_3 không?

Lập hệ phương trình

$$(u_1^\top \; u_2^\top \; u_3^\top \mid u^\top)$$

Tập sinh

Định nghĩa. Cho V là không gian vectơ và S là tập con của V. Tập S được gọi là ***tập sinh*** của V nếu mọi vectơ của V đều là tổ hợp tuyến tính của S. Khi đó, ta nói S ***sinh ra*** V hoặc V ***được sinh bởi*** S, ký hiệu $\boldsymbol{V = \langle S \rangle}$.

Ví dụ. Trong không gian $\mathbb{R}^3$, cho

$$S = \{u_1 = (1,1,1); u_2 = (1,2,1); u_3 = (2,3,1)\}.$$

Hỏi S có là tập sinh của $\mathbb{R}^3$ không?

Giải. Với $u = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, ta kiểm tra xem u có là tổ hợp tuyến tính của u_1, u_2, u_3 không?

Lập hệ phương trình

$$(u_1^\top \ u_2^\top \ u_3^\top \mid u^\top) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & x \\ 1 & 2 & 3 & y \\ 1 & 1 & 1 & z \end{array}\right)$$

Tập sinh

Định nghĩa. Cho V là không gian vectơ và S là tập con của V. Tập S được gọi là ***tập sinh*** của V nếu mọi vectơ của V đều là tổ hợp tuyến tính của S. Khi đó, ta nói S ***sinh ra*** V hoặc V ***được sinh bởi*** S, ký hiệu $\boldsymbol{V = \langle S \rangle}$.

Ví dụ. Trong không gian $\mathbb{R}^3$, cho

$$S = \{u_1 = (1,1,1); u_2 = (1,2,1); u_3 = (2,3,1)\}.$$

Hỏi S có là tập sinh của $\mathbb{R}^3$ không?

Giải. Với $u = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, ta kiểm tra xem u có là tổ hợp tuyến tính của u_1, u_2, u_3 không?

Lập hệ phương trình

$$(u_1^\top \; u_2^\top \; u_3^\top \mid u^\top) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & x \\ 1 & 2 & 3 & y \\ 1 & 1 & 1 & z \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|l} 1 & 1 & 2 & x \\ 0 & 1 & 1 & -x+y \\ 0 & 0 & -1 & -x+z \end{array}\right).$$

Hệ có nghiệm, suy ra u là tổ hợp tuyến tính của u_1, u_2, u_3. Vậy S là tập sinh của $\mathbb{R}^3$.

Hệ có nghiệm, suy ra u là tổ hợp tuyến tính của u_1, u_2, u_3. Vậy S là tập sinh của $\mathbb{R}^3$.

Ví dụ. Trong không gian $\mathbb{R}^3$, cho

$$S = \{u_1 = (1, 1, -1); u_2 = (2, 3, 1); u_3 = (3, 4, 0)\}.$$

Hỏi S có là tập sinh của $\mathbb{R}^3$ không?

Hệ có nghiệm, suy ra u là tổ hợp tuyến tính của u_1, u_2, u_3. Vậy S là tập sinh của $\mathbb{R}^3$.

Ví dụ. Trong không gian $\mathbb{R}^3$, cho

$$S = \{u_1 = (1, 1, -1); u_2 = (2, 3, 1); u_3 = (3, 4, 0)\}.$$

Hỏi S có là tập sinh của $\mathbb{R}^3$ không?

Giải. Với $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, ta lập hệ phương trình

Hệ có nghiệm, suy ra u là tổ hợp tuyến tính của u_1, u_2, u_3. Vậy S là tập sinh của $\mathbb{R}^3$.

Ví dụ. Trong không gian $\mathbb{R}^3$, cho

$$S = \{u_1 = (1, 1, -1); u_2 = (2, 3, 1); u_3 = (3, 4, 0)\}.$$

Hỏi S có là tập sinh của $\mathbb{R}^3$ không?

Giải. Với $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, ta lập hệ phương trình

$(u_1^\top \; u_2^\top \; u_3^\top \mid u^\top)$

Hệ có nghiệm, suy ra u là tổ hợp tuyến tính của u_1, u_2, u_3. Vậy S là tập sinh của $\mathbb{R}^3$.

Ví dụ. Trong không gian $\mathbb{R}^3$, cho

$$S = \{u_1 = (1, 1, -1); u_2 = (2, 3, 1); u_3 = (3, 4, 0)\}.$$

Hỏi S có là tập sinh của $\mathbb{R}^3$ không?

Giải. Với $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, ta lập hệ phương trình

$$(u_1^\top \ u_2^\top \ u_3^\top \mid u^\top) = \left(\begin{array}{rrr|c} 1 & 2 & 3 & x \\ 1 & 3 & 4 & y \\ -1 & 1 & 0 & z \end{array}\right)$$

Hệ có nghiệm, suy ra u là tổ hợp tuyến tính của u_1, u_2, u_3. Vậy S là tập sinh của $\mathbb{R}^3$.

Ví dụ. Trong không gian $\mathbb{R}^3$, cho

$$S = \{u_1 = (1, 1, -1); u_2 = (2, 3, 1); u_3 = (3, 4, 0)\}.$$

Hỏi S có là tập sinh của $\mathbb{R}^3$ không?

Giải. Với $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, ta lập hệ phương trình

$$(u_1^\top\ u_2^\top\ u_3^\top \mid u^\top) = \left(\begin{array}{rrr|l} 1 & 2 & 3 & x \\ 1 & 3 & 4 & y \\ -1 & 1 & 0 & z \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{rrr|l} 1 & 2 & 3 & x \\ 0 & 1 & 1 & -x+y \\ 0 & 0 & 0 & 4x - 3y + z \end{array}\right).$$

Hệ có nghiệm, suy ra u là tổ hợp tuyến tính của u_1, u_2, u_3. Vậy S là tập sinh của $\mathbb{R}^3$.

Ví dụ. Trong không gian $\mathbb{R}^3$, cho

$$S = \{u_1 = (1, 1, -1); u_2 = (2, 3, 1); u_3 = (3, 4, 0)\}.$$

Hỏi S có là tập sinh của $\mathbb{R}^3$ không?

Giải. Với $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, ta lập hệ phương trình

$$(u_1^\top \; u_2^\top \; u_3^\top \mid u^\top) = \left(\begin{array}{rrr|l} 1 & 2 & 3 & x \\ 1 & 3 & 4 & y \\ -1 & 1 & 0 & z \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{rrr|l} 1 & 2 & 3 & x \\ 0 & 1 & 1 & -x + y \\ 0 & 0 & 0 & 4x - 3y + z \end{array}\right).$$

Với $u_0 = (1, 1, 1)$ thì hệ trên vô nghiệm.

Hệ có nghiệm, suy ra u là tổ hợp tuyến tính của u_1, u_2, u_3. Vậy S là tập sinh của $\mathbb{R}^3$.

Ví dụ. Trong không gian $\mathbb{R}^3$, cho

$$S = \{u_1 = (1, 1, -1); u_2 = (2, 3, 1); u_3 = (3, 4, 0)\}.$$

Hỏi S có là tập sinh của $\mathbb{R}^3$ không?

Giải. Với $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, ta lập hệ phương trình

$$(u_1^\top \; u_2^\top \; u_3^\top \mid u^\top) = \left(\begin{array}{rrr|l} 1 & 2 & 3 & x \\ 1 & 3 & 4 & y \\ -1 & 1 & 0 & z \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{rrr|l} 1 & 2 & 3 & x \\ 0 & 1 & 1 & -x+y \\ 0 & 0 & 0 & 4x-3y+z \end{array}\right).$$

Với $u_0 = (1, 1, 1)$ thì hệ trên vô nghiệm. Vậy u_0 không là tổ hợp tuyến tính của u_1, u_2, u_3.

Hệ có nghiệm, suy ra u là tổ hợp tuyến tính của u_1, u_2, u_3. Vậy S là tập sinh của $\mathbb{R}^3$.

Ví dụ. Trong không gian $\mathbb{R}^3$, cho

$$S = \{u_1 = (1, 1, -1); u_2 = (2, 3, 1); u_3 = (3, 4, 0)\}.$$

Hỏi S có là tập sinh của $\mathbb{R}^3$ không?

Giải. Với $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, ta lập hệ phương trình

$$(u_1^\top \ u_2^\top \ u_3^\top \mid u^\top) = \left(\begin{array}{rrr|l} 1 & 2 & 3 & x \\ 1 & 3 & 4 & y \\ -1 & 1 & 0 & z \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{rrr|l} 1 & 2 & 3 & x \\ 0 & 1 & 1 & -x + y \\ 0 & 0 & 0 & 4x - 3y + z \end{array}\right).$$

Với $u_0 = (1, 1, 1)$ thì hệ trên vô nghiệm. Vậy u_0 không là tổ hợp tuyến tính của u_1, u_2, u_3. Suy ra S không là tập sinh của $\mathbb{R}^3$.

Cơ sở

Cơ sở

Định nghĩa. Cho V là không gian vectơ và $\mathcal{B}$ là tập con của V.

Cơ sở

Định nghĩa. Cho V là không gian vectơ và $\mathcal{B}$ là tập con của V. Tập $\mathcal{B}$ được gọi là một ***cơ sở*** của V nếu $\mathcal{B}$ là một tập sinh của V và $\mathcal{B}$ độc lập tuyến tính.

Cơ sở

Định nghĩa. Cho V là không gian vectơ và $\mathcal{B}$ là tập con của V. Tập $\mathcal{B}$ được gọi là một ***cơ sở*** của V nếu $\mathcal{B}$ là một tập sinh của V và $\mathcal{B}$ độc lập tuyến tính.

Ví dụ. Trong không gian $\mathbb{R}^3$, cho

$$\mathcal{B} = \{u_1 = (1,1,1); u_2 = (1,2,1); u_3 = (2,3,1)\}.$$

Kiểm tra $\mathcal{B}$ là cơ sở của $\mathbb{R}^3$.

Cơ sở

Định nghĩa. Cho V là không gian vectơ và $\mathcal{B}$ là tập con của V. Tập $\mathcal{B}$ được gọi là một ***cơ sở*** của V nếu $\mathcal{B}$ là một tập sinh của V và $\mathcal{B}$ độc lập tuyến tính.

Ví dụ. Trong không gian $\mathbb{R}^3$, cho

$$\mathcal{B} = \{u_1 = (1, 1, 1); u_2 = (1, 2, 1); u_3 = (2, 3, 1)\}.$$

Kiểm tra $\mathcal{B}$ là cơ sở của $\mathbb{R}^3$.

Giải. $\mathcal{B}$ là tập sinh của $\mathbb{R}^3$. (theo ví dụ trên)

Cơ sở

Định nghĩa. Cho V là không gian vectơ và $\mathcal{B}$ là tập con của V. Tập $\mathcal{B}$ được gọi là một ***cơ sở*** của V nếu $\mathcal{B}$ là một tập sinh của V và $\mathcal{B}$ độc lập tuyến tính.

Ví dụ. Trong không gian $\mathbb{R}^3$, cho

$$\mathcal{B} = \{u_1 = (1,1,1); u_2 = (1,2,1); u_3 = (2,3,1)\}.$$

Kiểm tra $\mathcal{B}$ là cơ sở của $\mathbb{R}^3$.

Giải. $\mathcal{B}$ là tập sinh của $\mathbb{R}^3$. (theo ví dụ trên)

Kiểm tra $\mathcal{B}$ độc lập tuyến tính.

Cơ sở

Định nghĩa. Cho V là không gian vectơ và $\mathcal{B}$ là tập con của V. Tập $\mathcal{B}$ được gọi là một ***cơ sở*** của V nếu $\mathcal{B}$ là một tập sinh của V và $\mathcal{B}$ độc lập tuyến tính.

Ví dụ. Trong không gian $\mathbb{R}^3$, cho

$$\mathcal{B} = \{u_1 = (1,1,1); u_2 = (1,2,1); u_3 = (2,3,1)\}.$$

Kiểm tra $\mathcal{B}$ là cơ sở của $\mathbb{R}^3$.

Giải. $\mathcal{B}$ là tập sinh của $\mathbb{R}^3$. (theo ví dụ trên)

Kiểm tra $\mathcal{B}$ độc lập tuyến tính. Lập ma trận

$$A = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$$

Cơ sở

Định nghĩa. Cho V là không gian vectơ và $\mathcal{B}$ là tập con của V. Tập $\mathcal{B}$ được gọi là một ***cơ sở*** của V nếu $\mathcal{B}$ là một tập sinh của V và $\mathcal{B}$ độc lập tuyến tính.

Ví dụ. Trong không gian $\mathbb{R}^3$, cho

$$\mathcal{B} = \{u_1 = (1,1,1); u_2 = (1,2,1); u_3 = (2,3,1)\}.$$

Kiểm tra $\mathcal{B}$ là cơ sở của $\mathbb{R}^3$.

Giải. $\mathcal{B}$ là tập sinh của $\mathbb{R}^3$. (theo ví dụ trên)

Kiểm tra $\mathcal{B}$ độc lập tuyến tính. Lập ma trận

$$A = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Cơ sở

Định nghĩa. Cho V là không gian vectơ và $\mathcal{B}$ là tập con của V. Tập $\mathcal{B}$ được gọi là một ***cơ sở*** của V nếu $\mathcal{B}$ là một tập sinh của V và $\mathcal{B}$ độc lập tuyến tính.

Ví dụ. Trong không gian $\mathbb{R}^3$, cho

$$\mathcal{B} = \{u_1 = (1,1,1); u_2 = (1,2,1); u_3 = (2,3,1)\}.$$

Kiểm tra $\mathcal{B}$ là cơ sở của $\mathbb{R}^3$.

Giải. $\mathcal{B}$ là tập sinh của $\mathbb{R}^3$. (theo ví dụ trên)

Kiểm tra $\mathcal{B}$ độc lập tuyến tính. Lập ma trận
$A = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$. Ta có $r(A) = 3$ (hoặc $|A| = -1$).

Cơ sở

Định nghĩa. Cho V là không gian vectơ và $\mathcal{B}$ là tập con của V. Tập $\mathcal{B}$ được gọi là một ***cơ sở*** của V nếu $\mathcal{B}$ là một tập sinh của V và $\mathcal{B}$ độc lập tuyến tính.

Ví dụ. Trong không gian $\mathbb{R}^3$, cho

$$\mathcal{B} = \{u_1 = (1,1,1); u_2 = (1,2,1); u_3 = (2,3,1)\}.$$

Kiểm tra $\mathcal{B}$ là cơ sở của $\mathbb{R}^3$.

Giải. $\mathcal{B}$ là tập sinh của $\mathbb{R}^3$. (theo ví dụ trên)

Kiểm tra $\mathcal{B}$ độc lập tuyến tính. Lập ma trận
$A = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$. Ta có $r(A) = 3$ (hoặc $|A| = -1$). Suy ra $\mathcal{B}$ độc lập tuyến tính.

Cơ sở

Định nghĩa. Cho V là không gian vectơ và $\mathcal{B}$ là tập con của V. Tập $\mathcal{B}$ được gọi là một ***cơ sở*** của V nếu $\mathcal{B}$ là một tập sinh của V và $\mathcal{B}$ độc lập tuyến tính.

Ví dụ. Trong không gian $\mathbb{R}^3$, cho

$$\mathcal{B} = \{u_1 = (1,1,1); u_2 = (1,2,1); u_3 = (2,3,1)\}.$$

Kiểm tra $\mathcal{B}$ là cơ sở của $\mathbb{R}^3$.

Giải. $\mathcal{B}$ là tập sinh của $\mathbb{R}^3$. (theo ví dụ trên)

Kiểm tra $\mathcal{B}$ độc lập tuyến tính. Lập ma trận

$A = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$. Ta có $r(A) = 3$ (hoặc $|A| = -1$). Suy ra $\mathcal{B}$ độc lập tuyến tính. Vậy $\mathcal{B}$ là cơ sở của $\mathbb{R}^3$.

Số chiều

Số chiều

Nhận diện cơ sở của không gian V có $\dim V = n$

Số chiều

Nhận diện cơ sở của không gian V có $\dim V = n$

Vì $\dim V = n$ nên mọi cơ sở của V phải gồm n vectơ.

Số chiều

Nhận diện cơ sở của không gian V có $\dim V = n$

Vì $\dim V = n$ nên mọi cơ sở của V phải gồm n vectơ. Hơn nữa, nếu S là tập con của V và số phần tử của S bằng n thì

Số chiều

Nhận diện cơ sở của không gian V có $\dim V = n$

Vì $\dim V = n$ nên mọi cơ sở của V phải gồm n vectơ. Hơn nữa, nếu S là tập con của V và số phần tử của S bằng n thì

$$S \text{ là cơ sở của } V \iff S \text{ độc lập tuyến tính.}$$

Số chiều

Nhận diện cơ sở của không gian V có $\dim V = n$

Vì $\dim V = n$ nên mọi cơ sở của V phải gồm n vectơ. Hơn nữa, nếu S là tập con của V và số phần tử của S bằng n thì

$$\begin{aligned} S \text{ là cơ sở của } V \quad &\Longleftrightarrow S \text{ độc lập tuyến tính.} \\ &\Longleftrightarrow S \text{ là tập sinh của } V. \end{aligned}$$

Số chiều

Nhận diện cơ sở của không gian V có $\dim V = n$

Vì $\dim V = n$ nên mọi cơ sở của V phải gồm n vectơ. Hơn nữa, nếu S là tập con của V và số phần tử của S bằng n thì

$$\begin{aligned} S \text{ là cơ sở của } V &\iff S \text{ độc lập tuyến tính.} \\ &\iff S \text{ là tập sinh của } V. \end{aligned}$$

Ví dụ. Kiểm tra tập hợp nào sau đây là cơ sở của không gian $\mathbb{R}^3$?

a) $B_1 = \{u_1 = (1, 2, 3), u_2 = (2, 3, 4)\}$.

b) $B_2 = \{u_1 = (2, 1, 3), u_2 = (2, 1, 4), u_3 = (2, 3, 1), u_4 = (3, 4, 5)\}$.

c) $B_3 = \{u_1 = (1, -2, 1), u_2 = (1, 3, 2), u_3 = (-2, 1, -2)\}$

d) $B_4 = \{u_1 = (2, -1, 0), u_2 = (1, 2, 3), u_3 = (5, 0, 3)\}$

Không gian vectơ con

Không gian vectơ con

Định lý. *Cho W là một tập con khác rỗng của V.*

Không gian vectơ con

Định lý. *Cho W là một tập con khác rỗng của V. Khi đó các mệnh đề sau tương đương:*

Không gian vectơ con

Định lý. *Cho W là một tập con khác rỗng của V. Khi đó các mệnh đề sau tương đương:*

(i) $W \leq V$.

Không gian vectơ con

Định lý. *Cho W là một tập con khác rỗng của V. Khi đó các mệnh đề sau tương đương:*

(i) $W \leq V$.

(ii) *Với mọi* $u, v \in W$; $\alpha \in K$, *ta có* $u + v \in W$ *và* $\alpha u \in W$.

Không gian vectơ con

Định lý. *Cho W là một tập con khác rỗng của V. Khi đó các mệnh đề sau tương đương:*

(i) $W \leq V$.

(ii) *Với mọi* $u, v \in W$; $\alpha \in K$, *ta có* $u + v \in W$ *và* $\alpha u \in W$.

(iii) *Với mọi* $u, v \in W$; $\alpha \in K$, *ta có* $\alpha u + v \in W$.

Không gian vectơ con

Định lý. *Cho W là một tập con khác rỗng của V. Khi đó các mệnh đề sau tương đương:*

(i) $W \leq V$.

(ii) *Với mọi* $u, v \in W$; $\alpha \in K$, *ta có* $u + v \in W$ *và* $\alpha u \in W$.

(iii) *Với mọi* $u, v \in W$; $\alpha \in K$, *ta có* $\alpha u + v \in W$.

Thuật toán tìm số chiều và cơ sở của một không gian con của K^n khi biết một tập sinh

Không gian vectơ con

Định lý. *Cho W là một tập con khác rỗng của V. Khi đó các mệnh đề sau tương đương:*

(i) $W \leq V$.

(ii) *Với mọi* $u, v \in W$; $\alpha \in K$, *ta có* $u + v \in W$ *và* $\alpha u \in W$.

(iii) *Với mọi* $u, v \in W$; $\alpha \in K$, *ta có* $\alpha u + v \in W$.

Thuật toán tìm số chiều và cơ sở của một không gian con của K^n khi biết một tập sinh

Giả sử $W = \langle u_1, u_2, \ldots, u_m \rangle \leq K^n$,

Không gian vectơ con

Định lý. *Cho W là một tập con khác rỗng của V. Khi đó các mệnh đề sau tương đương:*

(i) $W \leq V$.

(ii) *Với mọi* $u, v \in W$; $\alpha \in K$, *ta có* $u + v \in W$ *và* $\alpha u \in W$.

(iii) *Với mọi* $u, v \in W$; $\alpha \in K$, *ta có* $\alpha u + v \in W$.

Thuật toán tìm số chiều và cơ sở của một không gian con của K^n khi biết một tập sinh

Giả sử $W = \langle u_1, u_2, \ldots, u_m \rangle \leq K^n$, để tìm số chiều và một cơ sở của W ta tiến hành như sau:

Không gian vectơ con

Định lý. *Cho W là một tập con khác rỗng của V. Khi đó các mệnh đề sau tương đương:*

(i) $W \leq V$.

(ii) *Với mọi $u, v \in W$; $\alpha \in K$, ta có $u + v \in W$ và $\alpha u \in W$.*

(iii) *Với mọi $u, v \in W$; $\alpha \in K$, ta có $\alpha u + v \in W$.*

Thuật toán tìm số chiều và cơ sở của một không gian con của K^n khi biết một tập sinh

Giả sử $W = \langle u_1, u_2, \ldots, u_m \rangle \leq K^n$, để tìm số chiều và một cơ sở của W ta tiến hành như sau:

Bước 1. Lập ma trận A bằng cách xếp $u_1, u_2, \ldots, u_m$ thành các dòng.

Không gian vectơ con

Định lý. *Cho W là một tập con khác rỗng của V. Khi đó các mệnh đề sau tương đương:*

(i) $W \leq V$.

