Chương 3

KHÔNG GIAN EUCLID

Lê Văn Luyện

lvluyen@hcmus.edu.vn

http://www.math.hcmus.edu.vn/∼luyen/dsa215

fb.com/dsa215

Đại học Khoa Học Tự Nhiên Tp. Hồ Chí Minh

Nội dung

Chương 3. KHÔNG GIAN EUCLID

1. Tích vô hướng và không gian Euclid
2. Sự trực giao.
3. Cơ sở trực giao và cơ sở trực chuẩn. Quá trình trực giao hóa Gram-Schmidt
4. Khoảng cách từ một véctơ đến một không gian con
5. Ma trận biểu diễn của tích vô hướng
6. Toán tử đối xứng
7. Toán tử trực giao

3.1. Tích vô hướng và không gian Euclid

Định nghĩa. Cho V là không gian vectơ. Ánh xạ

$$\begin{aligned} \langle , \rangle \ : \ V \times V &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (u,v) &\longmapsto \langle u,v\rangle \end{aligned}$$

được gọi là một ***tích vô hướng*** trong V nếu $\forall\, u,v,w \in V, \forall\, \alpha,\beta \in \mathbb{R}$, thỏa các tính chất sau:

(i) $\langle \alpha u + \beta v, w\rangle = \alpha\langle u,w\rangle + \beta\langle v,w\rangle$;

(ii) $\langle u, \alpha v + \beta w\rangle = \alpha\langle u,v\rangle + \beta\langle u,w\rangle$;

(iii) $\langle u,v\rangle = \langle v,u\rangle$;

(iv) $\langle u,u\rangle \geq 0$, trong đó $\langle u,u\rangle = 0 \Leftrightarrow u = 0$.

Định nghĩa. Ta gọi một không gian vectơ hữu hạn chiều với tích vô hướng là một ***không gian Euclid***.

Ví dụ. Cho không gian vectơ $V = \mathbb{R}^n$, với $u = (x_1, \dots, x_n)$ và $v = (y_1, \dots, y_n)$ ta định nghĩa

$$\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle := \boldsymbol{x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n}.$$

Khi đó V là không gian Euclid. Tích vô hướng này được gọi là ***tích vô hướng chính tắc*** trong $\mathbb{R}^n$.

Ví dụ. Với $u = (x_1, x_2), v = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$, ta định nghĩa

$$\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle := x_1 y_1 + 2x_1 y_2 + 2x_2 y_1 + 5x_2 y_2.$$

Khi đó

a) Chứng tỏ $\langle , \rangle$ là một tích vô hướng trong $\mathbb{R}^2$.

b) Tính $\langle (2, 3), (-1, 2) \rangle$?

Đáp án. *b*) $\langle (2, 3), (-1, 2) \rangle = 30.$

Ví dụ. Xét không gian vectơ $M_2(\mathbb{R})$ gồm các ma trận vuông cấp 2 trên trường số thực $\mathbb{R}$. Với $A, B \in M_2(\mathbb{R})$, ta định nghĩa

$$\langle \boldsymbol{A}, \boldsymbol{B} \rangle := tr(A^\top B).$$

Chứng tỏ $M_2(\mathbb{R})$ là không gian Euclid với tích vô hướng $\langle , \rangle$.

Ví dụ. Với các đa thức $P, Q \in \mathbb{R}[x]$, ta định nghĩa

$$\langle \boldsymbol{P}, \boldsymbol{Q} \rangle = \int_0^1 P(x)Q(x)dx.$$

a) Chứng tỏ $\langle , \rangle$ là một tích vô hướng trong $\mathbb{R}[x]$.

b) Tính tích vô hướng của $2x^2 + x$ và $x + 1$.

Đáp án. $b) \int_0^1 (2x^2 + x)(x + 1)dx = 2.$

Ví dụ. Xét không gian vectơ $(C[a,b],\mathbb{R})$ gồm các hàm thực liên tục trên $[a,b]$. Khi đó $(C[a,b],\mathbb{R})$ là một không gian Euclid với tích vô hướng

$$\langle f,g\rangle = \int_a^b f(x)g(x)dx.$$

Nhận xét. *Cho W là không gian vectơ con của V. Giả sử trong V có tích vô hướng $\langle,\rangle_V$. Với mọi $u,v\in W$, định nghĩa*

$$\langle u,v\rangle_W := \langle u,v\rangle_V.$$

Khi đó $\langle,\rangle_W$ là một tích vô hướng trong W.

Định nghĩa. Cho V là không gian Euclid và $u \in V$. Ta nói

1. ***Chuẩn*** hay ***độ dài*** của vectơ u, ký hiệu $\|u\|$, được định nghĩa

$$\|u\| := \sqrt{\langle u, u\rangle};$$

2. u là ***vectơ đơn vị*** nếu $\|u\| = 1$.

Tính chất. *Cho* $u \in V$ *và* $\lambda \in \mathbb{R}$. *Khi đó*

(i) $\langle u, u\rangle = \|u\|^2$.

(ii) $\|u\| = 0 \Leftrightarrow u = 0$.

(iii) $\|\lambda u\| = |\lambda|\|u\|$.

Ví dụ. Cho $V = \mathbb{R}^3$ với tích vô hướng chính tắc và $u = (1, -2, 3)$. Tìm $\|u\|$?

Đáp án. $\|u\| = \sqrt{14}$.

Bổ đề. [**Bất đẳng Cauchy-Schwarz**] *Với mọi $u, v \in V$, ta có*

$$\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle^2 \leq \|\boldsymbol{u}\|^2 \|\boldsymbol{v}\|^2.$$

Hơn nữa, dấu $=$ xảy ra khi và chỉ khi u và v phụ thuộc tuyến tính.

Chứng minh. Nếu $\|u\| = 0 = \|v\|$ thì $u = 0 = v$. Suy ra bất đẳng thức đúng.

Giả sử $\|v\| \neq 0$ và $\lambda \in \mathbb{R}$ là một số thực bất kỳ. Ta có

$$\begin{aligned} & \|u + \lambda v\|^2 \geq 0 \\ \Leftrightarrow\ & \|u\|^2 + \|\lambda v\|^2 + 2\langle u, \lambda v\rangle \geq 0 \\ \Leftrightarrow\ & \lambda^2 \|v\|^2 + 2\lambda \langle u, v\rangle + \|u\|^2 \geq 0. \end{aligned}$$

Vế trái của bất đẳng thức sau cùng là một tam thức bậc hai theo λ. Để tam thức này luôn nhận giá trị ≥ 0 đối với mọi $\lambda \in \mathbb{R}$ thì điều kiện cần và đủ là biệt số $\Delta' \leq 0$, nghĩa là $\langle u, v\rangle^2 - \|u\|^2\|v\|^2 \leq 0$

$$\langle u, v\rangle^2 - \|u\|^2\|v\|^2 \leq 0$$

hay

$$\langle u, v\rangle^2 \leq \|u\|^2\|v\|.$$

▷ Giả sử dấu $=$ xảy ra, nghĩa là $\langle u, v\rangle^2 = \|u\|^2\|v\|^2$. Khi đó tam thức bậc hai nói trên có nghiệm kép, nghĩa là tồn tại $\lambda \in \mathbb{R}$ sao cho

$$\lambda^2\|v\|^2 + 2\lambda\langle u, v\rangle + \|u\|^2 = 0$$

hay $\|u + \lambda v\|^2 = 0$. Suy ra $u + \lambda v = 0$ hay u và v là các vectơ phụ thuộc tuyến tính. ■

Mệnh đề. [**Bất đẳng thức tam giác**] *Với mọi $u, v \in V$, ta có*

$$\|\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}\| \leq \|\boldsymbol{u}\| + \|\boldsymbol{v}\|.$$

Hơn nữa, khi $u \neq 0$, dấu $=$ xảy ra khi và chỉ khi tồn tại $\lambda \geq 0$ sao cho $v = \lambda u$.

