Chương 4

DẠNG SONG TUYẾN TÍNH VÀ DẠNG TOÀN PHƯƠNG

lvluyen@hcmus.edu.vn

http://www.math.hcmus.edu.vn/∼luyen/dsa215

fb.com/dsa215

Đại học Khoa Học Tự Nhiên Tp. Hồ Chí Minh

Nội dung

Chương 4. DẠNG SONG TUYẾN TÍNH VÀ DẠNG TOÀN PHƯƠNG

1. Định nghĩa dạng song tuyến tính
2. Ma trận biểu diễn dạng song tuyến tính. Sự thay đổi cơ sở
3. Dạng toàn phương
4. Dạng chính tắc của dạng toàn phương. Phương pháp Lagrange
5. Đưa dạng toàn phương thực về dạng chính tắc bằng các toán tử trực giao
6. Dạng toàn phương thực. Luật quán tính và tiêu chuẩn Sylvester

4.1. Định nghĩa dạng song tuyến tính

Định nghĩa. Cho V là một không gian vectơ trên trường K. Một dạng ***song tuyến tính*** trên V là một ánh xạ

$$\begin{aligned} f \;:\; V \times V &\longrightarrow K \\ (u, v) &\longmapsto f(u, v) \end{aligned}$$

có tính chất tuyến tính theo từng biến u, v, nghĩa là với mọi u, u_1, u_2, $v, v_1, v_2 \in V$, và $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta} \in K$ ta có

- $f(\boldsymbol{\alpha} u_1 + u_2, v) = \boldsymbol{\alpha} f(u_1, v) + f(u_2, v)$;
- $f(u, \boldsymbol{\beta} v_1 + v_2) = \boldsymbol{\beta} f(u, v_1) + f(u, v_2)$.

Dạng song tuyến tính f được gọi là ***đối xứng*** nếu $\boldsymbol{f(u, v) = f(v, u)}$ với mọi $u, v \in V$.

Ví dụ. Một tích vô hướng trên không gian Euclid V là một dạng song tuyến tính trên V.

Ví dụ. Với mỗi $u = (x_1, \ldots, x_n), v = (y_1, \ldots, y_n) \in K^n$, đặt

$$f(u, v) = x_1y_1 + \cdots + x_ny_n.$$

Khi đó f là một dạng song tuyến tính đối xứng trên K^n.

Ví dụ. Cho $A, B \in M_n(\mathbb{R})$, đặt $f(A, B) = tr(AB)$. Chứng minh f là một dạng song tuyến tính đối xứng trên $M_n(\mathbb{R})$.

Ví dụ. Với mỗi $u = (x_1, x_2, x_3), v = (y_1, y_2, y_3) \in K^3$, đặt

$$f(u, v) = x_1y_1 + 2x_1y_2 + 2x_2y_1 - x_2y_2 - x_2y_3 - x_3y_2 + x_3y_3.$$

Chứng minh f là một dạng song tuyến tính đối xứng trên K^n.

4.2. Ma trận biểu diễn dạng song tuyến tính

Định nghĩa. Cho $\mathcal{B} = (u_1, \ldots, u_n)$ là một cơ sở của V. ***Ma trận biểu diễn dạng song tuyến tính*** f theo cơ sở $\mathcal{B}$, ký hiệu $[f]_{\mathcal{B}}$, là ma trận $A = (a_{ij})_{n\times n}$, trong đó

$$a_{ij} = f(u_i, u_j), \quad \forall i, j \in \overline{1, n}.$$

Nhận xét. *Giả sử* $u, v \in V$,

$$u = x_1u_1 + \cdots + x_nu_n \text{ và } v = y_1u_1 + \cdots + y_nu_n.$$

Khi đó

$$f(u,v) = f(\sum_{i=1}^{n} x_iu_i, \sum_{j=1}^{n} y_ju_j) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_iy_jf(u_i,u_j) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_iy_j a_{ij}.$$

$$f(u,v)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}x_iy_j\boldsymbol{a_{ij}}.$$

Biểu thức này được viết dưới dạng

$$f(u,v)=\begin{pmatrix} x_1 & \cdots & x_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}=[u]_{\mathcal{B}}^{\top}[f]_{\mathcal{B}}[v]_{\mathcal{B}}.$$

Như vậy

$$\boldsymbol{f(u,v)=[u]_{\mathcal{B}}^{\top}[f]_{\mathcal{B}}[v]_{\mathcal{B}}}.$$

Nhận xét.

1. *Với cơ sở $\mathcal{B}=(u_1,\ldots,u_n)$ cho trước, dạng song tuyến tính f được hoàn toàn xác định bởi ma trận $[f]_{\mathcal{B}}$.*
2. *Dạng song tuyến tính f trên V là đối xứng khi và chỉ khi $[f]_{\mathcal{B}}$ là ma trận đối xứng.*

Ví dụ. Xét dạng song tuyến tính f trên $\mathbb{R}^3$ xác định bởi:
$u = (x_1, x_2, x_3), v = (y_1, y_2, y_3)$,

$$f(u, v) = x_1y_1 + 2x_1y_2 + 4x_1y_3 + x_2y_1 - 2x_2y_2 + 3x_2y_3 + x_3y_1 + 6x_3y_2.$$

Tìm ma trận biểu diễn f theo cơ sở chính tắc?

Giải. Ma trận biểu diễn dạng song tuyến tính f theo cơ sở chính tắc là

$$[f]_{\mathcal{B}_0} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & -2 & 3 \\ 1 & 6 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ví dụ.(tự làm) Xét dạng song tuyến tính f trên $\mathbb{R}^2$ xác định bởi:
$u = (x_1, x_2), v = (y_1, y_2)$,

$$f(u, v) = 2x_1y_1 + 2x_1y_2 + 3x_2y_1 - 3x_2y_2.$$

Tìm ma trận biểu diễn f theo cơ sở $\mathcal{B} = \{u_1 = (1, 2), u_2 = (-1, 1)\}$?