(ii) *Với mọi* $u, v \in W$; $\alpha \in K$, *ta có* $u + v \in W$ *và* $\alpha u \in W$.

(iii) *Với mọi* $u, v \in W$; $\alpha \in K$, *ta có* $\alpha u + v \in W$.

Thuật toán tìm số chiều và cơ sở của một không gian con của K^n khi biết một tập sinh

Giả sử $W = \langle u_1, u_2, \ldots, u_m \rangle \leq K^n$, để tìm số chiều và một cơ sở của W ta tiến hành như sau:

Bước 1. Lập ma trận A bằng cách xếp $u_1, u_2, \ldots, u_m$ thành các dòng.

Bước 2. Dùng các phép BĐSCTD đưa A về dạng bậc thang R_A.

Không gian vectơ con

Định lý. *Cho W là một tập con khác rỗng của V. Khi đó các mệnh đề sau tương đương:*

(i) $W \leq V$.

(ii) *Với mọi* $u, v \in W$; $\alpha \in K$, *ta có* $u + v \in W$ *và* $\alpha u \in W$.

(iii) *Với mọi* $u, v \in W$; $\alpha \in K$, *ta có* $\alpha u + v \in W$.

Thuật toán tìm số chiều và cơ sở của một không gian con của K^n khi biết một tập sinh

Giả sử $W = \langle u_1, u_2, \ldots, u_m \rangle \leq K^n$, để tìm số chiều và một cơ sở của W ta tiến hành như sau:

Bước 1. Lập ma trận A bằng cách xếp $u_1, u_2, \ldots, u_m$ thành các dòng.

Bước 2. Dùng các phép BĐSCTD đưa A về dạng bậc thang R_A.

Bước 3. Số chiều của W bằng số dòng khác 0 của R $(= r(A))$ và các vectơ dòng khác 0 của R tạo thành một cơ sở của W.

Ví dụ. Cho W sinh bởi $S = \{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ trong đó $u_1 = (1, 2, 1, 1)$; $u_2 = (3, 6, 5, 7)$; $u_3 = (4, 8, 6, 8)$; $u_4 = (8, 16, 12, 20)$. Tìm một cơ sở của không gian W?

Ví dụ. Cho W sinh bởi $S = \{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ trong đó $u_1 = (1, 2, 1, 1)$; $u_2 = (3, 6, 5, 7)$; $u_3 = (4, 8, 6, 8)$; $u_4 = (8, 16, 12, 20)$. Tìm một cơ sở của không gian W?

Giải. Lập

$$A = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{pmatrix}$$

Ví dụ. Cho W sinh bởi $S = \{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ trong đó $u_1 = (1, 2, 1, 1)$; $u_2 = (3, 6, 5, 7)$; $u_3 = (4, 8, 6, 8)$; $u_4 = (8, 16, 12, 20)$. Tìm một cơ sở của không gian W?

Giải. Lập

$$A = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & 6 & 5 & 7 \\ 4 & 8 & 6 & 8 \\ 8 & 16 & 12 & 20 \end{pmatrix}$$

Ví dụ. Cho W sinh bởi $S = \{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ trong đó $u_1 = (1, 2, 1, 1)$; $u_2 = (3, 6, 5, 7)$; $u_3 = (4, 8, 6, 8)$; $u_4 = (8, 16, 12, 20)$. Tìm một cơ sở của không gian W?

Giải. Lập

$$A = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & 6 & 5 & 7 \\ 4 & 8 & 6 & 8 \\ 8 & 16 & 12 & 20 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ví dụ. Cho W sinh bởi $S = \{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ trong đó $u_1 = (1, 2, 1, 1)$; $u_2 = (3, 6, 5, 7)$; $u_3 = (4, 8, 6, 8)$; $u_4 = (8, 16, 12, 20)$. Tìm một cơ sở của không gian W?

Giải. Lập

$$A = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & 6 & 5 & 7 \\ 4 & 8 & 6 & 8 \\ 8 & 16 & 12 & 20 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Do đó W có $\dim W = 3$

Ví dụ. Cho W sinh bởi $S = \{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ trong đó $u_1 = (1, 2, 1, 1)$; $u_2 = (3, 6, 5, 7)$; $u_3 = (4, 8, 6, 8)$; $u_4 = (8, 16, 12, 20)$. Tìm một cơ sở của không gian W?

Giải. Lập

$$A = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & 6 & 5 & 7 \\ 4 & 8 & 6 & 8 \\ 8 & 16 & 12 & 20 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Do đó W có $\dim W = 3$ và có một cơ sở

$$\{v_1 = (1, 2, 1, 1); v_2 = (0, 0, 1, 2); v_3 = (0, 0, 0, 1)\}.$$

Ví dụ. Cho W sinh bởi $S = \{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ trong đó $u_1 = (1, 2, 1, 1)$; $u_2 = (3, 6, 5, 7)$; $u_3 = (4, 8, 6, 8)$; $u_4 = (8, 16, 12, 20)$. Tìm một cơ sở của không gian W?

Giải. Lập

$$A = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & 6 & 5 & 7 \\ 4 & 8 & 6 & 8 \\ 8 & 16 & 12 & 20 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Do đó W có $\dim W = 3$ và có một cơ sở

$$\{v_1 = (1, 2, 1, 1); v_2 = (0, 0, 1, 2); v_3 = (0, 0, 0, 1)\}.$$

Nhận xét. Vì $\dim W = 3$, hơn nữa, có thể kiểm chứng u_1, u_2, u_4 độc lập tuyến tính nên ta cũng có $\{u_1, u_2, u_4\}$ là một cơ sở của W.

Ví dụ. Cho W sinh bởi $S = \{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ trong đó $u_1 = (1, 2, 1, 1)$; $u_2 = (3, 6, 5, 7)$; $u_3 = (4, 8, 6, 8)$; $u_4 = (8, 16, 12, 20)$. Tìm một cơ sở của không gian W?

Giải. Lập

$$A = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & 6 & 5 & 7 \\ 4 & 8 & 6 & 8 \\ 8 & 16 & 12 & 20 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Do đó W có $\dim W = 3$ và có một cơ sở

$$\{v_1 = (1, 2, 1, 1); v_2 = (0, 0, 1, 2); v_3 = (0, 0, 0, 1)\}.$$

Nhận xét. Vì $\dim W = 3$, hơn nữa, có thể kiểm chứng u_1, u_2, u_4 độc lập tuyến tính nên ta cũng có $\{u_1, u_2, u_4\}$ là một cơ sở của W.

Ví dụ.(tự làm) Tìm một cơ sở cho không gian con của $\mathbb{R}^4$ sinh bởi các vectơ u_1, u_2, u_3, trong đó

$$u_1 = (1, -2, -1, 3);\ u_2 = (2, -4, -3, 0);\ u_3 = (3, -6, -4, 4).$$

Không gian nghiệm của hệ phương trình tuyến tính thuần nhất

Không gian nghiệm của hệ phương trình tuyến tính thuần nhất

Định lý. *Gọi W là tập hợp nghiệm $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ của hệ phương trình tuyến tính thuần nhất*

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0; \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = 0. \end{cases}$$

Không gian nghiệm của hệ phương trình tuyến tính thuần nhất

Định lý. *Gọi W là tập hợp nghiệm $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ của hệ phương trình tuyến tính thuần nhất*

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = 0. \end{cases}$$

Khi đó, W là không gian con của $\mathbb{R}^n$

Không gian nghiệm của hệ phương trình tuyến tính thuần nhất

Định lý. *Gọi W là tập hợp nghiệm $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ của hệ phương trình tuyến tính thuần nhất*

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0; \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = 0. \end{cases}$$

Khi đó, W là không gian con của $\mathbb{R}^n$ và số chiều của W bằng số ẩn tự do của hệ.

Không gian nghiệm của hệ phương trình tuyến tính thuần nhất

Định lý. *Gọi W là tập hợp nghiệm $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ của hệ phương trình tuyến tính thuần nhất*

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & 0; \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & 0; \\ \multicolumn{9}{c}{\dotfill} \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n & = & 0. \end{array}\right.$$

Khi đó, W là không gian con của $\mathbb{R}^n$ và số chiều của W bằng số ẩn tự do của hệ. Như vậy

$$W = \{u \in \mathbb{R}^n \mid Au^\top = 0\}$$

Không gian nghiệm của hệ phương trình tuyến tính thuần nhất

Định lý. *Gọi W là tập hợp nghiệm $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ của hệ phương trình tuyến tính thuần nhất*

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = 0. \end{cases}$$

Khi đó, W là không gian con của $\mathbb{R}^n$ và số chiều của W bằng số ẩn tự do của hệ. Như vậy

$$W = \{u \in \mathbb{R}^n \mid Au^\top = 0\}$$

với A là ma trận cho trước và $u = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Tìm cơ sở của không gian nghiệm

Tìm cơ sở của không gian nghiệm

Thuật toán

Tìm cơ sở của không gian nghiệm

Thuật toán

Bước 1. Giải hệ phương trình, tìm nghiệm tổng quát.

Tìm cơ sở của không gian nghiệm

Thuật toán

Bước 1. Giải hệ phương trình, tìm nghiệm tổng quát.

Bước 2. Lần lượt cho bộ ẩn tự do các giá trị

$$(1, 0, \ldots, 0), \ldots, (0, 0, \ldots, 1)$$

ta được các nghiệm cơ bản $u_1, u_2, \ldots, u_m$.

Tìm cơ sở của không gian nghiệm

Thuật toán

Bước 1. Giải hệ phương trình, tìm nghiệm tổng quát.

Bước 2. Lần lượt cho bộ ẩn tự do các giá trị

$$(1, 0, \ldots, 0), \ldots, (0, 0, \ldots, 1)$$

ta được các nghiệm cơ bản $u_1, u_2, \ldots, u_m$.

Bước 3. Khi đó không gian nghiệm có cơ sở là $\{u_1, u_2, \ldots, u_m\}$.

Tìm cơ sở của không gian nghiệm

Thuật toán

Bước 1. Giải hệ phương trình, tìm nghiệm tổng quát.

Bước 2. Lần lượt cho bộ ẩn tự do các giá trị

$$(1, 0, \ldots, 0), \ldots, (0, 0, \ldots, 1)$$

ta được các nghiệm cơ bản $u_1, u_2, \ldots, u_m$.

Bước 3. Khi đó không gian nghiệm có cơ sở là $\{u_1, u_2, \ldots, u_m\}$.

Ví dụ. Tìm cơ sở và số chiều của không gian nghiệm sau

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 5x_4 = 0; \\ x_1 + 3x_2 - 13x_3 + 22x_4 = 0; \\ 3x_1 + 5x_2 + x_3 - 2x_4 = 0; \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 - 7x_4 = 0. \end{cases}$$

Giải. Ma trận hóa hệ phương trình, ta có

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 5 \\ 1 & 3 & -13 & 22 \\ 3 & 5 & 1 & -2 \\ 2 & 3 & 4 & -7 \end{pmatrix}$$

Giải. Ma trận hóa hệ phương trình, ta có

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 5 \\ 1 & 3 & -13 & 22 \\ 3 & 5 & 1 & -2 \\ 2 & 3 & 4 & -7 \end{pmatrix} \xrightarrow[d_4-2d_1]{\substack{d_2-d_1 \\ d_3-3d_1}}$$

Giải. Ma trận hóa hệ phương trình, ta có

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 5 \\ 1 & 3 & -13 & 22 \\ 3 & 5 & 1 & -2 \\ 2 & 3 & 4 & -7 \end{pmatrix} \xrightarrow[d_4 - 2d_1]{\substack{d_2 - d_1 \\ d_3 - 3d_1}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 5 \\ 0 & 1 & -10 & 17 \\ 0 & -1 & 10 & -17 \\ 0 & -1 & 10 & -17 \end{pmatrix}$$

Giải. Ma trận hóa hệ phương trình, ta có

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 5 \\ 1 & 3 & -13 & 22 \\ 3 & 5 & 1 & -2 \\ 2 & 3 & 4 & -7 \end{pmatrix} \xrightarrow[d_4-2d_1]{\substack{d_2-d_1 \\ d_3-3d_1}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 5 \\ 0 & 1 & -10 & 17 \\ 0 & -1 & 10 & -17 \\ 0 & -1 & 10 & -17 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[d_4+d_2]{\substack{d_1-2d_2 \\ d_3+d_2}}$$

Giải. Ma trận hóa hệ phương trình, ta có

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 5 \\ 1 & 3 & -13 & 22 \\ 3 & 5 & 1 & -2 \\ 2 & 3 & 4 & -7 \end{pmatrix} \xrightarrow[d_4-2d_1]{\substack{d_2-d_1 \\ d_3-3d_1}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 5 \\ 0 & 1 & -10 & 17 \\ 0 & -1 & 10 & -17 \\ 0 & -1 & 10 & -17 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[d_4+d_2]{\substack{d_1-2d_2 \\ d_3+d_2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 17 & -29 \\ 0 & 1 & -10 & 17 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Giải. Ma trận hóa hệ phương trình, ta có

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 5 \\ 1 & 3 & -13 & 22 \\ 3 & 5 & 1 & -2 \\ 2 & 3 & 4 & -7 \end{pmatrix} \xrightarrow[d_4 - 2d_1]{\substack{d_2 - d_1 \\ d_3 - 3d_1}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 5 \\ 0 & 1 & -10 & 17 \\ 0 & -1 & 10 & -17 \\ 0 & -1 & 10 & -17 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[d_4 + d_2]{\substack{d_1 - 2d_2 \\ d_3 + d_2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 17 & -29 \\ 0 & 1 & -10 & 17 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Suy ra nghiệm của hệ là

$$u = (x_1, x_2, x_3, x_4) = (-17t + 29s, 10t - 17s, t, s) \text{ với } t, s \in \mathbb{R}.$$

Giải. Ma trận hóa hệ phương trình, ta có

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 5 \\ 1 & 3 & -13 & 22 \\ 3 & 5 & 1 & -2 \\ 2 & 3 & 4 & -7 \end{pmatrix} \xrightarrow[d_4-2d_1]{\substack{d_2-d_1 \\ d_3-3d_1}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 5 \\ 0 & 1 & -10 & 17 \\ 0 & -1 & 10 & -17 \\ 0 & -1 & 10 & -17 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[d_4+d_2]{\substack{d_1-2d_2 \\ d_3+d_2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 17 & -29 \\ 0 & 1 & -10 & 17 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Suy ra nghiệm của hệ là

$$u = (x_1, x_2, x_3, x_4) = (-17t + 29s, 10t - 17s, t, s) \text{ với } t, s \in \mathbb{R}.$$

Các nghiệm cơ bản của hệ là

Giải. Ma trận hóa hệ phương trình, ta có

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 5 \\ 1 & 3 & -13 & 22 \\ 3 & 5 & 1 & -2 \\ 2 & 3 & 4 & -7 \end{pmatrix} \xrightarrow[d_4-2d_1]{\substack{d_2-d_1 \\ d_3-3d_1}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 5 \\ 0 & 1 & -10 & 17 \\ 0 & -1 & 10 & -17 \\ 0 & -1 & 10 & -17 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[d_4+d_2]{\substack{d_1-2d_2 \\ d_3+d_2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 17 & -29 \\ 0 & 1 & -10 & 17 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Suy ra nghiệm của hệ là

$$u = (x_1, x_2, x_3, x_4) = (-17t + 29s, 10t - 17s, t, s) \text{ với } t, s \in \mathbb{R}.$$

Các nghiệm cơ bản của hệ là

$$u_1 = (-17, 10, 1, 0),$$

Giải. Ma trận hóa hệ phương trình, ta có

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 5 \\ 1 & 3 & -13 & 22 \\ 3 & 5 & 1 & -2 \\ 2 & 3 & 4 & -7 \end{pmatrix} \xrightarrow[d_4-2d_1]{\substack{d_2-d_1 \\ d_3-3d_1}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 5 \\ 0 & 1 & -10 & 17 \\ 0 & -1 & 10 & -17 \\ 0 & -1 & 10 & -17 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[d_4+d_2]{\substack{d_1-2d_2 \\ d_3+d_2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 17 & -29 \\ 0 & 1 & -10 & 17 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Suy ra nghiệm của hệ là

$$u = (x_1, x_2, x_3, x_4) = (-17t + 29s, 10t - 17s, t, s) \text{ với } t, s \in \mathbb{R}.$$

Các nghiệm cơ bản của hệ là

$$u_1 = (-17, 10, 1, 0), u_2 = (29, -17, 0, 1).$$

Giải. Ma trận hóa hệ phương trình, ta có

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 5 \\ 1 & 3 & -13 & 22 \\ 3 & 5 & 1 & -2 \\ 2 & 3 & 4 & -7 \end{pmatrix} \xrightarrow[d_4-2d_1]{\substack{d_2-d_1 \\ d_3-3d_1}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 5 \\ 0 & 1 & -10 & 17 \\ 0 & -1 & 10 & -17 \\ 0 & -1 & 10 & -17 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[d_4+d_2]{\substack{d_1-2d_2 \\ d_3+d_2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 17 & -29 \\ 0 & 1 & -10 & 17 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Suy ra nghiệm của hệ là

$$u = (x_1, x_2, x_3, x_4) = (-17t + 29s, 10t - 17s, t, s) \text{ với } t, s \in \mathbb{R}.$$

Các nghiệm cơ bản của hệ là

$$u_1 = (-17, 10, 1, 0), u_2 = (29, -17, 0, 1).$$

Do đó, nếu W là không gian nghiệm thì $\mathcal{B} = \{u_1, u_2\}$ cơ sở của W và $\dim W = 2$.

Tọa độ

Tọa độ

Định nghĩa. Cho V là không gian vectơ và $\mathcal{B} = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ là một cơ sở của V.

Tọa độ

Định nghĩa. Cho V là không gian vectơ và $\mathcal{B} = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ là một cơ sở của V. Khi đó $\mathcal{B}$ được gọi là ***cơ sở được sắp*** của V nếu thứ tự các vectơ trong $\mathcal{B}$ được cố định.

Tọa độ

Định nghĩa. Cho V là không gian vectơ và $\mathcal{B} = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ là một cơ sở của V. Khi đó $\mathcal{B}$ được gọi là ***cơ sở được sắp*** của V nếu thứ tự các vectơ trong $\mathcal{B}$ được cố định. Ta thường dùng ký hiệu

$$(u_1, u_2, \ldots, u_n)$$

để chỉ cơ sở được sắp theo thứ tự $u_1, u_2, \ldots, u_n$.

Tọa độ

Định nghĩa. Cho V là không gian vectơ và $\mathcal{B} = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ là một cơ sở của V. Khi đó $\mathcal{B}$ được gọi là ***cơ sở được sắp*** của V nếu thứ tự các vectơ trong $\mathcal{B}$ được cố định. Ta thường dùng ký hiệu

$$\boldsymbol{(u_1, u_2, \ldots, u_n)}$$

để chỉ cơ sở được sắp theo thứ tự $u_1, u_2, \ldots, u_n$.

Định lý. *Cho $\mathcal{B} = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ là cơ sở của V.*

Tọa độ

Định nghĩa. Cho V là không gian vectơ và $\mathcal{B} = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ là một cơ sở của V. Khi đó $\mathcal{B}$ được gọi là ***cơ sở được sắp*** của V nếu thứ tự các vectơ trong $\mathcal{B}$ được cố định. Ta thường dùng ký hiệu

$$\boldsymbol{(u_1, u_2, \ldots, u_n)}$$

để chỉ cơ sở được sắp theo thứ tự $u_1, u_2, \ldots, u_n$.

Định lý. *Cho $\mathcal{B} = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ là cơ sở của V. Khi đó mọi vectơ $u \in V$ đều được biểu diễn một cách duy nhất dưới dạng*

$$\boldsymbol{u = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \cdots + \alpha_n u_n}..$$

Tọa độ

Định nghĩa. Cho V là không gian vectơ và $\mathcal{B} = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ là một cơ sở của V. Khi đó $\mathcal{B}$ được gọi là ***cơ sở được sắp*** của V nếu thứ tự các vectơ trong $\mathcal{B}$ được cố định. Ta thường dùng ký hiệu

$$(u_1, u_2, \ldots, u_n)$$

để chỉ cơ sở được sắp theo thứ tự $u_1, u_2, \ldots, u_n$.

Định lý. *Cho $\mathcal{B} = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ là cơ sở của V. Khi đó mọi vectơ $u \in V$ đều được biểu diễn một cách duy nhất dưới dạng*

$$u = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \cdots + \alpha_n u_n..$$

Ta đặt

$$[u]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}.$$

Tọa độ

Định nghĩa. Cho V là không gian vectơ và $\mathcal{B} = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ là một cơ sở của V. Khi đó $\mathcal{B}$ được gọi là ***cơ sở được sắp*** của V nếu thứ tự các vectơ trong $\mathcal{B}$ được cố định. Ta thường dùng ký hiệu

$$\boldsymbol{(u_1, u_2, \ldots, u_n)}$$

để chỉ cơ sở được sắp theo thứ tự $u_1, u_2, \ldots, u_n$.

Định lý. *Cho $\mathcal{B} = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ là cơ sở của V. Khi đó mọi vectơ $u \in V$ đều được biểu diễn một cách duy nhất dưới dạng*

$$\boldsymbol{u = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \cdots + \alpha_n u_n}..$$

Ta đặt

$$[\boldsymbol{u}]_{\boldsymbol{\mathcal{B}}} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}.$$

*Khi đó $[\boldsymbol{u}]_{\boldsymbol{\mathcal{B}}}$ được gọi là **tọa độ** của u theo cơ sở $\mathcal{B}$.*

Ví dụ. Trong không gian $\mathbb{R}^3$, ta có cơ sở chính tắc

$$\mathcal{B}_0 = \{e_1 = (1,0,0), e_2 = (0,1,0), e_3 = (0,0,1)\}.$$

Ví dụ. Trong không gian $\mathbb{R}^3$, ta có cơ sở chính tắc

$$\mathcal{B}_0 = \{e_1 = (1,0,0), e_2 = (0,1,0), e_3 = (0,0,1)\}.$$

Với $u = (x_1, x_2, x_3)$

Ví dụ. Trong không gian $\mathbb{R}^3$, ta có cơ sở chính tắc

$$\mathcal{B}_0 = \{e_1 = (1,0,0), e_2 = (0,1,0), e_3 = (0,0,1)\}.$$

Với $u = (x_1, x_2, x_3)$ ta có: $\boldsymbol{u = x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3}$.

