Chương 2

DẠNG CHÍNH TẮC JORDAN

lvluyen@hcmus.edu.vn

http://www.math.hcmus.edu.vn/∼luyen/dsa215

fb.com/dsa215

Đại học Khoa Học Tự Nhiên Tp. Hồ Chí Minh

Nội dung

Chương 2. DẠNG CHÍNH TẮC JORDAN

1. Sự tam giác hóa
2. Đa thức triệt tiêu, định lý Hamilton - Calley
3. Đa thức tối tiểu
4. Dạng tam giác khối
5. Dạng chính tắc Jordan

2.1. Sự tam giác hóa

Nhắc lại. Cho ma trận vuông $A = (a_{ij}) \in M_n(K)$. Ta nói

- A là ma trận ***tam giác trên*** nếu $a_{ij} = 0, \forall i > j$.
- A là ma trận ***tam giác dưới*** nếu $a_{ij} = 0, \forall i < j$.

Mệnh đề. *Mọi ma trận tam giác trên đều đồng dạng với một ma trận tam giác dưới.*

Chứng minh. Giả sử

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1\,n-1} & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2\,n-1} & a_{2n} \\ 0 & 0 & \dots & a_{3\,n-1} & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix}$$

là ma trận tam giác trên và $f \in End_K(K^n)$ sao cho $[f]_{\mathcal{B}_0} = A$ với $\mathcal{B}_0 = \{e_1, \dots, e_n\}$ là cơ sở chính tắc.

Xét cơ sở $\mathcal{B} = \{e_n, \ldots, e_1\}$. Ta có

$$[f]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} a_{nn} & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ \multicolumn{5}{c}{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots} \\ a_{3n} & a_{3\,n-1} & \ldots & 0 & 0 \\ a_{2n} & a_{2\,n-1} & \ldots & a_{22} & 0 \\ a_{1n} & a_{1\,n-1} & \ldots & a_{12} & a_{11} \end{pmatrix}.$$

Rõ ràng $[f]_{\mathcal{B}}$ là ma trận tam giác dưới. Hơn nữa

$$[f]_{\mathcal{B}_0} = (\mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{B}_0)^{-1}[f]_{\mathcal{B}}(\mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{B}_0).$$

Suy ra $[f]_{\mathcal{B}_0}$ đồng dạng với $[f]_{\mathcal{B}}$ hay A đồng dạng với một ma trận tam giác dưới. ∎

Bài toán 1. Cho $A \in M_n(K)$ là một ma trận vuông. Khi nào ma trận A đồng dạng với ma trận tam giác?

Bài toán 2. Cho $f \in End_K(V)$ là một toán tử tuyến tính. Tồn tại hay không một sở $\mathcal{B}$ của V sao cho $[f]_{\mathcal{B}}$ là ma trận tam giác?

Định lý. *Cho toán tử tuyến tính $f \in End_K(V)$. Toán tử f* ***tam giác hóa được*** *khi và chỉ khi đa thức đặc trưng của f phân rã trên K.*

Chứng minh.

(⇒) Giả sử f tam giác hóa được. Khi đó tồn tại cơ sở $\mathcal{B}$ của V sao cho

$$[f]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Ta có

$$P_f(\boldsymbol{\lambda}) = \begin{vmatrix} \lambda_1 - \boldsymbol{\lambda} & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n - \boldsymbol{\lambda} \end{vmatrix} = (\lambda_1 - \boldsymbol{\lambda}) \dots (\lambda_n - \boldsymbol{\lambda}).$$

Suy ra $P_f(\boldsymbol{\lambda})$ phân rã trên K.

($\Leftarrow$) Giả sử $P_f(\boldsymbol{\lambda})$ phân rã trên K. Ta chứng minh f tam giác hóa được bằng qui nạp theo số chiều của V.

- Nếu $n = 1$, hiển nhiên.
- Giả sử $n > 1$ và khẳng định đúng với $n - 1$.

Gọi $\lambda_1 \in K$ là một nghiệm nào đó của $P_f(\boldsymbol{\lambda})$ và u_1 là một vectơ riêng ứng với trị riêng λ_1. Ta bổ túc thêm $n-1$ vectơ vào (u_1) để có một cơ sở $\mathcal{C} = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ của V. Khi đó

$$A = [f]_{\mathcal{C}} = \left(\begin{array}{c|c} \lambda_1 & b_1 \ldots b_n \\ \hline 0 & B \end{array}\right).$$

với B là ma trận vuông cấp $n-1$.

Xét không gian con $W = \langle u_2, \ldots, u_n \rangle$ và g là toán tử tuyến tính trên W sao cho ma trận biểu diễn g theo cơ sở $(u_2, \ldots, u_n)$ là B. Ta có

$$P_f(\boldsymbol{\lambda}) = |A - \boldsymbol{\lambda} I_n| = (\lambda_1 - \boldsymbol{\lambda})\,|B - \boldsymbol{\lambda} I_{n-1}| = (\lambda_1 - \boldsymbol{\lambda}) P_g(\boldsymbol{\lambda}).$$

$$P_f(\boldsymbol{\lambda}) = |A - \boldsymbol{\lambda} I_n| = (\lambda_1 - \boldsymbol{\lambda})\,|B - \boldsymbol{\lambda} I_{n-1}| = (\lambda_1 - \boldsymbol{\lambda}) P_g(\boldsymbol{\lambda}).$$

Vì $P_f(\boldsymbol{\lambda})$ phân rã trên K nên $P_g(\boldsymbol{\lambda})$ cũng phân rã trên K.

Theo giả thiết qui nạp, ta có B tam giác hóa được. Như vậy tồn tại một cơ sở $(v_2, \ldots, v_n)$ của W sao cho ma trận biểu diễn g theo cơ sở này là ma trận tam giác trên. Khi đó ma trận biểu diễn f theo cơ sở

$$(u_1, v_2, \ldots, v_n)$$

cũng là ma trận tam giác trên.

Hệ quả. *Mọi ma trận $A \in M_n(\mathbb{C})$ đều tam giác hóa được trên $\mathbb{C}$.*

Nhận xét. *Nếu ma trận A đồng dạng với ma trận tam giác A' thì trên đường chéo chính của A' chỉ toàn là các trị riêng của A.*

Định nghĩa. Giả sử đa thức đặc trưng $P_A(\lambda)$ có các nghiệm $\lambda_1, \ldots, \lambda_p \in K$, với k_i là bội của λ_i. Khi đó ta viết

$$Sp_K(A) = \{\underbrace{\lambda_1, \ldots, \lambda_1}_{k_1}, \ldots, \underbrace{\lambda_p, \ldots, \lambda_p}_{k_p}\}$$

và gọi nó là ***phổ của ma trận*** A.

Ví dụ. Giả sử ma trận A có $P_A(\lambda) = (\lambda + 1)^2(\lambda - 2)^3(\lambda - 4)$. Khi đó

$$Sp_{\mathbb{R}}(A) = \{-1, -1, 2, 2, 2, 4\}.$$

Ví dụ. Giả sử toán tử f có $P_f(\lambda) = \lambda^2 + 1$. Khi đó

$$Sp_{\mathbb{R}}(f) = \emptyset \text{ và } Sp_{\mathbb{C}}(f) = \{-i, i\}.$$

Hệ quả. *Cho* $A \in M_n(\mathbb{R})$ *và* $Sp_{\mathbb{C}}(A) = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$. *Khi đó ta có*

$$tr(A) = \lambda_1 + \cdots + \lambda_n \text{ và } \det A = \lambda_1 \ldots \lambda_n.$$

Chứng minh. Do các ma trận đồng dạng đều có cùng vết và cùng định thức nên những điều cần chứng minh là hiển nhiên. ∎

Ví dụ. Cho ma trận $A = \begin{pmatrix} -4 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 5 & 1 & 3 \end{pmatrix}$. Hỏi A có tam giác hóa được trên $\mathbb{R}$ không? Nếu được, hãy tìm ma trận khả nghịch P sao cho $P^{-1}AP$ là ma trận tam giác?