Mệnh đề. *Cho f là một dạng song tuyến tính trên V. Giả sử $\mathcal{B}$ và $\mathcal{B}'$ là hai cơ sở của V, khi đó*

$$[f]_{\mathcal{B}'} = (\mathcal{B} \to \mathcal{B}')^\top [f]_{\mathcal{B}} (\mathcal{B} \to \mathcal{B}').$$

Chứng minh. Với mọi $u, v \in V$, ta có

$$[u]_{\mathcal{B}} = (\mathcal{B} \to \mathcal{B}')[u]_{\mathcal{B}'} \text{ và } [v]_{\mathcal{B}} = (\mathcal{B} \to \mathcal{B}')[v]_{\mathcal{B}'}.$$

Hơn nữa

$$f(u, v) = [u]_{\mathcal{B}}^\top [f]_{\mathcal{B}} [v]_{\mathcal{B}}.$$

Do đó

$$\begin{aligned} f(u, v) &= ((\mathcal{B} \to \mathcal{B}')[u]_{\mathcal{B}'})^\top [f]_{\mathcal{B}} (\mathcal{B} \to \mathcal{B}')[v]_{\mathcal{B}'} \\ &= [u]_{\mathcal{B}'}^\top (\mathcal{B} \to \mathcal{B}')^\top [f]_{\mathcal{B}} (\mathcal{B} \to \mathcal{B}') [v]_{\mathcal{B}'}. \end{aligned}$$

Mặt khác

$$f(u, v) = [u]_{\mathcal{B}'}^\top [f]_{\mathcal{B}'} [v]_{\mathcal{B}'}$$

Suy ra

$$[f]_{\mathcal{B}'} = (\mathcal{B} \to \mathcal{B}')^\top [f]_{\mathcal{B}} (\mathcal{B} \to \mathcal{B}')$$

Ví dụ. Cho f là dạng song tuyến tính trên $\mathbb{R}^3$ với ma trận biểu diễn f theo cơ sở chính tắc là

$$[f]_{\mathcal{B}_0} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Cho $\mathcal{B} = (u_1 = (1, -1, -1), u_2 = (0, 1, 2), u_3 = (1, 1, 2))$. Chứng tỏ $\mathcal{B}$ là cơ sở của $\mathbb{R}^3$ và tìm $[f]_{\mathcal{B}}$?

Giải. Lập ma trận

$$A = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Ta tính được $r(A) = 3$. Do đó $\mathcal{B} = (u_1, u_2, u_3)$ là tập độc lập tuyến tính. Hơn nữa, $\dim\mathbb{R}^3 = 3$ bằng số vectơ của $\mathcal{B}$. Suy ra $\mathcal{B}$ là cơ sở của $\mathbb{R}^3$.

Ta có

$$(\mathcal{B}_0 \to \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Hơn nữa

$$\begin{aligned} [f]_{\mathcal{B}} &= (\mathcal{B}_0 \to \mathcal{B})^{\top} [f]_{\mathcal{B}_0} (\mathcal{B}_0 \to \mathcal{B}) \\ &= \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -6 & 5 & 3 \\ 6 & -2 & 3 \\ 4 & 2 & 8 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

4.3. Dạng toàn phương

Định nghĩa. Cho f là một dạng **song tuyến tính đối xứng** trên V. Khi đó ánh xạ

$$\begin{aligned} Q \ : \ V &\longrightarrow K \\ u &\longmapsto f(u,u) \end{aligned}$$

được gọi là ***dạng toàn phương*** trên V ứng với dạng song tuyến tính đối xứng f. Ta gọi f là ***dạng cực*** của dạng toàn phương Q.

Ví dụ. Xét dạng song tuyến tính f trên $\mathbb{R}^3$ xác định bởi:
$u = (x_1, x_2, x_3), v = (y_1, y_2, y_3)$,

$f(u,v) = x_1y_1 + 2x_1y_2 + 4x_1y_3 + 2x_2y_1 - 2x_2y_2 + 3x_2y_3 + 4x_3y_1 + 3x_3y_2.$

Chứng tỏ f đối xứng và tìm dạng toàn phương tương ứng với f?

Giải. Dễ dàng kiểm tra f đối xứng. Khi đó dạng toàn phương tương ứng với f là

$$Q(u) = f(u,u) = x_1^2 + 4x_1x_2 + 8x_1x_3 - 2x_2^2 + 6x_2x_3.$$

Nhận xét. *Dạng cực f của dạng toàn phương Q được hoàn toàn xác định bởi Q.*

Giải thích. Ta có

$$\begin{aligned} f(u+v, u+v) &= f(u,u) + f(u,v) + f(v,u) + f(v,v) \\ &= f(u,u) + 2f(u,v) + f(v,v). \end{aligned}$$

Suy ra

$$\begin{aligned} f(u,v) &= \frac{1}{2}\big[f(u+v,u+v) - f(u,u) - f(v,v)\big] \\ &= \frac{1}{2}\big[Q(u+v) - Q(u) - Q(v)\big] \end{aligned}$$

Ví dụ. Cho dạng toàn phương Q trên $\mathbb{R}^2$ được xác định bởi: $u = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$,

$$Q(u) = x_1^2 + 6x_1x_2 + 4x_2^2.$$

Xác định dạng cực của Q.

$$Q(u) = x_1^2 + 6x_1x_2 + 4x_2^2.$$

Giải. Với $u = (x_1, x_2)$, $v = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$, ta có

- $Q(u+v) = (x_1+y_1)^2 + 6(x_1+y_1)(x_2+y_2) + 4(x_2+y_2)^2$;
- $Q(u) = x_1^2 + 6x_1x_2 + 4x_2^2$;
- $Q(v) = y_1^2 + 6y_1y_2 + 4y_2^2$.

Áp dụng công thức

$$f(u,v) = \frac{1}{2}[Q(u+v) - Q(u) - Q(v)].$$

Suy ra

$$f(u,v) = x_1y_1 + 3x_1y_2 + 3x_2y_1 + 4x_2y_2.$$

Ví dụ.(tự làm) Cho dạng toàn phương Q trên $\mathbb{R}^3$ được xác định bởi: $u = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$,

$$Q(u) = 2x_1^2 + 4x_1x_2 + 2x_1x_3 + x_2^2 + 2x_3^2.$$

Xác định dạng cực của Q.

Đáp án. Với $u = (x_1, x_2, x_3)$, $v = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3$,

$$f(u, v) = 2x_1y_1 + 2x_1y_2 + 2x_2y_1 + x_1y_3 + x_3y_1 + x_2y_2 + 2x_3y_3.$$

Nhận xét. *Trong không gian $\mathbb{R}^n$, cho dạng toàn phương Q xác định bởi:* $u = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$,

$$Q(u) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j.$$

Khi đó, dạng cực của Q được xác định như sau
$u = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $v = (y_1, y_2, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$

$$f(u, v) = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{a_{ii}} x_i y_i + \sum_{1 \leq i \neq j \leq n} \frac{a_{ij}}{2} x_i y_j.$$

Ví dụ.(tự làm) Cho dạng toàn phương Q trên $\mathbb{R}^3$ được xác định bởi: $u = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$,

$$Q(u) = x_1^2 + 6x_1x_2 + 8x_2x_3 - x_2^2 + 2x_3^2.$$

Xác định dạng cực của Q.

Định nghĩa. Cho Q là một dạng toàn phương trên V ứng với dạng song tuyến tính đối xứng f và $\mathcal{B}$ là một cơ sở của V. Khi đó ma ***trận biểu diễn dạng toàn phương*** Q theo cơ sở $\mathcal{B}$, ký hiệu là $[Q]_{\mathcal{B}}$, là ma trận biểu diễn dạng song tuyến tính f theo cơ sở $\mathcal{B}$.

