Một Số Lý Thuyết và Các Dạng Bài Tập Chương 5

1) Nhận Diện Ánh Xạ Tuyến Tính

Cho f. Giải thích $f \in L(R^n, R^m)$

Cách giải:

$\forall X(x_1, \ldots x_n) \in R^n$, $f(X) = XA$ với $A \in M_{n \times m}$

$\Rightarrow f \in L(R^n, R^m)$

Ví dụ

Cho $f(u, v, w, t) = (2u - v + 5w + 4t, -4u + 3v - w - t, 8u - 6v + 2w)$

Giải thích $f \in L(R^4, R^3)$

Giải:

$\forall X(u, v, w, t) \in R^4$

$$f(X) = (2u - v + 5w + 4t, -4u + 3v - w - t, 8u - 6v + 2w)$$

$$= \underbrace{(u\ v\ w\ t)}_{X} \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & -4 & 8 \\ -1 & 3 & -6 \\ 5 & -1 & 2 \\ 4 & -1 & 0 \end{pmatrix}}_{A \in M_{4\times 3}} = XA$$

$\Rightarrow f(X) \in L(R^4, R^3)$

2) Tìm cơ sở cho $Im(f)$ (Với $f \in L(R^n, R^m)$)

Bước 1: Chọn cơ sở tùy ý (thường chọn cơ sở chính tắc)

$$\partial = \{\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_n\}$$

Bước 2: Tính $f(\partial) = \{f(\alpha_1), f(\alpha_2) \ldots f(\alpha_n)\}$

Bước 3: Ta có $\langle f(\mathcal{B}) \rangle = Im(f)$

Tìm cơ sở cho $Im(f)$ từ $f(\mathcal{B})$ (Tìm cơ sở K/g sinh)

Vd:

Cho $f \in L(\mathbb{R}^4, \mathbb{R}^3)$. Tìm cơ sở cho $Im(f)$

$f(u, v, w, t) = (u + 2v + 4w - 7t, -3u + 2v + 5t, 2u + v - w - 2t)$

Giải: Chọn $\mathcal{B} = \mathcal{B}_0 = \{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4\}$ (cơ sở chính tắc $\mathbb{R}^4$)

Ta có $f(\mathcal{B}) = \{f(\varepsilon_1), f(\varepsilon_2), f(\varepsilon_3), f(\varepsilon_4)\}$

và $\langle f(\mathcal{B}) \rangle = Im(f)$

Đặt $A = \begin{pmatrix} f(\varepsilon_1) \\ f(\varepsilon_2) \\ f(\varepsilon_3) \\ f(\varepsilon_4) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(1,0,0,0) \\ f(0,1,0,0) \\ f(0,0,1,0) \\ f(0,0,0,1) \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \\ 4 & 0 & -1 \\ -7 & 5 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{ghi rõ từng bước biến đổi}} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 0 & 4 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Đặt $\delta_1 = (1, -3, 2)$, $\delta_2 = (0, 4, -3)$

$Im(f)$ có cơ sở $\mathcal{C} = \{\delta_1 = (1, -3, 2), \delta_2 = (0, 4, -3)\}$

và $\dim(Im(f)) = |\mathcal{C}| = 2$

3) Tìm cơ sở cho không gian nhân

Cho $f \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$

$f(X(x_1 \dots x_n)) = (\alpha_1 \dots \alpha_m)$

Tìm 1 cơ sở cho $Ker(f)$ (Tìm cơ sở cho không gian nghiệm)

Giải

Bước 1: Viết lại

đã biết

$f: X(x_1 \dots x_n) \longmapsto f(X) = (\alpha_1 \dots \alpha_m)$

$Ker(f) = \{ X(x_1 \dots x_n) \in R^n / f(X) = 0 = (0, 0 \dots 0) \in R^m \}$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 = 0 & (1) \\ \alpha_2 = 0 \\ \dots \\ \alpha_m = 0 \end{cases}$$