Giải. Đa thức đặc trưng của A,

$$P_A(\lambda) = |A - \lambda I_3| = \begin{vmatrix} -4-\lambda & 0 & -2 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 5 & 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = -(\lambda+2)(\lambda-1)^2.$$

Vì $P_A(\boldsymbol{\lambda})$ phân rã trên $\mathbb{R}$ nên A tam giác hóa được trên $\mathbb{R}$.

Ta dễ dàng tìm được toán tử f sao cho $[f]_{\mathcal{B}_0} = A$. Vì f tam giác hóa được nên tồn tại một cơ sở $\mathcal{B} = (u_1, u_2, u_3)$ sao cho

$$[f]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} -2 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Suy ra

1. $f(u_1) = -2u_1$
2. $f(u_2) = au_1 + u_2$
3. $f(u_3) = bu_1 + cu_2 + u_3$

- Tìm u_1

$$f(u_1) = -2u_1 \Leftrightarrow (f + 2\mathrm{Id}_V)(u_1) = 0.$$

Suy ra u_1 là nghiệm của hệ $(A + 2I_3)X = 0$.

$$A + 2I_3 = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 5 & 1 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow[d_3 - 5d_1]{-\frac{1}{2}d_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[d_3 - d_2]{\frac{1}{3}d_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Chọn $x_3 = 1$, ta có $u_1 = (-1, 0, 1)$.

- Tìm u_2

$$\begin{aligned} f(u_2) = au_1 + u_2 &\Leftrightarrow f(u_2) - u_2 = au_1 \\ &\Leftrightarrow (f - \mathrm{Id}_V)(u_2) = (-a, 0, a). \end{aligned}$$

Suy ra u_2 là nghiệm của hệ $(A - I_3)X = 0$.

$$A - I_3 \left(\begin{array}{ccc|c} -5 & 0 & -2 & -a \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 2 & a \end{array}\right) \xrightarrow[d_2 \leftrightarrow d_3]{d_3 + d_1} \left(\begin{array}{ccc|c} -5 & 0 & -2 & -a \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Ta chọn $a = 0$ và $x_3 = 5$, ta có $u_2 = (-2, 0, 5)$.

- Tìm u_3

$$\begin{aligned} f(u_3) = bu_1 + cu_2 + u_3 &\Leftrightarrow (f - \mathrm{Id}_V)(u_3) = bu_1 + cu_2 \\ &\Leftrightarrow (f - \mathrm{Id}_V)(u_3) = (-b - 2c, 0, b + 5c) \end{aligned}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -5 & 0 & -2 & -b - 2c \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 2 & b + 5c \end{array}\right) \xrightarrow[d_2 \leftrightarrow d_3]{d_3 + d_1} \left(\begin{array}{ccc|c} -5 & 0 & -2 & -b - 2c \\ 0 & 1 & 0 & 3c \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Chọn $b = 0, c = 1$ và $x_3 = 1$, ta có $u_3 = (0, 3, 1)$.

Như vậy ta có $u_1 = (-1, 0, 1)$, $u_2 = (-2, 0, 5)$, $u_3 = (0, 3, 1)$. Dễ dàng kiểm tra u_1, u_2, u_3 độc lập tuyến tính, do đó $\mathcal{B} = \{u_1, u_2, u_3\}$ là cơ sở của V.

Hơn nữa

$$P = (\mathcal{B}_0 \longrightarrow \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix}$$

và

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ví dụ.(tự làm) Cho ma trận $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 \\ -8 & 5 & 8 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$. Hỏi A có tam giác hóa được trên $\mathbb{R}$ không? Nếu được, hãy tìm ma trận khả nghịch P sao cho $P^{-1}AP$ là ma trận tam giác?

2.2. Đa thức triệt tiêu, định lý Hamilton-Calley

Định nghĩa. Cho V là một không gian vectơ trên trường K và $Q(t) \in K[t]$,

$$Q(t) = a_m t^m + a_{m-1} t^{m-1} + \cdots + a_1 t + a_0.$$

Với $f \in End_K(V)$ và $A \in M_n(K)$, ta có đa thức $Q(t)$ theo

- ma trận A là

$$\boldsymbol{Q(A) = a_m A^m + a_{m-1} A^{m-1} + \cdots + a_1 A + a_0 I_n},$$

- toán tử f là

$$\boldsymbol{Q(f) = a_m f^m + a_{m-1} f^{m-1} + \cdots + a_1 f + a_0 \mathrm{Id}_V}.$$

Ví dụ. Cho $Q(t) = 2t^2 - 3t + 4$ và $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$. Tìm $Q(A)$?

Giải. Ta có
$$Q(A) = 2A^2 - 3A + 4I_2.$$
Do
$$2A^2 = \begin{pmatrix} 14 & -4 \\ -6 & 20 \end{pmatrix},\ 3A = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 9 & -6 \end{pmatrix},\ 4I_2 = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}.$$
nên
$$Q(A) = \begin{pmatrix} 15 & -10 \\ -15 & 30 \end{pmatrix}.$$

Ví dụ. Cho $Q(t) = -2t^2 + 5t - 4$ và $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ xác định bởi

$$f(x, y) = (x + 2y, -x + y).$$

Tìm $Q(f)$?

Ta có

$$Q(f) = -2f^2 + 5f - 4\text{Id}_{\mathbb{R}^2}.$$

Hơn nữa

- $f^2(x, y) = f(f(x, y)) = f(x + 2y, -x + y) = (-x + 4y, -2x - y).$
- $\text{Id}_{\mathbb{Q}}(x, y) = (x, y).$

Suy ra

$$Q(f)(x, y) = (3x + 2y, -x + 3y).$$

Ví dụ.(tự làm) Cho $A = \begin{pmatrix} 5 & -3 & -3 \\ 0 & -1 & 0 \\ 6 & -3 & -4 \end{pmatrix}$ và đa thức $Q(t) = t^2 - t - 2$. Tính $Q(A)$?

Ví dụ.(tự làm) Cho toán tử tuyến tính $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ xác định bởi

$$f(x, y) = (x - y, x + 2y)$$

và đa thức $Q(t) = t^2 - 3t + 4$. Tìm công thức $Q(f)$?

Nhận xét. *Cho $P(t), Q(t) \in K[t]$. Khi đó*

- $\forall f \in End_K(V)$, $P(f)\,Q(f) = Q(f)\,P(f)$.
- $\forall A \in M_n(K)$, $P(A)\,Q(A) = Q(A)\,P(A)$

Định nghĩa. Cho $f \in End_K(V)$ và $Q(t) \in K[t]$. Ta nói $Q(t)$ là ***đa thức triệt tiêu*** toán tử f nếu $\boldsymbol{Q(f) = 0}$.

Mệnh đề. *Giả sử $Q(t)$ là đa thức triệt tiêu toán tử f và $\boldsymbol{\lambda}$ là một trị riêng của f. Khi đó $\boldsymbol{\lambda}$ là nghiệm của $Q(t)$.*

Chứng minh. Gọi v là một vectơ riêng của f ứng với trị riêng $\boldsymbol{\lambda}$. Khi đó

$$f^k(v) = \boldsymbol{\lambda}^k v,\ \forall k \in \mathbb{N}.$$

Giả sử

$$Q(t) = a_m t^m + a_{m-1} t^{m-1} + \cdots + a_1 t + a_0$$

là đa thức triệt tiêu f.