Ví dụ. Cho dạng toàn phương Q trên $\mathbb{R}^3$ được xác định bởi:
$u = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$,

$$Q(u) = 2x_1^2 + 4x_1x_2 + 2x_1x_3 + x_2^2 + 2x_3^2.$$

Tìm ma trận biểu diễn dạng toàn phương Q theo cơ sở chính tắc?

Giải. Ma trận biểu diễn dạng toàn phương Q theo cơ sở chính tắc là:

$$[Q]_{\mathcal{B}_0} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Nhận xét. *Cho Q là dạng toàn phương trên V và $\mathcal{B}$ là một cơ sở của V. Ta có*

1. $[Q]_{\mathcal{B}}$ *là ma trận đối xứng.*
2. *Với* $u = x_1u_1 + x_2u_2 + \cdots + x_nu_n \in V$,

$$Q(u) = [u]_{\mathcal{B}}^{\top}[Q]_{\mathcal{B}}[u]_{\mathcal{B}} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j$$

$$= \sum_{i=1}^{n} a_{ii}x_i^2 + \sum_{1\le i<j\le n} 2a_{ij}x_ix_j. \qquad (*)$$

$(*)$ *được gọi là* ***biểu thức tọa độ của dạng toàn phương*** Q *theo cơ sở* $\mathcal{B}$.

Mệnh đề. *Cho Q là một dạng toàn phương trên V. Giả sử $\mathcal{B}$ và $\mathcal{B}'$ là hai cơ sở của V, khi đó*

$$[Q]_{\mathcal{B}'} = (\mathcal{B} \to \mathcal{B}')^{\top}\,[Q]_{\mathcal{B}}\,(\mathcal{B} \to \mathcal{B}').$$

Hạng và tính suy biến của dạng toàn phương

Định nghĩa. Cho Q là một dạng toàn phương trên V và $\mathcal{B}$ là một cơ sở của V. Hạng của ma trận $[Q]_{\mathcal{B}}$ được gọi là ***hạng của dạng toàn phương*** Q, ký hiệu là **rank(Q)** hay **$r(Q)$**).

Nhận xét. *Hạng của Q không phụ thuộc vào cách chọn cơ sở $\mathcal{B}$.*

Định nghĩa. Cho $\dim V = n$ và Q là một dạng toàn phương trên V.

- Nếu $r(Q) = n$ thì ta nói Q ***không suy biến***.
- Ngược lại, nếu $r(Q) < n$ thì Q ***suy biến***.

Ví dụ. Cho dạng toàn phương Q trên $\mathbb{R}^3$ xác định bởi:
$u = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$,

$$Q(u) = x_1^2 - 3x_2^2 + 2x_1x_2 - 4x_1x_3 + 8x_2x_3.$$

a) Tìm hạng và khảo sát tính không suy biến của Q?

b) Tìm biểu thức toạ độ của Q theo cơ sở $B = (u_1 = (0, -1, 1), u_2 = (1, 2, 2), u_3 = (1, 1, 4))$ và chỉ ra phép biến đổi toạ độ không suy biến tương ứng.

Giải. Ma trận biểu diễn Q theo cơ sở chính tắc là

$$[Q]_{\mathcal{B}_0} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & -3 & 4 \\ -2 & 4 & 0 \end{pmatrix}.$$

a) Ta có $r([Q]_{\mathcal{B}_0}) = 3$. Suy ra hạng của Q là 3. Do đó Q không suy biến.

b) Ta có

$$(\mathcal{B}_0 \to \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Hơn nữa

$$\begin{aligned} [Q]_{\mathcal{B}} &= (\mathcal{B}_0 \to \mathcal{B})^\top [Q]_{\mathcal{B}_0} (\mathcal{B}_0 \to \mathcal{B}) \\ &= \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & -3 & 4 \\ -2 & 4 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -11 & 3 & -12 \\ 3 & 17 & 26 \\ -12 & 26 & 16 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Vậy biểu thức tọa độ của Q theo cơ sở $\mathcal{B}$ định bởi:

$$\boldsymbol{Q(u) = -11y_1^2 + 17y_2^2 + 16y_3^2 + 6y_1y_2 - 24y_1y_3 + 52y_2y_3}.$$

với $u = y_1u_1 + y_2u_2 + y_3u_3 \in \mathbb{R}^3$.

Ta có $[u]_{\mathcal{B}_0} = (B_0 \to \mathcal{B})[u]_{\mathcal{B}}$. Suy ra phép biến đổi tọa độ không suy biến tương ứng là

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}.$$

Do đó
$$\begin{cases} x_1 &= y_2 + y_3; \\ x_2 &= -y_1 + 2y_2 + y_3; \\ x_3 &= y_1 + 2y_2 + 4y_3. \end{cases}$$

Ví dụ.(tự làm) Cho dạng toàn phương Q trên $\mathbb{R}^3$ xác định bởi: $u = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$,

$$Q(u) = 2x_1^2 + 2x_1x_2 - 4x_2x_3 + 2x_3^2.$$

a) Tìm hạng và khảo sát tính không suy biến của Q?

b) Tìm biểu thức toạ độ của Q theo cơ sở $\mathcal{B} = (u_1 = (1, -1, -1), u_2 = (0, 1, 2), u_3 = (1, 1, 2))$ và chỉ ra phép biến đổi toạ độ không suy biến tương ứng.

4.4. Dạng chính tắc của dạng toàn phương

Định nghĩa. Cho Q là một dạng toàn phương trên V có dạng cực là f. Cơ sở $\mathcal{B} = (u_1, \ldots, u_n)$ của V được gọi là một ***cơ sở Q-chính tắc*** nếu

$$f(u_i, u_j) = 0 \text{ với mọi } i \neq j.$$

Điều này tương đương với tính chất ma trận $[Q]_{\mathcal{B}}$ là một ma trận đường chéo, hay biểu thức toạ độ của Q theo cơ sở $\mathcal{B}$ có dạng

$$Q(u) = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i^2 \qquad (*)$$

với mọi $u = x_1 u_1 + \cdots + x_n u_n \in V$. Khi đó ta gọi (*) là ***dạng chính tắc của dạng toàn phương*** Q.

Định lý. *Cho Q là một dạng toàn phương trên V. Khi đó trong V tồn tại một cơ sở Q-chính tắc.*

Chứng minh. Ta chứng minh định lý này bằng cách đi tìm dạng chính tắc của Q.