Chứng minh. Ta có

$$\begin{aligned}||u+v||^2 &= \|u\|^2+\|v\|^2+2\langle u,v\rangle\\ &\leq \|u\|^2+\|v\|^2+2|\langle u,v\rangle|\\ &\leq \|u\|^2+\|v\|^2+2\|u\|\|v\| \quad \text{(do bất đẳng thức C-S)}\\ &= (\|u\|+\|v\|)^2.\end{aligned}$$

Suy ra $||u+v|| \leq \|u\|+\|v\|$.

▷ Nếu $v=\lambda u$, với $\lambda \geq 0$ thì ta có

$$\begin{aligned}\|u+v\| &= \|u+\lambda u\| = \|(1+\lambda)u\|\\ &= (1+\lambda)\|u\| = \|u\|+\lambda\|u\|\\ &= \|u\|+\|\lambda u\| = \|u\|+\|v\|.\end{aligned}$$

Ngược lại, giả sử

$$||u+v|| = \|u\| + \|v\|. \tag{1}$$

Ta có

$$\|u+v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2 + 2\langle u, v\rangle$$

Hơn nữa, từ (1) ta có

$$\|u+v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2 + 2\|u\|\|v\|.$$

Suy ra

$$\langle u, v\rangle = \|u\|\|v\| \Rightarrow \langle u, v\rangle^2 = \|u\|^2\|v\|^2.$$

Theo Bổ đề trên, ta có u và v phụ thuộc tuyến tính.

Giả sử $v = \lambda u$. Vì $\langle u, v\rangle = \|u\|\|v\|$ nên $\langle u, v\rangle \geq 0$. Thay $v = \lambda u$ ta có $\langle u, v\rangle = \langle u, \lambda u\rangle = \lambda\langle u, u\rangle = \lambda\|u\|^2 \geq 0$. Suy ra $\lambda \geq 0$. ■

Nhận xét. *Giả sử u và v là hai vectơ khác không của V. Áp dụng bất đẳng thức C-S, ta có*

$$\frac{|\langle u, v\rangle|}{\|u\|\|v\|} \leq 1.$$

Định nghĩa. Cho V là không gian Euclide và $u, v \in V$. ***Góc giữa hai vectơ*** u và v là $\theta \in [0, \pi]$ thỏa

$$\cos\theta = \frac{\langle u, v\rangle}{\|u\|\|v\|}.$$

Lưu ý. Góc giữa vectơ **0** và một vectơ u bất kỳ được xem là tùy ý.

Ví dụ. Cho $V = (C[0, \frac{\pi}{2}], \mathbb{R})$ với tích vô hướng

$$\langle f, g\rangle = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)g(x)dx.$$

Tìm góc giữa $\sin x$ và $\cos x$?

Giải. $\langle \sin x, \cos x\rangle = \frac{1}{2}$; $\|\sin x\| = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$; $\|\cos x\| = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$. Do đó

$$\cos\theta = \frac{\langle \sin x, \cos x\rangle}{\|\sin x\|\|\cos x\|} = \frac{2}{\pi}.$$ Suy ra $\theta = \arccos\left(\frac{2}{\pi}\right)$.

3.2. Sự trực giao

Định nghĩa. Cho V là một không gian Euclid.

a) Với $u, v \in V$, ta nói u ***trực giao*** với v nếu $\langle u, v\rangle = 0$, ký hiệu $\boldsymbol{u} \perp \boldsymbol{v}$.

b) Nếu $\emptyset \neq A \subseteq V$ thì ta đặt

$$\boldsymbol{A^{\perp} := \{u \in V \mid \langle u, a\rangle = 0, \forall a \in A\}}.$$

Khi đó $\boldsymbol{A^{\perp}}$ là một không gian con của V và ta gọi $A^{\perp}$ là ***không gian trực giao*** với A.

Nhận xét.

(i) $\{\mathbf{0}\}^{\perp} = V$ *và* $V^{\perp} = \{\mathbf{0}\}$.

(ii) $A^{\perp} = \langle A\rangle^{\perp}$.

(iii) $A^{\perp} \cap A \subset \{\mathbf{0}\}$.

Nhận xét. *Để tìm không gian trực giao với không gian vectơ sinh bởi một tập hợp thì ta chỉ cần tìm không gian trực giao với tập hợp đó.*

Ví dụ. Cho $V = \mathbb{R}^4$ với tích vô hướng chính tắc và W sinh bởi

$$\{u_1 = (1,2,1,1), u_2 = (2,3,-2,1), u_3 = (4,7,0,3)\}.$$

Tìm $W^\perp$?

Giải. Giả sử $u = (x,y,z,t) \in W^\perp$. Ta có

$$\left\{\begin{array}{l} \langle u, u_1\rangle = 0 \\ \langle u, u_2\rangle = 0 \\ \langle u, u_3\rangle = 0. \end{array}\right. \quad \text{Suy ra} \left\{\begin{array}{rcrcrcrcl} x & + & 2y & + & z & + & t & = & 0; \\ 2x & + & 3y & - & 2z & + & t & = & 0; \\ 4x & + & 7y & & & + & 3t & = & 0. \end{array}\right.$$

Giải hệ ta được $u = (7a+b, -4a-b, a, b)$ với $a, b \in \mathbb{R}$. Suy ra $W^\perp$ có cơ sở là

$$\{(7,-4,1,0), (1,-1,0,1)\}.$$

Ví dụ. Trong không gian $\mathbb{R}^4$ cho tích vô hướng $\langle , \rangle$ được định nghĩa như sau:

với $u = (x_1, x_2, x_3, x_4); v = (y_1, y_2, y_3, y_4)$;

$$\langle u, v\rangle = x_1y_1 + 2x_2y_2 + x_3y_3 + 2x_4y_4.$$

Đặt W là không gian sinh bởi các vectơ:

$$u_1 = (1, 1, 3, 1);\ u_2 := (5, 1, -1, -3);\ u_3 = (-1, 1, 5, 3).$$

Tìm một cơ sở cho không gian con $W^\perp$?