Khi đó ta có

$$
\begin{aligned}
& a_m f^m + a_{m-1} f^{m-1} + \cdots + a_1 f + a_0 \mathrm{Id}_V = 0 \\
\Rightarrow \quad & (a_m f^m + a_{m-1} f^{m-1} + \cdots + a_1 f + a_0 \mathrm{Id}_V)(v) = 0 \\
\Rightarrow \quad & a_m f^m(v) + a_{m-1} f^{m-1}(v) + \cdots + a_1 f(v) + a_0 \mathrm{Id}_V(v) = 0 \\
\Rightarrow \quad & a_m \boldsymbol{\lambda}^m v + a_{m-1} \boldsymbol{\lambda}^{m-1} v + \cdots + a_1 \boldsymbol{\lambda} v + a_0 v = 0 \\
\Rightarrow \quad & (a_m \boldsymbol{\lambda}^m + a_{m-1} \boldsymbol{\lambda}^{m-1} + \cdots + a_1 \boldsymbol{\lambda} + a_0) v = 0.
\end{aligned}
$$

Do $v \neq 0$ nên

$$a_m \boldsymbol{\lambda}^m + a_{m-1} \boldsymbol{\lambda}^{m-1} + \cdots + a_1 \boldsymbol{\lambda} + a_0 = 0$$

hay $Q(\boldsymbol{\lambda}) = 0$. Suy ra $\boldsymbol{\lambda}$ là nghiệm của $Q(t)$. ■

Nhận xét.

1. *Nếu $f^2 - f = 0$ thì các trị riêng của f chỉ có thể là 0 hoặc 1.*
2. *Không phải tất cả các nghiệm của đa thức triệt tiêu của f đều là trị riêng của f.*

Hỏi. Cho toán tử tuyến tính $f \in End_K(V)$. Tồn tại hay không đa thức $0 \neq Q(t) \in K[t]$ mà triệt tiêu f?

Câu trả lời là **có**.

Chứng minh. Nếu $\dim_K(V) = n$ thì

$$End_K(V) \cong M_n(K).$$

Suy ra

$$\dim_K(End_K(V)) = n^2.$$

Do đó các phần tử $\mathrm{Id}_V, f, f^2, \ldots, f^{n^2}$ phụ thuộc tuyến tính trong $End_K(V)$. Suy ra, tồn tại các phần tử $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_{n^2} \in K$, không phải tất cả đều bằng 0, sao cho

$$a_0 IdV + a_1 f + a_2 f^2 + \cdots + a_{n^2} f^{n^2} = 0.$$

Vậy $Q(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \cdots + a_{n^2} t^{n^2}$ là đa thức triệt tiêu f.

Định lý. **[Hamilton-Calley]** *Cho f là toán tử tuyến tính trên không gian vectơ hữu hạn chiều. Khi đó đa thức đặc trưng $P_f(\boldsymbol{\lambda})$ triệt tiêu f, nghĩa là $P_f(f) = 0$.*

Định nghĩa. Cho $f \in End_K(V)$. Giả sử đa thức đặc trưng $P_f(\boldsymbol{\lambda})$ phân rã trên K:

$$P_f(\boldsymbol{\lambda}) = (-1)^n(\boldsymbol{\lambda} - \lambda_1)^{m_1}(\boldsymbol{\lambda} - \lambda_2)^{m_2} \ldots (\boldsymbol{\lambda} - \lambda_p)^{m_p}.$$

Ta gọi

$$\boldsymbol{N(\lambda_i) := Ker(f - \lambda_i \mathrm{Id}_V)^{m_i}}$$

là ***không gian đặc trưng*** ứng với trị riêng λ_i.

Ví dụ. Cho toán tử tuyến tính $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ xác định bởi

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_3, -4x_1 + 3x_2 + 4x_3, 2x_1 - x_2)$$

Tìm không gian đặc trưng tương ứng với các trị riêng của f?.

Giải. Ma trận biểu diễn của f theo cơ sở chính tắc là

$$A = [f]_{\mathcal{B}_0} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -4 & 3 & 4 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

- Đa thức đặc trưng

$$P_f(\lambda) = |A - \boldsymbol{\lambda} I_3| = -(\boldsymbol{\lambda} - 1)^2(\boldsymbol{\lambda} - 2).$$

- Trị riêng

$$P_f(\lambda) = 0 \Leftrightarrow \lambda = 1 \text{ (bội 2)}, \quad \lambda = 2 \text{ (bội 1)}.$$

Vậy f có 2 trị riêng là $\lambda_1 = 1$ (bội 2), $\lambda_2 = 2$ (bội 1).

- Không gian đặc trưng

- Với $\lambda_1 = 1$, không gian đặc trưng

$$\boldsymbol{N(1) = Ker(f - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3})^2}.$$

Nhận xét, $N(1)$ là không gian nghiệm của hệ phương trình

$$(A - I_3)^2 X = 0.$$

Ta có

$$(A - I_3)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -4 & 2 & 4 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{d_3 - d_1} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Chọn $x_2 = t, x_3 = s$, ta tìm được nghiệm tổng quát là

$$(x_1, x_2, x_3) = (\frac{t+s}{2}, t, s), \quad t, s \in \mathbb{R}.$$

Suy ra $N(1)$ có $\dim N(1) = 2$ với cơ sở

$$\mathcal{B}_1 = \{u_1 = (1, 0, 2); u_2 = (1, 2, 0)\}.$$

- Với $\lambda_2 = 2$, không gian đặc trưng

$$\boldsymbol{N(2) = Ker(f - 2\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3})}.$$

Nhận xét, $N(2)$ là không gian nghiệm của hệ phương trình

$$(A - 2I_3)X = 0.$$

Ta có

$$(A - 2I_3) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -4 & 1 & 4 \\ 2 & -1 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow[d_3+2d_1]{d_2-4d_1} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{d_3+d_2} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Chọn $x_3 = t$, ta tìm được nghiệm tổng quát là

$$(x_1, x_2, x_3) = (t, 0, t), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Suy ra $N(2)$ có $\dim N(2) = 1$ với cơ sở

$$\mathcal{B}_2 = \{u_3 = (1, 0, 1)\}.$$

Ví dụ.(tự làm) Cho toán tử $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ xác định bởi

$$f(x_1,x_2,x_3)=(2x_1+x_3,-2x_1+3x_2+3x_3,2x_1-x_2+x_3)$$

Tìm không gian đặc trưng tương ứng với các trị riêng của f?.

Nhận xét.

1. *Không gian riêng luôn nằm trong không gian đặc trưng, nghĩa là*

$$E(\lambda)\subset N(\lambda)$$

với λ *là trị riêng.*

2. *Không gian đặc trưng là bất biến đối với* f*, nghĩa là*

$$f(N(\lambda))\subset N(\lambda).$$

Mệnh đề. *Cho $f \in End_K(V)$. Giả sử đa thức đặc trưng $P_f(\lambda)$ phân rã trên K:*

$$P_f(\boldsymbol{\lambda}) = (-1)^n(\boldsymbol{\lambda} - \lambda_1)^{m_1}(\boldsymbol{\lambda} - \lambda_2)^{m_2}\dots(\boldsymbol{\lambda} - \lambda_p)^{m_p}.$$

Khi đó

$$\boldsymbol{V = N(\lambda_1) \oplus N(\lambda_2) \oplus \cdots \oplus N(\lambda_p).}$$

Định lý. *Toán tử tuyến tính $f \in End_K(V)$ chéo hóa được khi và chỉ khi tồn tại một đa thức phân rã trên K, có toàn nghiệm đơn và triệt tiêu f.*

2.2. Đa thức tối tiểu

Định nghĩa. Đa thức $Q(t) \in K[t]$ được gọi là ***đa thức đơn khởi*** nếu nó có hệ số ở bậc cao nhất bằng 1, nghĩa là $Q(t)$ có dạng

$$Q(t) = t^m + a_{m-1}t^{m-1} + \cdots + a_1 t + a_0.$$

Định nghĩa. Cho $f \in End_K(V)$ là toán tử tuyến tính. Đa thức đơn khởi bậc nhỏ nhất triệt tiêu f được gọi là ***đa thức tối tiểu*** của f và ký hiệu là m_f.