Giả sử biểu thức tọa độ của dạng toàn phương Q theo cơ sở $\mathcal{B} = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ định bởi

$$Q(u) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}x_i^2 + \sum_{1 \leq i < j \leq n} 2a_{ij}x_ix_j \qquad (*)$$

với $u = x_1u_1 + \cdots + x_nu_n$. Để đưa Q về dạng chính tắc ta chia bài toán thành 3 trường hợp sau:

Trường hợp 1. Tồn tại $a_{ii} \neq 0$ với một i nào đó. Sau khi đánh số lại các phần tử của cơ sở $\mathcal{B}$ nếu cần, ta có thể giả sử $a_{11} \neq 0$. Khi đó

$$\begin{aligned} Q(u) &= a_{11}\left[{x_1}^2 + 2x_1\sum_{i=2}^{n}\frac{a_{1i}}{a_{11}}x_i + \left(\sum_{i=2}^{n}\frac{a_{1i}}{a_{11}}x_i\right)^2\right] + Q_1(x_2, \ldots, x_n) \\ &= a_{11}\left(x_1 + \sum_{i=2}^{n}\frac{a_{1i}}{a_{11}}x_i\right)^2 + Q_1(x_2, \ldots, x_n). \end{aligned}$$

Đặt $\begin{cases} y_1 &= x_1 + \sum\limits_{i=2}^{n} \dfrac{a_{1i}}{a_{11}} x_i; \\ y_i &= x_i \text{ với } i > 1. \end{cases}$ Khi đó

$$Q(u) = a_{11}y_1^2 + Q_1(y_2, \ldots, y_n)$$

trong đó $Q_1(y_2, \ldots, y_n)$ là dạng toàn phương với $n-1$ biến. Ta có thể sử dụng phương pháp qui nạp để đưa Q_1 về dạng toàn phương chính tắc.

Trường hợp 2. $a_{ii} = 0\,\forall i$ nhưng tồn tại $a_{ij} \neq 0$ với $i \neq j$ nào đó. Sau khi đánh số lại các phần tử của cơ sở $\mathcal{B}$ nếu cần, ta có thể giả sử $a_{12} \neq 0$. Thực hiện phép biến đổi tọa độ

$$\begin{cases} x_1 &= y_1 + y_2; \\ x_2 &= y_1 - y_2; \\ x_i &= y_i, \forall i \geq 2. \end{cases}$$

Ta có

$$2a_{12}x_1x_2 = 2a_{12}(y_1^2 - y_2^2).$$

Rõ ràng hệ số của y_1^2 là $2a_{12} \neq 0$. Áp dụng lại **Trường hợp 1.**

Trường hợp 3. $a_{ij} = 0$ với mọi i, j. Khi đó $Q(u) = 0$ với mọi u nên Q có dạng chính tắc trong bất kỳ cơ sở nào của V.

Ví dụ. Cho dạng toàn phương

$$Q(u) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 2x_4^2 - 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 2x_1x_4 + x_2x_3 - 4x_2x_4$$

với $u = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^3$. Đưa Q về dạng chính tắc và tìm cơ sở Q-chính tắc?

Giải.

$$\begin{aligned}
Q(u) &= \boldsymbol{x_1^2} + x_2^2 + x_3^2 - 2x_4^2 - \boldsymbol{2x_1x_2} + \boldsymbol{2x_1x_3} - \boldsymbol{2x_1x_4} + x_2x_3 - 4x_2x_4 \\
&= x_1^2 + 2x_1(-x_2 + x_3 - x_4) + x_2^2 + x_3^2 - 2x_4^2 + x_2x_3 - 4x_2x_4 \\
&= (x_1 - x_2 + x_3 - x_4)^2 - (-x_2 + x_3 - x_4)^2 + x_2^2 + x_3^2 - 2x_4^2 + x_2x_3 - \\
&= (x_1 - x_2 + x_3 - x_4)^2 - \boldsymbol{3x_4^2} + 3x_2x_3 - \boldsymbol{6x_2x_4} + \boldsymbol{2x_3x_4} \\
&= (x_1 - x_2 + x_3 - x_4)^2 - 3\left[x_4^2 + 2x_4(x_2 - \frac{1}{3}x_3)\right] + 3x_2x_3
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= (x_1 - x_2 + x_3 - x_4)^2 - 3\big[x_4^2 + 2x_4(x_2 - \frac{1}{3}x_3)\big] + 3x_2x_3 \\
&= (x_1 - x_2 + x_3 - x_4)^2 - 3(x_4 + x_2 - \frac{1}{3}x_3)^2 + 3(x_2 - \frac{1}{3}x_3)^2 + 3x_2x_3 \\
&= (x_1 - x_2 + x_3 - x_4)^2 - 3(x_4 + x_2 - \frac{1}{3}x_3)^2 + \boldsymbol{3x_2^2} + \frac{1}{3}x_3^2 + \boldsymbol{x_2x_3} \\
&= (x_1 - x_2 + x_3 - x_4)^2 - 3(x_4 + x_2 - \frac{1}{3}x_3)^2 + 3(x_2 + \frac{1}{6}x_3)^2 + \frac{1}{4}x_3^2.
\end{aligned}
$$

Đặt

$$
\begin{cases}
y_1 = x_1 - x_2 + x_3 - x_4; \\
y_2 = x_4 + x_2 - \frac{1}{3}x_3; \\
y_3 = x_2 + \frac{1}{6}x_3; \\
y_4 = x_3.
\end{cases}
$$

Khi đó ta đưa Q về dạng chính tắc

$$Q(u) = y_1^2 - 3y_2^2 + 3y_3^2 + \frac{1}{4}y_4^2.$$

với $u = y_1u_1 + y_2u_2 + y_3u_3 + y_4u_4$, trong đó cơ sở Q-chính tắc $\mathcal{B} = (u_1, u_2, u_3, u_4)$.

Tìm $\mathcal{B}$. Ta có

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} & 1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{6} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$$

Hơn nữa

$$[u]_{\mathcal{B}} = (\mathcal{B} \to \mathcal{B}_0)[u]_{\mathcal{B}_0}.$$

Suy ra

$$(\mathcal{B} \to \mathcal{B}_0) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} & 1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{6} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Ta có

$$(\mathcal{B}_0 \to \mathcal{B}) = (\mathcal{B} \to \mathcal{B}_0)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -2/3 \\ 0 & 0 & 1 & -1/6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

Suy ra cơ sở Q-chính tắc là $\mathcal{B} = (u_1, u_2, u_3, u_4)$ với $u_1 = (1, 0, 0, 0)$; $u_2 = (-1, 0, 0, 1)$; $u_3 = (0, 1, 0, -1)$; $u_4 = (2/3, -1/6, 1, 1/2)$.

Ví dụ. Cho dạng toàn phương

$$Q(u) = x_1x_2 + 2x_1x_3 - 2x_2x_3$$

với $u = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$. Đưa Q về dạng chính tắc và tìm cơ sở Q-chính tắc?