Hướng dẫn. Giả sử $u = (x, y, z, t) \in W^\perp$. Ta có

$$\begin{cases} \langle u, u_1\rangle = 0 \\ \langle u, u_2\rangle = 0 \\ \langle u, u_3\rangle = 0. \end{cases} \quad \text{Suy ra} \begin{cases} x + 2y + 3z + 2t = 0; \\ 5x + 2y - z - 6t = 0; \\ -x + 2y + 5z + 6t = 0. \end{cases}$$

Giải hệ ta được $u = (a + 2b, -2a - 2b, a, b)$ với $a, b \in \mathbb{R}$. Suy ra cơ sở của $W^\perp$ là

$$\{(1, -2, 1, 0), (2, -2, 0, 1)\}.$$

Hỏi. Cho W là không gian vectơ con của không gian Euclide V.

$$\boldsymbol{V = W \oplus W^{\perp}?}$$

Mệnh đề. *Nếu W là không gian con của không gian Euclid V thì*

$$\dim \boldsymbol{V} = \dim \boldsymbol{W} + \dim \boldsymbol{W}^{\perp}.$$

Hệ quả. *Nếu W là không gian con của không gian Euclid V thì*

(i) $V = W \oplus W^{\perp}$.

(ii) *Đặt* $W^{\perp\perp} := (W^{\perp})^{\perp}$, *ta có* $W^{\perp\perp} = W$.

Chứng minh. (i) Ta có $W \cap W^{\perp} = \{\mathbf{0}\}$ và từ mệnh đề trên, suy ra

$$V = W \oplus W^{\perp}.$$

(ii) Giả sử $u \in W$. Với mọi $v \in W^{\perp}$, ta có $\langle u, v\rangle = 0$. Suy ra $u \in W^{\perp\perp}$. Do đó $\boldsymbol{W \subset W^{\perp\perp}}$.

Áp dụng hệ quả trên ta có

$$\dim V = \dim W^{\perp} + \dim W^{\perp\perp}.$$

Suy ra

$$\begin{aligned} \dim W^{\perp\perp} &= \dim V - \dim W^{\perp} \\ &= \dim V - (\dim V - \dim W) \\ &= \dim W. \end{aligned}$$

Vì $W \subset W^{\perp\perp}$ và $\dim W = \dim W^{\perp\perp}$ nên $W = W^{\perp\perp}$.

3.3. Cơ sở trực giao và cơ sở trực chuẩn

Định nghĩa. Cho V là không gian Euclid n chiều và $\mathcal{B} = \{u_1, \ldots, u_n\}$ là một cơ sở của V.

- Ta nói $\mathcal{B}$ là ***cơ sở trực giao*** nếu
$$\langle u_i, u_j \rangle = 0, \forall i \neq j.$$
- Ta nói $\mathcal{B}$ là ***cơ sở trực chuẩn*** nếu $\mathcal{B}$ là cơ sở trực giao và
$$||u_i|| = 1, \forall i = \overline{1, n}.$$

Hiển nhiên nếu $\{u_1, \ldots, u_n\}$ là cơ sở trực giao thì $\left\{\dfrac{u_1}{||u_1||}, \ldots, \dfrac{u_n}{||u_n||}\right\}$ là cơ sở trực chuẩn.

Định lý. *Trong một không gian Euclid bất kỳ luôn tồn tại các cơ sở trực giao.*

Chứng minh. Ta sử dụng qui nạp theo số chiều n của V.

▷ Nếu $n = 1$ hiển nhiên.

▷ Nếu $n \geq 2$. Giả sử điều khẳng định là đúng cho những không gian có chiều nhỏ hơn n. Xét một vectơ $0 \neq u \in V$, khi đó

$$V = \langle u\rangle \oplus \langle u\rangle^{\perp} \text{ và } \dim\langle u\rangle^{\perp} = n - 1.$$

Theo giả thiết qui nạp trong $\langle u\rangle^{\perp}$ ta tìm được cơ sở trực giao, chẳng hạn $\{u_1, \ldots, u_{n-1}\}$. Khi đó

$$\{u, u_1, \ldots, u_{n-1}\}$$

là một cơ sở trực giao của V. ■

Nhận xét. *Nếu $\mathcal{B} = \{u_1, \ldots, u_n\}$ là cơ sở trực chuẩn của V. Với mọi cặp vectơ $u = \sum_{i=1}^{n} x_i u_i$ và $v = \sum_{j=1}^{n} y_i u_i$ của V, ta có*

$$\langle u, v\rangle = \langle \sum_{i=1}^{n} x_i u_i, \sum_{i=j}^{n} y_j u_j\rangle = \sum_{i,j=1}^{n} x_i y_j \langle u_i, u_j\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i.$$

Định lý. *Cho $\mathcal{B} = (u_1, \ldots, u_n)$ là một cơ sở của không gian Euclid V. Khi đó, $\mathcal{B}$ là cơ sở trực chuẩn nếu và chỉ nếu đối với mọi vectơ u, v của V ta có*

$$\langle u, v\rangle = x_1y_1 + \cdots + x_ny_n,$$

trong đó $[u]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ *và* $[v]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ *là tọa độ của các vectơ u, v trong cơ sở $\mathcal{B}$.*

Chứng minh. ($\Rightarrow$) Giả sử $\mathcal{B} = (u_1, \ldots, u_n)$ là cơ sở trực chuẩn và $u, v \in V$. Ta có

$$\langle u, v\rangle = \langle\sum_{i=1}^{n} x_iu_i, \sum_{j=1}^{n} y_ju_j\rangle = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_iy_j\langle u_i, u_j\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_iy_i.$$

($\Leftarrow$) Hiển nhiên, vì ta tính được $\langle u_i, u_j\rangle = \begin{cases} 1 & \text{nếu } i = j \\ 0 & \text{nếu } i \neq j \end{cases}$. ■

Mệnh đề. *Cho $\mathcal{B} = \{u_1, \ldots, u_n\}$ là một cơ sở trực chuẩn của không gian Euclid V và $u \in V$. Khi đó*

$$\boldsymbol{u = \langle u, u_1\rangle u_1 + \cdots + \langle u, u_n\rangle u_n.}$$

Chứng minh. Giả sử $u = x_1u_1 + x_2u_2 + \ldots + x_nu_n$. Khi đó

$$\langle u, u_i\rangle = x_1\langle u_1, u_i\rangle + x_2\langle u_2, u_i\rangle + \ldots + x_n\langle u_n, u_i\rangle.$$

Vì $\mathcal{B}$ là cơ sở trực chuẩn nên

$$\langle u_i, u_j\rangle = \begin{cases} 1 & \text{nếu } i = j \\ 0 & \text{nếu } i \neq j \end{cases}$$

Suy ra

$$\langle u, u_i\rangle = x_i.$$

Ví dụ. Cho cơ sở trực chuẩn của không gian Euclid $\mathbb{R}^3$ với tích vô hướng chính tắc là

$$\mathcal{B} = \left(u_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{-1}{\sqrt{6}}, \frac{-2}{\sqrt{6}}\right); u_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right); u_3 = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{-1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right).$$

Hãy tìm tọa độ vectơ $u = (3, -2, 1)$ theo cơ sở $\mathcal{B}$.