Bước 2: Giải hệ để tìm $X(x_1 \dots x_n)$

$$(1) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{c|c} \alpha_1 & 0 \\ \alpha_2 & 0 \\ \alpha_{\dots} & 0 \\ \alpha_m & 0 \end{array}\right) \longrightarrow \begin{array}{cl} \left(\begin{array}{c|c} \gamma_1 & 0 \\ \gamma_2 & 0 \\ \vdots & \vdots \\ \gamma_k & 0 \\ \hline 0 & 0 \\ \vdots & \vdots \\ 0 & 0 \end{array}\right) & \begin{array}{l} k \\ \\ \\ \\ n-k \end{array} \end{array}$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_k \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \Big\} n-k$$

$\Rightarrow Ker(f) = \{ X(x_1 \dots x_n) \}$

Bước 3: Dùng PP tách thừa số để tìm cơ sở cho Ker(f)

$Ker(f) = \{ X(x_1 \dots x_n) \}$

$= \{ X = (c_1 \delta_1 + c_2 \delta_2 \dots c_k \delta_k) \}$

$Ker(f) = \langle D \rangle, D = \{ \delta_1 \dots \delta_k \}$

$\dim(Ker(f)) = |D| = k$

Vd: Cho $f \in L(R^4, R^3)$. Tìm cơ sở cho Ker(f)

$X = (u, v, w, t) \longmapsto f(X) = (u + 2v + 4w - 7t, -3u - 2v + 5t$
$2u + v - w - 2t)$

Giải:

$f: X(u, v, w, t) \longmapsto f(X) = (u + 2v + 4w - 7t, -3u - 2v + 5t$
$2u + v - w - 2t)$

$Ker(f) = \{ X(u, v, w, t) / f(X) = 0 = (0, 0, 0) \}$

$$\Rightarrow \begin{cases} u + 2v + 4w - 7t = 0 \\ -3u - 2v + 5t = 0 \\ 2u + v - w - 2t = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 4 & -7 & 0 \\ -3 & 2 & 0 & 5 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & -2 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{ghi rõ từng bước biến đổi}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Nghiệm của hệ: $w, t \in R$

$v = 4t - 3w$

$u = -t + 2w$

$\Rightarrow Ker(f) = \{ X = (2w - t, 4t - 3w, w, t) \mid w, t \in R \}$

$= \{ X = (w(2, -3, 1, 0) + t(-1, 4, 0, 1) / w, t \in R \}$

Đặt $\Delta_1 = (2, -3, 1, 0)$

$\Delta_2 = (-1, 4, 0, 1)$

$Ker(f) = \langle D \rangle$, $D = \{ \Delta_1 = (2, -3, 1, 0)$
$\Delta_2 = (-1, 4, 0, 1) \}$

$\dim(Ker(f)) = |D| = 2$

4) Ma trận biểu diễn AXTT

Các công thức (định nghĩa, hệ quả) cần nhớ:

R^n có cơ sở $@ = \{\alpha_1 \dots \alpha_n\}$

R^m có cơ sở $\beta = \{\beta_1 \dots \beta_m\}$

Ma trận biểu diễn AXTT f theo 2 cơ sở $@, \beta$

$$A = [f]_{@\beta} = ([f(\alpha_1)]_\beta \quad [f(\alpha_2)]_\beta \dots [f(\alpha_n)_\beta]) \quad (1)$$

Tìm A:

Giải hệ $(\beta_1^T \ \beta_2^T \dots \beta_m^T \mid \alpha_1^T \mid \alpha_2^T \mid \dots \mid \alpha_n^T)$

$\xrightarrow{\text{Gauss - Jordan}} (E_1 \dots E_m \mid [f(\alpha_1)]_\beta \mid [f(\alpha_2)]_\beta \dots \mid [f(\alpha_n)]_\beta$

$$[f(\alpha)]_\beta = [f]_{@\beta} \cdot [\alpha]_@ \quad (2)$$

Đặt $S = P(@ \to @') \in M_n(R)$

$T = P(\beta \to \beta') \in M_m(R)$

$$[f]_{@'\beta'} = T^{-1} [f]_{@\beta} S$$

$$[f]_{@'\beta} = [f]_{@\beta} \cdot S$$

$$[f]_{@\beta'} = T^{-1} [f]_{@\beta}$$

$$[f]_{@\beta} = T [f]_{@'\beta'} S^{-1}$$

$$[f]_{@\beta} = [f]_{@'\beta} \cdot S^{-1}$$

$$[f]_{@\beta} = T [f]_{@\beta'}$$

2 dạng bài toán:

a) Tìm $[f]_{@\beta}$ khi biết $f \in L(R^n, R^m)$ và 2 cơ sở @, β của R^n, R^m

Cách giải: dùng (1)

b) Tìm f khi biết $[f]_{@\beta}$ ($f \in L(R^n, R^m)$) và @, β

Cụ thể:

cho $\alpha = (\alpha_1 \ldots \alpha_n)$ hỏi $f(\alpha) = ?$

Cách giải:

- Bước 1: Đặt $\alpha = (\alpha_1 \ldots \alpha_n)$

  Tìm $[\alpha]_@$ theo $(\alpha_1 \ldots \alpha_n)$

- Bước 2: Dùng (2) tìm $[f(\alpha)]_\beta = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_m \end{pmatrix}$

- Bước 3: Tìm $f(\alpha)$

$$f(\alpha) = \beta \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_m \end{pmatrix}$$

$$= \beta_1 u_1 + \beta_2 u_2 + \ldots \beta_m u_m$$

Vd: Cho $f \in L(R^3, R^2)$

a) $f(u, v, w) = (2u - 5v + 8w, \; -7u + v - 9w)$

$@ = \{ \mathcal{E}_1 = (1, 0, 0), \mathcal{E}_2 = (0, 1, 0), \mathcal{E}_3 = (0, 0, 1) \}$

$\beta = \{ \mathcal{E}'_1 = (1, 0), \mathcal{E}'_2 = (0, 1) \}$

(cơ sở chính tắc của R^3 và R^2)

Tìm $A = [f]_{@\beta}$

Giải:

Tính $f(\varepsilon_1) = (2, -7)$

$f(\varepsilon_2) = (-5, 1)$

$f(\varepsilon_3) = (8, -9)$

$$A = [f]_{@\beta} = \left([f(\varepsilon_1)]_\beta \quad [f(\varepsilon_2)]_\beta \quad [f(\varepsilon_3)]_\beta \right)$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & -5 & 8 \\ -7 & 1 & -9 \end{pmatrix}$$

b) Cho $g \in L(R^2, R^3)$

$$[g]_{@\beta} = \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 1 & 1 \\ 6 & 3 \end{pmatrix}$$

với $@ = \{ \alpha_1 = (-5, 2), \ \alpha_2 = (-3, 1) \}$

(cơ sở của R^2)

$\beta = \{ \beta_1 = (1, 2, -4), \beta_2 = (-1, -1, 5), \beta_3 = (2, 7, -3) \}$

(cơ sở của R^3)

Tìm g? ($\forall \gamma = (u, v)$, $g(\gamma) = ?$)

Giải: Đặt $\gamma = (u, v)$

$[\gamma]_@ = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$. Giải hệ $(\alpha_1^T \ \alpha_2^T \mid \gamma^T)$

(Tìm tọa độ γ theo cơ sở @ - bài toán chương 4)

$$\begin{array}{cc} c_1 & c_2 \end{array}$$
$$\left(\begin{array}{cc|c} -5 & -3 & u \\ 2 & 1 & v \end{array}\right) \xrightarrow[(2) \to (2) - 2(1)]{(1) \to (1) + 3(2)} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & u + 3v \\ 0 & 1 & -2u - 5v \end{array}\right)$$

Vậy $c_1 = u + 3v$, $c_2 = -2u - 5v$

hay $[\gamma]_@ = \begin{pmatrix} u + 3v \\ -2u - 5v \end{pmatrix}$

Ta có $[g(\gamma)]_\beta = [g]_{@\beta} \cdot [\gamma]_@$

$\Rightarrow [g(\gamma)]_\beta = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 1 & 1 \\ 6 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u+3v \\ -2u-5v \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} u+v \\ -u-2v \\ 3v \end{pmatrix}$

$g(\gamma) = (u+v)\beta_1 + (-u-2v)\beta_2 + 3v\beta_3$

$= (u+v)(1,2,-4) + (u-2v)(-1,-1,5)$

$+ 3v(2,7,-3)$

$= (2u+9v, 3u+25u, -9u-23v)$

Vậy: $g \in L(R^2, R^3)$

$g(u,v) = (2u+9v, 3u+25v, -9u-23v)$

5) Xác định ánh xạ tuyến tính khi biết ảnh của 1 cơ sở.