Giải. Đổi biến

$$\begin{cases} x_1 = y_1 + y_2; \\ x_2 = y_1 - y_2; \\ x_3 = y_3. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \tag{1}$$

Khi đó

$$\begin{aligned} Q(u) &= y_1^2 - y_2^2 + 2(y_1 + y_2)y_3 - 2(y_1 - y_2)y_3 \\ &= y_1^2 - \boldsymbol{y_2^2} + \boldsymbol{4y_2y_3} \\ &= y_1^2 - (y_2^2 - 4y_2y_3 + 4y_3^2) + 4y_3^2 \\ &= y_1^2 - (y_2 - 2y_3)^2 + 4y_3^2. \end{aligned}$$

Đặt

$$\left\{ \begin{array}{lcl} z_1 & = & y_1; \\ z_2 & = & y_2 - 2y_3; \\ z_3 & = & y_3. \end{array} \right. \Leftrightarrow \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \qquad (2)$$

Khi đó ta đưa Q về dạng chính tắc

$$Q(u) = z_1^2 - z_2^2 + 4z_3^2$$

với $u = z_1u_1 + z_2u_2 + z_3u_3$, trong đó cơ sở Q-chính tắc $\mathcal{B} = (u_1, u_2, u_3)$.

Tìm $\mathcal{B}$. Từ (1) và (2) ta có

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}.$$

Suy ra

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix}$$

Vậy

$$(\mathcal{B}_0 \to \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Suy ra cơ sở Q-chính tắc là

$$\mathcal{B} = \{u_1 = (1,1,0), u_2 = (1,-1,0), u_3 = (2,-2,1)\}.$$

Ví dụ.(tự làm) Cho dạng toàn phương

$$Q(u) = x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 + 4x_1x_2 - 2x_1x_3 + 3x_2x_3$$

với $u = (x_1, x_2, x_3)$. Đưa Q về dạng chính tắc và tìm cơ sở Q-chính tắc?

Ví dụ.(tự làm) Cho dạng toàn phương

$$Q(u) = 2{x_1}^2 + 2{x_2}^2 + 3{x_3}^2 - 4x_1x_3 + 4x_2x_3 - 8x_2x_4 - 14x_3x_4$$

với $u = (x_1, x_2, x_3, x_4)$. Đưa Q về dạng chính tắc và tìm cơ sở Q-chính tắc?

Ví dụ.(tự làm) Đưa các dạng toàn phương Q sau về dạng chính tắc và tìm cơ sở Q-chính tắc?

a) $Q(x_1, x_2, x_3) = 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 4x_2x_3$;

b) $Q(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2 - 3x_2x_3 + 2x_1x_3$.

4.5. Đưa dạng toàn phương thực về dạng chính tắc bằng các toán tử trực giao

Định nghĩa. Cho V là một không gian Euclid và Q là một dạng toàn phương trên V. Cơ sở $\mathcal{B}$ được gọi là một ***cơ sở Q-chính tắc trực giao*** nếu $\mathcal{B}$ là một cơ sở trực chuẩn đồng thời cũng là một cơ sở Q-chính tắc của V. Khi đó biểu thức tọa độ của Q trong cơ sở $\mathcal{B}$ được gọi là ***dạng chính tắc trực giao*** của Q.

Nhắc lại.

1. Ma trận vuông A được gọi là ***chéo hóa trực giao được*** nếu tồn tại ma trận trực giao P sao cho $P^{-1}AP$ là ma trận đường chéo.
2. Mọi ma trận đối xứng thực đều chéo hoá trực giao được.
3. Trong không gian Euclid V, cho $\mathcal{B}$ và $\mathcal{B}'$ là hai cơ sở của V. Nếu $\mathcal{B}$ là cơ sở trực chuẩn và $(\mathcal{B} \to \mathcal{B}')$ là ma trận trực giao thì $\mathcal{B}'$ là cơ sở trực chuẩn.

Định lý. *Cho V là một không gian Euclid và Q là một dạng toàn phương trên V. Khi đó trong V tồn tại một cơ sở Q-chính tắc trực giao.*

Chứng minh. Xét $\mathcal{B}_0$ là một cơ sở trực chuẩn nào đó của V. Khi đó ma trận $[Q]_{\mathcal{B}_0}$ là ma trận đối xứng nên chéo hoá trực giao được, nghĩa là tồn tại ma trận trực giao P sao cho $P^{-1}[Q]_{\mathcal{B}_0}P$ là ma trận đường chéo. Gọi $\mathcal{B}$ là cơ sở của V sao cho $(\mathcal{B}_0 \to \mathcal{B}) = P$. Khi đó

$$[Q]_{\mathcal{B}} = (\mathcal{B}_0 \to \mathcal{B})^\top [Q]_{\mathcal{B}_0}(\mathcal{B}_0 \to \mathcal{B}) = P^\top [Q]_{\mathcal{B}_0} P = P^{-1}[Q]_{\mathcal{B}_0} P$$

là ma trận chéo. Vì $[Q]_{\mathcal{B}}$ là ma trận chéo nên $\mathcal{B}$ là cơ sở Q-chính tắc.

Mặt khác, do $(\mathcal{B}_0 \to \mathcal{B}) = P$ là ma trận trực giao nên $\mathcal{B}$ là một cơ sở trực chuẩn. Suy ra $\mathcal{B}$ là một cơ sở Q-chính tắc trực giao của V. ∎

Từ chứng minh Định lý trên ta thấy để đưa Q về dạng chính tắc trực giao ta dùng phép biến đổi tọa độ

$$[u]_{\mathcal{B}_0} = (\mathcal{B}_0 \to \mathcal{B})[u]_{\mathcal{B}}$$

Thuật toán đưa dạng toàn phương Q trên không gian Euclid V về dạng chính tắc trực giao

Bước 1. Xác định $[Q]_{\mathcal{B}_0}$ với $\mathcal{B}_0$ là một cơ sở trực chuẩn nào đó của V.

Bước 2. Chéo hoá trực giao ma trận $[Q]_{\mathcal{B}_0}$, tìm ma trận trực giao P làm chéo $[Q]_{\mathcal{B}_0}$.

Bước 3. Cơ sở Q-chính tắc trực giao $\mathcal{B} = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ định bởi $(\mathcal{B}_0 \to \mathcal{B}) = P$ và phép biến đổi tọa độ trực giao là $X = PY$ với $X = [u]_{\mathcal{B}_0}$; $Y = [u]_{\mathcal{B}}$. Khi đó dạng chính tắc trực giao của Q là

$$Q(u) = \sum_{i=1}^{n} a_i y_i$$

với $u = y_1u_1 + y_2u_2 + \cdots + y_nu_n$.

Ví dụ. Đưa dạng toàn phương sau đây về dạng chính tắc trực giao:

$$Q(x_1, x_2, x_3) = 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3.$$

Chỉ ra cơ sở Q-chính tắc trực giao và phép biến đổi tọa độ trực giao tương ứng.