Mệnh đề. *Đa thức $Q(t) \in K[t]$ triệt tiêu f khi và chỉ khi $Q(t)$ chia hết cho $m_f(t)$ trong $K[t]$.*

Chứng minh. ($\Rightarrow$) Giả sử $Q(t)$ triệt tiêu f, nghĩa là $Q(f) = 0$.

Chia $Q(t)$ cho $m_f(t)$

$$\boldsymbol{Q(t) = P(t)\, m_f(t) + R(t)}, \qquad \text{với } \deg(R) < \deg(m_f).$$

Vì $Q(f) = 0$ nên $R(f) = 0$. Do đó $R(t)$ là đa thức triệt tiêu f. Hơn nữa $m_f(t)$ là đa thức tối tiểu và $\deg(R) < \deg(m_f)$ nên $R(t) = 0$. Suy ra

$$Q(t) = P(t)\, m_f(t).$$

($\Leftarrow$) Giả sử $Q(t)$ chia hết cho $m_f(t)$, nghĩa là tồn tại đa thức $P(t)$ sao cho $Q(t) = P(t)\, m_f(t)$. Do đó

$$\boldsymbol{Q(f) = P(f)\, m_f(f) = 0}.$$

Như vậy $Q(t)$ triệt tiêu f.

Hệ quả. *Đa thức tối tiểu là ước của đa thức đặc trưng.*

Chứng minh. Áp dụng Định lý Hamilton-Calley.

Hệ quả. *Đa thức tối tiểu là duy nhất*

Chứng minh. Giả sử m_1 và m_2 là hai đa thức tối tiểu của toán tử tuyến tính f. Khi đó, m_1 chia hết cho m_2 và m_2 cũng chia hết m_1. Hơn nữa m_1 và m_2 đều là các đa thức đơn khởi nên $m_1 = m_2$.

Mệnh đề. *Tập nghiệm của m_f trùng với tập nghiệm của P_f.*

Chứng minh. Vì m_f là ước của P_f nên nghiệm của m_f cũng đều là nghiệm của P_f.

Ta có tập nghiệm của P_f là tập các trị riêng $\boldsymbol{\lambda}$ của f. Vì m_f triệt tiêu f nên $\boldsymbol{\lambda}$ là nghiệm của m_f. Suy ra nghiệm của P_f cũng là nghiệm của m_f.

Ví dụ. Cho $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$. Tìm đa thức tối tiểu của A?

Giải. Đa thức đặc trưng

$$P_A(t) = |A - tI_3| = \begin{vmatrix} -t & 1 & 2 \\ 1 & -t & 2 \\ 1 & 2 & -t \end{vmatrix} = -(t-3)(t+1)(t+2).$$

Suy ra đa thức tối tiểu của A là

$$m_A(t) = (t-3)(t+1)(t+2).$$

Ví dụ. Cho $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$. Tìm đa thức tối tiểu của A?

Giải. Đa thức đặc trưng

$$P_A(t) = |A - tI_3| = \begin{vmatrix} -1-t & 1 & 1 \\ 1 & -1-t & 1 \\ 1 & 1 & -1-t \end{vmatrix} = -(t-1)(t+2)^2.$$

$$P_A(t) = -(t-1)(t+2)^2.$$

Suy ra

$$m_A(t) = \left[\begin{array}{l} (t-1)(t+2); \\ (t-1)(t+2)^2. \end{array}\right.$$

Hơn nữa,

$$(A - I_3)(A + 2I_3) = 0.$$

Vậy

$$m_A(t) = (t-1)(t+2).$$

Ví dụ.(tự làm) Ma trận $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -4 & 3 & 4 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$. Tìm đa thức tối tiểu của A?

Định lý. *Cho toán tử tuyến tính $f \in End_K(V)$. Toán tử f chéo hóa được khi và chỉ khi đa thức tối tiểu m_f của f phân rã trên K và tất cả các nghiệm của m_f đều là nghiệm đơn.*

Ví dụ. Cho ma trận $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$. Khi đó

$$m_A(t) = (t-1)(t+2).$$

Suy ra A chéo hóa được.

Ví dụ. Ma trận $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ có đa thức đặc trưng

$$P_A(t) = -(t-1)^3.$$

Suy ra

$$m_A(t) = \left[\begin{array}{l} t-1; \\ (t-1)^2; \\ (t-1)^3. \end{array}\right.$$

Ta có A chéo hóa được $\Leftrightarrow m_A(t) = t-1 \Leftrightarrow A - I_3 = 0$. Do $A \neq I_3$ nên A không chéo hóa được.

Ví dụ. Cho $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$. Hỏi A có chéo hóa được $\mathbb{R}$ không?

Giải. Ma trận A có đa thức đặc trưng là

$$P_A(t) = -(t-1)(t-2)^2.$$

Do đó

$$m_A(t) = \left[\begin{array}{l} (t-1)(t-2); \\ (t-1)(t-2)^2. \end{array}\right.$$

Ta có A chéo hóa được khi và chỉ khi

$$\begin{aligned} & m_A(t) = (t-1)(t-2) \\ \Leftrightarrow \quad & (A - I_3)(A - 2I_3) = 0. \end{aligned}$$

Bằng việc tính toán, ta có $(A - I_3)(A - 2I_3) \neq 0$. Suy ra A không chéo hóa được.

Ví dụ.(tự làm) Cho $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 4 & -2 & -3 \end{pmatrix}$. Tìm đa thức tối tiểu của A? Hỏi A có chéo hóa được trên $\mathbb{R}$ không?

Ví dụ.(tự làm) Tìm đa thức tối tiểu của $B = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -4 & 3 & 4 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$? Hỏi B có chéo hóa được trên $\mathbb{R}$ không?

Ví dụ.(tự làm) Cho toán tử $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ có ma trận biểu diễn trong cơ sở chính tắc là

$$A = \begin{pmatrix} 7 & -4 & -3 \\ 4 & -3 & 0 \\ 6 & -3 & -4 \end{pmatrix}.$$

Tìm đa thức tối tiểu của f? Từ đó rút ra kết luận gì về tính chéo hóa của f?

2.4 Dạng tam giác khối

Nhắc lại. Cho $f \in End_K(V)$ và W là không gian con của V. W được gọi là ***bất biến*** đối với f nếu $\boldsymbol{f(W) \subset W}$.

Định nghĩa. Cho $f \in End_K(V)$ và W là không gian con của V bất biến đối với f. Khi đó toán tử hạn chế của f lên W (ký hiệu $\boldsymbol{f|_W}$) được xác định

$$\boldsymbol{f|_W(w) = f(w), \forall w \in W.}$$

Giả sử $\mathcal{C}$ là cơ sở của W. Khi đó $[f|_W]_{\mathcal{C}}$ được gọi là ma trận biểu diễn hạn chế của f lên W theo $\mathcal{C}$.

Ví dụ. Cho toán tử tuyến tính $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ xác định bởi

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_3, -4x_1 + 3x_2 + 4x_3, 2x_1 - x_2)$$

và W sinh bởi $\{u_1 = (1, 0, 2); u_2 = (0, 1, -1)\}$. Chứng tỏ W bất biến đối với f và tìm $f|_W$?

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_3, -4x_1 + 3x_2 + 4x_3, 2x_1 - x_2)$$
$$u_1 = (1, 0, 2),\ \ u_2 = (0, 1, -1)$$

Giải. Ta có

- $f(u_1) = f(1, 0, 2) = (3, 4, 2) = 3u_1 + 4u_2$
- $f(u_2) = f(0, 1, -1) = (-1, -1, -1) = -u_1 - u_2$

Như vậy $f(u_1), f(u_2) \in W$. Suy ra W bất biến đối với f.