Giải. Giả sử $[u]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$. Khi đó

$$x_1 = \langle u, u_1 \rangle = \frac{3}{\sqrt{6}};\ x_1 = \langle u, u_2 \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}};\ x_1 = \langle u, u_3 \rangle = \frac{6}{\sqrt{3}}.$$

Định nghĩa. Cho W là không gian con của không gian Euclid V. Khi đó với mỗi $u \in V$ đều viết được một cách duy nhất dưới dạng

$$\boldsymbol{u = u_0 + v},\ \text{ trong đó } u_0 \in W \text{ và } v \in W^{\perp}.$$

Ta gọi u_0 là ***hình chiếu trực giao*** của u lên W và ký hiệu là $\boldsymbol{u_0 = pr_W(u)}$.

Định lý. *Cho V là không gian Euclid và W là một không gian con của V. Giả sử $\{u_1, \ldots, u_m\}$ là một cơ sở trực chuẩn của W và $u \in V$. Khi đó*

$$\boldsymbol{pr_W(u) = \langle u, u_1 \rangle u_1 + \cdots + \langle u, u_m \rangle u_m}.$$

Chứng minh. Gọi $\{u_{m+1}, \ldots, u_n\}$ là một cơ sở trực chuẩn của không gian $W^{\perp}$. Khi đó, $\{u_1, \ldots, u_m, u_{m+1}, \ldots, u_n\}$ là một cơ sở trực chuẩn của V. Ta có

$$u = \langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{u_1} \rangle \boldsymbol{u_1} + \cdots + \langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{u_m} \rangle \boldsymbol{u_m} + \langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{u_{m+1}} \rangle \boldsymbol{u_{m+1}} + \cdots + \langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{u_n} \rangle \boldsymbol{u_n}$$

Lưu ý rằng

$$\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{u_1} \rangle \boldsymbol{u_1} + \cdots + \langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{u_m} \rangle \boldsymbol{u_m} \in W$$

và

$$\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{u_{m+1}} \rangle \boldsymbol{u_{m+1}} + \cdots + \langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{u_n} \rangle \boldsymbol{u_n} \in W^{\perp}.$$

Suy ra

$$\boldsymbol{pr_W(u)} = \langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{u_1} \rangle \boldsymbol{u_1} + \cdots + \langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{u_m} \rangle \boldsymbol{u_m}. \quad \blacksquare$$

Quá trình trực giao hóa Gram- Schmidt

Định lý. *Cho* $\{v_1, \ldots, v_m\}$ *là một họ các vectơ độc lập tuyến tính của không gian Euclid* V *và* $W = \langle v_1, \ldots, v_m \rangle$. *Khi đó, từ các vectơ* $v_1, \ldots, v_m$ *ta có thể xây dựng một cơ sở trực chuẩn cho* W.

Nói riêng, từ một cơ sở bất kỳ của V *ta có thể xây dựng được một cơ sở trực chuẩn của* V.

Chứng minh. Ta chỉ cần xây dựng một cơ sở trực giao của W.

▷ Đặt $u_1 := v_1$

$u_2 := v_2 + \lambda_1 u_1$, với $\lambda_1 \in \mathbb{R}$ sao cho $u_2 \perp u_1$.

Với điều kiện này ta có

$$0 = \langle u_2, u_1 \rangle = \langle v_2 + \lambda_1 u_1, u_1 \rangle = \langle v_2, u_1 \rangle + \lambda_1 \langle u_1, u_1 \rangle.$$

Do $u_1 \neq 0$ nên từ đó suy ra

$$\lambda_1 = -\frac{\langle v_2, u_1 \rangle}{||u_1||^2}.$$

▷ Tiếp theo, tìm u_3 dưới dạng

$u_3 = v_3 + \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2,$ với $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ sao cho $u_3 \perp u_1$ và $u_3 \perp u_2$.

Tìm λ_1 như sau:

$$\begin{aligned} 0 = \langle u_3, u_1\rangle &= \langle v_3 + \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2, u_1\rangle \\ &= \langle v_3, u_1\rangle + \lambda_1 ||u_1||^2 \text{ (do } \langle u_2, u_1\rangle = 0). \end{aligned}$$

Từ đó suy ra $\lambda_1 = -\dfrac{\langle v_3, u_1\rangle}{||u_1||^2}$. Tương tự, nhận được $\lambda_2 = -\dfrac{\langle v_3, u_2\rangle}{||u_2||^2}$.

▷ Giả sử đã tìm được các vectơ trực giao $u_1, \ldots, u_{m-1}$. Ta sẽ tìm vectơ u_m dưới dạng sau

$$\boldsymbol{u_m = v_m + \lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_{m-1} u_{m-1}}.$$

Từ điều kiện $u_m \perp u_i$ ta tìm được $\lambda_i = -\dfrac{\langle v_m, u_i\rangle}{||u_i||^2}$. Như vậy ta đã xây dựng được một họ các vectơ trực giao $\{u_1, \ldots, u_m\}$.

Bây giờ ta chỉ cần chứng minh

$$\langle \boldsymbol{u_1, \ldots, u_m} \rangle = \langle \boldsymbol{v_1, \ldots, v_m} \rangle.$$

Ta có $\langle u_1 \rangle = \langle v_1 \rangle$. Giả sử $1 < i \le p - 1$ và

$$\langle u_1, \ldots, u_i \rangle = \langle v_1, \ldots, v_i \rangle.$$

Khi đó mỗi một vectơ u_k $(1 \le k \le i)$ đều là tổ hợp tuyến tính của các vectơ $v_1, \ldots, v_i$. Theo cách xây dựng thì u_{i+1} là tổ hợp tuyến tính của các vectơ $v_{i+1}, u_1, \ldots, u_i$, do đó u_{i+1} cũng là tổ hợp tuyến tính của các vectơ $v_{i+1}, v_1, \ldots, v_i$. Ta đã chứng minh

$$\langle u_1, \ldots, u_{i+1} \rangle \subseteq \langle v_1, \ldots, v_{i+1} \rangle.$$

Hoàn toàn tương tự ta cũng có

$$\langle v_1, \ldots, v_{i+1} \rangle \subseteq \langle u_1, \ldots, u_{i+1} \rangle.$$ ■

Ví dụ. Trong không gian Euclid $\mathbb{R}^4$ với tích vô hướng chính tắc cho vectơ $u = (1, 2, 0, 3)$ và không gian con W được sinh ra bởi các vectơ

$$v_1 = (1, 1, 0, 0), v_2 = (1, 0, -1, 1), v_3 = (0, 1, 1, 1).$$

a) Tìm một cơ sở trực chuẩn của W?

b) Tìm hình chiếu trực giao của u lên W?

Giải. a) Dễ dàng chứng minh $\{v_1, v_2, v_3\}$ một cơ sở của W.

▷ Đặt $u_1 := v_1$.