Giải. Bước 1. Ma trận biểu diễn Q theo cơ sở chính tắc là

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Bước 2. Chéo hoá trực giao ma trận A.

- Đa thức đặc trưng

$$P_A(\boldsymbol{\lambda}) = |A - \lambda I_3| = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 1 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 1 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} = -(\lambda + 1)^2(\lambda - 2).$$

- Trị riêng

$$P_A(\boldsymbol{\lambda}) = 0 \Leftrightarrow \lambda = -1\,(\text{bội } 2), \lambda = 2\,(\text{bội } 1).$$

Vậy A có 2 trị riêng là $\lambda_1 = -1\,(\text{bội } 2), \lambda_2 = 2\,(\text{bội } 1)$.

- Không gian riêng

• Với $\lambda_1 = -1$, không gian riêng $E(-1)$ là không gian nghiệm của hệ phương trình $(A + I_3)X = 0$.

$$(A - I_3) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ta có nghiệm tổng quát

$$(x_1, x_2, x_3) = (-t - s, t, s), \qquad \text{với } t, s \in \mathbb{R}.$$

Suy ra $E(-1)$ có $\dim E(-1) = 2$ với cơ sở

$$\mathcal{B}_1 = \{u_1 = (-1, 1, 0), u_2 = (-1, 0, 1)\}.$$

Ta xây dựng cơ sở trực chuẩn của $E(-1)$ bằng quá trình trực chuẩn Gram-Schmidt:

$$v_1 = u_1 = (-1, 1, 0); \qquad v_2 = u_2 - \frac{\langle u_2, v_1 \rangle}{\|v_1\|^2} v_1 = (-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1).$$

$$w_1 = \frac{v_1}{\|v_1\|} = (-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0); \qquad w_2 = \frac{v_2}{\|v_2\|} = (-\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}).$$

• Với $\lambda_2 = 2$, không gian riêng $E(2)$ là không gian nghiệm của hệ phương trình $(A - 2I_3)X = 0$.

$$(A - 2I_3) = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ta có nghiệm tổng quát

$$(x_1, x_2, x_3) = (t, t, t), \qquad \text{với } t \in \mathbb{R}.$$

Suy ra $E(2)$ có $\dim E(2) = 1$ với cơ sở

$$\mathcal{B}_2 = \{u_3 = (1, 1, 1)\}.$$

Ta xây dựng cơ sở trực chuẩn $\{w_3\}$ của $E(2)$ với

$$w_3 = \frac{w_3}{\|w_3\|} = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right).$$

Đặt $\mathcal{B} = \{w_1, w_2, w_3\}$. Ta có $\mathcal{B}$ là một cơ sở trực chuẩn của $\mathbb{R}^3$ và

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

với

$$P = (\mathcal{B}_0 \to \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}.$$

Bước 3. Từ kết quả bước 2, ta suy ra dạng chính tắc trực giao của Q là

$$Q(u) = -y_1^2 - y_2^2 + 2y_3^2$$

với $u = y_1w_1 + y_2w_2 + y_3w_3$, trong đó

$$w_1 = (-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0);\ w_2 = (-\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}});\ w_3 = (\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}).$$

Cơ sở chính tắc trực giao tương ứng là $\mathcal{B} = \{w_1, w_2, w_3\}$.

Phép biến đổi tọa độ trực giao tương ứng $X = PY$, nghĩa là

$$\begin{cases} x_1 &= -\frac{1}{\sqrt{2}}y_1 - \frac{1}{\sqrt{6}}y_2 + \frac{1}{\sqrt{3}}y_3; \\ x_2 &= \frac{1}{\sqrt{2}}y_1 - \frac{1}{\sqrt{6}}y_2 + \frac{1}{\sqrt{3}}y_3; \\ x_3 &= \frac{2}{\sqrt{6}}y_2 + \frac{1}{\sqrt{3}}y_3. \end{cases}$$

Ví dụ. Đưa dạng toàn phương sau đây về dạng chính tắc trực giao:

$$Q(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 - 2x_1x_2 - 2x_1x_3 + 2x_2^2 - 2x_2x_3 + 2x_3^2.$$

Chỉ ra cơ sở Q-chính tắc trực giao và phép biến đổi tọa độ trực giao tương ứng.

4.6. Dạng chuẩn tắc. Luật quán tính và tiêu chuẩn Sylvester

Định nghĩa. Cho Q là một dạng toàn phương trên V và $\mathcal{B} = (u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ là một cơ sở của V. Giả sử biểu thức tọa độ của Q theo cơ sở $\mathcal{B}$ có dạng

$$Q(u) = x_1^2 + \cdots + x_s^2 - x_{s+1}^2 - \cdots - x_r^2 \qquad (\star)$$

với $u = x_1u_1 + \cdots + x_nu_n$, trong đó r, s là các số nguyên thỏa $0 \leq s \leq r \leq n$. Khi đó ta nói $\mathcal{B}$ là một ***cơ sở Q-chuẩn tắc*** và $(\star)$ là ***dạng chuẩn tắc*** của Q.

Định lý. *Cho V là một không gian vectơ thực hữu hạn chiều và Q là một dạng toàn phương trên V. Khi đó trong V tồn tại một cơ sở Q-chuẩn tắc.*

Chứng minh. Ta gọi $\mathcal{B}$ là một cơ sở Q-chính tắc của V. Đặt $r = \text{rank}(Q)$. Bằng cách đánh số lại nếu cần ta có thể giả sử biểu thức tọa độ của Q trong cơ sở trên có dạng

$$Q(u) = a_1x_1^2 + a_2x_2^2 + \cdots + a_rx_r^2$$

và tồn tại số nguyên $0 \leq s \leq r$ sao cho

$$a_i > 0 \quad \forall i = \overline{1, s}; \qquad a_i < 0 \quad \forall i = \overline{s+1, r}.$$

Dùng phép biến đổi toạ độ không suy biến

$$x_i = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{a_i}} y_i & \text{nếu } 1 \leq i \leq s; \\ \dfrac{1}{\sqrt{-a_i}} y_i & \text{nếu } s+1 \leq i \leq r; \\ y_i & \text{nếu } r+1 \leq i \leq n \end{cases}$$

ta có được dạng chuẩn tắc của Q là

$$Q(u) = y_1^2 + \cdots + y_s^2 - y_{s+1}^2 - \cdots - y_r^2.$$

Cơ sở tương ứng chính là cơ sở Q-chuẩn tắc cần tìm.

Ví dụ. Cho dạng toàn phương Q trên $\mathbb{R}^4$ được xác định như sau

$$Q(x_1, x_2, x_3, x_4) = 4x_1^2 - 3x_2^2 + 9x_3^2 - x_4^2.$$

Tìm dạng chuẩn tắc của Q và cơ sở Q-chuẩn tắc của $\mathbb{R}^4$?