Ví dụ. Trong không gian $\mathbb{R}^3$, ta có cơ sở chính tắc

$$\mathcal{B}_0 = \{e_1 = (1,0,0), e_2 = (0,1,0), e_3 = (0,0,1)\}.$$

Với $u = (x_1, x_2, x_3)$ ta có: $\boldsymbol{u = x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3}$. Suy ra

$$[u]_{\mathcal{B}_0} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = u^\top.$$

Ví dụ. Trong không gian $\mathbb{R}^3$, ta có cơ sở chính tắc

$$\mathcal{B}_0 = \{e_1 = (1,0,0), e_2 = (0,1,0), e_3 = (0,0,1)\}.$$

Với $u = (x_1, x_2, x_3)$ ta có: $\boldsymbol{u = x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3}$. Suy ra

$$[u]_{\mathcal{B}_0} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = u^\top.$$

Nhận xét. *Đối với cơ sở chính tắc* $\mathcal{B}_0 = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ *của không gian* K^n *và* $u = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in K^n$

Ví dụ. Trong không gian $\mathbb{R}^3$, ta có cơ sở chính tắc

$$\mathcal{B}_0 = \{e_1 = (1,0,0), e_2 = (0,1,0), e_3 = (0,0,1)\}.$$

Với $u = (x_1, x_2, x_3)$ ta có: $\boldsymbol{u = x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3}$. Suy ra

$$[u]_{\mathcal{B}_0} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = u^\top.$$

Nhận xét. *Đối với cơ sở chính tắc* $\mathcal{B}_0 = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ *của không gian* K^n *và* $u = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in K^n$ *ta có*

$$[u]_{\mathcal{B}_0} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = u^\top.$$

Phương pháp tìm $[u]_{\mathcal{B}}$

Phương pháp tìm $[u]_{\mathcal{B}}$

Cho V là không gian vectơ có cơ sở là $\mathcal{B} = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ và $u \in V$.

Phương pháp tìm $[u]_{\mathcal{B}}$

Cho V là không gian vectơ có cơ sở là $\mathcal{B} = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ và $u \in V$. Để tìm $[u]_B$ ta đi giải phương trình

$$u = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \cdots + \alpha_n u_n \quad (*)$$

với ẩn $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$.

Phương pháp tìm $[u]_{\mathcal{B}}$

Cho V là không gian vectơ có cơ sở là $\mathcal{B} = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ và $u \in V$. Để tìm $[u]_B$ ta đi giải phương trình

$$u = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \cdots + \alpha_n u_n \quad (*)$$

với ẩn $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$. Do $\mathcal{B}$ là cơ sở nên phương trình $(*)$ có nghiệm duy nhất

$$(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) = (c_1, c_2, \ldots, c_n).$$

Phương pháp tìm $[u]_{\mathcal{B}}$

Cho V là không gian vectơ có cơ sở là $\mathcal{B} = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ và $u \in V$. Để tìm $[u]_B$ ta đi giải phương trình

$$u = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \cdots + \alpha_n u_n \quad (*)$$

với ẩn $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$. Do $\mathcal{B}$ là cơ sở nên phương trình $(*)$ có nghiệm duy nhất

$$(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) = (c_1, c_2, \ldots, c_n).$$

Khi đó $[u]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}.$

Phương pháp tìm $[u]_{\mathcal{B}}$

Cho V là không gian vectơ có cơ sở là $\mathcal{B} = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ và $u \in V$. Để tìm $[u]_B$ ta đi giải phương trình

$$u = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \cdots + \alpha_n u_n \quad (*)$$

với ẩn $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$. Do $\mathcal{B}$ là cơ sở nên phương trình $(*)$ có nghiệm duy nhất

$$(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) = (c_1, c_2, \ldots, c_n).$$

Khi đó $[u]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$.

Lưu ý. Khi $V = \mathbb{R}^n$, để giải phương trình $(*)$ ta lập hệ

$$(u_1^\top \ u_2^\top \ \ldots \ u_n^\top \mid u^\top)$$

Ví dụ. Trong không gian $\mathbb{R}^3$, cho các vectơ

$$u_1 = (1,2,1), u_2 = (1,3,1), u_3 = (2,5,3).$$

a) Chứng minh $\mathcal{B} = (u_1, u_2, u_3)$ là một cơ sở của $\mathbb{R}^3$.

b) Tìm tọa độ của vectơ $u = (a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ theo cơ sở $\mathcal{B}$.

Ví dụ. Trong không gian $\mathbb{R}^3$, cho các vectơ

$$u_1 = (1, 2, 1), u_2 = (1, 3, 1), u_3 = (2, 5, 3).$$

a) Chứng minh $\mathcal{B} = (u_1, u_2, u_3)$ là một cơ sở của $\mathbb{R}^3$.

b) Tìm tọa độ của vectơ $u = (a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ theo cơ sở $\mathcal{B}$.

Giải.

a) Lập $A = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$

Ví dụ. Trong không gian $\mathbb{R}^3$, cho các vectơ

$$u_1 = (1, 2, 1), u_2 = (1, 3, 1), u_3 = (2, 5, 3).$$

a) Chứng minh $\mathcal{B} = (u_1, u_2, u_3)$ là một cơ sở của $\mathbb{R}^3$.

b) Tìm tọa độ của vectơ $u = (a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ theo cơ sở $\mathcal{B}$.

Giải.

a) Lập $A = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & 3 \end{pmatrix}$.

Ví dụ. Trong không gian $\mathbb{R}^3$, cho các vectơ

$$u_1 = (1, 2, 1), u_2 = (1, 3, 1), u_3 = (2, 5, 3).$$

a) Chứng minh $\mathcal{B} = (u_1, u_2, u_3)$ là một cơ sở của $\mathbb{R}^3$.

b) Tìm tọa độ của vectơ $u = (a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ theo cơ sở $\mathcal{B}$.

Giải.

a) Lập $A = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & 3 \end{pmatrix}$. Ta có $\det A = 1$,

Ví dụ. Trong không gian $\mathbb{R}^3$, cho các vectơ

$$u_1 = (1, 2, 1), u_2 = (1, 3, 1), u_3 = (2, 5, 3).$$

a) Chứng minh $\mathcal{B} = (u_1, u_2, u_3)$ là một cơ sở của $\mathbb{R}^3$.

b) Tìm tọa độ của vectơ $u = (a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ theo cơ sở $\mathcal{B}$.

Giải.

a) Lập $A = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & 3 \end{pmatrix}$. Ta có $\det A = 1$, suy ra u_1, u_2, u_3 độc lập tuyến tính.

Ví dụ. Trong không gian $\mathbb{R}^3$, cho các vectơ

$$u_1 = (1,2,1), u_2 = (1,3,1), u_3 = (2,5,3).$$

a) Chứng minh $\mathcal{B} = (u_1, u_2, u_3)$ là một cơ sở của $\mathbb{R}^3$.

b) Tìm tọa độ của vectơ $u = (a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ theo cơ sở $\mathcal{B}$.

Giải.

a) Lập $A = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & 3 \end{pmatrix}$. Ta có $\det A = 1$, suy ra u_1, u_2, u_3 độc lập tuyến tính. Vậy $\mathcal{B}$ là cơ sở của $\mathbb{R}^3$.

Ví dụ. Trong không gian $\mathbb{R}^3$, cho các vectơ

$$u_1 = (1, 2, 1), u_2 = (1, 3, 1), u_3 = (2, 5, 3).$$

a) Chứng minh $\mathcal{B} = (u_1, u_2, u_3)$ là một cơ sở của $\mathbb{R}^3$.

b) Tìm tọa độ của vectơ $u = (a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ theo cơ sở $\mathcal{B}$.

Giải.

a) Lập $A = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & 3 \end{pmatrix}$. Ta có $\det A = 1$, suy ra u_1, u_2, u_3 độc lập tuyến tính. Vậy $\mathcal{B}$ là cơ sở của $\mathbb{R}^3$.

b) Với $u = (a, b, c)$, để tìm $[u]_{\mathcal{B}}$ ta lập hệ phương trình

Ví dụ. Trong không gian $\mathbb{R}^3$, cho các vectơ

$$u_1 = (1, 2, 1), u_2 = (1, 3, 1), u_3 = (2, 5, 3).$$

a) Chứng minh $\mathcal{B} = (u_1, u_2, u_3)$ là một cơ sở của $\mathbb{R}^3$.

b) Tìm tọa độ của vectơ $u = (a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ theo cơ sở $\mathcal{B}$.

Giải.

a) Lập $A = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & 3 \end{pmatrix}$. Ta có $\det A = 1$, suy ra u_1, u_2, u_3 độc lập tuyến tính. Vậy $\mathcal{B}$ là cơ sở của $\mathbb{R}^3$.

b) Với $u = (a, b, c)$, để tìm $[u]_{\mathcal{B}}$ ta lập hệ phương trình

$$(u_1^\top \; u_2^\top \; u_3^\top \mid u^\top)$$

Ví dụ. Trong không gian $\mathbb{R}^3$, cho các vectơ

$$u_1 = (1, 2, 1), u_2 = (1, 3, 1), u_3 = (2, 5, 3).$$

a) Chứng minh $\mathcal{B} = (u_1, u_2, u_3)$ là một cơ sở của $\mathbb{R}^3$.

b) Tìm tọa độ của vectơ $u = (a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ theo cơ sở $\mathcal{B}$.

Giải.

a) Lập $A = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & 3 \end{pmatrix}$. Ta có $\det A = 1$, suy ra u_1, u_2, u_3 độc lập tuyến tính. Vậy $\mathcal{B}$ là cơ sở của $\mathbb{R}^3$.

b) Với $u = (a, b, c)$, để tìm $[u]_{\mathcal{B}}$ ta lập hệ phương trình

$$(u_1^\top \; u_2^\top \; u_3^\top \mid u^\top) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & a \\ 2 & 3 & 5 & b \\ 1 & 1 & 3 & c \end{array}\right)$$

Ví dụ. Trong không gian $\mathbb{R}^3$, cho các vectơ

$$u_1 = (1,2,1), u_2 = (1,3,1), u_3 = (2,5,3).$$

a) Chứng minh $\mathcal{B} = (u_1, u_2, u_3)$ là một cơ sở của $\mathbb{R}^3$.

b) Tìm tọa độ của vectơ $u = (a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ theo cơ sở $\mathcal{B}$.

Giải.

a) Lập $A = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & 3 \end{pmatrix}$. Ta có $\det A = 1$, suy ra u_1, u_2, u_3 độc lập tuyến tính. Vậy $\mathcal{B}$ là cơ sở của $\mathbb{R}^3$.

b) Với $u = (a,b,c)$, để tìm $[u]_{\mathcal{B}}$ ta lập hệ phương trình

$$(u_1^\top \ u_2^\top \ u_3^\top \mid u^\top) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & a \\ 2 & 3 & 5 & b \\ 1 & 1 & 3 & c \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 4a-b-c \\ 0 & 1 & 0 & -a+b-c \\ 0 & 0 & 1 & -a+c \end{array}\right).$$

Vậy $[u]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 4a - b - c \\ -a + b - c \\ -a + c \end{pmatrix}$.

Vậy $[u]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 4a-b-c \\ -a+b-c \\ -a+c \end{pmatrix}$.

Ví dụ.(tự làm) Trong không gian $\mathbb{R}^4$ cho

$$u_1 = (1,2,1,2);\ u_2 = (-1,-1,2,1);\ u_3 = (-2,-2,3,1).$$

Gọi W là không gian sinh bởi u_1, u_2, u_3.

a) Chứng tỏ $\mathcal{B} = (u_1, u_2, u_3)$ là cơ sở của W.

b) Cho $u = (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$. Tìm điều kiện để $u \in W$, sau đó tìm $[u]_{\mathcal{B}}$?

Vậy $[u]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 4a-b-c \\ -a+b-c \\ -a+c \end{pmatrix}$.

Ví dụ.(tự làm) Trong không gian $\mathbb{R}^4$ cho

$$u_1 = (1,2,1,2);\ u_2 = (-1,-1,2,1);\ u_3 = (-2,-2,3,1).$$

Gọi W là không gian sinh bởi u_1, u_2, u_3.

a) Chứng tỏ $\mathcal{B} = (u_1, u_2, u_3)$ là cơ sở của W.

b) Cho $u = (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$. Tìm điều kiện để $u \in W$, sau đó tìm $[u]_{\mathcal{B}}$?

Hướng dẫn. b) Để $u \in W$ thì u là tổ hợp tuyến tính của u_1, u_2, u_3.

Vậy $[u]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 4a - b - c \\ -a + b - c \\ -a + c \end{pmatrix}$.

Ví dụ.(tự làm) Trong không gian $\mathbb{R}^4$ cho

$$u_1 = (1, 2, 1, 2);\ u_2 = (-1, -1, 2, 1);\ u_3 = (-2, -2, 3, 1).$$

Gọi W là không gian sinh bởi u_1, u_2, u_3.

a) Chứng tỏ $\mathcal{B} = (u_1, u_2, u_3)$ là cơ sở của W.

b) Cho $u = (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$. Tìm điều kiện để $u \in W$, sau đó tìm $[u]_{\mathcal{B}}$?

Hướng dẫn. b) Để $u \in W$ thì u là tổ hợp tuyến tính của u_1, u_2, u_3. Ta xét hệ phương trình

$$(u_1^\top \ u_2^\top \ u_3^\top \mid u^\top)$$

Vậy $[u]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 4a-b-c \\ -a+b-c \\ -a+c \end{pmatrix}$.

Ví dụ.(tự làm) Trong không gian $\mathbb{R}^4$ cho

$$u_1 = (1,2,1,2);\ u_2 = (-1,-1,2,1);\ u_3 = (-2,-2,3,1).$$

Gọi W là không gian sinh bởi u_1, u_2, u_3.

a) Chứng tỏ $\mathcal{B} = (u_1, u_2, u_3)$ là cơ sở của W.

b) Cho $u = (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$. Tìm điều kiện để $u \in W$, sau đó tìm $[u]_{\mathcal{B}}$?

Hướng dẫn. b) Để $u \in W$ thì u là tổ hợp tuyến tính của u_1, u_2, u_3. Ta xét hệ phương trình

$$(u_1^\top\ u_2^\top\ u_3^\top \mid u^\top) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -2 & x \\ 2 & -1 & -2 & y \\ 1 & 2 & 3 & z \\ 2 & 1 & 1 & t \end{array}\right)$$

Vậy $[u]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 4a-b-c \\ -a+b-c \\ -a+c \end{pmatrix}$.

Ví dụ.(tự làm) Trong không gian $\mathbb{R}^4$ cho

$$u_1 = (1,2,1,2);\ u_2 = (-1,-1,2,1);\ u_3 = (-2,-2,3,1).$$

Gọi W là không gian sinh bởi u_1, u_2, u_3.

a) Chứng tỏ $\mathcal{B} = (u_1, u_2, u_3)$ là cơ sở của W.

b) Cho $u = (x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4$. Tìm điều kiện để $u \in W$, sau đó tìm $[u]_{\mathcal{B}}$?

Hướng dẫn. b) Để $u \in W$ thì u là tổ hợp tuyến tính của u_1, u_2, u_3. Ta xét hệ phương trình

$$(u_1^\top\ u_2^\top\ u_3^\top \mid u^\top) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -2 & x \\ 2 & -1 & -2 & y \\ 1 & 2 & 3 & z \\ 2 & 1 & 1 & t \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|l} 1 & 0 & 0 & -x+y \\ 0 & 1 & 0 & 8x-5y+2z \\ 0 & 0 & 1 & -5x+3y-z \\ 0 & 0 & 0 & -x-z+t \end{array}\right).$$

Như vậy để $u \in W$ thì $-x - z + t = 0$.

Như vậy để $u \in W$ thì $-x - z + t = 0$. Hơn nữa

$$[u]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} -x+y \\ 8x-5y+2z \\ -5x+3y-z \end{pmatrix}.$$

Như vậy để $u \in W$ thì $-x - z + t = 0$. Hơn nữa

$$[u]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} -x + y \\ 8x - 5y + 2z \\ -5x + 3y - z \end{pmatrix}.$$

Ví dụ.(tự làm) Cho $\mathcal{B}_1 = (u_1 = (1, 2, 3), u_2 = (2, 1, 1), u_3 = (2, 1, 3))$ và $\mathcal{B}_2 = (v_1 = (2, 5, -2), v_2 = (1, 3, -2), v_3 = (-1, -2, 1))$ là hai cơ sở của $\mathbb{R}^3$ và $[u]_{\mathcal{B}_1} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$. Tìm $[u]_{\mathcal{B}_2}$?

Như vậy để $u \in W$ thì $-x - z + t = 0$. Hơn nữa

$$[u]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} -x + y \\ 8x - 5y + 2z \\ -5x + 3y - z \end{pmatrix}.$$

Ví dụ.(tự làm) Cho $\mathcal{B}_1 = (u_1 = (1,2,3), u_2 = (2,1,1), u_3 = (2,1,3))$ và $\mathcal{B}_2 = (v_1 = (2,5,-2), v_2 = (1,3,-2), v_3 = (-1,-2,1))$ là hai cơ sở của $\mathbb{R}^3$ và $[u]_{\mathcal{B}_1} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$. Tìm $[u]_{\mathcal{B}_2}$?

Đáp án. $[u]_{\mathcal{B}_2} = (10 \quad -4 \quad 18)^\top$.

Như vậy để $u \in W$ thì $-x - z + t = 0$. Hơn nữa

$$[u]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} -x + y \\ 8x - 5y + 2z \\ -5x + 3y - z \end{pmatrix}.$$

Ví dụ.(tự làm) Cho $\mathcal{B}_1 = (u_1 = (1,2,3), u_2 = (2,1,1), u_3 = (2,1,3))$ và $\mathcal{B}_2 = (v_1 = (2,5,-2), v_2 = (1,3,-2), v_3 = (-1,-2,1))$ là hai cơ sở của $\mathbb{R}^3$ và $[u]_{\mathcal{B}_1} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$. Tìm $[u]_{\mathcal{B}_2}$?

Đáp án. $[u]_{\mathcal{B}_2} = (10 \quad -4 \quad 18)^\top$.

Mệnh đề. *Cho $\mathcal{B}$ là cơ sở của V. Khi đó, với mọi $u, v \in V, \alpha \in \mathbb{R}$ ta có:*

- $[u + v]_{\mathcal{B}} = [u]_{\mathcal{B}} + [v]_{\mathcal{B}}$.
- $[\alpha u]_{\mathcal{B}} = \alpha [u]_{\mathcal{B}}$.

Ma trận chuyển cơ sở

Ma trận chuyển cơ sở

Định nghĩa. Cho V là một không gian vectơ và

$$\mathcal{B}_1 = (u_1, u_2, \ldots, u_n),\ \mathcal{B}_2 = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$$

là hai cơ sở của V.

Ma trận chuyển cơ sở

Định nghĩa. Cho V là một không gian vectơ và

$$\mathcal{B}_1 = (u_1, u_2, \ldots, u_n),\ \mathcal{B}_2 = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$$

là hai cơ sở của V. Đặt

$$\boldsymbol{P = ([v_1]_{\mathcal{B}_1}\ [v_2]_{\mathcal{B}_1} \ldots [v_n]_{\mathcal{B}_1})}.$$

Ma trận chuyển cơ sở

Định nghĩa. Cho V là một không gian vectơ và

$$\mathcal{B}_1 = (u_1, u_2, \ldots, u_n),\ \mathcal{B}_2 = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$$

là hai cơ sở của V. Đặt

$$\boldsymbol{P = ([v_1]_{\mathcal{B}_1}\ [v_2]_{\mathcal{B}_1} \ldots [v_n]_{\mathcal{B}_1})}.$$

Khi đó P được gọi là ***ma trận chuyển cơ sở*** từ cơ sở $\mathcal{B}_1$ sang cơ sở $\mathcal{B}_2$ và được ký hiệu $\boldsymbol{(\mathcal{B}_1 \to \mathcal{B}_2)}$.

Ma trận chuyển cơ sở

Định nghĩa. Cho V là một không gian vectơ và

$$\mathcal{B}_1 = (u_1, u_2, \ldots, u_n),\ \mathcal{B}_2 = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$$

là hai cơ sở của V. Đặt

$$\boldsymbol{P = ([v_1]_{\mathcal{B}_1}\ [v_2]_{\mathcal{B}_1} \ldots [v_n]_{\mathcal{B}_1})}.$$

Khi đó P được gọi là ***ma trận chuyển cơ sở*** từ cơ sở $\mathcal{B}_1$ sang cơ sở $\mathcal{B}_2$ và được ký hiệu $\boldsymbol{(\mathcal{B}_1 \to \mathcal{B}_2)}$.

Ví dụ. Trong không gian $\mathbb{R}^3$, cho

$$\mathcal{B} = (u_1 = (1, -2, 3), u_2 = (2, 3, -1), u_3 = (3, 1, 3))$$

là cơ sở của $\mathbb{R}^3$.

Ma trận chuyển cơ sở

Định nghĩa. Cho V là một không gian vectơ và

$$\mathcal{B}_1 = (u_1, u_2, \ldots, u_n),\ \mathcal{B}_2 = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$$

là hai cơ sở của V. Đặt

$$\boldsymbol{P = ([v_1]_{\mathcal{B}_1}\ [v_2]_{\mathcal{B}_1} \ldots [v_n]_{\mathcal{B}_1})}.$$

Khi đó P được gọi là ***ma trận chuyển cơ sở*** từ cơ sở $\mathcal{B}_1$ sang cơ sở $\mathcal{B}_2$ và được ký hiệu $\boldsymbol{(\mathcal{B}_1 \to \mathcal{B}_2)}$.

Ví dụ. Trong không gian $\mathbb{R}^3$, cho

$$\mathcal{B} = (u_1 = (1, -2, 3), u_2 = (2, 3, -1), u_3 = (3, 1, 3))$$

là cơ sở của $\mathbb{R}^3$. Gọi $\mathcal{B}_0$ là cở sở chính tắc của $\mathbb{R}^3$.