▷ Tìm u_2. Ta có $u_2 := v_2 + \lambda_1 u_1$, với $\lambda_1 = -\dfrac{\langle v_2, u_1\rangle}{||u_1||^2} = -\dfrac{1}{2}$. Từ đó

$$u_2 = (1, 0, -1, 1) + (-\frac{1}{2})(1, 1, 0, 0) = \frac{1}{2}(1, -1, -2, 2).$$

Nhận xét rằng nếu ta thay u_2 bởi $u_2' = \alpha u_2$, $(\alpha \neq 0)$ thì các vectơ u_1 và u_2' vẫn trực giao với nhau. Do đó ta có thể lấy $u_2 = (1, -1, -2, 2)$.

▷ Tìm u_3. Ta có $u_3 = v_3 + \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2$, với

$$\lambda_1 = -\frac{\langle v_3, u_1\rangle}{||u_1||^2} = -\frac{1}{2} \text{ và } \lambda_2 = -\frac{\langle v_3, u_2\rangle}{||u_2||^2} = -\frac{1}{10}.$$

Do đó

$$u_3 = \frac{2}{5}(-1, 1, 2, 3).$$

Tuy nhiên ta có thể lấy $u_3 = (-1, 1, 2, 3)$. Trực chuẩn hóa cơ sở (u_1, u_2, u_3) ta nhận được cơ sở trực chuẩn sau của W như sau

$$\left(u_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1, 0, 0),\ e_2 = \frac{1}{\sqrt{10}}(1, -1, -2, 2),\ e_3 = \frac{1}{\sqrt{15}}(-1, 1, 2, 3)\right).$$

b) Ta có

- $\langle u, e_1\rangle e_1 = (\frac{3}{2}, \frac{3}{2}, 0, 0)$;
- $\langle u, e_2\rangle e_2 = (\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -1, 1)$;
- $\langle u, e_3\rangle e_3 = (-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{4}{3}, 2)$.

Vậy hình chiếu trực giao của u lên W là

$$\begin{aligned} pr_W(u) &= \langle u, e_1\rangle e_1 + \langle u, e_2\rangle e_2 + \langle u, e_3\rangle e_3 \\ &= \left(\frac{4}{3}, \frac{5}{3}, \frac{1}{3}, 3\right). \end{aligned}$$

Ví dụ.(tự làm) Trong không gian Euclid $\mathbb{R}^4$ với tích vô hướng chính tắc, cho W là không gian vectơ sinh bởi

$$\{(1,0,1,1),(0,1,1,1),(1,1,1,1)\}.$$

a) Tìm một cơ sở trực chuẩn của W?

b) Cho $u = (1,2,-1,2)$. Tìm $pr_W(u)$?

Ví dụ. Cho không gian Euclid $\mathbb{R}^4$ với tích vô hướng chính tắc và W là không gian con của $\mathbb{R}^4$ có cơ sở là

$$\mathcal{B} = \{u_1 = (2, -1, 1, 0),\ u_2 = (-2, 1, 0, 1)\}.$$

Tìm hình chiếu của vectơ $u = (1, 1, 0, 1)$ lên W.

Giải. Ta viết u dưới dạng $u = pr_W(u) + v$ trong đó

$$pr_W(u) = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 \in W \text{ và } v \in W^\perp.$$

Khi đó

$$u = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + v.$$

Vì $v \in W^\perp$ nên $\langle v, u_1\rangle = 0$, $\langle v, u_2\rangle = 0$. Do đó, ta có

$$\begin{cases} \langle u, u_1\rangle = \alpha_1\langle u_1, u_1\rangle + \alpha_2\langle u_2, u_1\rangle \\ \langle u, u_2\rangle = \alpha_1\langle u_1, u_2\rangle + \alpha_2\langle u_2, u_2\rangle \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6\alpha_1 - 5\alpha_2 = 1 \\ -5\alpha_1 + 6\alpha_2 = 0 \end{cases}$$

Ta giải được $\alpha_1 = \dfrac{6}{11}, \alpha_2 = \dfrac{5}{11}$. Suy ra

$$pr_W(u) = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 = \left(\frac{2}{11}, \frac{-1}{11}, \frac{6}{11}, \frac{5}{11}\right).$$

3.4. Khoảng cách trong không gian Euclid

Lưu ý. Trong phần này,

- V được ký hiệu là không gian Euclid với tích vô hướng $\langle , \rangle$.
- $W \leq V$ được ký hiệu là W là không gian vectơ con của V

Định nghĩa. Cho u, $v \in V$. Khi đó ***khoảng cách giữa hai vectơ*** u và v được định nghĩa là

$$\boldsymbol{d(u,v) := ||u-v||}.$$

Bổ đề. *Cho u, v, $w \in V$. Ta có các khẳng định sau:*

(i) $d(u,v) = 0 \Leftrightarrow u = v$.

(ii) $d(u,v) = d(v,u)$.

(iii) $d(u,w) \leq d(u,v) + d(v,w)$.

Định nghĩa. Cho $W \leq V$ và $u \in V$. ***Khoảng cách*** giữa u và W (ký hiệu $\boldsymbol{d(u, W)}$) được định nghĩa là khoảng cách giữa u và hình chiếu trực giao của nó lên W, nghĩa là

$$\boldsymbol{d(u, W) := ||u - pr_W(u)||}.$$

Mệnh đề. *Cho $W \leq V$ và $u \in V$. Khi đó $d(u, W)$ là khoảng cách ngắn nhất từ u đến các vectơ của W.*

Ta đặt $w = pr_W(u)$, ta cần chứng minh, với mọi $v \in W$,

$$||u - v|| \geq ||u - w||.$$

Ta có

$$u - v = (u - w) + (w - v).$$

Hơn nữa, vì $v, w \in W$ và $V = W \oplus W^\perp$ nên ta có $u - w \in W^\top$ và $w - v \in W$. Suy ra $u - w$ trực giao với $w - v$, nghĩa là

$$\boldsymbol{\langle u - w, w - v \rangle = 0}.$$

Ta có

$$
\begin{aligned}
& u - v = (u - w) + (w - v) \\
\Rightarrow\ & \|u - v\| = \|(u - w) + (w - v)\| \\
\Leftrightarrow\ & \|u - v\|^2 = \|(u - w) + (w - v)\|^2 \\
\Leftrightarrow\ & \|u - v\|^2 = \|u - w\|^2 + \|w - v\|^2 + 2\langle u - w, w - v\rangle \\
\Leftrightarrow\ & \|u - v\|^2 = \|u - w\|^2 + \|w - v\|^2 \quad (\text{vì } \langle u - w, w - v\rangle = 0)
\end{aligned}
$$

Suy ra

$$\|u - v\|^2 \geq \|u - w\|^2 \text{ hay } \|u - v\| \geq \|u - w\|. \quad \blacksquare$$

3.5. Ma trận biểu diễn của tích vô hướng

Nhận xét. *Giả sử* $\mathcal{B} = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ *là cơ sở của* V. *Khi đó với mọi* $u, v \in V$, *ta có*

$$u = x_1u_1 + x_2u_2 + \cdots + x_nu_n,$$
$$v = y_1u_1 + y_2u_2 + \cdots + y_nu_n.$$

Khi đó
$$\langle u, v\rangle = \left\langle \sum_{i=1}^{n} x_iu_i, \sum_{j=1}^{n} y_ju_j \right\rangle = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_iy_j\langle u_i, u_j\rangle.$$

Định nghĩa. Cho V là không gian Euclid với tích vô hướng $\langle , \rangle$ và $\mathcal{B} = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ là một cơ sở của V. Khi đó ***ma trận biểu diễn tích vô hướng*** $\langle , \rangle$ theo cơ sở $\mathcal{B}$ là

$$A = (a_{ij}) \text{ với } \boldsymbol{a_{ij} = \langle u_i, u_j\rangle}.$$

Ta ký hiệu $\langle , \rangle_{\mathcal{B}}$ để chỉ ma trận này.