Với $u \in W$, u có dạng $u = au_1 + bu_2$. Ta có

$$\begin{aligned}
f|_W(u) &= f(u) = f(au_1 + bu_2) \\
&= af(u_1) + bf(u_2) \\
&= a(3u_1 + 4u_2) + b(-u_1 - u_2) \\
&= (3a - b)u_1 + (4a - b)u_2.
\end{aligned}$$

Định lý. *Cho* $V = V_1 \oplus \cdots \oplus V_p$, *trong đó* V_i *là các không gian con bất biến đối với* f. *Khi đó, nếu* $\mathcal{B}_1, \ldots, \mathcal{B}_p$ *tương ứng là các cơ sở của* $V_1, \ldots, V_p$ *thì ma trận của* f *theo cơ sở* $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \cup \ldots \cup \mathcal{B}_p$ *là*

$$[f]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \boxed{M_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \boxed{M_p} \end{pmatrix} =: diag(M_1, \ldots, M_p)$$

trong đó $M_i = [f|_{V_i}]_{\mathcal{B}_i}$ *là ma trận biểu diễn* $f|_{V_i}$ *theo* $\mathcal{B}_i$.

Chứng minh. Giả sử

$$\mathcal{B}_1 = (u_1, \ldots, u_{n_1}), \ldots, \mathcal{B}_p = (v_1, \ldots, v_{n_p}).$$

Khi đó

$$\mathcal{B} = (u_1, \ldots, u_{n_1}, \ldots, v_1, \ldots, v_{n_p}).$$

Tìm $[f(u_i)]_{\mathcal{B}}, \ldots, [f(v_i)]_{\mathcal{B}}$?

Vì $f(V_i) \subset V_i, \forall i$ nên ta có

$$\begin{cases} f(u_1) = a_{11}u_1 + \cdots + a_{1n_1}u_{n_1}; \\ f(u_{n_1}) = a_{n_11}u_1 + \cdots + a_{n_1n_1}u_{n_1}; \end{cases}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\begin{cases} f(v_1) = b_{11}v_1 + \cdots + b_{1n_p}v_{n_p}; \\ f(v_{n_p}) = b_{n_p1}v_1 + \cdots + b_{n_pn_p}v_{n_p}. \end{cases}$$

Suy ra

$$[f(u_i)]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} a_{i1} \\ \vdots \\ a_{in_1} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \ldots, [f(v_i)]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b_{i1} \\ \vdots \\ b_{in_p} \end{pmatrix}.$$

Do đó $[f]_{\mathcal{B}} = diag(M_1, \ldots, M_p)$.

Định lý. *Cho $f \in End_K(V)$. Giả sử đa thức đặc trưng $P_f(\boldsymbol{\lambda})$ phân rã trên K:*

$$P_f(\boldsymbol{\lambda}) = (-1)^n(\boldsymbol{\lambda} - \lambda_1)^{m_1} \ldots (\boldsymbol{\lambda} - \lambda_p)^{m_p}, \; \lambda_i \neq \lambda_j \forall i \neq j.$$

Gọi f_i là toán tử hạn chế của f lên không gian đặc trưng $N(\lambda_i)$. Khi đó f_i tam giác hóa được.

Hơn nữa, nếu $\mathcal{B}_i$ là cơ sở của $N(\lambda_i)$ làm tam giác hóa f_i thì $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \cup \ldots \cup \mathcal{B}_p$ là cơ sở của V và

$$[f]_{\mathcal{B}} = \operatorname{diag}(M_1, \ldots, M_p)$$

trong đó $M_i = [f_i]_{\mathcal{B}_i}$ là ma trận biểu diễn f_i theo $\mathcal{B}_i$.

Chứng minh. Ta cần chứng minh f_i tam giác hóa được và

$$Sp_K(f_i) = (\underbrace{\lambda_i, \ldots, \lambda_i}_{m_i \text{ lần}})$$

Theo định nghĩa,

$$\boldsymbol{N(\lambda_i) = Ker(f - \lambda_i \,\mathrm{Id}_V)^{m_i}}$$

nên

$$(f - \lambda_i \,\mathrm{Id}_V)^{m_i}(u) = 0, \; \forall u \in N(\lambda_i).$$

Suy ra

$$\boldsymbol{(f_i - \lambda_i \,\mathrm{Id}_{N(\lambda_i)})^{m_i} = 0.}$$

Vậy $(t - \lambda_i)^{m_i}$ là đa thức triệt tiêu f_i. Do đó đa thức tối tiểu của f_i có dạng

$$\boldsymbol{m_{f_i}(t) = (t - \lambda_i)^{k_i}, \, k_i \leq m_i.}$$

Suy ra đa thức đặc trưng của f_i có dạng

$$\boldsymbol{P_{f_i}(t) = (t - \lambda_i)^{r_i}, \, r_i \geq k_i}$$

Suy ra f_i tam giác hóa dược trên $N(\lambda_i)$ và $Sp_K(f_i) = (\underbrace{\lambda_i, \ldots, \lambda_i}_{r_i \text{ lần}})$. Bây giờ ta cần chứng minh $\boldsymbol{r_i = m_i}$.

Ta có

$$\boldsymbol{V = N(\lambda_1) \oplus \cdots \oplus N(\lambda_p).}$$

Theo Định lý trước, nếu $\mathcal{B}_i$ là cơ sở của $N(\lambda_i)$ làm tam giác hóa f_i thì $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \cup \cdots \cup \mathcal{B}_p$ là cơ sở của V và

$$[\boldsymbol{f}]_{\boldsymbol{\mathcal{B}}} = \operatorname{diag}(\boldsymbol{M_1, \ldots, M_p})$$

trong đó $M_i = [f_i]_{\mathcal{B}_i}$ là ma trận biểu diễn f_i theo $\mathcal{B}_i$. Ta có

$$\begin{aligned} P_f(\boldsymbol{\lambda}) &= |M_1 - \boldsymbol{\lambda} I| \ldots |M_p - \boldsymbol{\lambda} I| \\ &= P_{f_1}(\boldsymbol{\lambda}) \ldots P_{f_p}(\boldsymbol{\lambda}) \\ &= (-1)^n(\boldsymbol{\lambda} - \lambda_1)^{k_1} \ldots (\boldsymbol{\lambda} - \lambda_p)^{k_p} \end{aligned}$$

Hơn nữa $P_f(\boldsymbol{\lambda}) = (-1)^n(\boldsymbol{\lambda} - \lambda_1)^{m_1} \ldots (\boldsymbol{\lambda} - \lambda_p)^{m_p}$ nên

$$k_i = m_i, \forall i \in \overline{1, p}.$$

Ví dụ. Cho $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ là ma trận biểu diễn toán tử $f \in End_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^3)$ theo cơ sở chính tắc $\mathcal{B}_0$. Tìm một cơ sở $\mathcal{B}$ của $\mathbb{R}^4$ để $[f]_{\mathcal{B}}$ là ma trận dạng tam giác khối?

Giải. Vì $P_f(\boldsymbol{\lambda}) = \boldsymbol{\lambda}^2(\boldsymbol{\lambda} + 1)(\boldsymbol{\lambda} - 3)$nên tồn tại cơ sở

$$\mathcal{B} = (u_1, u_2, u_3, u_4)$$

sao cho

$$[f]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \boldsymbol{a} & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{0} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{3} \end{pmatrix}$$

Nghĩa là $f(u_1) = 0$, $f(u_2) = au_1$, $f(u_3) = -u_3$ và $f(u_4) = 3u_4$.

- Tìm u_1?

Rõ ràng u_1 là vectơ riêng của trị riêng $\lambda = 0$. Ta có $E(0)$ là nghiệm của hệ $AX = 0$.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[d_4 - d_1]{d_3 - d_1} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[d_3 + d_2]{d_4 - d_3} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Chọn $u_1 = (1, 1, 0, 0)$.

- Tìm u_2?

Ta có $f(u_2) = au_1 = a(1, 1, 0, 0) = (a, a, 0, 0)$.

Xét hệ phương trình

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2 & 2 & a \\ 0 & 0 & 1 & -1 & a \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[d_4-d_1]{d_3-d_1} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2 & 2 & a \\ 0 & 0 & 1 & -1 & a \\ 0 & 0 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[d_3+d_2]{d_4-d_3} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2 & 2 & a \\ 0 & 0 & 1 & -1 & a \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Chọn $a = 1$, sau đó ta chọn $u_2 = (0, 1, 1, 0)$.