Ma trận chuyển cơ sở

Định nghĩa. Cho V là một không gian vectơ và

$$\mathcal{B}_1 = (u_1, u_2, \ldots, u_n),\ \mathcal{B}_2 = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$$

là hai cơ sở của V. Đặt

$$\boldsymbol{P = ([v_1]_{\mathcal{B}_1}\ [v_2]_{\mathcal{B}_1} \ldots [v_n]_{\mathcal{B}_1})}.$$

Khi đó P được gọi là ***ma trận chuyển cơ sở*** từ cơ sở $\mathcal{B}_1$ sang cơ sở $\mathcal{B}_2$ và được ký hiệu $\boldsymbol{(\mathcal{B}_1 \to \mathcal{B}_2)}$.

Ví dụ. Trong không gian $\mathbb{R}^3$, cho

$$\mathcal{B} = (u_1 = (1, -2, 3), u_2 = (2, 3, -1), u_3 = (3, 1, 3))$$

là cơ sở của $\mathbb{R}^3$. Gọi $\mathcal{B}_0$ là cở sở chính tắc của $\mathbb{R}^3$. Khi đó

$(\mathcal{B}_0 \to \mathcal{B})$

Ma trận chuyển cơ sở

Định nghĩa. Cho V là một không gian vectơ và

$$\mathcal{B}_1 = (u_1, u_2, \ldots, u_n),\ \mathcal{B}_2 = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$$

là hai cơ sở của V. Đặt

$$\boldsymbol{P = ([v_1]_{\mathcal{B}_1}\ [v_2]_{\mathcal{B}_1} \ldots [v_n]_{\mathcal{B}_1})}.$$

Khi đó P được gọi là ***ma trận chuyển cơ sở*** từ cơ sở $\mathcal{B}_1$ sang cơ sở $\mathcal{B}_2$ và được ký hiệu $\boldsymbol{(\mathcal{B}_1 \to \mathcal{B}_2)}$.

Ví dụ. Trong không gian $\mathbb{R}^3$, cho

$$\mathcal{B} = (u_1 = (1, -2, 3), u_2 = (2, 3, -1), u_3 = (3, 1, 3))$$

là cơ sở của $\mathbb{R}^3$. Gọi $\mathcal{B}_0$ là cở sở chính tắc của $\mathbb{R}^3$. Khi đó

$$(\mathcal{B}_0 \to \mathcal{B}) = ([u_1]_{\mathcal{B}_0}\ [u_2]_{\mathcal{B}_0}\ [u_3]_{\mathcal{B}_0})$$

Ma trận chuyển cơ sở

Định nghĩa. Cho V là một không gian vectơ và

$$\mathcal{B}_1 = (u_1, u_2, \ldots, u_n),\ \mathcal{B}_2 = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$$

là hai cơ sở của V. Đặt

$$P = ([v_1]_{\mathcal{B}_1}\ [v_2]_{\mathcal{B}_1} \ldots [v_n]_{\mathcal{B}_1}).$$

Khi đó P được gọi là ***ma trận chuyển cơ sở*** từ cơ sở $\mathcal{B}_1$ sang cơ sở $\mathcal{B}_2$ và được ký hiệu $(\mathcal{B}_1 \to \mathcal{B}_2)$.

Ví dụ. Trong không gian $\mathbb{R}^3$, cho

$$\mathcal{B} = (u_1 = (1, -2, 3), u_2 = (2, 3, -1), u_3 = (3, 1, 3))$$

là cơ sở của $\mathbb{R}^3$. Gọi $\mathcal{B}_0$ là cở sở chính tắc của $\mathbb{R}^3$. Khi đó

$$(\mathcal{B}_0 \to \mathcal{B}) = ([u_1]_{\mathcal{B}_0}\ [u_2]_{\mathcal{B}_0}\ [u_3]_{\mathcal{B}_0}) = (u_1^\top\ u_2^\top\ u_3^\top)$$

Ma trận chuyển cơ sở

Định nghĩa. Cho V là một không gian vectơ và

$$\mathcal{B}_1 = (u_1, u_2, \ldots, u_n),\ \mathcal{B}_2 = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$$

là hai cơ sở của V. Đặt

$$\boldsymbol{P = ([v_1]_{\mathcal{B}_1}\ [v_2]_{\mathcal{B}_1} \ldots [v_n]_{\mathcal{B}_1})}.$$

Khi đó P được gọi là ***ma trận chuyển cơ sở*** từ cơ sở $\mathcal{B}_1$ sang cơ sở $\mathcal{B}_2$ và được ký hiệu $\boldsymbol{(\mathcal{B}_1 \to \mathcal{B}_2)}$.

Ví dụ. Trong không gian $\mathbb{R}^3$, cho

$$\mathcal{B} = (u_1 = (1, -2, 3), u_2 = (2, 3, -1), u_3 = (3, 1, 3))$$

là cơ sở của $\mathbb{R}^3$. Gọi $\mathcal{B}_0$ là cở sở chính tắc của $\mathbb{R}^3$. Khi đó

$$(\mathcal{B}_0 \to \mathcal{B}) = ([u_1]_{\mathcal{B}_0}\ [u_2]_{\mathcal{B}_0}\ [u_3]_{\mathcal{B}_0}) = (u_1^\top\ u_2^\top\ u_3^\top) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Nhận xét. *Nếu* $\mathcal{B} = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ *là một cơ sở của* $\mathbb{R}^n$ *và* $\mathcal{B}_0$ *là cơ sở chính tắc của* $\mathbb{R}^n$ *thì*

$$(\mathcal{B}_0 \to B) = (u_1^\top \ u_2^\top \ \ldots \ u_n^\top)$$

Nhận xét. *Nếu* $\mathcal{B} = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ *là một cơ sở của* $\mathbb{R}^n$ *và* $\mathcal{B}_0$ *là cơ sở chính tắc của* $\mathbb{R}^n$ *thì*

$$(\mathcal{B}_0 \to B) = (u_1^\top \ u_2^\top \ \ldots \ u_n^\top)$$

Phương pháp tìm $(\mathcal{B}_1 \to \mathcal{B}_2)$

Nhận xét. *Nếu* $\mathcal{B} = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ *là một cơ sở của* $\mathbb{R}^n$ *và* $\mathcal{B}_0$ *là cơ sở chính tắc của* $\mathbb{R}^n$ *thì*

$$(\mathcal{B}_0 \to B) = (u_1^\top \ u_2^\top \ \ldots \ u_n^\top)$$

Phương pháp tìm $(\mathcal{B}_1 \to \mathcal{B}_2)$

Giả sử $\mathcal{B}_1 = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ và $\mathcal{B}_2 = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ là hai cơ sở của V.

Nhận xét. *Nếu* $\mathcal{B} = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ *là một cơ sở của* $\mathbb{R}^n$ *và* $\mathcal{B}_0$ *là cơ sở chính tắc của* $\mathbb{R}^n$ *thì*

$$(\mathcal{B}_0 \to B) = (u_1^\top \ u_2^\top \ \ldots \ u_n^\top)$$

Phương pháp tìm $(\mathcal{B}_1 \to \mathcal{B}_2)$

Giả sử $\mathcal{B}_1 = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ và $\mathcal{B}_2 = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ là hai cơ sở của V. Để tìm $(\mathcal{B}_1 \to \mathcal{B}_2)$, ta thực hiện như sau:

Nhận xét. *Nếu* $\mathcal{B} = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ *là một cơ sở của* $\mathbb{R}^n$ *và* $\mathcal{B}_0$ *là cơ sở chính tắc của* $\mathbb{R}^n$ *thì*

$$(\mathcal{B}_0 \to B) = (u_1^\top \ u_2^\top \ \ldots \ u_n^\top)$$

Phương pháp tìm $(\mathcal{B}_1 \to \mathcal{B}_2)$

Giả sử $\mathcal{B}_1 = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ và $\mathcal{B}_2 = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ là hai cơ sở của V. Để tìm $(\mathcal{B}_1 \to \mathcal{B}_2)$, ta thực hiện như sau:

- Cho u là vectơ bất kỳ của V, xác định $[u]_{\mathcal{B}_1}$.

Nhận xét. *Nếu* $\mathcal{B} = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ *là một cơ sở của* $\mathbb{R}^n$ *và* $\mathcal{B}_0$ *là cơ sở chính tắc của* $\mathbb{R}^n$ *thì*

$$(\mathcal{B}_0 \to B) = (u_1^\top \ u_2^\top \ \ldots \ u_n^\top)$$

Phương pháp tìm $(\mathcal{B}_1 \to \mathcal{B}_2)$

Giả sử $\mathcal{B}_1 = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ và $\mathcal{B}_2 = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ là hai cơ sở của V. Để tìm $(\mathcal{B}_1 \to \mathcal{B}_2)$, ta thực hiện như sau:

- Cho u là vectơ bất kỳ của V, xác định $[u]_{\mathcal{B}_1}$.
- Lần lượt thay thế u bằng $v_1, v_2, \ldots, v_n$

Nhận xét. *Nếu* $\mathcal{B} = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ *là một cơ sở của* $\mathbb{R}^n$ *và* $\mathcal{B}_0$ *là cơ sở chính tắc của* $\mathbb{R}^n$ *thì*

$$(\mathcal{B}_0 \to B) = (u_1^\top \; u_2^\top \ldots \; u_n^\top)$$

Phương pháp tìm $(\mathcal{B}_1 \to \mathcal{B}_2)$

Giả sử $\mathcal{B}_1 = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ và $\mathcal{B}_2 = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ là hai cơ sở của V. Để tìm $(\mathcal{B}_1 \to \mathcal{B}_2)$, ta thực hiện như sau:

- Cho u là vectơ bất kỳ của V, xác định $[u]_{\mathcal{B}_1}$.
- Lần lượt thay thế u bằng $v_1, v_2, \ldots, v_n$ ta xác định được

$$[v_1]_{\mathcal{B}_1}, [v_2]_{\mathcal{B}_1}, \ldots, [v_n]_{\mathcal{B}_1}.$$

Nhận xét. *Nếu* $\mathcal{B} = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ *là một cơ sở của* $\mathbb{R}^n$ *và* $\mathcal{B}_0$ *là cơ sở chính tắc của* $\mathbb{R}^n$ *thì*

$$(\mathcal{B}_0 \to B) = (u_1^\top \ u_2^\top \ \ldots \ u_n^\top)$$

Phương pháp tìm $(\mathcal{B}_1 \to \mathcal{B}_2)$

Giả sử $\mathcal{B}_1 = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ và $\mathcal{B}_2 = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ là hai cơ sở của V. Để tìm $(\mathcal{B}_1 \to \mathcal{B}_2)$, ta thực hiện như sau:

- Cho u là vectơ bất kỳ của V, xác định $[u]_{\mathcal{B}_1}$.
- Lần lượt thay thế u bằng $v_1, v_2, \ldots, v_n$ ta xác định được

$$[v_1]_{\mathcal{B}_1}, [v_2]_{\mathcal{B}_1}, \ldots, [v_n]_{\mathcal{B}_1}.$$

Khi đó

$$(\mathcal{B}_1 \to \mathcal{B}_2) = ([v_1]_{\mathcal{B}_1} \ [v_2]_{\mathcal{B}_1} \ldots [v_n]_{\mathcal{B}_1}).$$

Đặc biệt, khi $V = \mathbb{R}^n$, để xác định $(\mathcal{B}_1 \to \mathcal{B}_2)$ ta có thể làm như sau:

Đặc biệt, khi $V = \mathbb{R}^n$, để xác định $(\mathcal{B}_1 \to \mathcal{B}_2)$ ta có thể làm như sau:

- Lập ma trận mở rộng $(u_1^\top \ u_2^\top \dots \ u_n^\top \mid v_1^\top \ v_2^\top \dots \ v_n^\top)$

Đặc biệt, khi $V = \mathbb{R}^n$, để xác định $(\mathcal{B}_1 \to \mathcal{B}_2)$ ta có thể làm như sau:

- Lập ma trận mở rộng $(u_1^\top\ u_2^\top \ldots\ u_n^\top \mid v_1^\top\ v_2^\top \ldots\ v_n^\top)$
- Dùng các phép biến đổi sơ cấp trên dòng đưa ma trận trên về dạng $(I_n|P)$.

Đặc biệt, khi $V = \mathbb{R}^n$, để xác định $(\mathcal{B}_1 \to \mathcal{B}_2)$ ta có thể làm như sau:

- Lập ma trận mở rộng $(u_1^\top \ u_2^\top \dots \ u_n^\top \mid v_1^\top \ v_2^\top \dots \ v_n^\top)$
- Dùng các phép biến đổi sơ cấp trên dòng đưa ma trận trên về dạng $(I_n|P)$.
- Khi đó $(\mathcal{B}_1 \to \mathcal{B}_2) = P$.

Đặc biệt, khi $V = \mathbb{R}^n$, để xác định $(\mathcal{B}_1 \to \mathcal{B}_2)$ ta có thể làm như sau:

- Lập ma trận mở rộng $(u_1^\top \ u_2^\top \dots \ u_n^\top \mid v_1^\top \ v_2^\top \dots \ v_n^\top)$
- Dùng các phép biến đổi sơ cấp trên dòng đưa ma trận trên về dạng $(I_n|P)$.
- Khi đó $(\mathcal{B}_1 \to \mathcal{B}_2) = P$.

Ví dụ. Trong không gian $\mathbb{R}^3$, cho hai cơ sở

$$\mathcal{B}_1 = (u_1 = (1,1,1), u_2 = (1,2,1), u_3 = (2,3,1))$$

và

$$\mathcal{B}_2 = (v_1 = (1,-3,2), v_2 = (-1,-2,4), v_3 = (3,3,-2)).$$

Tìm ma trận chuyển cơ sở từ $\mathcal{B}_1$ sang $\mathcal{B}_2$.

Đặc biệt, khi $V = \mathbb{R}^n$, để xác định $(\mathcal{B}_1 \to \mathcal{B}_2)$ ta có thể làm như sau:

- Lập ma trận mở rộng $(u_1^\top \ u_2^\top \dots \ u_n^\top \mid v_1^\top \ v_2^\top \dots \ v_n^\top)$
- Dùng các phép biến đổi sơ cấp trên dòng đưa ma trận trên về dạng $(I_n|P)$.
- Khi đó $(\mathcal{B}_1 \to \mathcal{B}_2) = P$.

Ví dụ. Trong không gian $\mathbb{R}^3$, cho hai cơ sở

$$\mathcal{B}_1 = (u_1 = (1,1,1), u_2 = (1,2,1), u_3 = (2,3,1))$$

và

$$\mathcal{B}_2 = (v_1 = (1,-3,2), v_2 = (-1,-2,4), v_3 = (3,3,-2)).$$

Tìm ma trận chuyển cơ sở từ $\mathcal{B}_1$ sang $\mathcal{B}_2$.

Giải. Cho $u = (a,b,c) \in \mathbb{R}^3$, xác định $[u]_{\mathcal{B}_1}$.

Đặc biệt, khi $V = \mathbb{R}^n$, để xác định $(\mathcal{B}_1 \to \mathcal{B}_2)$ ta có thể làm như sau:

- Lập ma trận mở rộng $(u_1^\top \ u_2^\top \dots \ u_n^\top \mid v_1^\top \ v_2^\top \dots \ v_n^\top)$
- Dùng các phép biến đổi sơ cấp trên dòng đưa ma trận trên về dạng $(I_n|P)$.
- Khi đó $(\mathcal{B}_1 \to \mathcal{B}_2) = P$.

Ví dụ. Trong không gian $\mathbb{R}^3$, cho hai cơ sở

$$\mathcal{B}_1 = (u_1 = (1,1,1), u_2 = (1,2,1), u_3 = (2,3,1))$$

và

$$\mathcal{B}_2 = (v_1 = (1,-3,2), v_2 = (-1,-2,4), v_3 = (3,3,-2)).$$

Tìm ma trận chuyển cơ sở từ $\mathcal{B}_1$ sang $\mathcal{B}_2$.

Giải. Cho $u = (a,b,c) \in \mathbb{R}^3$, xác định $[u]_{\mathcal{B}_1}$. Ta lập hệ phương trình

$$(u_1^\top \ u_2^\top \ u_3^\top | u^\top)$$

Đặc biệt, khi $V = \mathbb{R}^n$, để xác định $(\mathcal{B}_1 \to \mathcal{B}_2)$ ta có thể làm như sau:

- Lập ma trận mở rộng $(u_1^\top \ u_2^\top \ \ldots \ u_n^\top \mid v_1^\top \ v_2^\top \ \ldots \ v_n^\top)$
- Dùng các phép biến đổi sơ cấp trên dòng đưa ma trận trên về dạng $(I_n|P)$.
- Khi đó $(\mathcal{B}_1 \to \mathcal{B}_2) = P$.

Ví dụ. Trong không gian $\mathbb{R}^3$, cho hai cơ sở

$$\mathcal{B}_1 = (u_1 = (1,1,1), u_2 = (1,2,1), u_3 = (2,3,1))$$

và

$$\mathcal{B}_2 = (v_1 = (1,-3,2), v_2 = (-1,-2,4), v_3 = (3,3,-2)).$$

Tìm ma trận chuyển cơ sở từ $\mathcal{B}_1$ sang $\mathcal{B}_2$.

Giải. Cho $u = (a,b,c) \in \mathbb{R}^3$, xác định $[u]_{\mathcal{B}_1}$. Ta lập hệ phương trình

$$(u_1^\top \ u_2^\top \ u_3^\top | u^\top) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & a \\ 1 & 2 & 3 & b \\ 1 & 1 & 1 & c \end{array}\right)$$

Đặc biệt, khi $V = \mathbb{R}^n$, để xác định $(\mathcal{B}_1 \to \mathcal{B}_2)$ ta có thể làm như sau:

- Lập ma trận mở rộng $(u_1^\top \ u_2^\top \ \ldots \ u_n^\top \mid v_1^\top \ v_2^\top \ \ldots \ v_n^\top)$
- Dùng các phép biến đổi sơ cấp trên dòng đưa ma trận trên về dạng $(I_n|P)$.
- Khi đó $(\mathcal{B}_1 \to \mathcal{B}_2) = P$.

Ví dụ. Trong không gian $\mathbb{R}^3$, cho hai cơ sở

$$\mathcal{B}_1 = (u_1 = (1,1,1), u_2 = (1,2,1), u_3 = (2,3,1))$$

và

$$\mathcal{B}_2 = (v_1 = (1,-3,2), v_2 = (-1,-2,4), v_3 = (3,3,-2)).$$

Tìm ma trận chuyển cơ sở từ $\mathcal{B}_1$ sang $\mathcal{B}_2$.

Giải. Cho $u = (a,b,c) \in \mathbb{R}^3$, xác định $[u]_{\mathcal{B}_1}$. Ta lập hệ phương trình

$$(u_1^\top \ u_2^\top \ u_3^\top | u^\top) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & a \\ 1 & 2 & 3 & b \\ 1 & 1 & 1 & c \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & a-b+c \\ 0 & 1 & 0 & -2a+b+c \\ 0 & 0 & 1 & a-c \end{array}\right).$$

Như vậy $[u]_{\mathcal{B}_1} = \begin{pmatrix} a-b+c \\ -2a+b+c \\ a-c \end{pmatrix}$. Thay lần lượt u bởi v_1, v_2, v_3 ta có

Như vậy $[u]_{\mathcal{B}_1} = \begin{pmatrix} a-b+c \\ -2a+b+c \\ a-c \end{pmatrix}$. Thay lần lượt u bởi v_1, v_2, v_3 ta có

$$[v_1]_{\mathcal{B}_1} = \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix}, [v_2]_{\mathcal{B}_1} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ -5 \end{pmatrix}, [v_3]_{\mathcal{B}_1} = \begin{pmatrix} -2 \\ -5 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Như vậy $[u]_{\mathcal{B}_1} = \begin{pmatrix} a-b+c \\ -2a+b+c \\ a-c \end{pmatrix}$. Thay lần lượt u bởi v_1, v_2, v_3 ta có

$$[v_1]_{\mathcal{B}_1} = \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix}, [v_2]_{\mathcal{B}_1} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ -5 \end{pmatrix}, [v_3]_{\mathcal{B}_1} = \begin{pmatrix} -2 \\ -5 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Vậy $(\mathcal{B}_1 \to \mathcal{B}_2) = \begin{pmatrix} 6 & 5 & -2 \\ -3 & 4 & -5 \\ -1 & -5 & 5 \end{pmatrix}$.

Như vậy $[u]_{\mathcal{B}_1} = \begin{pmatrix} a-b+c \\ -2a+b+c \\ a-c \end{pmatrix}$. Thay lần lượt u bởi v_1, v_2, v_3 ta có

$$[v_1]_{\mathcal{B}_1} = \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix}, [v_2]_{\mathcal{B}_1} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ -5 \end{pmatrix}, [v_3]_{\mathcal{B}_1} = \begin{pmatrix} -2 \\ -5 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Vậy $(\mathcal{B}_1 \to \mathcal{B}_2) = \begin{pmatrix} 6 & 5 & -2 \\ -3 & 4 & -5 \\ -1 & -5 & 5 \end{pmatrix}$.

Cách khác. Lập ma trận mở rộng

$$(u_1^\top \; u_2^\top \; u_3^\top \mid v_1^\top \; v_2^\top \; v_3^\top)$$

Như vậy $[u]_{\mathcal{B}_1} = \begin{pmatrix} a-b+c \\ -2a+b+c \\ a-c \end{pmatrix}$. Thay lần lượt u bởi v_1, v_2, v_3 ta có

$$[v_1]_{\mathcal{B}_1} = \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix}, [v_2]_{\mathcal{B}_1} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ -5 \end{pmatrix}, [v_3]_{\mathcal{B}_1} = \begin{pmatrix} -2 \\ -5 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Vậy $(\mathcal{B}_1 \to \mathcal{B}_2) = \begin{pmatrix} 6 & 5 & -2 \\ -3 & 4 & -5 \\ -1 & -5 & 5 \end{pmatrix}$.