Ví dụ. Với $u = (x_1, x_2), v = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$, ta có tích vô hướng

$$\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle := x_1y_1 + 2x_1y_2 + 2x_2y_1 + 5x_2y_2.$$

Tìm ma trận biểu diễn $\langle , \rangle$

a) theo cơ sở chính tắc $\mathcal{B}_0 = (e_1, e_2)$,

b) theo cơ sở $\mathcal{B} = (u_1 = (-1, 2), u_2 = (2, 1))$.

Giải. a) Ta có $\langle e_1, e_1 \rangle = 1$, $\langle e_1, e_2 \rangle = 2$, $\langle e_2, e_1 \rangle = 2$, $\langle e_2, e_2 \rangle = 5$. Suy ra

$$\langle , \rangle_{\mathcal{B}_0} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

b) Ta có $\langle u_1, u_1 \rangle = 13$, $\langle u_1, u_2 \rangle = 14$, $\langle u_2, u_1 \rangle = 14$, $\langle u_2, u_2 \rangle = 17$. Suy ra

$$\langle , \rangle_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 13 & 14 \\ 14 & 17 \end{pmatrix}.$$

Ví dụ. Cho $V = \mathbb{R}_2[x]$ với tích vô hướng được định nghĩa

$$\langle P, Q\rangle = \int_0^1 P(x)Q(x)dx.$$

Tìm ma trận biểu diễn $\langle , \rangle$ theo cơ sở chính tắc

$$\mathcal{B}_0 = (P_1(x) = 1,\ P_2(x) = x,\ P_3(x) = x^2).$$

Giải. Ta có

$$\langle P_1, P_1\rangle = \int_0^1 dx = 1; \qquad \langle P_1, P_2\rangle = \int_0^1 xdx = \frac{1}{2};$$

$$\langle P_1, P_3\rangle = \int_0^1 x^2dx = \frac{1}{3}; \qquad \langle P_2, P_2\rangle = \int_0^1 x^2dx = \frac{1}{3};$$

$$\langle P_2, P_3\rangle = \int_0^1 x^3dx = \frac{1}{4}; \qquad \langle P_3, P_3\rangle = \int_0^1 x^3dx = \frac{1}{5}.$$

Suy ra

$$\langle , \rangle_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}.$$

Ví dụ.(tự làm) Với $u = (x_1, x_2, x_3), v = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3$, ta có tích vô hướng

$$\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle := x_1y_1 + 2x_2y_2 + x_3y_3 + x_1y_2 + x_2y_1.$$

Tìm ma trận biểu diễn $\langle , \rangle$

a) theo cơ sở chính tắc $\mathcal{B}_0 = (e_1, e_2, e_3)$,

b) theo cơ sở $\mathcal{B} = (u_1 = (1, 2, 0), u_2 = (0, 1, 1), u_2 = (1, 1, -2))$.

Mệnh đề. *Cho V là một không gian Euclid với tích vô hướng $\langle , \rangle$ và $\mathcal{B} = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ là một cơ sở của V. Khi đó $\mathcal{B}$ là cơ sở trực chuẩn khi và chỉ khi $\langle , \rangle_{\mathcal{B}} = I_n$.*

Chứng minh.

$$\mathcal{B} \text{ là cơ sở trực chuẩn} \Leftrightarrow \langle u_i, u_j \rangle = \begin{cases} 1 & \text{nếu } i = j \\ 0 & \text{nếu } i \neq j \end{cases} \Leftrightarrow \langle , \rangle_{\mathcal{B}} = I_n.$$

Mệnh đề. *Cho V là một không gian Euclid với tích vô hướng $\langle , \rangle$ và $\mathcal{B}$ là một cơ sở của V. Giả sử $u, v \in V$, khi đó*

$$\langle u, v \rangle = [u]_{\mathcal{B}}^{\top} \langle , \rangle_{\mathcal{B}} [v]_{\mathcal{B}}.$$

Mệnh đề. *Cho V là một không gian Euclid với tích vô hướng $\langle , \rangle$ và $\mathcal{B} = (u_1, u_2, \ldots u_n)$, $\mathcal{B}' = (u'_1, u'_2, \ldots u'_n)$ là hai cơ sở của V. Khi đó*

$$\langle , \rangle_{\mathcal{B}'} = (\mathcal{B} \to \mathcal{B}')^{\top} \langle , \rangle_{\mathcal{B}} (\mathcal{B} \to \mathcal{B}').$$

Chứng minh. Với mọi $u, v \in V$, ta có

$$[u]_{\mathcal{B}} = (\mathcal{B} \to \mathcal{B}')[u]_{\mathcal{B}'} \text{ và } [v]_{\mathcal{B}} = (\mathcal{B} \to \mathcal{B}')[v]_{\mathcal{B}'}.$$

Hơn nữa

$$\langle u, v\rangle = [u]_{\mathcal{B}}^{\top} \langle , \rangle_{\mathcal{B}} [v]_{\mathcal{B}}.$$

Do đó

$$\begin{aligned}\langle u, v\rangle &= ((\mathcal{B} \to \mathcal{B}')[u]_{\mathcal{B}'})^{\top} \langle , \rangle_{\mathcal{B}} (\mathcal{B} \to \mathcal{B}')[v]_{\mathcal{B}'} \\ &= [u]_{\mathcal{B}'}^{\top} \boldsymbol{(\mathcal{B} \to \mathcal{B}')^{\top} \langle , \rangle_{\mathcal{B}} (\mathcal{B} \to \mathcal{B}')} [v]_{\mathcal{B}'}.\end{aligned}$$

Mặt khác

$$\langle u, v\rangle = [u]_{\mathcal{B}'}^{\top} \boldsymbol{\langle , \rangle_{\mathcal{B}'}} [v]_{\mathcal{B}'}$$

Suy ra

$$[u]_{\mathcal{B}'}^{\top} \boldsymbol{\langle , \rangle_{\mathcal{B}'}} [v]_{\mathcal{B}'} = [u]_{\mathcal{B}'}^{\top} \boldsymbol{(\mathcal{B} \to \mathcal{B}')^{\top} \langle , \rangle_{\mathcal{B}} (\mathcal{B} \to \mathcal{B}')} [v]_{\mathcal{B}'}.$$