Giải. Ta thấy Q là một dạng chính tắc. Do đó để đưa về dạng chuẩn tắc thì ta cần sử dụng phép biến đổi tọa độ

$$\left\{\begin{array}{lcl} y_1 & = & 2x_1; \\ y_2 & = & 3x_3; \\ y_3 & = & \sqrt{3}x_2; \\ y_4 & = & x_4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{lcl} x_1 & = & \frac{1}{2}y_1; \\ x_2 & = & \frac{1}{\sqrt{3}}y_3; \\ x_3 & = & \frac{1}{3}y_2; \\ x_4 & = & y_4. \end{array}\right. \quad (1)$$

Do đó dạng chuẩn tắc của Q là

$$\boldsymbol{Q(u) = y_1^2 + y_2^2 - y_3^2 - y_4^2}.$$

trong đó $u = y_1u_1 + y_2u_2 + y_3u_3 + y_4u_4$ với $\mathcal{B} = \{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ là cơ sở Q-chuẩn tắc.

Tìm $\mathcal{B}$. Từ (1) ta có

$$(\mathcal{B}_0 \to \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Suy ra

$$u_1 = (\frac{1}{2}, 0, 0, 0);\ u_2 = (0, 0, 0, \frac{1}{3});\ u_3 = (0, \frac{1}{\sqrt{3}}, 0, 0);\ u_4 = (0, 0, 0, 1).$$

Ví dụ.(tự làm) Cho dạng toàn phương Q trên $\mathbb{R}^5$ được xác định như sau

$$Q(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = -x_1^2 + 4x_2^2 - 9x_3^2 - 16x_4^2 + 8x_5^2.$$

Tìm dạng chuẩn tắc của Q và cơ sở Q-chuẩn tắc của $\mathbb{R}^5$?

Định nghĩa. Cho Q là một dạng toàn phương trên V và $\mathcal{B}$ là một cơ sở Q-chuẩn tắc của V. Khi đó biểu thức tọa độ của Q trong cơ sở $\mathcal{B}$ có dạng

$$\boldsymbol{Q(u) = x_1^2 + \cdots + x_s^2 - x_{s+1}^2 - \cdots - x_r^2}.$$

trong đó $r = \operatorname{rank}(Q)$ và $0 \leq s \leq r$ không phụ thuộc vào cách chọn cơ sở $\mathcal{B}$. Ta gọi

- s là ***chỉ số dương quán tính*** của Q;
- $r - s$ là ***chỉ số âm quán tính*** của Q;
- $(s, r - s)$ là ***cặp chỉ số quán tính*** của Q;

Ví dụ.(tự làm) Cho công thức của dạng toàn phương Q trên $\mathbb{R}^6$ theo cơ sở nào đó của $\mathbb{R}^6$ là

$$Q(u) = 2x_1^2 - 4x_2^2 + 8x_3^2 - x_4^2 + 6x_5^2 - 7x_6^2.$$

Xác định chỉ số âm quán tính và chỉ số dương quán tính của Q.

Đáp án. $s = 3; r - s = 3$.

Nhận xét. *Giả sử Q là dạng toàn phương có dạng chính tắc*

$$Q(u) = a_1x_1^2 + a_2x_2^2 + \cdots + a_nx_n^2$$

Xét dãy $a_1, a_2, \ldots, a_n \quad (*)$. *Ta có*

(i) *Chỉ số dương quán tính của Q bằng số các số hạng dương của* $(*)$.

(ii) *Chỉ số âm quán tính của Q bằng số các số hạng âm của* $(*)$.

Ví dụ. Cho dạng toàn phương Q có dạng chính tắc

$$Q(u) = y_1^2 - 4y_2^2 + 5y_3^2 + \frac{1}{8}y_4^2$$

Khi đó Q có

- Chỉ số dương quán tính là 3.
- Chỉ số âm quán tính là 1.
- Cặp chỉ số quán tính là (3,1).

Định nghĩa. Cho Q là một dạng toàn phương trên V. Ta nói

1) Q ***xác định dương*** nếu $Q(u) > 0$ với mọi $u \neq 0$.
2) Q ***xác định âm*** nếu $Q(u) < 0$ với mọi $u \neq 0$.

Nhận xét. *Q xác định dương khi và chỉ khi dạng cực của Q là một tích vô hướng trên V.*

Định lý. *Cho Q là một dạng toàn phương trên không gian vectơ n chiều. Khi đó*

(i) *Q xác định dương $\Leftrightarrow$ Q có chỉ số dương quán tính bằng n.*
(ii) *Q xác định âm $\Leftrightarrow$ Q có chỉ số âm quán tính bằng n.*

Chứng minh. (i) ($\Rightarrow$) Giả sử Q xác định dương nhưng chỉ số dương quán tính của Q khác n. Gọi $\mathcal{B} = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ là một cơ sở Q-chính tắc của V. Khi đó biểu thức tọa độ của Q trong $\mathcal{B}$ có dạng

$$Q(u) = a_1x_1^2 + \cdots + a_nx_n^2$$

$$Q(u) = a_1x_1^2 + \cdots + a_nx_n^2$$

trong đó có $a_i \leq 0$ với một i nào đó.

Ta có $u_i \neq 0$ và $Q(u_i) = a_i \leq 0$. Mâu thuẫn với tính xác định dương của Q.

$(\Leftarrow)$ Giả sử Q có chỉ số dương quán tính bằng n. Khi đó tồn tại cơ sở Q-chuẩn tắc $\mathcal{B}$ của V sao cho biểu thức tọa độ của Q trong cơ sở $\mathcal{B}$ có dạng như sau:

$$Q(u) = x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2$$

với $u = x_1u_1 + x_2u_2 + \cdots + x_nu_n$.

Nếu $u \neq 0$ thì tồn tại i sao cho $x_i \neq 0$, dẫn đến $Q(u) > 0$. Vậy Q xác định dương.

(ii) Tương tự như chứng minh (i).

Ví dụ.(tự làm) Tìm tham số m để cho dạng toàn phương trên $\mathbb{R}^3$

$$Q(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + (m^2 - 1)x_2^2 + (m+2)x_3^2.$$

xác định dương?

Ví dụ.(tự làm) Cho dạng toàn phương trên $\mathbb{R}^3$ xác định bởi

$$Q(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 + 2x_2^2 + 17x_3^2 - 8x_1x_3 + 8x_2x_3.$$

Hỏi Q xác định dương hay âm?

Hệ quả. *Mọi dạng toàn phương xác định dương hay xác định âm đều không suy biến.*

Ví dụ. Đưa dạng toàn phương sau về dạng chuẩn tắc

$$Q(x,y,z) = 2x^2 + 9y^2 + 9z^2 + 8xy + 4xz + 12yz.$$

Chỉ ra cơ sở Q-chuẩn tắc và phép biến đổi toạ độ tương ứng. Từ đó xác định các chỉ số quán tính của Q. Xét xem Q có xác định dương hay xác định âm không?