Cách khác. Lập ma trận mở rộng

$$(u_1^\top \; u_2^\top \; u_3^\top \mid v_1^\top \; v_2^\top \; v_3^\top) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & -3 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 4 & -2 \end{array}\right)$$

Như vậy $[u]_{\mathcal{B}_1} = \begin{pmatrix} a-b+c \\ -2a+b+c \\ a-c \end{pmatrix}$. Thay lần lượt u bởi v_1, v_2, v_3 ta có

$$[v_1]_{\mathcal{B}_1} = \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix}, [v_2]_{\mathcal{B}_1} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ -5 \end{pmatrix}, [v_3]_{\mathcal{B}_1} = \begin{pmatrix} -2 \\ -5 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Vậy $(\mathcal{B}_1 \to \mathcal{B}_2) = \begin{pmatrix} 6 & 5 & -2 \\ -3 & 4 & -5 \\ -1 & -5 & 5 \end{pmatrix}$.

Cách khác. Lập ma trận mở rộng

$$(u_1^\top\ u_2^\top\ u_3^\top \mid v_1^\top\ v_2^\top\ v_3^\top) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & -3 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 4 & -2 \end{array}\right) \to$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 6 & 5 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 4 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -5 & 5 \end{array}\right).$$

Như vậy $[u]_{\mathcal{B}_1} = \begin{pmatrix} a-b+c \\ -2a+b+c \\ a-c \end{pmatrix}$. Thay lần lượt u bởi v_1, v_2, v_3 ta có

$$[v_1]_{\mathcal{B}_1} = \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix}, [v_2]_{\mathcal{B}_1} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ -5 \end{pmatrix}, [v_3]_{\mathcal{B}_1} = \begin{pmatrix} -2 \\ -5 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Vậy $(\mathcal{B}_1 \to \mathcal{B}_2) = \begin{pmatrix} 6 & 5 & -2 \\ -3 & 4 & -5 \\ -1 & -5 & 5 \end{pmatrix}$.

Cách khác. Lập ma trận mở rộng

$$(u_1^\top \ u_2^\top \ u_3^\top \mid v_1^\top \ v_2^\top \ v_3^\top) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & -3 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 4 & -2 \end{array}\right) \rightarrow$$

$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 6 & 5 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 4 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -5 & 5 \end{array}\right)$. Suy ra $(\mathcal{B}_1 \to \mathcal{B}_2) = \begin{pmatrix} 6 & 5 & -2 \\ -3 & 4 & -5 \\ -1 & -5 & 5 \end{pmatrix}$.

Định lý. *Cho V là một không gian vectơ và $\mathcal{B}, \mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2, \mathcal{B}_3$ là các cơ sở của V. Khi đó*

Định lý. *Cho* V *là một không gian vectơ và* $\mathcal{B}, \mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2, \mathcal{B}_3$ *là các cơ sở của* V*. Khi đó*

(i) $(\mathcal{B} \to \mathcal{B}) = I_n$.

Định lý. *Cho V là một không gian vectơ và $\mathcal{B}, \mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2, \mathcal{B}_3$ là các cơ sở của V. Khi đó*

(i) $(\mathcal{B} \to \mathcal{B}) = I_n$.

(ii) $\forall u \in V, [u]_{\mathcal{B}_1} = (\mathcal{B}_1 \to \mathcal{B}_2)[u]_{\mathcal{B}_2}$.

Định lý. *Cho* V *là một không gian vectơ và* $\mathcal{B}, \mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2, \mathcal{B}_3$ *là các cơ sở của* V*. Khi đó*

(i) $(\mathcal{B} \to \mathcal{B}) = I_n$.

(ii) $\forall u \in V, [u]_{\mathcal{B}_1} = (\mathcal{B}_1 \to \mathcal{B}_2)[u]_{\mathcal{B}_2}$.

(iii) $(\mathcal{B}_2 \to \mathcal{B}_1) = (\mathcal{B}_1 \to \mathcal{B}_2)^{-1}$.

Định lý. *Cho V là một không gian vectơ và $\mathcal{B}, \mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2, \mathcal{B}_3$ là các cơ sở của V. Khi đó*

(i) $(\mathcal{B} \to \mathcal{B}) = I_n$.

(ii) $\forall u \in V, [u]_{\mathcal{B}_1} = (\mathcal{B}_1 \to \mathcal{B}_2)[u]_{\mathcal{B}_2}$.

(iii) $(\mathcal{B}_2 \to \mathcal{B}_1) = (\mathcal{B}_1 \to \mathcal{B}_2)^{-1}$.

(iv) $(\mathcal{B}_1 \to \mathcal{B}_3) = (\mathcal{B}_1 \to \mathcal{B}_2)(\mathcal{B}_2 \to \mathcal{B}_3)$.

Định lý. *Cho V là một không gian vectơ và $\mathcal{B}, \mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2, \mathcal{B}_3$ là các cơ sở của V. Khi đó*

(i) $(\mathcal{B} \to \mathcal{B}) = I_n$.

(ii) $\forall u \in V, [u]_{\mathcal{B}_1} = (\mathcal{B}_1 \to \mathcal{B}_2)[u]_{\mathcal{B}_2}$.

(iii) $(\mathcal{B}_2 \to \mathcal{B}_1) = (\mathcal{B}_1 \to \mathcal{B}_2)^{-1}$.

(iv) $(\mathcal{B}_1 \to \mathcal{B}_3) = (\mathcal{B}_1 \to \mathcal{B}_2)(\mathcal{B}_2 \to \mathcal{B}_3)$.

Nhắc lại. Cho $\mathcal{B} = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ là một cơ sở của $\mathbb{R}^n$. Khi đó

$$(\mathcal{B}_0 \to \mathcal{B}) = (u_1^\top \ u_2^\top \ \ldots u_n^\top).$$

Định lý. *Cho V là một không gian vectơ và $\mathcal{B}, \mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2, \mathcal{B}_3$ là các cơ sở của V. Khi đó*

(i) $(\mathcal{B} \to \mathcal{B}) = I_n$.

(ii) $\forall u \in V, [u]_{\mathcal{B}_1} = (\mathcal{B}_1 \to \mathcal{B}_2)[u]_{\mathcal{B}_2}$.

(iii) $(\mathcal{B}_2 \to \mathcal{B}_1) = (\mathcal{B}_1 \to \mathcal{B}_2)^{-1}$.

(iv) $(\mathcal{B}_1 \to \mathcal{B}_3) = (\mathcal{B}_1 \to \mathcal{B}_2)(\mathcal{B}_2 \to \mathcal{B}_3)$.

Nhắc lại. Cho $\mathcal{B} = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ là một cơ sở của $\mathbb{R}^n$. Khi đó

$$(\mathcal{B}_0 \to \mathcal{B}) = (u_1^\top \ u_2^\top \ldots u_n^\top).$$

Hệ quả. *Cho $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2$ là hai cơ sở của không gian K^n. Khi đó*

Định lý. *Cho V là một không gian vectơ và $\mathcal{B}, \mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2, \mathcal{B}_3$ là các cơ sở của V. Khi đó*

(i) $(\mathcal{B} \to \mathcal{B}) = I_n$.

(ii) $\forall u \in V, [u]_{\mathcal{B}_1} = (\mathcal{B}_1 \to \mathcal{B}_2)[u]_{\mathcal{B}_2}$.

(iii) $(\mathcal{B}_2 \to \mathcal{B}_1) = (\mathcal{B}_1 \to \mathcal{B}_2)^{-1}$.

(iv) $(\mathcal{B}_1 \to \mathcal{B}_3) = (\mathcal{B}_1 \to \mathcal{B}_2)(\mathcal{B}_2 \to \mathcal{B}_3)$.

Nhắc lại. Cho $\mathcal{B} = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ là một cơ sở của $\mathbb{R}^n$. Khi đó

$$(\mathcal{B}_0 \to \mathcal{B}) = (u_1^\top \; u_2^\top \ldots u_n^\top).$$

Hệ quả. *Cho $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2$ là hai cơ sở của không gian K^n. Khi đó*

(i) $(\mathcal{B}_1 \to \mathcal{B}_0) = (\mathcal{B}_0 \to \mathcal{B}_1)^{-1}$.

Định lý. *Cho V là một không gian vectơ và $\mathcal{B}, \mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2, \mathcal{B}_3$ là các cơ sở của V. Khi đó*

(i) $(\mathcal{B} \to \mathcal{B}) = I_n$.

(ii) $\forall u \in V, [u]_{\mathcal{B}_1} = (\mathcal{B}_1 \to \mathcal{B}_2)[u]_{\mathcal{B}_2}$.

(iii) $(\mathcal{B}_2 \to \mathcal{B}_1) = (\mathcal{B}_1 \to \mathcal{B}_2)^{-1}$.

(iv) $(\mathcal{B}_1 \to \mathcal{B}_3) = (\mathcal{B}_1 \to \mathcal{B}_2)(\mathcal{B}_2 \to \mathcal{B}_3)$.

Nhắc lại. Cho $\mathcal{B} = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ là một cơ sở của $\mathbb{R}^n$. Khi đó

$$(\mathcal{B}_0 \to \mathcal{B}) = (u_1^\top \ u_2^\top \ \ldots u_n^\top).$$

Hệ quả. *Cho $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2$ là hai cơ sở của không gian K^n. Khi đó*

(i) $(\mathcal{B}_1 \to \mathcal{B}_0) = (\mathcal{B}_0 \to \mathcal{B}_1)^{-1}$.

(ii) $\forall u \in V, [u]_{\mathcal{B}_1} = (\mathcal{B}_0 \to \mathcal{B}_1)^{-1}[u]_{\mathcal{B}_0}$.

Định lý. *Cho V là một không gian vectơ và $\mathcal{B}, \mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2, \mathcal{B}_3$ là các cơ sở của V. Khi đó*

(i) $(\mathcal{B} \to \mathcal{B}) = I_n$.

(ii) $\forall u \in V, [u]_{\mathcal{B}_1} = (\mathcal{B}_1 \to \mathcal{B}_2)[u]_{\mathcal{B}_2}$.

(iii) $(\mathcal{B}_2 \to \mathcal{B}_1) = (\mathcal{B}_1 \to \mathcal{B}_2)^{-1}$.

(iv) $(\mathcal{B}_1 \to \mathcal{B}_3) = (\mathcal{B}_1 \to \mathcal{B}_2)(\mathcal{B}_2 \to \mathcal{B}_3)$.

Nhắc lại. Cho $\mathcal{B} = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ là một cơ sở của $\mathbb{R}^n$. Khi đó

$$(\mathcal{B}_0 \to \mathcal{B}) = (u_1^\top \ u_2^\top \ldots u_n^\top).$$

Hệ quả. *Cho $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2$ là hai cơ sở của không gian K^n. Khi đó*

(i) $(\mathcal{B}_1 \to \mathcal{B}_0) = (\mathcal{B}_0 \to \mathcal{B}_1)^{-1}$.

(ii) $\forall u \in V, [u]_{\mathcal{B}_1} = (\mathcal{B}_0 \to \mathcal{B}_1)^{-1}[u]_{\mathcal{B}_0}$.

(iii) $(\mathcal{B}_1 \to \mathcal{B}_2) = (\mathcal{B}_0 \to \mathcal{B}_1)^{-1}(\mathcal{B}_0 \to \mathcal{B}_2)$.

Ví dụ. Cho W là không gian con của $\mathbb{R}^4$ sinh bởi các vectơ:

$$u_1 = (1,2,2,1), u_2 = (0,2,0,1), u_3 = (-2,3,-4,1).$$

a) Chứng minh $\mathcal{B} = (u_1, u_2, u_3)$ là một cơ sở của W.

b) Cho $u = (a,b,c,d)$, tìm điều kiện để $u \in W$. Khi đó tìm $[u]_{\mathcal{B}}$?

c) Cho $v_1 = (1,0,2,0); v_2 = (0,2,0,1); v_3 = (0,0,0,1)$. Chứng minh $\mathcal{B}' = (v_1, v_2, v_3)$ cũng là một cơ sở của W. Tìm ma trận chuyển cơ sở từ $\mathcal{B}$ sang $\mathcal{B}'$?

Ví dụ. Cho W là không gian con của $\mathbb{R}^4$ sinh bởi các vectơ:

$$u_1 = (1, 2, 2, 1), u_2 = (0, 2, 0, 1), u_3 = (-2, 3, -4, 1).$$

a) Chứng minh $\mathcal{B} = (u_1, u_2, u_3)$ là một cơ sở của W.

b) Cho $u = (a, b, c, d)$, tìm điều kiện để $u \in W$. Khi đó tìm $[u]_{\mathcal{B}}$?

c) Cho $v_1 = (1, 0, 2, 0); v_2 = (0, 2, 0, 1); v_3 = (0, 0, 0, 1)$. Chứng minh $\mathcal{B}' = (v_1, v_2, v_3)$ cũng là một cơ sở của W. Tìm ma trận chuyển cơ sở từ $\mathcal{B}$ sang $\mathcal{B}'$?

Giải.

$a)$ Chứng minh $\mathcal{B} = (u_1, u_2, u_3)$ là một cơ sở của W.

Ví dụ. Cho W là không gian con của $\mathbb{R}^4$ sinh bởi các vectơ:

$$u_1 = (1,2,2,1), u_2 = (0,2,0,1), u_3 = (-2,3,-4,1).$$

a) Chứng minh $\mathcal{B} = (u_1, u_2, u_3)$ là một cơ sở của W.

b) Cho $u = (a,b,c,d)$, tìm điều kiện để $u \in W$. Khi đó tìm $[u]_{\mathcal{B}}$?

c) Cho $v_1 = (1,0,2,0); v_2 = (0,2,0,1); v_3 = (0,0,0,1)$. Chứng minh $\mathcal{B}' = (v_1, v_2, v_3)$ cũng là một cơ sở của W. Tìm ma trận chuyển cơ sở từ $\mathcal{B}$ sang $\mathcal{B}'$?

Giải.

$a)$ Chứng minh $\mathcal{B} = (u_1, u_2, u_3)$ là một cơ sở của W.

Lập $A = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ -2 & 3 & -4 & 1 \end{pmatrix}$.

Ví dụ. Cho W là không gian con của $\mathbb{R}^4$ sinh bởi các vectơ:

$$u_1 = (1,2,2,1), u_2 = (0,2,0,1), u_3 = (-2,3,-4,1).$$

a) Chứng minh $\mathcal{B} = (u_1, u_2, u_3)$ là một cơ sở của W.

b) Cho $u = (a,b,c,d)$, tìm điều kiện để $u \in W$. Khi đó tìm $[u]_{\mathcal{B}}$?

c) Cho $v_1 = (1,0,2,0); v_2 = (0,2,0,1); v_3 = (0,0,0,1)$. Chứng minh $\mathcal{B}' = (v_1, v_2, v_3)$ cũng là một cơ sở của W. Tìm ma trận chuyển cơ sở từ $\mathcal{B}$ sang $\mathcal{B}'$?

Giải.

a) Chứng minh $\mathcal{B} = (u_1, u_2, u_3)$ là một cơ sở của W.

Lập $A = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ -2 & 3 & -4 & 1 \end{pmatrix}$. Ta có $r(A) = 3$, suy ra $\mathcal{B}$ độc lập tuyến tính.

Ví dụ. Cho W là không gian con của $\mathbb{R}^4$ sinh bởi các vectơ:

$$u_1 = (1,2,2,1), u_2 = (0,2,0,1), u_3 = (-2,3,-4,1).$$

a) Chứng minh $\mathcal{B} = (u_1, u_2, u_3)$ là một cơ sở của W.

b) Cho $u = (a,b,c,d)$, tìm điều kiện để $u \in W$. Khi đó tìm $[u]_{\mathcal{B}}$?

c) Cho $v_1 = (1,0,2,0); v_2 = (0,2,0,1); v_3 = (0,0,0,1)$. Chứng minh $\mathcal{B}' = (v_1, v_2, v_3)$ cũng là một cơ sở của W. Tìm ma trận chuyển cơ sở từ $\mathcal{B}$ sang $\mathcal{B}'$?

Giải.

a) Chứng minh $\mathcal{B} = (u_1, u_2, u_3)$ là một cơ sở của W.

Lập $A = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ -2 & 3 & -4 & 1 \end{pmatrix}$. Ta có $r(A) = 3$, suy ra $\mathcal{B}$ độc lập tuyến tính. Vì $W = \langle \mathcal{B} \rangle$ nên $\mathcal{B}$ là cơ sở của W.

$b)$ Cho $u = (a, b, c, d)$, tìm điều kiện để $u \in W$. Khi đó tìm $[u]_{\mathcal{B}}$?

$b)$ Cho $u = (a, b, c, d)$, tìm điều kiện để $u \in W$. Khi đó tìm $[u]_{\mathcal{B}}$?

Ta có $u \in W$ khi u là tổ hợp tuyến tính của $\mathcal{B}$.

$b)$ Cho $u = (a, b, c, d)$, tìm điều kiện để $u \in W$. Khi đó tìm $[u]_{\mathcal{B}}$?

Ta có $u \in W$ khi u là tổ hợp tuyến tính của $\mathcal{B}$. Lập hệ phương trình

$$(u_1^\top \ u_2^\top \ u_3^\top | u^\top)$$

$b)$ Cho $u = (a, b, c, d)$, tìm điều kiện để $u \in W$. Khi đó tìm $[u]_{\mathcal{B}}$?

Ta có $u \in W$ khi u là tổ hợp tuyến tính của $\mathcal{B}$. Lập hệ phương trình

$$(u_1^\top \ u_2^\top \ u_3^\top | u^\top) = \left(\begin{array}{rrr|c} 1 & 0 & -2 & a \\ 2 & 2 & 3 & b \\ 2 & 0 & -4 & c \\ 1 & 1 & 1 & d \end{array}\right)$$

$b)$ Cho $u = (a, b, c, d)$, tìm điều kiện để $u \in W$. Khi đó tìm $[u]_{\mathcal{B}}$?

Ta có $u \in W$ khi u là tổ hợp tuyến tính của $\mathcal{B}$. Lập hệ phương trình

$$(u_1^\top \ u_2^\top \ u_3^\top | u^\top) = \left(\begin{array}{ccr|c} 1 & 0 & -2 & a \\ 2 & 2 & 3 & b \\ 2 & 0 & -4 & c \\ 1 & 1 & 1 & d \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|l} 1 & 0 & 0 & a + 2b - 4d \\ 0 & 1 & 0 & -a - 3b + 7d \\ 0 & 0 & 1 & b - 2d \\ 0 & 0 & 0 & -2a + c \end{array}\right).$$

b) Cho $u = (a, b, c, d)$, tìm điều kiện để $u \in W$. Khi đó tìm $[u]_{\mathcal{B}}$?

Ta có $u \in W$ khi u là tổ hợp tuyến tính của $\mathcal{B}$. Lập hệ phương trình

$$(u_1^\top \ u_2^\top \ u_3^\top | u^\top) = \left(\begin{array}{rrr|c} 1 & 0 & -2 & a \\ 2 & 2 & 3 & b \\ 2 & 0 & -4 & c \\ 1 & 1 & 1 & d \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|l} 1 & 0 & 0 & a+2b-4d \\ 0 & 1 & 0 & -a-3b+7d \\ 0 & 0 & 1 & b-2d \\ 0 & 0 & 0 & -2a+c \end{array}\right).$$

Dựa vào hệ phương trình, ta thấy để $u \in W$ thì

$$-2a + c = 0.$$

b) Cho $u = (a, b, c, d)$, tìm điều kiện để $u \in W$. Khi đó tìm $[u]_{\mathcal{B}}$?

Ta có $u \in W$ khi u là tổ hợp tuyến tính của $\mathcal{B}$. Lập hệ phương trình

$$(u_1^\top \ u_2^\top \ u_3^\top | u^\top) = \left(\begin{array}{rrr|l} 1 & 0 & -2 & a \\ 2 & 2 & 3 & b \\ 2 & 0 & -4 & c \\ 1 & 1 & 1 & d \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|l} 1 & 0 & 0 & a+2b-4d \\ 0 & 1 & 0 & -a-3b+7d \\ 0 & 0 & 1 & b-2d \\ 0 & 0 & 0 & -2a+c \end{array}\right).$$

Dựa vào hệ phương trình, ta thấy để $u \in W$ thì

$$-2a + c = 0.$$

Hơn nữa

$$[u]_B = \begin{pmatrix} a+2b-4d \\ -a-3b+7d \\ b-2d \end{pmatrix}.$$

$c)$ Cho $v_1 = (1, 0, 2, 0); v_2 = (0, 2, 0, 1); v_3 = (0, 0, 0, 1)$. Chứng minh $\mathcal{B}' = (v_1, v_2, v_3)$ cũng là một cơ sở của W. Tìm ma trận chuyển cơ sở từ $\mathcal{B}$ sang $\mathcal{B}'$?

$c)$ Cho $v_1 = (1, 0, 2, 0); v_2 = (0, 2, 0, 1); v_3 = (0, 0, 0, 1)$. Chứng minh $\mathcal{B}' = (v_1, v_2, v_3)$ cũng là một cơ sở của W. Tìm ma trận chuyển cơ sở từ $\mathcal{B}$ sang $\mathcal{B}'$?

Ta thấy các vectơ v_1, v_2, v_3 đều thỏa điều kiện $-2a + c = 0$ nên theo câu $a)$, các vectơ này thuộc W.

c) Cho $v_1 = (1, 0, 2, 0); v_2 = (0, 2, 0, 1); v_3 = (0, 0, 0, 1)$. Chứng minh $\mathcal{B}' = (v_1, v_2, v_3)$ cũng là một cơ sở của W. Tìm ma trận chuyển cơ sở từ $\mathcal{B}$ sang $\mathcal{B}'$?

Ta thấy các vectơ v_1, v_2, v_3 đều thỏa điều kiện $-2a + c = 0$ nên theo câu a), các vectơ này thuộc W.

Mặt khác, dễ thấy rằng $\mathcal{B}' = (v_1, v_2, v_3)$ độc lập tuyến tính nên $\mathcal{B}'$ cũng là cơ sở của W (do $\dim W = |\mathcal{B}| = 3 = |\mathcal{B}'|$).

c) Cho $v_1 = (1,0,2,0); v_2 = (0,2,0,1); v_3 = (0,0,0,1)$. Chứng minh $\mathcal{B}' = (v_1, v_2, v_3)$ cũng là một cơ sở của W. Tìm ma trận chuyển cơ sở từ $\mathcal{B}$ sang $\mathcal{B}'$?