Bằng cách chọn u và v lần lượt là các vectơ trong cơ sở $\mathcal{B}'$, ta suy ra được

$$\boldsymbol{\langle , \rangle_{\mathcal{B}'} = (\mathcal{B} \to \mathcal{B}')^{\top} \langle , \rangle_{\mathcal{B}} (\mathcal{B} \to \mathcal{B}')}.$$

Ví dụ. Trong không gian Euclid $\mathbb{R}^3$ với tích vô hướng $\langle , \rangle$, cho cơ sở

$$\mathcal{B} = (u_1 = (1, -1, 1), u_2 = (1, 1, 0), u_3 = (-1, 2, -2))$$

và ma trận biểu diễn $\langle , \rangle$ theo cơ sở $\mathcal{B}$ là:

$$\langle , \rangle_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -6 \\ -2 & 6 & 6 \\ -6 & 6 & 13 \end{pmatrix}.$$

a) Cho $u = (1, 2, -1)$ và $v = (1, -1, 2)$. Tính $\langle u, v \rangle$?

b) Cho $u = (x_1, x_2, x_3)$, $v = (y_1, y_2, y_3)$. Tính $\langle u, v \rangle$?

Giải. a) Tìm $[u]_{\mathcal{B}}$ và $[v]_{\mathcal{B}}$. Ta giải được

$$[u]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \; [v]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Áp dụng công thức

$$\begin{aligned}\langle u, v\rangle &= [u]_{\mathcal{B}}^{\top} \langle , \rangle_{\mathcal{B}} [v]_{\mathcal{B}} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -2 & -6 \\ -2 & 6 & 6 \\ -6 & 6 & 13 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \\ &= -6.\end{aligned}$$

b) **Cách 1.** Tìm $[u]_{\mathcal{B}}$ và $[v]_{\mathcal{B}}$. Sau đó áp dụng công thức

$$\langle u, v\rangle = [u]_{\mathcal{B}}^{\top} \langle , \rangle_{\mathcal{B}} [v]_{\mathcal{B}}$$

Cách 2. Tìm ma trận biểu diễn $\langle , \rangle$ theo cơ sở chính tắc. Ta có công thức

$$\langle , \rangle_{\mathcal{B}_0} = (\mathcal{B} \to \mathcal{B}_0)^{\top} \langle , \rangle_{\mathcal{B}} (\mathcal{B} \to \mathcal{B}_0).$$

Ta có

$$(\mathcal{B}_0 \to \mathcal{B}) = (u_1^{\top}\ u_2^{\top}\ u_3^{\top}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Mặt khác

$$(\mathcal{B} \to \mathcal{B}_0) = (\mathcal{B}_0 \to \mathcal{B})^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Do đó

$$\begin{aligned} \langle , \rangle_{\mathcal{B}_0} &= (\mathcal{B} \to \mathcal{B}_0)^{\top} \langle , \rangle_{\mathcal{B}} (\mathcal{B} \to \mathcal{B}_0) \\ &= \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & -1 \\ -3 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -2 & -6 \\ -2 & 6 & 6 \\ -6 & 6 & 13 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Như vậy

$$\langle u, v \rangle = x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + 3x_2y_2 + x_3y_3.$$

Ví dụ.(tự làm) Trong không gian Euclid $\mathbb{R}^3$ với tích vô hướng $\langle , \rangle$, cho ma trận biểu diễn $\langle , \rangle$ theo cơ sở chính tắc là:

$$\langle , \rangle_{\mathcal{B}_0} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

a) Cho $u = (1, 1, 2)$, $v = (1, 3, -2)$. Tính $\langle u, v \rangle$?

b) Cho $\mathcal{B} = (u_1 = (-1, 0, 1),\ u_2 = (2, 1, -1),\ u_3 = (3, 0, -2))$ là một cơ sở khác của $\mathbb{R}^3$. Tính $\langle , \rangle_{\mathcal{B}}$

Đáp án. a) $\langle u, v \rangle = 8$

b) $\langle , \rangle_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -3 \\ -3 & 11 & 10 \\ -3 & 10 & 10 \end{pmatrix}.$

3.6. Toán tử đối xứng

Định nghĩa. Cho f là toán tử tuyến tính trên V. Toán tử f được gọi là ***toán tử đối xứng*** nếu

$$\langle f(u), v\rangle = \langle u, f(v)\rangle, \forall u, v \in V.$$

Nhắc lại. Cho $\mathcal{B} = (u_1, \ldots, u_n)$ là cơ sở trực chuẩn của V. Giả sử vectơ $u = \sum_{i=1}^n x_i u_i$ và $v = \sum_{i=1}^n y_i u_i$, khi đó

$$\langle u, v\rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i.\text{ Như vậy } \langle u, v\rangle = [u]_{\mathcal{B}}^\top [v]_{\mathcal{B}}.$$

Nhận xét. *Theo định nghĩa trên, f là toán tử đối xứng nếu với mọi $u, v \in V$, thì*

$$\langle f(u), v\rangle = \langle u, f(v)\rangle.$$

Giả sử $\mathcal{B}$ là một cơ sở trực chuẩn của V, ta có

$$\langle f(u), v\rangle = \langle u, f(v)\rangle$$

$$[f(u)]_{\mathcal{B}}^{\top}[v]_{\mathcal{B}} = [u]_{\mathcal{B}}^{\top}[f(v)]_{\mathcal{B}}$$

$$([f]_{\mathcal{B}}[u]_{\mathcal{B}})^{\top}[v]_{\mathcal{B}} = [u]_{\mathcal{B}}^{\top}[f]_{\mathcal{B}}[v]_{\mathcal{B}}$$

$$[u]_{\mathcal{B}}^{\top}[f]_{\mathcal{B}}^{\top}[v]_{\mathcal{B}} = [u]_{\mathcal{B}}^{\top}[f]_{\mathcal{B}}[v]_{\mathcal{B}}$$

Điều này dẫn đến $[f]_{\mathcal{B}} = [f]_{\mathcal{B}}^{\top}$ hay $[f]_{\mathcal{B}}$ là ma trận đối xứng. Do đó ta có bổ đề sau

Bổ đề. *Cho $f \in End_{\mathbb{R}}(V)$. Toán tử f là toán tử đối xứng khi và chỉ khi ma trận biểu diễn f theo cơ sở trực chuẩn là ma trận đối xứng.*

Ví dụ.(tự làm) Cho $V = \mathbb{R}^3$ là không gian Euclide với tích vô hướng chính tắc và $f \in End_{\mathbb{R}}(V)$ xác định bởi

$$f(x_1, x_2, x_2) = (2x_1 + x_2,\ x_1 + 4x_2 + 2x_3,\ 2x_2 + 5x_3).$$

Chứng tỏ f là toán tử đối xứng.