Tương tự như u_1, ta có u_3 là vectơ riêng của trị riêng $\lambda = -1$ và u_4 là vectơ riêng của trị riêng $\lambda = 3$. Áp dụng tương tự các bước đi tìm u_1, ta chọn $u_3 = (-2, 0, 1, 1)$ và $u_4 = (2, 0, 1, 1)$.

Dễ dàng kiểm tra $\{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ độc lập tuyến tính, suy ra $\mathcal{B} = (u_1, u_2, u_3, u_4)$ là cơ sở của $\mathbb{R}^4$ và la cơ sở cần tìm.

Ví dụ.(tự làm) Cho $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 & -4 \\ -1 & 0 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ là ma trận biểu diễn toán tử $f \in Enk_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^3)$ theo cơ sở chính tắc $\mathcal{B}_0$. Tìm một cơ sở $\mathcal{B}$ của $\mathbb{R}^4$ để $[f]_{\mathcal{B}}$ là ma trận dạng tam giác khối?

Giải. Đa thức đặc trưng $P_A(\lambda) = (\lambda + 1)^2(\lambda - 2)^2$.

Ví dụ.(tự làm) Cho ma trận $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Tìm ma trận khả nghịch P sao cho $P^{-1}AP$ là ma trận tam giác khối.

Giải. Đa thức đặc trưng $P_A(\lambda) = (\lambda - 1)^2(\lambda - 2)^2$.

2.5. Dạng chính tắc Jordan

Định nghĩa. Ta gọi ma trận dạng sau đây là một ***khối Jordan***

$$J(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \lambda \end{pmatrix}$$

Nếu cấp của khối bằng 1 thì ta qui ước $J(\lambda) = (\lambda)$.

Ví dụ.

- Khối Jordan cấp 2: $J(3) = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$.
- Khối Jordan cấp 3: $J(-1) = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Mệnh đề. *Giả sử $J(\lambda)$ là một khối Jordan cấp n. Khi đó ta có:*

1. $P_J(t) = (-1)^n(t-\lambda)^n$.
2. $m_J(t) = (t-\lambda)^n$.
3. $\dim E(\lambda) = 1$.

Định nghĩa. ***Ma trận Jordan*** là một ma trận khối có các khối Jordan trên đường chéo.

Ví dụ.

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Định nghĩa. Nếu A đồng dạng với ma trận Jordan B thì B được gọi là ***dạng chính tắc Jordan*** của A.

Định lý. *Dạng chính tắc Jordan của một ma trận được xác định duy nhất, sai khác hoán vị các khối Jordan của nó.*

Lưu ý. Cho $J(\boldsymbol{\lambda})$ là khối Jordan cấp n. Khi đó

1. $J(\boldsymbol{\lambda}) = \boldsymbol{\lambda} I_n + N_n$ với $N_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix}$.

2. Ta có $(N_n)^n = 0$. Do đó, nếu $k \geq n$ thì

$$J^k(\boldsymbol{\lambda}) = (\boldsymbol{\lambda} I_n + N_n)^k = \sum_{i=0}^{k} C_k^i \boldsymbol{\lambda}^{k-i} (N_n)^i = \sum_{i=0}^{n-1} C_k^i \boldsymbol{\lambda}^{k-i} (N_n)^i.$$

Mệnh đề. *Cho* $f \in End_K(V)$ *sao cho*

$$P_f(\lambda) = (-1)^n(t-\lambda)^n;\ m_f(t) = (t-\lambda)^{\boldsymbol{k}} \text{ và } \dim E(\lambda) = \boldsymbol{r}.$$

Khi đó, tồn tại một cơ sở $\mathcal{B}$ *của* V *sao cho*

$$[f]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \boxed{J_1(\lambda)} & & & 0 \\ & \boxed{J_2(\lambda)} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \boxed{J_r(\lambda)} \end{pmatrix} =: \tilde{\boldsymbol{J}}(\boldsymbol{\lambda})$$

trong đó:

- $J_i(\lambda)$ *là khối Jordan;*
- *Cấp của khối lớn nhất là* $\boldsymbol{k}$*;*
- *Số các khối Jordan là* $\boldsymbol{r}$.

Ta gọi $\tilde{\boldsymbol{J}}(\boldsymbol{\lambda})$ *là ma trận Jordan tương ứng với trị riêng* λ.

Nhắc lại. $A \setminus B = \{x \mid x \in A \text{ nhưng } x \notin B\}$

Ví dụ. Giả sử toán tử tuyến tính $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ có ma trận biểu diễn theo cơ sở chính tắc là

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ -2 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

a) Tìm đa thức tối tiểu của f?

b) Tìm một cơ sở $\mathcal{B}$ của $\mathbb{R}^3$ sao cho $[f]_{\mathcal{B}}$ là ma trận Jordan?

Giải. a) Đa thức đặc trưng

$$P_f(\lambda) = |A - \lambda I_3| = -(\lambda - 2)^3.$$

Suy ra đa thức tối tiểu của f có dạng

$$m_f(t) = (t-2)^k, \ \text{ với } k \le 3.$$

Ta có

$$A - 2I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix} \neq 0; \ (A - 2I_3)^2 = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 \\ 4 & 2 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \neq 0.$$

Như vậy đa thức tối tiểu là $m_f(t) = (t-2)^{\mathbf{3}}$.

b) ▷ Tìm dim$E(2)$.?

$E(2) := Ker(f - 2\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3})$ là không gian nghiệm của hệ phương trình

$$(A - 2I_3)X = 0.$$

Ta có

$$A - 2I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[d_3 - 3d_1]{d_2 + 2d_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Suy ra dim$E(2) = 1$. Theo Định lý trên ta có

- Số các khối Jordan là 1 (bằng dim$E(2)$)
- Cấp của khối lớn nhất là **3** (bằng số bội của $\lambda = 2$ trong $m_f(t)$)

Do đó tồn tại cở sở $\mathcal{B} = (u_1, u_2, u_3)$ sao cho $[f]_{\mathcal{B}}$ có dạng chính tắc Jordan là

$$[f]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{1} & 0 \\ 0 & \mathbf{2} & \mathbf{1} \\ 0 & 0 & \mathbf{2} \end{pmatrix}$$

Suy ra

$$f(u_1) = 2u_1 \Leftrightarrow (f - 2Id_{\mathbb{R}^3})(u_1) = 0 \quad (1)$$
$$f(u_2) = u_1 + 2u_2 \Leftrightarrow (f - 2Id_{\mathbb{R}^3})(u_2) = u_1 \quad (2)$$
$$f(u_3) = u_2 + 2u_3 \Leftrightarrow (f - 2Id_{\mathbb{R}^3})(u_3) = u_2 \quad (3)$$

Từ (1) và (2), ta có

$$(f - 2Id_{\mathbb{R}^3})^2(u_2) = (f - 2Id_{\mathbb{R}^3})(u_1) = 0. \quad (4)$$

Từ (3) và (4), ta có

$$(f - 2Id_{\mathbb{R}^3})^3(u_3) = (f - 2Id_{\mathbb{R}^3})^2(u_2) = 0. \quad (5)$$

Hơn nữa

$$(f - 2Id_{\mathbb{R}^3})^2(u_3) = (f - 2Id_{\mathbb{R}^3})(u_2) = u_1 \neq 0. \quad (6)$$

Từ (5) và (6), ta có

$$u_3 \in Ker(f - 2\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3})^3 \backslash Ker(f - 2\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3})^2.$$

• Tìm $Ker(f - 2\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3})^2$. Xét hệ phương trình $(A - 2I_3)^2 X = 0$. Ta có

$$(A - 2I_3)^2 = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 \\ 4 & 2 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[d_3 - d_1]{d_2 + 2d_1} \begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Suy ra $u \in Ker(f - 2\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3})^2$ có dạng $u = (-\frac{y}{2}, y, z)$.