Ta thấy các vectơ v_1, v_2, v_3 đều thỏa điều kiện $-2a + c = 0$ nên theo câu a), các vectơ này thuộc W.

Mặt khác, dễ thấy rằng $\mathcal{B}' = (v_1, v_2, v_3)$ độc lập tuyến tính nên $\mathcal{B}'$ cũng là cơ sở của W (do $\dim W = |\mathcal{B}| = 3 = |\mathcal{B}'|$). Dùng kết quả ở câu b) ta có

$$[v_1]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, [v_2]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, [v_2]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} -4 \\ 7 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

c) Cho $v_1 = (1, 0, 2, 0); v_2 = (0, 2, 0, 1); v_3 = (0, 0, 0, 1)$. Chứng minh $\mathcal{B}' = (v_1, v_2, v_3)$ cũng là một cơ sở của W. Tìm ma trận chuyển cơ sở từ $\mathcal{B}$ sang $\mathcal{B}'$?

Ta thấy các vectơ v_1, v_2, v_3 đều thỏa điều kiện $-2a + c = 0$ nên theo câu a), các vectơ này thuộc W.

Mặt khác, dễ thấy rằng $\mathcal{B}' = (v_1, v_2, v_3)$ độc lập tuyến tính nên $\mathcal{B}'$ cũng là cơ sở của W (do $\dim W = |\mathcal{B}| = 3 = |\mathcal{B}'|$). Dùng kết quả ở câu b) ta có

$$[v_1]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, [v_2]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, [v_2]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} -4 \\ 7 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Suy ra $(\mathcal{B} \to \mathcal{B}') = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 \\ -1 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$.

Ví dụ. Trong không gian $\mathbb{R}^3$, cho

$$S = (u_1 = (1,1,3), u_2 = (1,-2,1), u_3 = (1,-1,2))$$
$$T = (v_1 = (1,-2,2), v_2 = (1,-2,1), v_3 = (1,-1,2))$$

a) Chứng tỏ S và T là cơ sở của $\mathbb{R}^3$.

b) Tìm ma trận chuyển cơ sở từ S sang T?

c) Cho $u \in \mathbb{R}^3$ thỏa $[u]_T = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix}$. Tìm $[u]_S$?

Ví dụ. Trong không gian $\mathbb{R}^3$, cho

$$S = (u_1 = (1,1,3), u_2 = (1,-2,1), u_3 = (1,-1,2))$$
$$T = (v_1 = (1,-2,2), v_2 = (1,-2,1), v_3 = (1,-1,2))$$

a) Chứng tỏ S và T là cơ sở của $\mathbb{R}^3$.

b) Tìm ma trận chuyển cơ sở từ S sang T?

c) Cho $u \in \mathbb{R}^3$ thỏa $[u]_T = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix}$. Tìm $[u]_S$?

a) Chứng tỏ S và T là cơ sở của $\mathbb{R}^3$.

Ví dụ. Trong không gian $\mathbb{R}^3$, cho

$$S = (u_1 = (1, 1, 3), u_2 = (1, -2, 1), u_3 = (1, -1, 2))$$
$$T = (v_1 = (1, -2, 2), v_2 = (1, -2, 1), v_3 = (1, -1, 2))$$

a) Chứng tỏ S và T là cơ sở của $\mathbb{R}^3$.

b) Tìm ma trận chuyển cơ sở từ S sang T?

c) Cho $u \in \mathbb{R}^3$ thỏa $[u]_T = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix}$. Tìm $[u]_S$?

a) Chứng tỏ S và T là cơ sở của $\mathbb{R}^3$.

Lập $A = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$.

Ví dụ. Trong không gian $\mathbb{R}^3$, cho

$$S = (u_1 = (1,1,3), u_2 = (1,-2,1), u_3 = (1,-1,2))$$
$$T = (v_1 = (1,-2,2), v_2 = (1,-2,1), v_3 = (1,-1,2))$$

a) Chứng tỏ S và T là cơ sở của $\mathbb{R}^3$.

b) Tìm ma trận chuyển cơ sở từ S sang T?

c) Cho $u \in \mathbb{R}^3$ thỏa $[u]_T = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix}$. Tìm $[u]_S$?

a) Chứng tỏ S và T là cơ sở của $\mathbb{R}^3$.

Lập $A = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$. Ta có $r(A) = 3$, suy ra S độc lập tuyến tính.

Ví dụ. Trong không gian $\mathbb{R}^3$, cho

$$S = (u_1 = (1,1,3), u_2 = (1,-2,1), u_3 = (1,-1,2))$$
$$T = (v_1 = (1,-2,2), v_2 = (1,-2,1), v_3 = (1,-1,2))$$

a) Chứng tỏ S và T là cơ sở của $\mathbb{R}^3$.

b) Tìm ma trận chuyển cơ sở từ S sang T?

c) Cho $u \in \mathbb{R}^3$ thỏa $[u]_T = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix}$. Tìm $[u]_S$?

a) Chứng tỏ S và T là cơ sở của $\mathbb{R}^3$.

Lập $A = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$. Ta có $r(A) = 3$, suy ra S độc lập tuyến tính. Hơn nữa $\dim\mathbb{R}^3 =$ số vectơ của S.

Ví dụ. Trong không gian $\mathbb{R}^3$, cho

$$S = (u_1 = (1,1,3), u_2 = (1,-2,1), u_3 = (1,-1,2))$$
$$T = (v_1 = (1,-2,2), v_2 = (1,-2,1), v_3 = (1,-1,2))$$

a) Chứng tỏ S và T là cơ sở của $\mathbb{R}^3$.

b) Tìm ma trận chuyển cơ sở từ S sang T?

c) Cho $u \in \mathbb{R}^3$ thỏa $[u]_T = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix}$. Tìm $[u]_S$?

a) Chứng tỏ S và T là cơ sở của $\mathbb{R}^3$.

Lập $A = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$. Ta có $r(A) = 3$, suy ra S độc lập tuyến tính. Hơn nữa $\dim\mathbb{R}^3 =$ số vectơ của S. Vậy S là cơ sở của $\mathbb{R}^3$.

Ví dụ. Trong không gian $\mathbb{R}^3$, cho

$$S = (u_1 = (1,1,3), u_2 = (1,-2,1), u_3 = (1,-1,2))$$
$$T = (v_1 = (1,-2,2), v_2 = (1,-2,1), v_3 = (1,-1,2))$$

a) Chứng tỏ S và T là cơ sở của $\mathbb{R}^3$.

b) Tìm ma trận chuyển cơ sở từ S sang T?

c) Cho $u \in \mathbb{R}^3$ thỏa $[u]_T = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix}$. Tìm $[u]_S$?

a) Chứng tỏ S và T là cơ sở của $\mathbb{R}^3$.

Lập $A = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$. Ta có $r(A) = 3$, suy ra S độc lập tuyến tính. Hơn nữa $\dim\mathbb{R}^3 =$ số vectơ của S. Vậy S là cơ sở của $\mathbb{R}^3$. Làm tương tự cho T.

b) Tìm ma trận chuyển cơ sở từ S sang T?

b) Tìm ma trận chuyển cơ sở từ S sang T?

Lập ma trận mở rộng

$(u_1^\top \ u_2^\top \ u_3^\top \mid v_1^\top \ v_2^\top \ v_3^\top)$

b) Tìm ma trận chuyển cơ sở từ S sang T?

Lập ma trận mở rộng

$$(u_1^\top\ u_2^\top\ u_3^\top \mid v_1^\top\ v_2^\top\ v_3^\top) = \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -1 & -2 & -2 & -1 \\ 3 & 1 & 2 & 2 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

b) Tìm ma trận chuyển cơ sở từ S sang T?

Lập ma trận mở rộng

$$(u_1^\top\ u_2^\top\ u_3^\top \mid v_1^\top\ v_2^\top\ v_3^\top) = \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -1 & -2 & -2 & -1 \\ 3 & 1 & 2 & 2 & 1 & 2 \end{array}\right) \to$$

$$\to \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

b) Tìm ma trận chuyển cơ sở từ S sang T?

Lập ma trận mở rộng

$$(u_1^\top\ u_2^\top\ u_3^\top \mid v_1^\top\ v_2^\top\ v_3^\top) = \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -1 & -2 & -2 & -1 \\ 3 & 1 & 2 & 2 & 1 & 2 \end{array}\right) \to$$

$$\to \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right). \text{ Suy ra } (S \to T) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

b) Tìm ma trận chuyển cơ sở từ S sang T?

Lập ma trận mở rộng

$$(u_1^\top \ u_2^\top \ u_3^\top \mid v_1^\top \ v_2^\top \ v_3^\top) = \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -1 & -2 & -2 & -1 \\ 3 & 1 & 2 & 2 & 1 & 2 \end{array}\right) \rightarrow$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right). \text{ Suy ra } (S \rightarrow T) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

c) Cho $u \in \mathbb{R}^3$ thỏa $[u]_T = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix}$. Tìm $[u]_S$?

b) Tìm ma trận chuyển cơ sở từ S sang T?

Lập ma trận mở rộng

$$(u_1^\top\ u_2^\top\ u_3^\top \mid v_1^\top\ v_2^\top\ v_3^\top) = \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -1 & -2 & -2 & -1 \\ 3 & 1 & 2 & 2 & 1 & 2 \end{array}\right) \to$$

$$\to \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right). \text{ Suy ra } (S \to T) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

c) Cho $u \in \mathbb{R}^3$ thỏa $[u]_T = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix}$. Tìm $[u]_S$?

Ta có $[u]_S = (S \to T)[u]_T$

b) Tìm ma trận chuyển cơ sở từ S sang T?

Lập ma trận mở rộng

$$(u_1^\top\ u_2^\top\ u_3^\top \mid v_1^\top\ v_2^\top\ v_3^\top) = \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -1 & -2 & -2 & -1 \\ 3 & 1 & 2 & 2 & 1 & 2 \end{array}\right) \to$$

$$\to \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right). \text{ Suy ra } (S \to T) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

c) Cho $u \in \mathbb{R}^3$ thỏa $[u]_T = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix}$. Tìm $[u]_S$?

Ta có $[u]_S = (S \to T)[u]_T = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix}$

b) Tìm ma trận chuyển cơ sở từ S sang T?

Lập ma trận mở rộng

$$(u_1^\top\ u_2^\top\ u_3^\top \mid v_1^\top\ v_2^\top\ v_3^\top) = \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -1 & -2 & -2 & -1 \\ 3 & 1 & 2 & 2 & 1 & 2 \end{array}\right) \to$$

$$\to \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right). \text{ Suy ra } (S \to T) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

c) Cho $u \in \mathbb{R}^3$ thỏa $[u]_T = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix}$. Tìm $[u]_S$?

Ta có $[u]_S = (S \to T)[u]_T = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -5 \\ 4 \end{pmatrix}$.

Ánh xạ tuyến tính

Ánh xạ tuyến tính

Định nghĩa. Cho V và W là hai không gian vectơ trên K.

Ánh xạ tuyến tính

Định nghĩa. Cho V và W là hai không gian vectơ trên K. Ta nói $f : V \longrightarrow W$ là một ***ánh xạ tuyến tính*** nếu nó thỏa hai điều kiện sau:

Ánh xạ tuyến tính

Định nghĩa. Cho V và W là hai không gian vectơ trên K. Ta nói $f : V \longrightarrow W$ là một ***ánh xạ tuyến tính*** nếu nó thỏa hai điều kiện sau:

i) $f(u+v) = f(u) + f(v)$ với mọi $u, v \in V$;

Ánh xạ tuyến tính

Định nghĩa. Cho V và W là hai không gian vectơ trên K. Ta nói $f : V \longrightarrow W$ là một ***ánh xạ tuyến tính*** nếu nó thỏa hai điều kiện sau:

i) $f(u+v) = f(u) + f(v)$ với mọi $u, v \in V$;

ii) $f(\alpha u) = \alpha f(u)$ với mọi $\alpha \in K$ và với mọi $u \in V$.

Ánh xạ tuyến tính

Định nghĩa. Cho V và W là hai không gian vectơ trên K. Ta nói $f : V \longrightarrow W$ là một ***ánh xạ tuyến tính*** nếu nó thỏa hai điều kiện sau:

i) $f(u+v) = f(u) + f(v)$ với mọi $u, v \in V$;

ii) $f(\alpha u) = \alpha f(u)$ với mọi $\alpha \in K$ và với mọi $u \in V$.

Nhận xét. *Điều kiện i) và ii) trong định nghĩa có thể được thay thế bằng một điều kiện :*

$$f(\alpha u + v) = \alpha f(u) + f(v), \forall \alpha \in K, \forall u, v \in V.$$

Ánh xạ tuyến tính

Định nghĩa. Cho V và W là hai không gian vectơ trên K. Ta nói $f : V \longrightarrow W$ là một ***ánh xạ tuyến tính*** nếu nó thỏa hai điều kiện sau:

i) $f(u+v) = f(u) + f(v)$ với mọi $u, v \in V$;

ii) $f(\alpha u) = \alpha f(u)$ với mọi $\alpha \in K$ và với mọi $u \in V$.

Nhận xét. *Điều kiện i) và ii) trong định nghĩa có thể được thay thế bằng một điều kiện :*

$$f(\alpha u + v) = \alpha f(u) + f(v), \forall \alpha \in K, \forall u, v \in V.$$

- $\boldsymbol{L(V, W)}$ là tập hợp các ánh xạ tuyến tính từ V vào W.

Ánh xạ tuyến tính

Định nghĩa. Cho V và W là hai không gian vectơ trên K. Ta nói $f : V \longrightarrow W$ là một ***ánh xạ tuyến tính*** nếu nó thỏa hai điều kiện sau:

i) $f(u+v) = f(u) + f(v)$ với mọi $u, v \in V$;

ii) $f(\alpha u) = \alpha f(u)$ với mọi $\alpha \in K$ và với mọi $u \in V$.

Nhận xét. *Điều kiện i) và ii) trong định nghĩa có thể được thay thế bằng một điều kiện :*

$$f(\alpha u + v) = \alpha f(u) + f(v), \forall \alpha \in K, \forall u, v \in V.$$

- $\boldsymbol{L(V, W)}$ là tập hợp các ánh xạ tuyến tính từ V vào W.

- Nếu $f \in L(V, V)$ thì f được gọi là một ***toán tử tuyến tính*** trên V. Viết tắt $f \in L(V)$ hay $f \in End_K V$

Không gian nhân

Không gian nhân

Định nghĩa. Cho $f : V \to W$ là một ánh xạ tuyến tính.

Không gian nhân

Định nghĩa. Cho $f : V \to W$ là một ánh xạ tuyến tính. Ta đặt

$$\operatorname{Ker} f = \{u \in V \mid f(u) = 0\}$$

Không gian nhân

Định nghĩa. Cho $f : V \to W$ là một ánh xạ tuyến tính. Ta đặt

$$\mathrm{Ker} f = \{u \in V \mid f(u) = 0\}$$

Khi đó $\mathrm{Ker} f$ là không gian con của V, ta gọi $\mathrm{Ker} f$ là ***không gian nhân*** của f.

Không gian nhân

Định nghĩa. Cho $f : V \to W$ là một ánh xạ tuyến tính. Ta đặt

$$\mathrm{Ker} f = \{u \in V \mid f(u) = 0\}$$

Khi đó $\mathrm{Ker} f$ là không gian con của V, ta gọi $\mathrm{Ker} f$ là ***không gian nhân*** của f.

Nhận xét. *Dựa vào định nghĩa, ta được*

$$u \in \mathrm{Ker} f \Leftrightarrow f(u) = 0.$$

Không gian nhân

Định nghĩa. Cho $f : V \to W$ là một ánh xạ tuyến tính. Ta đặt

$$\operatorname{Ker} f = \{u \in V \mid f(u) = 0\}$$

Khi đó $\operatorname{Ker} f$ là không gian con của V, ta gọi $\operatorname{Ker} f$ là ***không gian nhân*** của f.

Nhận xét. *Dựa vào định nghĩa, ta được*

$$u \in \operatorname{Ker} f \Leftrightarrow f(u) = 0.$$

Ví dụ. Cho $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ được xác định bởi:

$$f(x, y, z) = (x + y - z, 2x + 3y - z, 3x + 5y - z).$$

Tìm một cơ sở của $\operatorname{Ker} f$?

$$f(x, y, z) = (x + y - z, 2x + 3y - z, 3x + 5y - z)$$

$$f(x,y,z) = (x+y-z, 2x+3y-z, 3x+5y-z)$$

Giải. Gọi $u = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. Ta có

$$u \in \mathrm{Ker} f \quad \Leftrightarrow f(u) = 0$$

$$f(x,y,z) = (x+y-z, 2x+3y-z, 3x+5y-z)$$

Giải. Gọi $u = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. Ta có

$$\begin{aligned} u \in \operatorname{Ker} f \quad & \Leftrightarrow f(u) = 0 \\ & \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & - & z & = & 0 \\ 2x & + & 3y & - & z & = & 0 \\ 3x & + & 5y & - & z & = & 0 \end{array} \right. \end{aligned}$$

$$f(x,y,z) = (x+y-z, 2x+3y-z, 3x+5y-z)$$

Giải. Gọi $u=(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$. Ta có

$$\begin{aligned} u\in \operatorname{Ker} f \quad &\Leftrightarrow f(u) = 0 \\ &\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & - & z & = & 0 \\ 2x & + & 3y & - & z & = & 0 \\ 3x & + & 5y & - & z & = & 0 \end{array}\right. \end{aligned}$$

Ma trận hóa ta được, $\tilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & -1 \\ 3 & 5 & -1 \end{pmatrix}$

$$f(x,y,z) = (x+y-z, 2x+3y-z, 3x+5y-z)$$

Giải. Gọi $u = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. Ta có

$$\begin{aligned} u \in \operatorname{Ker} f &\Leftrightarrow f(u) = 0 \\ &\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcrcrcr} x &+& y &-& z &=& 0 \\ 2x &+& 3y &-& z &=& 0 \\ 3x &+& 5y &-& z &=& 0 \end{array} \right. \end{aligned}$$

Ma trận hóa ta được, $\tilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & -1 \\ 3 & 5 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

$$f(x,y,z) = (x+y-z, 2x+3y-z, 3x+5y-z)$$

Giải. Gọi $u = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. Ta có

$$\begin{aligned} u \in \operatorname{Ker} f \ &\Leftrightarrow f(u) = 0 \\ &\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & - & z & = & 0 \\ 2x & + & 3y & - & z & = & 0 \\ 3x & + & 5y & - & z & = & 0 \end{array} \right. \end{aligned}$$

Ma trận hóa ta được, $\tilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & -1 \\ 3 & 5 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Hệ phương trình có nghiệm

$$(x,y,z) = (2t, -t, t) \text{ với } t \in \mathbb{R}.$$

$$f(x,y,z) = (x+y-z, 2x+3y-z, 3x+5y-z)$$

Giải. Gọi $u = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. Ta có

$$\begin{aligned} u \in \operatorname{Ker} f &\Leftrightarrow f(u) = 0 \\ &\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcrcrcr} x &+& y &-& z &=& 0 \\ 2x &+& 3y &-& z &=& 0 \\ 3x &+& 5y &-& z &=& 0 \end{array} \right. \end{aligned}$$

Ma trận hóa ta được, $\tilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & -1 \\ 3 & 5 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Hệ phương trình có nghiệm

$$(x,y,z) = (2t, -t, t) \text{ với } t \in \mathbb{R}.$$

Nghiệm cơ bản của hệ là $u_1 = (2,-1,1)$.

$$f(x,y,z) = (x+y-z, 2x+3y-z, 3x+5y-z)$$

Giải. Gọi $u=(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$. Ta có

$$\begin{aligned} u\in \operatorname{Ker} f &\Leftrightarrow f(u) = 0 \\ &\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcrcrcl} x &+& y &-& z &=& 0 \\ 2x &+& 3y &-& z &=& 0 \\ 3x &+& 5y &-& z &=& 0 \end{array}\right. \end{aligned}$$

Ma trận hóa ta được, $\tilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & -1 \\ 3 & 5 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$

Hệ phương trình có nghiệm

$$(x,y,z) = (2t, -t, t) \text{ với } t\in\mathbb{R}.$$

Nghiệm cơ bản của hệ là $u_1 = (2,-1,1)$.

Vậy, $\operatorname{Ker} f$ có một cơ sở là $\{u_1 = (2,-1,1)\}$.

Không gian ảnh

Định nghĩa. Cho $f : V \to W$ là một ánh xạ tuyến tính. Ta đặt

$$\mathrm{Im}\boldsymbol{f} = \{\boldsymbol{f}(\boldsymbol{u}) \,|\, \boldsymbol{u} \in \boldsymbol{V}\}$$

Không gian ảnh

Định nghĩa. Cho $f : V \to W$ là một ánh xạ tuyến tính. Ta đặt

$$\mathrm{Im} f = \{f(u) \,|\, u \in V\}$$

Khi đó $\mathrm{Im} f$ là không gian con của W, ta gọi $\mathrm{Im} f$ là ***không gian ảnh*** của f.

Không gian ảnh

Định nghĩa. Cho $f : V \to W$ là một ánh xạ tuyến tính. Ta đặt

$$\mathrm{Im} f = \{f(u) \mid u \in V\}$$

Khi đó $\mathrm{Im} f$ là không gian con của W, ta gọi $\mathrm{Im} f$ là ***không gian ảnh*** của f.

Định lý. *Cho $f : V \to W$ là một ánh xạ tuyến tính. Khi đó, nếu*

$$S = \{u_1, u_2, \ldots, u_m\}$$

là tập sinh của V

Không gian ảnh

Định nghĩa. Cho $f : V \to W$ là một ánh xạ tuyến tính. Ta đặt

$$\mathrm{Im} f = \{f(u) \mid u \in V\}$$

Khi đó $\mathrm{Im} f$ là không gian con của W, ta gọi $\mathrm{Im} f$ là ***không gian ảnh*** của f.