Giải. Dùng thuật toán Lagrange đề đưa Q về dạng chính tắc.

$$\begin{aligned} Q(x,y,z) &= \mathbf{2x^2} + 9y^2 + 9z^2 + \mathbf{8xy} + \mathbf{4xz} + 12yz \\ &= 2[x^2 + 2x(2y+z)] + 9y^2 + 9z^2 + 12yz \\ &= 2(x+2y+z)^2 - 2(2y+z)^2 + 9y^2 + 9z^2 + 12yz \\ &= 2(x+2y+z)^2 + \mathbf{y^2} + \mathbf{4yz} + 7z^2 \\ &= 2(x+2y+z)^2 + (y+2z)^2 + 3z^2 \\ &= [\sqrt{2}(x+2y+z)]^2 + (y+2z)^2 + (\sqrt{3}z)^2. \end{aligned}$$

$$Q(u) = [\sqrt{2}(x+2y+z)]^2 + (y+2z)^2 + (\sqrt{3}z)^2$$

Thực hiện phép biến đổi tọa độ

$$\left\{\begin{array}{lcl} x' & = & \sqrt{2}(x+2y+z) \\ y' & = & y+2z \\ z' & = & \sqrt{3}z \end{array}\right. \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 2\sqrt{2} & \sqrt{2} \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & \sqrt{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Ta đưa Q về dạng chuẩn tắc

$$Q(u) = {x'}^2 + {y'}^2 + {z'}^2 \qquad (\star)$$

với $u = x'u_1 + y'u_2 + z'u_3$, trong đó trong đó cơ sở Q-chuẩn tắc $\mathcal{B} = \{u_1, u_2, u_3\}$ định bởi

$$(\mathcal{B} \to \mathcal{B}_0) = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 2\sqrt{2} & \sqrt{2} \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & \sqrt{3} \end{pmatrix}$$

với $\mathcal{B}_0$ là cơ sở chính tắc của $\mathbb{R}^3$.

Ta có

$$(\mathcal{B}_0 \to \mathcal{B}) = (\mathcal{B} \to \mathcal{B}_0)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -2 & \sqrt{3} \\ 0 & 1 & -\frac{2}{\sqrt{3}} \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}.$$

Do đó

$$u_1 = (\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, 0); u_2 = (-2, 1, 0); u_3 = (\sqrt{3}, -\frac{2}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}).$$

Từ $(\star)$ ta suy ra:

- Chỉ số dương quán tính của Q là 3.
- Chỉ số âm quán tính của Q là 0.
- Q xác định dương.

Ví dụ. Đưa dạng toàn phương sau về dạng chính tắc

$$Q(x, y, z) = 2x^2 + 9y^2 + \lambda z^2 + 8xy + 4xz + 12yz.$$

Xác định tham số $\lambda \in \mathbb{R}$ để Q không suy biến; và Q xác định dương.

Giải. Dùng thuật toán Lagrange đề đưa Q về dạng chính tắc.

$$Q(x, y, z) = 2(x + 2y + z)^2 + (y + 2z)^2 + (\lambda - 6)z^2.$$

Thực hiện phép biến đổi tọa độ

$$\begin{cases} x' &= x + 2y + z \\ y' &= y + 2z \\ z' &= z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Suy ra

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x &= x' - 2y' + 3z' \\ y &= y' - 2z' \\ z &= z' \end{cases}$$

Khi đó dạng chính tắc của Q là

$$Q(u) = 2x'^2 + y'^2 + (\lambda - 6)z'^2. \qquad (\star\star)$$

Từ $(\star\star)$ ta có

- Q không suy biến $\Leftrightarrow \lambda - 6 \neq 0 \Leftrightarrow \lambda \neq 6$.
- Q xác định dương $\Leftrightarrow \lambda - 6 > 0 \Leftrightarrow \lambda > 6$.

Ví dụ.(tự làm) Xác định tham số m để dạng toàn phương sau không xác định dương và không xác định âm.

$$Q(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 5x_2^2 + mx_3^2 - 4x_1x_2 + 6x_1x_3 + 2x_2x_3$$

Đáp án. $m < 58$.

Tiêu chuẩn Sylvester

Định nghĩa. Cho $A = (a_{ij})_{n\times n}$ là một ma trận vuông cấp n. ***Định thức con chính cấp k*** $(1 \leq k \leq n)$ của A là định thức con sinh bởi các dòng $1,\ldots,k$ và các cột $1,\ldots,k$:

$$\Delta_k = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} \end{vmatrix}.$$

Định lý. *[**Tiêu chuẩn Sylvester**] Giả sử Q là một dạng toàn phương trên V có ma trận biểu diễn theo một cơ sở nào đó là A. Khi đó*

(i) *Q xác định dương $\Leftrightarrow$ mọi định thức con chính của A đều dương.*

(ii) *Q xác định âm $\Leftrightarrow$ mọi định thức con chính cấp chẵn của A đều dương và mọi định thức con chính cấp lẻ của A đều âm.*

Ví dụ. Xác định tham số $\lambda \in \mathbb{R}$ để dạng toàn phương sau xác định dương
$$Q(x, y, z) = x^2 + \lambda y^2 + (\lambda + 3)z^2 - 2xy + 4xz - 6yz.$$

Giải. Ma trận của dạng toàn phương Q theo cơ sở chính tắc là

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & \lambda & -3 \\ 2 & -3 & \lambda+3 \end{pmatrix}.$$

Các định thức con chính của A là

$\Delta_1 = 1.$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda - 1.$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & \lambda & -3 \\ 2 & -3 & \lambda+3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & \lambda-1 & -1 \\ 0 & -1 & \lambda-1 \end{vmatrix} = (\lambda-1)^2 - 1 = \lambda^2 - 2\lambda.$$

Theo tiêu chuẩn Sylvester ta có

$$Q \text{ xác định dương} \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta_1 > 0 \\ \Delta_2 > 0 \\ \Delta_3 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 > 0 \\ \lambda - 1 > 0 \\ \lambda^2 - 2\lambda > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \lambda > 2.$$

Ví dụ.(tự làm) Xác định tham số m để dạng toàn phương sau xác định dương

$$Q(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 4x_2^2 + mx_3^2 - 2x_1x_2 + 8x_1x_3 + 4x_2x_3.$$

Đáp án. $m > 28$.

Ví dụ.(tự làm) Cho dạng toàn phương thực phụ thuộc vào tham số $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$Q(x, y, z) = x^2 + (6 - \lambda)y^2 + 4z^2 + 4xy - 2xz + (2\lambda - 8)yz.$$

a) Với $\lambda = 1$, đưa Q về dạng chính tắc và tìm cơ sở Q-chính tắc tương ứng?

b) Tìm điều kiện λ để Q xác định dương?