• Tìm $Ker(f - 2\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3})^3$. Xét hệ phương trình $(A - 2I_3)^3 X = 0$. Ta có $(A - 2I_3)^3 = 0$. Suy ra $Ker(f - 2\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3})^3 = \mathbb{R}^3$.

Vì $u_3 \in Ker(f - 2\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3})^3 \setminus Ker(f - 2\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3})^2$ nên ta chọn $u_3 = (1, 0, 0)$.

Ta có

- $u_2 = (f - 2\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3})(u_3) = (1, -2, 3)$.
- $u_1 = (f - 2\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3})(u_2) = (-2, 4, -2)$.

Suy ra $\mathcal{B} = (u_1, u_2, u_3)$ là cơ sở cần tìm.

Dễ dàng kiểm ra u_1, u_2, u_3 độc lập tuyến tính.

Ví dụ. Cho ma trận $A := \begin{pmatrix} -2 & 2 & 4 \\ 0 & -4 & -4 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Hãy tìm một ma trận Jordan A' đồng dạng với A và chỉ rõ ma trận khả nghịch P thỏa mãn $A' = P^{-1}AP$.

Giải. Gọi f là toán tử tuyến tính có ma trận biểu diễn theo cơ sở chính tắc là A.

$\triangleright$ Đa thức đặc trưng

$$P_f(\boldsymbol{\lambda}) = |A - \boldsymbol{\lambda} I_3| = -(\boldsymbol{\lambda} + 2)^3.$$

Suy ra đa thức tối tiểu của f có dạng

$$m_f(t) = (t+2)^k, \text{ với } k \leq 3.$$

Ta có

$$A + 2I_3 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 0 & -2 & -4 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \neq 0;\ (A + 2I_3)^2 = 0$$

Như vậy đa thức tối tiểu là $m_f(t) = (t + 2)^{\mathbf{2}}$.

▷ Tìm $\dim E(-2)$.

$E(-2) := Ker(f + 2\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3})$ là không gian nghiệm của hệ phương trình

$$(A + 2I_3)X = 0.$$

$$A + 2I_3 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 0 & -2 & -4 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{d_2+2d_1 \\ d_3-d_1}]{\frac{1}{2}d_1} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Suy ra $\dim E(-2) = 2$. Như vậy,

- Số các khối Jordan là 2 (bằng $\dim E(2)$)
- Cấp của khối lớn nhất là **2** (bằng số bội của $\lambda = 2$ của $m_f(t)$)

Do đó tồn tại cở sở $\mathcal{B} = (u_1, u_2, u_3)$ sao cho $[f]_{\mathcal{B}}$ có dạng chính tắc Jordan là

$$[f]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \mathbf{-2} & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{-2} & \mathbf{1} \\ 0 & 0 & \mathbf{-2} \end{pmatrix}$$

Suy ra

$$f(u_1) = -2u_1 \Leftrightarrow (f + 2Id_{\mathbb{R}^3})(u_1) = 0 \qquad (1)$$
$$f(u_2) = -2u_2 \Leftrightarrow (f + 2Id_{\mathbb{R}^3})(u_2) = 0 \qquad (2)$$
$$f(u_3) = u_2 - 2u_3 \Leftrightarrow (f + 2Id_{\mathbb{R}^3})(u_3) = u_2 \qquad (3)$$

Rõ ràng $\{u_1, u_2\}$ là cơ sở của không gian riêng $E(-2)$.

Từ (2) và (3), ta có

$$(f + 2Id_{\mathbb{R}^3})^2(u_3) = (f + 2Id_{\mathbb{R}^3})(u_2) = 0. \qquad (4)$$

Từ (3) và (4), ta suy ra được

$$\boldsymbol{u_3 \in Ker(f + 2\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3})^2 \setminus Ker(f + 2\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3})}.$$

• Tìm $Ker(f + 2\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3})$. Xét hệ phương trình $(A + 2I_3)X = 0$.

$$A + 2I_3 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 0 & -2 & -4 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{d_2+2d_1 \\ d_3-d_1}]{\frac{1}{2}d_1} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Suy ra $u \in Ker(f + 2\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3})$ có dạng $u = (x, -2z, z)$.

• Tìm $Ker(f + 2\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3})^2$. Xét hệ phương trình $(A + 2I_3)^2X = 0$. Ta có $(A + 2I_3)^2 = 0$. Suy ra $Ker(f + 2\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3})^2 = \mathbb{R}^3$.

Vì $u_3 \in Ker(f + 2\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3})^2 \backslash Ker(f + 2\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3})$ nên ta chọn $u_3 = (0, 1, 0)$.

Ta có

$$u_2 = (f + 2\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3})(u_3) = (2, -2, 1).$$

Ta phải chọn $u_1 \in E(-2)$ sao cho $\{u_1, u_2\}$ độc lập tuyến tính. Do đó ta có thể chọn $u_1 = (1, 0, 0)$.

Khi đó $\mathcal{B} = (u_1, u_2, u_3)$ là cơ sở cần tìm.

Lập $P = (u_1^\top \ u_2^\top \ u_3^\top) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Khi đó

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \mathbf{-2} & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{-2} & \mathbf{1} \\ 0 & 0 & \mathbf{-2} \end{pmatrix}.$$

Ví dụ. Giả sử toán tử tuyến tính $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ có ma trận biểu diễn theo cơ sở chính tắc là

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \\ -2 & -4 & -4 & -1 \end{pmatrix}.$$

a) Tìm đa thức tối tiểu của f?

b) Tìm một cơ sở $\mathcal{B}$ của $\mathbb{R}^4$ sao cho $[f]_{\mathcal{B}}$ là ma trận Jordan?

Giải. a) Đa thức đặc trưng $P_f(\boldsymbol{\lambda}) = |A - \boldsymbol{\lambda} I_4| = (\boldsymbol{\lambda} - 1)^4$. Suy ra đa thức tối tiểu của f có dạng

$$m_f(t) = (t-1)^k, \text{ với } k \leq 4.$$

Ta có

$$A - I_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \\ -2 & -4 & -4 & -2 \end{pmatrix}; \ (A - I_4)^2 = 0.$$

Suy ra

$$m_f(t) = (t-1)^{\mathbf{2}}.$$

b) ▷ Tìm $\dim E(1)$?

$E(1) := Ker(f - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^4})$ là không gian nghiệm của hệ phương trình

$$(A - I_4)X = 0.$$

$$A - I_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \\ -2 & -4 & -4 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow[d_4+2d_1]{d_1 \leftrightarrow d_3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Do đó $\dim \boldsymbol{E(1) = 3}$. Suy ra

- Số các khối Jordan là 3 (bằng $\dim E(1)$)
- Cấp của khối lớn nhất là **2** (bằng số bội của $\lambda = 1$ của $m_f(t)$)

Do đó tồn tại cở sở $\mathcal{B} = (u_1, u_2, u_3, u_4)$ sao cho $[f]_{\mathcal{B}}$ có dạng chính tắc Jordan là

$$[f]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} \end{pmatrix}.$$

Suy ra

$$f(u_1) = u_1 \Leftrightarrow (f - Id_{\mathbb{R}^4})(u_1) = 0 \quad (1)$$
$$f(u_2) = u_2 \Leftrightarrow (f - Id_{\mathbb{R}^4})(u_2) = 0 \quad (2)$$
$$f(u_3) = u_3 \Leftrightarrow (f - Id_{\mathbb{R}^4})(u_3) = 0 \quad (3)$$
$$f(u_4) = u_3 + u_4 \Leftrightarrow (f - Id_{\mathbb{R}^4})(u_4) = u_3 \quad (4)$$