Định lý. *Cho $f : V \to W$ là một ánh xạ tuyến tính. Khi đó, nếu*

$$S = \{u_1, u_2, \ldots, u_m\}$$

là tập sinh của V thì

$$f(S) = \{f(u_1), f(u_2), \ldots, f(u_m)\}$$

là tập sinh của $\mathrm{Im} f$.

Nhận xét. *Dựa vào Định lý trên, để tìm cơ sở* $\mathrm{Im} f$*, ta chọn một tập sinh* S *của* V *(để đơn giản ta có thể chọn cơ sở chính tắc).*

Nhận xét. *Dựa vào Định lý trên, để tìm cơ sở* $\mathrm{Im}f$, *ta chọn một tập sinh* S *của* V *(để đơn giản ta có thể chọn cơ sở chính tắc). Khi đó* $\mathrm{Im}f$ *sinh bởi tập ảnh của* S.

Nhận xét. *Dựa vào Định lý trên, để tìm cơ sở* $\mathrm{Im}f$, *ta chọn một tập sinh* S *của* V *(để đơn giản ta có thể chọn cơ sở chính tắc). Khi đó* $\mathrm{Im}f$ *sinh bởi tập ảnh của* S.

Ví dụ. Cho $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ được xác định bởi:

$$f(x, y, z) = (x + y - z, 2x + 3y - z, 3x + 5y - z).$$

Tìm một cơ sở của $\mathrm{Im}f$?

Nhận xét. *Dựa vào Định lý trên, để tìm cơ sở* $\mathrm{Im} f$*, ta chọn một tập sinh* S *của* V *(để đơn giản ta có thể chọn cơ sở chính tắc). Khi đó* $\mathrm{Im} f$ *sinh bởi tập ảnh của* S*.*

Ví dụ. Cho $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ được xác định bởi:

$$f(x, y, z) = (x + y - z, 2x + 3y - z, 3x + 5y - z).$$

Tìm một cơ sở của $\mathrm{Im} f$?

Giải. Gọi $\mathcal{B}_0 = \{e_1, e_2, e_3\}$ là cơ sở chính tắc của $\mathbb{R}^3$.

Nhận xét. *Dựa vào Định lý trên, để tìm cơ sở* $\operatorname{Im} f$*, ta chọn một tập sinh* S *của* V *(để đơn giản ta có thể chọn cơ sở chính tắc). Khi đó* $\operatorname{Im} f$ *sinh bởi tập ảnh của* S*.*

Ví dụ. Cho $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ được xác định bởi:

$$f(x, y, z) = (x + y - z, 2x + 3y - z, 3x + 5y - z).$$

Tìm một cơ sở của $\operatorname{Im} f$?

Giải. Gọi $\mathcal{B}_0 = \{e_1, e_2, e_3\}$ là cơ sở chính tắc của $\mathbb{R}^3$. Ta có

$$f(e_1) = f(1, 0, 0) \quad = \quad (1, 2, 3),$$

Nhận xét. *Dựa vào Định lý trên, để tìm cơ sở* $\mathrm{Im} f$*, ta chọn một tập sinh* S *của* V *(để đơn giản ta có thể chọn cơ sở chính tắc). Khi đó* $\mathrm{Im} f$ *sinh bởi tập ảnh của* S*.*

Ví dụ. Cho $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ được xác định bởi:

$$f(x, y, z) = (x + y - z, 2x + 3y - z, 3x + 5y - z).$$

Tìm một cơ sở của $\mathrm{Im} f$?

Giải. Gọi $\mathcal{B}_0 = \{e_1, e_2, e_3\}$ là cơ sở chính tắc của $\mathbb{R}^3$. Ta có

$$\begin{aligned} f(e_1) = f(1,0,0) &= (1,2,3), \\ f(e_2) = f(0,1,0) &= (1,3,5), \end{aligned}$$

Nhận xét. *Dựa vào Định lý trên, để tìm cơ sở* $\text{Im} f$*, ta chọn một tập sinh* S *của* V *(để đơn giản ta có thể chọn cơ sở chính tắc). Khi đó* $\text{Im} f$ *sinh bởi tập ảnh của* S*.*

Ví dụ. Cho $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ được xác định bởi:

$$f(x, y, z) = (x + y - z, 2x + 3y - z, 3x + 5y - z).$$

Tìm một cơ sở của $\text{Im} f$?

Giải. Gọi $\mathcal{B}_0 = \{e_1, e_2, e_3\}$ là cơ sở chính tắc của $\mathbb{R}^3$. Ta có

$$\begin{aligned} f(e_1) = f(1, 0, 0) &= (1, 2, 3), \\ f(e_2) = f(0, 1, 0) &= (1, 3, 5), \\ f(e_3) = f(0, 0, 1) &= (-1, -1, -1). \end{aligned}$$

Nhận xét. *Dựa vào Định lý trên, để tìm cơ sở* $\mathrm{Im}f$*, ta chọn một tập sinh* S *của* V *(để đơn giản ta có thể chọn cơ sở chính tắc). Khi đó* $\mathrm{Im}f$ *sinh bởi tập ảnh của* S*.*

Ví dụ. Cho $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ được xác định bởi:

$$f(x,y,z)=(x+y-z,2x+3y-z,3x+5y-z).$$

Tìm một cơ sở của $\mathrm{Im}f$?

Giải. Gọi $\mathcal{B}_0=\{e_1,e_2,e_3\}$ là cơ sở chính tắc của $\mathbb{R}^3$. Ta có

$$\begin{aligned} f(e_1)=f(1,0,0) &= (1,2,3),\\ f(e_2)=f(0,1,0) &= (1,3,5),\\ f(e_3)=f(0,0,1) &= (-1,-1,-1). \end{aligned}$$

Ta có $\mathrm{Im}f$ sinh bởi $\{f(e_1),f(e_2),f(e_3)\}$.

Lập ma trận $A = \begin{pmatrix} f(e_1) \\ f(e_2) \\ f(e_3) \end{pmatrix}$

Lập ma trận $A = \begin{pmatrix} f(e_1) \\ f(e_2) \\ f(e_3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow$

Lập ma trận $A = \begin{pmatrix} f(e_1) \\ f(e_2) \\ f(e_3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$

Lập ma trận $A = \begin{pmatrix} f(e_1) \\ f(e_2) \\ f(e_3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$

Do đó Imf có cơ sở là $\{v_1 = (1, 2, 3), v_2 = (0, 1, 2)\}$.

Lập ma trận $A = \begin{pmatrix} f(e_1) \\ f(e_2) \\ f(e_3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Do đó Imf có cơ sở là $\{v_1 = (1,2,3), v_2 = (0,1,2)\}$.

Ví dụ.(tự làm) Cho $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ được xác định bởi:

$$f(x,y,z) = (x + 2y - 3z,\ 3x + 2y,\ 2x + 2y - z, 4x - y + 5z).$$

Tìm một cơ sở của Imf?

Ma trận biểu diễn ánh xạ tuyến tính

Định nghĩa. Cho V có cơ sở $\mathcal{B} = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$, W có cơ sở $\mathcal{B}' = (v_1, v_2, \ldots, v_m)$ và $f \in L(V, W)$.

Ma trận biểu diễn ánh xạ tuyến tính

Định nghĩa. Cho V có cơ sở $\mathcal{B} = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$, W có cơ sở $\mathcal{B}' = (v_1, v_2, \ldots, v_m)$ và $f \in L(V, W)$. Đặt

$$P = ([f(u_1)]_{\mathcal{B}'} \;\; [f(u_2)]_{\mathcal{B}'} \;\; \ldots \;\; [f(u_n)]_{\mathcal{B}'}).$$

Ma trận biểu diễn ánh xạ tuyến tính

Định nghĩa. Cho V có cơ sở $\mathcal{B} = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$, W có cơ sở $\mathcal{B}' = (v_1, v_2, \ldots, v_m)$ và $f \in L(V, W)$. Đặt

$$\boldsymbol{P = ([f(u_1)]_{\mathcal{B}'} \;\; [f(u_2)]_{\mathcal{B}'} \;\; \ldots \;\; [f(u_n)]_{\mathcal{B}'})}.$$

Khi đó ma trận P được gọi là ***ma trận biểu diễn*** của ánh xạ f theo cặp cơ sở $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$, ký hiệu $P = [f]_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$ (hoặc $[f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$).

Ma trận biểu diễn ánh xạ tuyến tính

Định nghĩa. Cho V có cơ sở $\mathcal{B} = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$, W có cơ sở $\mathcal{B}' = (v_1, v_2, \ldots, v_m)$ và $f \in L(V, W)$. Đặt

$$\boldsymbol{P = ([f(u_1)]_{\mathcal{B}'} \ \ [f(u_2)]_{\mathcal{B}'} \ \ \ldots \ \ [f(u_n)]_{\mathcal{B}'})}.$$

Khi đó ma trận P được gọi là ***ma trận biểu diễn*** của ánh xạ f theo cặp cơ sở $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$, ký hiệu $P = \boldsymbol{[f]_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}}$ (hoặc $[f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$).

Nếu $f \in L(V)$ thì ma trận $[f]_{\mathcal{B},\mathcal{B}}$ được gọi là ***ma trận biểu diễn toán tử tuyến tính*** f, ký hiệu $\boldsymbol{[f]_{\mathcal{B}}}$.

Ma trận biểu diễn ánh xạ tuyến tính

Định nghĩa. Cho V có cơ sở $\mathcal{B} = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$, W có cơ sở $\mathcal{B}' = (v_1, v_2, \ldots, v_m)$ và $f \in L(V, W)$. Đặt

$$P = ([f(u_1)]_{\mathcal{B}'} \ \ [f(u_2)]_{\mathcal{B}'} \ \ldots \ [f(u_n)]_{\mathcal{B}'}).$$

Khi đó ma trận P được gọi là *ma trận biểu diễn* của ánh xạ f theo cặp cơ sở $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$, ký hiệu $P = [f]_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$ (hoặc $[f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$).

Nếu $f \in L(V)$ thì ma trận $[f]_{\mathcal{B},\mathcal{B}}$ được gọi là *ma trận biểu diễn toán tử tuyến tính* f, ký hiệu $[f]_{\mathcal{B}}$.

Ví dụ. Xét ánh xạ tuyến tính $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ xác định bởi

$$f(x, y, z) = (x - y, 2x + y + z)$$

và cặp cơ sở $\mathcal{B} = (u_1 = (1, 1, 0), u_2 = (0, 1, 2), u_3 = (1, 1, 1))$,
$\mathcal{C} = (v_1 = (1, 3), v_2 = (2, 5))$. Tìm $[f]_{\mathcal{B},\mathcal{C}}$?

Ta có

$$\begin{aligned} f(u_1) &= (0,3), \\ f(u_2) &= (-1,3), \\ f(u_3) &= (0,4). \end{aligned}$$

Ta có

$$\begin{aligned} f(u_1) &= (0,3), \\ f(u_2) &= (-1,3), \\ f(u_3) &= (0,4). \end{aligned}$$

Với $v = (a,b) \in \mathbb{R}^2$, tìm $[v]_{\mathcal{C}}$.

Ta có

$$\begin{aligned} f(u_1) &= (0,3), \\ f(u_2) &= (-1,3), \\ f(u_3) &= (0,4). \end{aligned}$$

Với $v = (a, b) \in \mathbb{R}^2$, tìm $[v]_{\mathcal{C}}$.

Lập $(v_1^\top \ v_2^\top \mid v^\top) \to \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & a \\ 3 & 5 & b \end{array}\right) \to$

Ta có

$$\begin{aligned} f(u_1) &= (0,3), \\ f(u_2) &= (-1,3), \\ f(u_3) &= (0,4). \end{aligned}$$

Với $v = (a,b) \in \mathbb{R}^2$, tìm $[v]_{\mathcal{C}}$.

Lập $(v_1^\top \; v_2^\top \mid v^\top) \to \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & a \\ 3 & 5 & b \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|l} 1 & 0 & -5a+2b \\ 0 & 1 & 3a-b \end{array}\right)$.

Ta có

$$\begin{aligned} f(u_1) &= (0,3), \\ f(u_2) &= (-1,3), \\ f(u_3) &= (0,4). \end{aligned}$$

Với $v=(a,b)\in\mathbb{R}^2$, tìm $[v]_{\mathcal{C}}$.

Lập $(v_1^\top\ v_2^\top \mid v^\top) \to \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & a \\ 3 & 5 & b \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|l} 1 & 0 & -5a+2b \\ 0 & 1 & 3a-b \end{array}\right)$.

Suy ra $[v]_{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} -5a+2b \\ 3a-b \end{pmatrix}$.

Ta có

$$\begin{aligned} f(u_1) &= (0,3), \\ f(u_2) &= (-1,3), \\ f(u_3) &= (0,4). \end{aligned}$$

Với $v = (a,b) \in \mathbb{R}^2$, tìm $[v]_{\mathcal{C}}$.

Lập $(v_1^\top \ v_2^\top \mid v^\top) \to \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & a \\ 3 & 5 & b \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|l} 1 & 0 & -5a+2b \\ 0 & 1 & 3a-b \end{array}\right)$.

Suy ra $[v]_{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} -5a+2b \\ 3a-b \end{pmatrix}$.

Lần lượt thay $f(u_1), f(u_2), f(u_3)$ ta có

$$[f(u_1)]_{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \end{pmatrix}, [f(u_2)]_{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 11 \\ -6 \end{pmatrix}, [f(u_3)]_{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 8 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

Ta có

$$\begin{aligned} f(u_1) &= (0,3), \\ f(u_2) &= (-1,3), \\ f(u_3) &= (0,4). \end{aligned}$$

Với $v = (a,b) \in \mathbb{R}^2$, tìm $[v]_{\mathcal{C}}$.

Lập $(v_1^\top \ v_2^\top \mid v^\top) \to \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & a \\ 3 & 5 & b \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|l} 1 & 0 & -5a+2b \\ 0 & 1 & 3a-b \end{array}\right)$.

Suy ra $[v]_{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} -5a+2b \\ 3a-b \end{pmatrix}$.

Lần lượt thay $f(u_1), f(u_2), f(u_3)$ ta có

$$[f(u_1)]_{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \end{pmatrix}, [f(u_2)]_{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 11 \\ -6 \end{pmatrix}, [f(u_3)]_{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 8 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

Vậy

$$[f]_{\mathcal{B},\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 6 & 11 & 8 \\ -3 & -6 & -4 \end{pmatrix}.$$

Ví dụ. Cho ánh xạ tuyến tính $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ định bởi

$$f(x, y, z, t) = (x - 2y + z - t, x + 2y + z + t, 2x + 2z).$$

Tìm ma trận biểu diễn ánh xạ tuyến tính f theo cặp cơ sở chính tắc.

Ví dụ. Cho ánh xạ tuyến tính $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ định bởi

$$f(x, y, z, t) = (x - 2y + z - t, x + 2y + z + t, 2x + 2z).$$

Tìm ma trận biểu diễn ánh xạ tuyến tính f theo cặp cơ sở chính tắc.

Giải.

$$[f]_{\mathcal{B}_0, \mathcal{B}'_0} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Ví dụ. Cho ánh xạ tuyến tính $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ định bởi

$$f(x, y, z, t) = (x - 2y + z - t, x + 2y + z + t, 2x + 2z).$$

Tìm ma trận biểu diễn ánh xạ tuyến tính f theo cặp cơ sở chính tắc.

Giải.

$$[f]_{\mathcal{B}_0, \mathcal{B}'_0} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Ví dụ. Cho $f \in L(\mathbb{R}^2)$ xác định bởi $f(x, y) = (2x + y, x - 4y)$. Khi đó ma trận biểu diễn f theo cơ sở chính tắc $\mathcal{B}_0$ là:

Ví dụ. Cho ánh xạ tuyến tính $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ định bởi

$$f(x, y, z, t) = (x - 2y + z - t, x + 2y + z + t, 2x + 2z).$$

Tìm ma trận biểu diễn ánh xạ tuyến tính f theo cặp cơ sở chính tắc.

Giải.

$$[f]_{\mathcal{B}_0, \mathcal{B}'_0} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Ví dụ. Cho $f \in L(\mathbb{R}^2)$ xác định bởi $f(x, y) = (2x + y, x - 4y)$. Khi đó ma trận biểu diễn f theo cơ sở chính tắc $\mathcal{B}_0$ là:

$$[f]_{\mathcal{B}_0} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}.$$

Định lý. *Cho V và W là các không gian vectơ; $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ và $\mathcal{C}, \mathcal{C}'$ tương ứng là các cặp cơ sở trong V và W. Khi đó, với mọi ánh xạ tuyến tính $f : V \to W$ ta có*

Định lý. *Cho V và W là các không gian vectơ; $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ và $\mathcal{C}, \mathcal{C}'$ tương ứng là các cặp cơ sở trong V và W. Khi đó, với mọi ánh xạ tuyến tính $f : V \to W$ ta có*

(i) $\forall u \in V, [f(u)]_{\mathcal{C}} = [f]_{\mathcal{B},\mathcal{C}}[u]_{\mathcal{B}}$.

Định lý. *Cho V và W là các không gian vectơ; $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ và $\mathcal{C}, \mathcal{C}'$ tương ứng là các cặp cơ sở trong V và W. Khi đó, với mọi ánh xạ tuyến tính $f : V \to W$ ta có*

(i) $\forall u \in V, [f(u)]_{\mathcal{C}} = [f]_{\mathcal{B},\mathcal{C}}[u]_{\mathcal{B}}$.

(ii) $[f]_{\mathcal{B}',\mathcal{C}'} = (\mathcal{C} \to \mathcal{C}')^{-1}[f]_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(\mathcal{B} \to \mathcal{B}')$.

Định lý. *Cho V và W là các không gian vectơ; $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ và $\mathcal{C}, \mathcal{C}'$ tương ứng là các cặp cơ sở trong V và W. Khi đó, với mọi ánh xạ tuyến tính $f : V \to W$ ta có*

(i) $\forall u \in V, [f(u)]_{\mathcal{C}} = [f]_{\mathcal{B},\mathcal{C}}[u]_{\mathcal{B}}$.

(ii) $[f]_{\mathcal{B}',\mathcal{C}'} = (\mathcal{C} \to \mathcal{C}')^{-1}[f]_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(\mathcal{B} \to \mathcal{B}')$.

Hệ quả. *Cho $\mathcal{B}$ và $\mathcal{B}'$ là hai cơ sở của không gian hữu hạn chiều V. Khi đó đối với mọi toán tử tuyến tính $f \in L(V)$ ta có*

Định lý. *Cho V và W là các không gian vectơ; $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ và $\mathcal{C}, \mathcal{C}'$ tương ứng là các cặp cơ sở trong V và W. Khi đó, với mọi ánh xạ tuyến tính $f : V \to W$ ta có*

(i) $\forall u \in V, [f(u)]_{\mathcal{C}} = [f]_{\mathcal{B},\mathcal{C}}[u]_{\mathcal{B}}$.

(ii) $[f]_{\mathcal{B}',\mathcal{C}'} = (\mathcal{C} \to \mathcal{C}')^{-1}[f]_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(\mathcal{B} \to \mathcal{B}')$.

Hệ quả. *Cho $\mathcal{B}$ và $\mathcal{B}'$ là hai cơ sở của không gian hữu hạn chiều V. Khi đó đối với mọi toán tử tuyến tính $f \in L(V)$ ta có*

(i) $\forall u \in V, [f(u)]_{\mathcal{B}} = [f]_{\mathcal{B}}[u]_{\mathcal{B}}$.

Định lý. *Cho V và W là các không gian vectơ; $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ và $\mathcal{C}, \mathcal{C}'$ tương ứng là các cặp cơ sở trong V và W. Khi đó, với mọi ánh xạ tuyến tính $f : V \to W$ ta có*

(i) $\forall u \in V, [f(u)]_{\mathcal{C}} = [f]_{\mathcal{B},\mathcal{C}}[u]_{\mathcal{B}}$.

(ii) $[f]_{\mathcal{B}',\mathcal{C}'} = (\mathcal{C} \to \mathcal{C}')^{-1}[f]_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(\mathcal{B} \to \mathcal{B}')$.

Hệ quả. *Cho $\mathcal{B}$ và $\mathcal{B}'$ là hai cơ sở của không gian hữu hạn chiều V. Khi đó đối với mọi toán tử tuyến tính $f \in L(V)$ ta có*

(i) $\forall u \in V, [f(u)]_{\mathcal{B}} = [f]_{\mathcal{B}}[u]_{\mathcal{B}}$.

(ii) $[f]_{\mathcal{B}'} = (\mathcal{B} \to \mathcal{B}')^{-1}[f]_{\mathcal{B}}(\mathcal{B} \to \mathcal{B}')$.

Định lý. *Cho V và W là các không gian vectơ; $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ và $\mathcal{C}, \mathcal{C}'$ tương ứng là các cặp cơ sở trong V và W. Khi đó, với mọi ánh xạ tuyến tính $f : V \to W$ ta có*

(i) $\forall u \in V, [f(u)]_{\mathcal{C}} = [f]_{\mathcal{B},\mathcal{C}}[u]_{\mathcal{B}}$.

(ii) $[f]_{\mathcal{B}',\mathcal{C}'} = (\mathcal{C} \to \mathcal{C}')^{-1}[f]_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(\mathcal{B} \to \mathcal{B}')$.

Hệ quả. *Cho $\mathcal{B}$ và $\mathcal{B}'$ là hai cơ sở của không gian hữu hạn chiều V. Khi đó đối với mọi toán tử tuyến tính $f \in L(V)$ ta có*

(i) $\forall u \in V, [f(u)]_{\mathcal{B}} = [f]_{\mathcal{B}}[u]_{\mathcal{B}}$.

(ii) $[f]_{\mathcal{B}'} = (\mathcal{B} \to \mathcal{B}')^{-1}[f]_{\mathcal{B}}(\mathcal{B} \to \mathcal{B}')$.

Ví dụ. Trong không gian $\mathbb{R}^3$ cho cơ sở

$$\mathcal{B} = (u_1 = (1,1,0); u_2 = (0,2,1); u_3 = (2,3,1))$$

và ánh xạ tuyến tính $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ định bởi:

$$f(x,y,z) = (2x + y - z, x + 2y - z, 2x - y + 3z).$$

Tìm $[f]_{\mathcal{B}}$?