Định lý. *Cho f là toán tử đối xứng trong không gian Euclid. Khi đó*

(i) *Mọi trị riêng của f đều là số thực.*

(ii) *f chéo hóa được.*

(iii) *Các không gian con riêng của f đôi một trực giao với nhau.*

Ví dụ. Cho toán tử $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ có ma trận biểu diễn theo cơ sở chính tắc là

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Hãy xây dựng một cơ sở trực chuẩn của $\mathbb{R}^3$ từ các vectơ riêng của f?

Giải.

3.7. Toán tử trực giao

Định nghĩa. Cho V là một không gian Euclid và f là một toán tử tuyến tính trên V. Ta nói f là một ***toán tử trực giao*** nếu

$$\langle f(u), f(v)\rangle = \langle u, v\rangle, \forall u, v \in V.$$

Mệnh đề. *Đối với toán tử tuyến tính $f \in End_{\mathbb{R}}(V)$ những điều kiện sau đây tương đương:*

(i) $\langle f(u), f(v)\rangle = \langle u, v\rangle, \forall u, v \in V.$

(ii) $||f(u)|| = ||u||, \forall u \in V.$

(iii) *Nếu $\mathcal{B} = (u_1, \ldots, u_n)$ là một cơ sở trực chuẩn và $A = [f]_{\mathcal{B}}$ thì*

$$A^\top A = I_n = AA^\top.$$

Nói riêng, A là ma trận khả nghịch và $\det A = \pm 1$.

Chứng minh. (i) $\Rightarrow$ (ii). Chỉ việc cho $u = v$.

(ii) $\Rightarrow$ (i). Ta có

$$\begin{aligned}\langle f(u), f(v)\rangle &= \frac{1}{2}(||f(u)+f(v)||^2 - ||f(u)||^2 - ||f(v)||^2)\\ &= \frac{1}{2}(||f(u+v)||^2 - ||f(u)||^2 - ||f(v)||^2)\\ &= \frac{1}{2}(||u+v||^2 - ||u||^2 - ||v||^2) = \langle u, v\rangle.\end{aligned}$$

(i) $\Leftrightarrow$ (iii). Vì $\mathcal{B}$ là cơ sở trực chuẩn nên với mọi $u, v \in V$ ta có

$$\begin{aligned}& \langle f(u), f(v)\rangle = \langle u, v\rangle\\ \Leftrightarrow\ & [f(u)]_{\mathcal{B}}^{\top}[f(v)]_{\mathcal{B}} = [u]_{\mathcal{B}}^{\top}[v]_{\mathcal{B}}\\ \Leftrightarrow\ & ([f]_{\mathcal{B}}[u]_{\mathcal{B}})^{\top}([f]_{\mathcal{B}}[v]_{\mathcal{B}}) = [u]_{\mathcal{B}}^{\top}[v]_{\mathcal{B}}\\ \Leftrightarrow\ & [u]_{\mathcal{B}}^{\top}([f]_{\mathcal{B}}^{\top}[f]_{\mathcal{B}})[v]_{\mathcal{B}} = [u]_{\mathcal{B}}^{\top}[v]_{\mathcal{B}}\\ \Leftrightarrow\ & [f]_{\mathcal{B}}^{\top}[f]_{\mathcal{B}} = I_n \text{ hay} A^{\top}A = I_n.\end{aligned}$$

Phần khẳng định còn lại của (iii) là hiển nhiên.

Hệ quả. *Nếu f là một toán tử trực giao thì* $\det f = \pm 1$. *Nói riêng, f là một tự đẳng cấu.*

Định lý. *Toán tử tuyến tính $f \in End_{\mathbb{R}}(V)$ là một toán tử trực giao khi và chỉ khi nó biến một cơ sở trực chuẩn thành một cơ sở trực chuẩn.*

Chứng minh. ($\Rightarrow$) Giả sử f là một toán tử trực giao. Theo Hệ quả trên, f là một tự đẳng cấu, do đó f biến cơ sở thành cơ sở. Nếu $\mathcal{B} = \{u_1, \ldots, u_n\}$ là cơ sở trực chuẩn thì

$$\langle f(u_i), f(u_j) \rangle = \langle u_i, u_j \rangle = \delta_{ij}.$$

Vậy $\{f(u_1), \ldots, f(u_n)\}$ cũng là cơ sở trực chuẩn.

($\Leftarrow$) Giả sử tồn tại cơ sở trực chuẩn $\mathcal{B} = \{u_1, \ldots, u_n\}$ sao cho $\{f(u_1), \ldots, f(u_n)\}$ cũng là cơ sở trực chuẩn. Xét các vectơ $u, v \in V$:

$$u = \sum_{i=1}^{n} x_i u_i \text{ và } v = \sum_{j=1}^{n} y_j u_j.$$

Do $\{u_1, \ldots, u_n\}$ và $\{f(u_1), \ldots, f(u_n)\}$ là các cơ sở trực chuẩn nên ta có

$$\langle f(u), f(v)\rangle = \langle f(\sum_{i=1}^{n} x_i u_i), f(\sum_{j=1}^{n} y_j u_j)\rangle = \sum_{i,j=1}^{n} x_i y_j \langle f(u_i), f(u_j)\rangle$$
$$= \sum_{i,j=1}^{n} x_i y_j \delta_{ij} = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = \langle u, v\rangle.$$

Vậy f là phép biến đổi trực giao. ■

Mệnh đề. *Ma trận chuyển cơ sở từ một cơ sở trực chuẩn sang một cơ sở trực chuẩn là một ma trận trực giao.*

Chứng minh. Giả sử $\mathcal{B} = \{u_1, \ldots, u_n\}$ và $\mathcal{B}' = \{u'_1, \ldots, u'_n\}$ là hai cơ sở trực chuẩn. Gọi f là toán tử tuyến tính thỏa $f(u_i) = u'_i, \forall i \in \overline{1, n}$. Theo Định lý trên, ta có f là toán tử trực giao. Hơn nữa

$$[f]_{\mathcal{B}} = (\mathcal{B} \to \mathcal{B}').$$

Suy ra $(\mathcal{B} \to \mathcal{B}')$ là ma trận trực giao. ■

Ví dụ. Cho ma trận $A = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$. Chứng tỏ A là ma trận trực giao?

Giải. Ta kiểm tra điều này bằng cách thực hiện phép nhân ma trận

$$A^\top A = I_3.$$

Ngoài ra, ta cũng có thể kiểm tra bằng cách khác như sau:

Xét không gian Euclid $\mathbb{R}^3$ với tích vô hướng chính tắc. Đặt

$$u_1 = \frac{1}{3}(2, 2, -1), u_2 = \frac{1}{3}(-1, 2, 2), u_3 = \frac{1}{3}(2, -1, 2).$$

Toán tử

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$$

thỏa $f(e_i) = u_i, i \in \{1, 2, 3\}$ biến cơ sở trực chuẩn thành cơ sở trực chuẩn. Suy ra f là toán tử trực giao. Do A là ma trận biểu diễn f trong cơ sở trực chuẩn nên A là ma trận trực giao.