Rõ ràng $u_1, u_2, u_3 \in Ker(f - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^4})$. Từ (3) và (4), ta có

$$(f - Id_{\mathbb{R}^4})^2(u_4) = (f - Id_{\mathbb{R}^4})(u_3) = 0. \quad (5)$$

Từ (4) và (5), ta suy ra được

$$\boldsymbol{u_4 \in Ker(f - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^4})^2 \backslash Ker(f - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^4})}.$$

- Tìm $Ker(f - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^4})$

$$A - I_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \\ -2 & -4 & -4 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow[d_4+2d_1]{d_1 \leftrightarrow d_3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Suy ra $u \in Ker(f - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^4})$ có dạng $u = (-2y - 2z - t, y, z, t)$

- Tìm $Ker(f - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^4})^2$ Ta có

$$(A - I_4)^2 = 0.$$

Suy ra $Ker(f - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^4})^2 = \mathbb{R}^4$. Vì

$$u_4 \in Ker(f - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^4})^2 \text{ và } u_4 \notin Ker(f - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^4}).$$

Nên ta có thể chọn $u_4 = (1, 0, 0, 0)$. Ta có

$$u_3 = (f - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^4})(u_4) = (0, 0, 1, -2).$$

Vì $u_1, u_2 \in Ker(f - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^4})$, ta có thể chọn

$$u_1 = (-2, 1, 0, 0),\ u_2 = (-2, 0, 1, 0).$$

Rõ ràng u_1, u_2, u_3, u_4 độc lập tuyến tính. Suy ra $\mathcal{B} = (u_1, u_2, u_3, u_4)$ là cơ sở cần tìm. Hơn nữa

$$P = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix} \text{ và } P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ví dụ.(tự làm) Cho ma trận $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. Hãy tìm một ma trận Jordan A' đồng dạng với A và chỉ rõ ma trận khả nghịch P thỏa mãn $A' = P^{-1}AP$.

Định lý. *Cho $f \in End_K(V)$. Nếu f có các trị riêng khác nhau $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ sao cho*

$$P_f(t) = (-1)^n (t-\lambda_1)^{m_1} \ldots (t-\lambda_p)^{m_p}.$$

thì tồn tại một cơ sở $\mathcal{B}$ của V sao cho

$$[f]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \boxed{\tilde{J}(\lambda_1)} & & & 0 \\ & \boxed{\tilde{J}(\lambda_2)} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \boxed{\tilde{J}(\lambda_p)} \end{pmatrix}$$

Ví dụ. Cho $A = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 4 \\ -2 & -2 & -4 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$. Tìm ma trận khả nghịch P sao cho $P^{-1}AP$ là ma trận Jordan.

Giải. Gọi f là toán tử tuyến tính có ma trận biểu diễn theo cơ sở chính tắc là A.

▷ Đa thức đặc trưng

$$P_f(\boldsymbol{\lambda}) = |A - \boldsymbol{\lambda} I_3| = -(\boldsymbol{\lambda} - 1)(\boldsymbol{\lambda} - 2)^2.$$

▷ Tìm ma trận Jordan tương ứng với $\lambda_1 = 1$.

Ta có $E(1) := Ker(f - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3})$. Xét hệ phương trình $(A - I_3)X = 0$.

$$A - I_3 = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ -2 & -3 & -4 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Như vậy $u \in E(1)$ có dạng $u = (z, -2z, z)$.

Suy ra $\dim E(1) = 1$. Do đó $\tilde{J}(1)$ chỉ có 1 khối Jordan. Hơn nữa cấp của $\tilde{J}(1)$ bằng 1 nên $\tilde{J}(1)$ chỉ có 1 khối Jordan cấp 1. Nghĩa là

$$\tilde{J}(1) = (1). \tag{1}$$

▷ Tìm ma trận Jordan tương ứng với $\lambda_2 = 2$.

Ta có $E(2) = Ker(f - 2\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3})$. Xét hệ phương trình $(A - 2I_3)X = 0$.

$$A - 2I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ -2 & -4 & -4 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Như vậy $u \in E(2)$ có dạng $u = (-z, -z, z)$.

Suy ra $\dim E(2) = 1$. Do đó $\tilde{J}(2)$ chỉ có 1 khối Jordan. Hơn nữa cấp của $\tilde{J}(2)$ bằng 2 nên $\tilde{J}(1)$ chỉ có 1 khối Jordan cấp 2. Nghĩa là

$$\tilde{J}(2) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}. \tag{2}$$

Từ (1), (2) và định lý trên, ta suy ra tồn tại một cơ sở $\mathcal{B} = (u_1, u_2, u_3)$ sao cho

$$[f]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \tilde{J}(1) & 0 \\ 0 & \tilde{J}(2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Suy ra

$$f(u_1) = u_1 \Leftrightarrow (f - Id_{\mathbb{R}^3})(u_1) = 0 \tag{3}$$

$$f(u_2) = 2u_2 \Leftrightarrow (f - 2Id_{\mathbb{R}^3})(u_2) = 0 \tag{4}$$

$$f(u_3) = u_2 + 2u_3 \Leftrightarrow (f - 2Id_{\mathbb{R}^3})(u_3) = u_2 \tag{5}$$

Rõ ràng $u_1 \in Ker(f - Id_{\mathbb{R}^3}) = E(1)$.

Từ (4) và (5), ta có

$$(f - 2Id_{\mathbb{R}^3})^2(u_3) = (f - 2Id_{\mathbb{R}^3})(u_2) = 0. \tag{6}$$

Từ (5) và (6), ta suy ra được

$$u_3 \in Ker(f - 2\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3})^2 \backslash Ker(f - 2\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}).$$

Tìm u_1. Vì $u \in E(1)$ có dạng $u = (z, -2z, z)$ nên ta có thể chọn

$$u_1 = (1, -2, 1).$$

Tìm u_3.

- Tìm $Ker(f-2\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3})^2$. Xét hệ phương trình $(A-2I_3)^2X=0$.

$$(A-2I_3)^2=\begin{pmatrix}-1&-1&0\\2&2&0\\-1&-1&0\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}1&1&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

Suy ra $u\in Ker(f-2\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3})^2$ có dạng $u=(-t,t,s)$.

Vì $u_3\in Ker(f+2\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3})^2\setminus Ker(f+2\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3})$ nên ta chọn $u_3=(-1,1,0)$.

Ta có

$$u_2=(f-2\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3})(u_3)=(4,-6,3).$$

Như vậy $\mathcal{B}=(u_1,u_2,u_3)$ là cơ sở cần tìm. Lập

$$P=(u_1^\top\ u_2^\top\ u_3^\top)=\begin{pmatrix}1&2&-1\\-2&-2&1\\1&1&0\end{pmatrix}.$$

Khi đó

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Ví dụ.(tự làm) Cho ma trận $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. Tìm ma trận khả nghịch P sao cho $P^{-1}AP$ là ma trận Jordan.

Ví dụ.(tự làm) Cho ma trận $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 & 2 \\ -1 & 4 & 4 & -3 \\ 2 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & -2 & 4 \end{pmatrix}$. Tìm ma trận khả nghịch P sao cho $P^{-1}AP$ là ma trận Jordan.

Gợi ý. $P_A(\lambda) = (\lambda - 3)(\lambda - 2)^2$

Ví dụ.(tự làm) Cho ma trận $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 & 2 \\ 0 & 3 & 4 & -4 \\ 1 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$. Tìm ma trận khả nghịch P sao cho $P^{-1}AP$ là ma trận Jordan.

Gợi ý. $P_A(\lambda) = (\lambda - 1)^2(\lambda - 2)^2$

Ví dụ.(tự làm) Cho ma trận $A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -2 & 2 \\ 0 & 3 & 4 & -4 \\ 1 & 0 & -1 & 3 \\ -2 & -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$. Tìm ma trận khả nghịch P sao cho $P^{-1}AP$ là ma trận Jordan.

Gợi ý. $P_A(\lambda) = (\lambda - 1)(\lambda + 1)(\lambda - 2)^2$