Giải. Gọi $\mathcal{B}_0$ là cơ sở chính tắc của $\mathbb{R}^3$, ta có

$$[f]_{\mathcal{B}_0} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Giải. Gọi $\mathcal{B}_0$ là cơ sở chính tắc của $\mathbb{R}^3$, ta có

$$[f]_{\mathcal{B}_0} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Áp dụng hệ quả trên, ta có

$$[f]_{\mathcal{B}} = (\mathcal{B}_0 \to \mathcal{B})^{-1}[f]_{\mathcal{B}_0}(\mathcal{B}_0 \to \mathcal{B}),$$

Giải. Gọi $\mathcal{B}_0$ là cơ sở chính tắc của $\mathbb{R}^3$, ta có

$$[f]_{\mathcal{B}_0} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Áp dụng hệ quả trên, ta có

$$[f]_{\mathcal{B}} = (\mathcal{B}_0 \to \mathcal{B})^{-1}[f]_{\mathcal{B}_0}(\mathcal{B}_0 \to \mathcal{B}),$$

trong đó $(\mathcal{B}_0 \to \mathcal{B}) = (u_1^\top\ u_2^\top\ u_3^\top) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, do đó

Giải. Gọi $\mathcal{B}_0$ là cơ sở chính tắc của $\mathbb{R}^3$, ta có

$$[f]_{\mathcal{B}_0} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Áp dụng hệ quả trên, ta có

$$[f]_{\mathcal{B}} = (\mathcal{B}_0 \to \mathcal{B})^{-1}[f]_{\mathcal{B}_0}(\mathcal{B}_0 \to \mathcal{B}),$$

trong đó $(\mathcal{B}_0 \to \mathcal{B}) = (u_1^\top \ u_2^\top \ u_3^\top) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, do đó

$$(\mathcal{B}_0 \to \mathcal{B})^{-1} =$$

Giải. Gọi $\mathcal{B}_0$ là cơ sở chính tắc của $\mathbb{R}^3$, ta có

$$[f]_{\mathcal{B}_0} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Áp dụng hệ quả trên, ta có

$$[f]_{\mathcal{B}} = (\mathcal{B}_0 \to \mathcal{B})^{-1}[f]_{\mathcal{B}_0}(\mathcal{B}_0 \to \mathcal{B}),$$

trong đó $(\mathcal{B}_0 \to \mathcal{B}) = (u_1^\top \ u_2^\top \ u_3^\top) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, do đó

$$(\mathcal{B}_0 \to \mathcal{B})^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -4 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Suy ra

$$[f]_{\mathcal{B}} = (\mathcal{B}_0 \to \mathcal{B})^{-1}[f]_{\mathcal{B}_0}(\mathcal{B}_0 \to \mathcal{B})$$

Suy ra

$$[f]_{\mathcal{B}} = (\mathcal{B}_0 \to \mathcal{B})^{-1}[f]_{\mathcal{B}_0}(\mathcal{B}_0 \to \mathcal{B})$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & 2 & -4 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Suy ra

$$[f]_{\mathcal{B}} = (\mathcal{B}_0 \to \mathcal{B})^{-1}[f]_{\mathcal{B}_0}(\mathcal{B}_0 \to \mathcal{B})$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & 2 & -4 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -8 & 7 & -13 \\ -3 & 2 & -3 \\ 5 & -3 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Suy ra

$$[f]_{\mathcal{B}} = (\mathcal{B}_0 \to \mathcal{B})^{-1}[f]_{\mathcal{B}_0}(\mathcal{B}_0 \to \mathcal{B})$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & 2 & -4 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -8 & 7 & -13 \\ -3 & 2 & -3 \\ 5 & -3 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -8 \\ -1 & 1 & -3 \\ 2 & 0 & 7 \end{pmatrix}.$$

Suy ra

$$[f]_{\mathcal{B}} = (\mathcal{B}_0 \to \mathcal{B})^{-1}[f]_{\mathcal{B}_0}(\mathcal{B}_0 \to \mathcal{B})$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & 2 & -4 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -8 & 7 & -13 \\ -3 & 2 & -3 \\ 5 & -3 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -8 \\ -1 & 1 & -3 \\ 2 & 0 & 7 \end{pmatrix}.$$

Ví dụ. Cho ánh xạ tuyến tính $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, biết ma trận biểu diễn của f trong cặp cơ sở $\mathcal{B} = (u_1 = (1,1,1); u_2 = (1,0,1); u_3 = (1,1,0))$ và $\mathcal{C} = (v_1 = (1,1); v_2 = (2,1))$ là

$$[f]_{\mathcal{B},\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 0 & 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Tìm công thức của f.

Cách 1. Do $[f]_{\mathcal{B},\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 0 & 3 & 4 \end{pmatrix}$.

Cách 1. Do $[f]_{\mathcal{B},\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 0 & 3 & 4 \end{pmatrix}$. Ta có

- $[f(u_1)]_{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$. Suy ra $f(u_1) = 2v_1 + 0v_2 = (2, 2)$.

Cách 1. Do $[f]_{\mathcal{B},\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 0 & 3 & 4 \end{pmatrix}$. Ta có

- $[f(u_1)]_{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$. Suy ra $f(u_1) = 2v_1 + 0v_2 = (2, 2)$.
- $[f(u_2)]_{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$. Suy ra $f(u_2) = v_1 + 3v_2 = (7, 4)$.

Cách 1. Do $[f]_{\mathcal{B},\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 0 & 3 & 4 \end{pmatrix}$. Ta có

- $[f(u_1)]_{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$. Suy ra $f(u_1) = 2v_1 + 0v_2 = (2, 2)$.
- $[f(u_2)]_{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$. Suy ra $f(u_2) = v_1 + 3v_2 = (7, 4)$.
- $[f(u_3)]_{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix}$. Suy ra $f(u_3) = -3v_1 + 4v_2 = (5, 1)$.

Cách 1. Do $[f]_{\mathcal{B},\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 0 & 3 & 4 \end{pmatrix}$. Ta có

- $[f(u_1)]_{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$. Suy ra $f(u_1) = 2v_1 + 0v_2 = (2, 2)$.
- $[f(u_2)]_{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$. Suy ra $f(u_2) = v_1 + 3v_2 = (7, 4)$.
- $[f(u_3)]_{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix}$. Suy ra $f(u_3) = -3v_1 + 4v_2 = (5, 1)$.

Cho $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Tìm $[u]_{\mathcal{B}}$.

Cách 1. Do $[f]_{\mathcal{B},\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 0 & 3 & 4 \end{pmatrix}$. Ta có

- $[f(u_1)]_{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$. Suy ra $f(u_1) = 2v_1 + 0v_2 = (2,2)$.
- $[f(u_2)]_{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$. Suy ra $f(u_2) = v_1 + 3v_2 = (7,4)$.
- $[f(u_3)]_{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix}$. Suy ra $f(u_3) = -3v_1 + 4v_2 = (5,1)$.

Cho $u = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. Tìm $[u]_{\mathcal{B}}$.

Lập $(u_1^\top\, u_2^\top\, u_3^\top\, | u^\top) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & x \\ 1 & 0 & 1 & y \\ 1 & 1 & 0 & z \end{array}\right)$

Cách 1. Do $[f]_{\mathcal{B},\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 0 & 3 & 4 \end{pmatrix}$. Ta có

- $[f(u_1)]_{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$. Suy ra $f(u_1) = 2v_1 + 0v_2 = (2, 2)$.
- $[f(u_2)]_{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$. Suy ra $f(u_2) = v_1 + 3v_2 = (7, 4)$.
- $[f(u_3)]_{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix}$. Suy ra $f(u_3) = -3v_1 + 4v_2 = (5, 1)$.

Cho $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Tìm $[u]_{\mathcal{B}}$.

Lập $(u_1^\top\ u_2^\top\ u_3^\top\ |u^\top) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & x \\ 1 & 0 & 1 & y \\ 1 & 1 & 0 & z \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & x-y-z \\ 0 & 1 & 0 & 2x+y-z \\ 0 & 0 & 1 & -x+z \end{array}\right)$.

Cách 1. Do $[f]_{\mathcal{B},\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 0 & 3 & 4 \end{pmatrix}$. Ta có

- $[f(u_1)]_{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$. Suy ra $f(u_1) = 2v_1 + 0v_2 = (2, 2)$.
- $[f(u_2)]_{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$. Suy ra $f(u_2) = v_1 + 3v_2 = (7, 4)$.
- $[f(u_3)]_{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix}$. Suy ra $f(u_3) = -3v_1 + 4v_2 = (5, 1)$.

Cho $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Tìm $[u]_{\mathcal{B}}$.

Lập $(u_1^\top\ u_2^\top\ u_3^\top\ |u^\top) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & x \\ 1 & 0 & 1 & y \\ 1 & 1 & 0 & z \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & x - y - z \\ 0 & 1 & 0 & 2x + y - z \\ 0 & 0 & 1 & -x + z \end{array}\right)$.

Vậy $[u]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} -x + y + z \\ x - y \\ x - z \end{pmatrix}$.

Suy ra $u = (-x + y + z)u_1 + (x - y)u_2 + (x - z)u_3$.

Suy ra $u = (-x + y + z)u_1 + (x - y)u_2 + (x - z)u_3$.

Vậy, ta có

$$f(u) = (-x + y + z)f(u_1) + (x - y)f(u_2) + (x - z)f(u_3)$$

Suy ra $u = (-x + y + z)u_1 + (x - y)u_2 + (x - z)u_3$.

Vậy, ta có

$$\begin{aligned} f(u) &= (-x + y + z)f(u_1) + (x - y)f(u_2) + (x - z)f(u_3) \\ &= (-x + y + z)(2, 2) + (x - y)(7, 4) + (x - z)(5, 1) \end{aligned}$$

Suy ra $u = (-x + y + z)u_1 + (x - y)u_2 + (x - z)u_3$.

Vậy, ta có

$$\begin{aligned} f(u) &= (-x + y + z)f(u_1) + (x - y)f(u_2) + (x - z)f(u_3) \\ &= (-x + y + z)(2, 2) + (x - y)(7, 4) + (x - z)(5, 1) \\ &= (10x - 5y - 3z, 3x - 2y + z). \end{aligned}$$

Suy ra $u = (-x+y+z)u_1 + (x-y)u_2 + (x-z)u_3$.

Vậy, ta có

$$\begin{aligned} f(u) &= (-x+y+z)f(u_1) + (x-y)f(u_2) + (x-z)f(u_3) \\ &= (-x+y+z)(2,2) + (x-y)(7,4) + (x-z)(5,1) \\ &= (10x-5y-3z, 3x-2y+z). \end{aligned}$$

Cách 2. Gọi $\mathcal{B}_0$ và $\mathcal{C}_0$ lần lượt là cơ sở chính tắc của $\mathbb{R}^3$ và $\mathbb{R}^2$.

Suy ra $u = (-x+y+z)u_1 + (x-y)u_2 + (x-z)u_3$.

Vậy, ta có

$$\begin{aligned} f(u) &= (-x+y+z)f(u_1) + (x-y)f(u_2) + (x-z)f(u_3) \\ &= (-x+y+z)(2,2) + (x-y)(7,4) + (x-z)(5,1) \\ &= (10x-5y-3z, 3x-2y+z). \end{aligned}$$

Cách 2. Gọi $\mathcal{B}_0$ và $\mathcal{C}_0$ lần lượt là cơ sở chính tắc của $\mathbb{R}^3$ và $\mathbb{R}^2$. Áp dụng công thức ta có

$$[f]_{\mathcal{B}_0,\mathcal{C}_0} = (\mathcal{C} \to \mathcal{C}_0)^{-1}[f]_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(\mathcal{B} \to \mathcal{B}_0).$$

Suy ra $u = (-x + y + z)u_1 + (x - y)u_2 + (x - z)u_3$.

Vậy, ta có

$$\begin{aligned} f(u) &= (-x + y + z)f(u_1) + (x - y)f(u_2) + (x - z)f(u_3) \\ &= (-x + y + z)(2, 2) + (x - y)(7, 4) + (x - z)(5, 1) \\ &= (10x - 5y - 3z, 3x - 2y + z). \end{aligned}$$

Cách 2. Gọi $\mathcal{B}_0$ và $\mathcal{C}_0$ lần lượt là cơ sở chính tắc của $\mathbb{R}^3$ và $\mathbb{R}^2$. Áp dụng công thức ta có

$$[f]_{\mathcal{B}_0,\mathcal{C}_0} = (\mathcal{C} \to \mathcal{C}_0)^{-1}[f]_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(\mathcal{B} \to \mathcal{B}_0).$$

Ta có

- $(\mathcal{C} \to \mathcal{C}_0)^{-1}$

Suy ra $u = (-x + y + z)u_1 + (x - y)u_2 + (x - z)u_3$.

Vậy, ta có

$$\begin{aligned} f(u) &= (-x + y + z)f(u_1) + (x - y)f(u_2) + (x - z)f(u_3) \\ &= (-x + y + z)(2, 2) + (x - y)(7, 4) + (x - z)(5, 1) \\ &= (10x - 5y - 3z, 3x - 2y + z). \end{aligned}$$

Cách 2. Gọi $\mathcal{B}_0$ và $\mathcal{C}_0$ lần lượt là cơ sở chính tắc của $\mathbb{R}^3$ và $\mathbb{R}^2$. Áp dụng công thức ta có

$$[f]_{\mathcal{B}_0,\mathcal{C}_0} = (\mathcal{C} \to \mathcal{C}_0)^{-1}[f]_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(\mathcal{B} \to \mathcal{B}_0).$$

Ta có

- $(\mathcal{C} \to \mathcal{C}_0)^{-1} = (\mathcal{C}_0 \to C)$

Suy ra $u = (-x + y + z)u_1 + (x - y)u_2 + (x - z)u_3$.

Vậy, ta có

$$\begin{aligned} f(u) &= (-x + y + z)f(u_1) + (x - y)f(u_2) + (x - z)f(u_3) \\ &= (-x + y + z)(2, 2) + (x - y)(7, 4) + (x - z)(5, 1) \\ &= (10x - 5y - 3z, 3x - 2y + z). \end{aligned}$$

Cách 2. Gọi $\mathcal{B}_0$ và $\mathcal{C}_0$ lần lượt là cơ sở chính tắc của $\mathbb{R}^3$ và $\mathbb{R}^2$. Áp dụng công thức ta có

$$[f]_{\mathcal{B}_0,\mathcal{C}_0} = (\mathcal{C} \to \mathcal{C}_0)^{-1}[f]_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(\mathcal{B} \to \mathcal{B}_0).$$

Ta có

- $(\mathcal{C} \to \mathcal{C}_0)^{-1} = (\mathcal{C}_0 \to C) = (v_1^\top \; v_2^\top)$

Suy ra $u = (-x+y+z)u_1 + (x-y)u_2 + (x-z)u_3$.

Vậy, ta có

$$\begin{aligned} f(u) &= (-x+y+z)f(u_1) + (x-y)f(u_2) + (x-z)f(u_3) \\ &= (-x+y+z)(2,2) + (x-y)(7,4) + (x-z)(5,1) \\ &= (10x-5y-3z, 3x-2y+z). \end{aligned}$$

Cách 2. Gọi $\mathcal{B}_0$ và $\mathcal{C}_0$ lần lượt là cơ sở chính tắc của $\mathbb{R}^3$ và $\mathbb{R}^2$. Áp dụng công thức ta có

$$[f]_{\mathcal{B}_0,\mathcal{C}_0} = (\mathcal{C} \to \mathcal{C}_0)^{-1}[f]_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(\mathcal{B} \to \mathcal{B}_0).$$

Ta có

- $(\mathcal{C} \to \mathcal{C}_0)^{-1} = (\mathcal{C}_0 \to C) = (v_1^\top \, v_2^\top) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Suy ra $u = (-x+y+z)u_1 + (x-y)u_2 + (x-z)u_3$.

Vậy, ta có

$$\begin{aligned} f(u) &= (-x+y+z)f(u_1) + (x-y)f(u_2) + (x-z)f(u_3) \\ &= (-x+y+z)(2,2) + (x-y)(7,4) + (x-z)(5,1) \\ &= (10x-5y-3z, 3x-2y+z). \end{aligned}$$

Cách 2. Gọi $\mathcal{B}_0$ và $\mathcal{C}_0$ lần lượt là cơ sở chính tắc của $\mathbb{R}^3$ và $\mathbb{R}^2$. Áp dụng công thức ta có

$$[f]_{\mathcal{B}_0,\mathcal{C}_0} = (\mathcal{C} \to \mathcal{C}_0)^{-1}[f]_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(\mathcal{B} \to \mathcal{B}_0).$$

Ta có

- $(\mathcal{C} \to \mathcal{C}_0)^{-1} = (\mathcal{C}_0 \to C) = (v_1^\top \, v_2^\top) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

- $(\mathcal{B}_0 \to \mathcal{B})$

Suy ra $u = (-x+y+z)u_1 + (x-y)u_2 + (x-z)u_3$.

Vậy, ta có

$$\begin{aligned} f(u) &= (-x+y+z)f(u_1) + (x-y)f(u_2) + (x-z)f(u_3) \\ &= (-x+y+z)(2,2) + (x-y)(7,4) + (x-z)(5,1) \\ &= (10x-5y-3z, 3x-2y+z). \end{aligned}$$

Cách 2. Gọi $\mathcal{B}_0$ và $\mathcal{C}_0$ lần lượt là cơ sở chính tắc của $\mathbb{R}^3$ và $\mathbb{R}^2$. Áp dụng công thức ta có

$$[f]_{\mathcal{B}_0,\mathcal{C}_0} = (\mathcal{C} \to \mathcal{C}_0)^{-1}[f]_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(\mathcal{B} \to \mathcal{B}_0).$$

Ta có

- $(\mathcal{C} \to \mathcal{C}_0)^{-1} = (\mathcal{C}_0 \to C) = (v_1^\top \, v_2^\top) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

- $(\mathcal{B}_0 \to \mathcal{B}) = (u_1^\top \, u_2^\top \, u_3^\top)$

Suy ra $u = (-x+y+z)u_1 + (x-y)u_2 + (x-z)u_3$.

Vậy, ta có

$$\begin{aligned} f(u) &= (-x+y+z)f(u_1) + (x-y)f(u_2) + (x-z)f(u_3) \\ &= (-x+y+z)(2,2) + (x-y)(7,4) + (x-z)(5,1) \\ &= (10x-5y-3z, 3x-2y+z). \end{aligned}$$

Cách 2. Gọi $\mathcal{B}_0$ và $\mathcal{C}_0$ lần lượt là cơ sở chính tắc của $\mathbb{R}^3$ và $\mathbb{R}^2$. Áp dụng công thức ta có

$$[f]_{\mathcal{B}_0,\mathcal{C}_0} = (\mathcal{C} \to \mathcal{C}_0)^{-1}[f]_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(\mathcal{B} \to \mathcal{B}_0).$$

Ta có

- $(\mathcal{C} \to \mathcal{C}_0)^{-1} = (\mathcal{C}_0 \to C) = (v_1^\top \, v_2^\top) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.
- $(\mathcal{B}_0 \to \mathcal{B}) = (u_1^\top \, u_2^\top \, u_3^\top) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Suy ra $(\mathcal{B} \to \mathcal{B}_0) = (\mathcal{B}_0 \to \mathcal{B})^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Suy ra $(\mathcal{B} \to \mathcal{B}_0) = (\mathcal{B}_0 \to \mathcal{B})^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Vậy

$$[f]_{\mathcal{B}_0,\mathcal{C}_0} = (\mathcal{C} \to \mathcal{C}_0)^{-1}[f]_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(\mathcal{B} \to \mathcal{B}_0)$$

Suy ra $(\mathcal{B} \to \mathcal{B}_0) = (\mathcal{B}_0 \to \mathcal{B})^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Vậy

$$\begin{aligned} [f]_{\mathcal{B}_0,\mathcal{C}_0} &= (\mathcal{C} \to \mathcal{C}_0)^{-1}[f]_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(\mathcal{B} \to \mathcal{B}_0) \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 0 & 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Suy ra $(\mathcal{B} \to \mathcal{B}_0) = (\mathcal{B}_0 \to \mathcal{B})^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Vậy

$$\begin{aligned} [f]_{\mathcal{B}_0,\mathcal{C}_0} &= (\mathcal{C} \to \mathcal{C}_0)^{-1}[f]_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(\mathcal{B} \to \mathcal{B}_0) \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 0 & 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 & 7 & 5 \\ 2 & 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Suy ra $(\mathcal{B} \to \mathcal{B}_0) = (\mathcal{B}_0 \to \mathcal{B})^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Vậy

$$\begin{aligned} [f]_{\mathcal{B}_0,\mathcal{C}_0} &= (\mathcal{C} \to \mathcal{C}_0)^{-1}[f]_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(\mathcal{B} \to \mathcal{B}_0) \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 0 & 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 & 7 & 5 \\ 2 & 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 10 & -5 & -3 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Suy ra $(\mathcal{B} \to \mathcal{B}_0) = (\mathcal{B}_0 \to \mathcal{B})^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Vậy

$$\begin{aligned}
[f]_{\mathcal{B}_0,\mathcal{C}_0} &= (\mathcal{C} \to \mathcal{C}_0)^{-1}[f]_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(\mathcal{B} \to \mathcal{B}_0) \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 0 & 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 2 & 7 & 5 \\ 2 & 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 10 & -5 & -3 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Suy ra $f(x, y, z) = (10x - 5y - 3z, 3x - 2y + z)$.

Ví dụ.(tự làm) Cho f là toán tử tuyến tính trong không gian $\mathbb{R}^3$ được xác định bởi

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + 3x_2, -2x_2 + x_3, 4x_1 - x_2 + 2x_3).$$

a) Tìm ma trận biểu diễn f trong cơ sở chính tắc của $\mathbb{R}^3$.

b) Tìm ma trận biểu diễn f trong cơ sở

$$\mathcal{B} = (u_1 = (-1, 2, 1), u_2 = (0, 1, 1), u_3 = (0, -3, -2)).$$