a) Cách 1: (dùng tọa độ)

- $\forall \gamma \in R^n$ $(\gamma = (\gamma_1, \gamma_2 .. \gamma_n))$

$[\gamma]_@ = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$ $(@ = (\alpha_1, \alpha_2 ... \alpha_n))$

Giải hệ $(\alpha_1^T \ \alpha_2^T \ ... \ \alpha_n^T \mid \gamma_1^T \ ... \ \gamma_n^T)$

n phương trình n ẩn

để tìm $\begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$ theo $(\gamma_1 ... \gamma_n)$

- $f(\gamma) = f(c_1\gamma_1 + c_2\gamma_2 + ... + c_n\gamma_n)$

$= c_1 \underbrace{f(\gamma_1)}_{\beta_1} + c_2 \underbrace{f(\gamma_2)}_{\beta_2} + ... \ c_n \underbrace{f(\gamma_n)}_{\beta_n}$

Ta có

~~Đặt~~ $\beta_1 = f(\gamma_1)$, $\beta_2 = f(\gamma_2)$ ... $\beta_n = f(\gamma_n)$

$\Rightarrow f(\alpha) = c_1\beta_1 + c_2\beta_2 + \dots c_n\beta_n$

b) Cách 2 (dùng ma trận biểu diễn)

- R^n có cơ sở chính tắc $B_0 = \{\varepsilon_1 \dots \varepsilon_n\}$

  R^m có cơ sở chính tắc $B_0' = \{\varepsilon_1' \dots \varepsilon_m'\}$

  $S = P(B_0 \to \mathcal{B}) = (\alpha_1^T \dots \alpha_n^T)$

  $\Rightarrow S^{-1}$

- Viết $[f]_{\mathcal{B}, B_0'} \overset{\text{định nghĩa}}{=\!=} ([f(\alpha_1)]_{B_0'}\ [f(\alpha_2)]_{B_0'} \dots [f(\alpha_n)]_{B_0'})$

  Ta có $\beta_1 = f(\alpha_1)$

  $\beta_2 = f(\alpha_2)$

  ......

  $\beta_n = f(\alpha_n)$

$\Rightarrow [f]_{\mathcal{B} B_0'} = ([\beta_1]_{B_0'}\ [\beta_2]_{B_0'} \dots [\beta_n]_{B_0'})$

$= (\beta_1^T\ \beta_2^T \dots \beta_n^T)$

$\Rightarrow [f]_{B_0, B_0'} = [f]_{\mathcal{B} B_0'} \cdot S^{-1} = \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \vdots \\ \gamma_n \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \alpha = (\alpha_1, \alpha_2 \dots \alpha_n) \longmapsto f(\alpha) = (\gamma_1, \gamma_2 \dots \gamma_n)$

Ví dụ:

R^2 có cơ sở $\mathcal{B} = \{\alpha_1 = (-2, 5), \alpha_2 = (1, -2)\}$

và cơ sở chính tắc $B_0 = \{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$

R^3 có cơ sở chính tắc $B_0' = \{\varepsilon_1', \varepsilon_2', \varepsilon_3'\}$

Chọn $\beta_1 = (2, -1, 3)$, $\beta_2 = (-3, 2, 4) \in R^3$

Khi đó $\exists! f \in L(R^2, R^3)$ thỏa

$f(\alpha_1) = \beta_1$. Tìm f.

$f(\alpha_2) = \beta_2$

a) Cách 1:

$\forall \alpha = (u, v) \in R^2$

$[\alpha]_{a} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$ $\quad \begin{array}{cc|c} c_1 & c_2 & \\ \end{array}$ $(\alpha_1^T \; \alpha_2^T \mid \alpha) \Leftrightarrow \begin{array}{cc} c_1 & c_2 \end{array} \left(\begin{array}{cc|c} -2 & 1 & u \\ 5 & -2 & v \end{array}\right)$

$\longrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 2u+v \\ 0 & -2 & -10u+(-4v) \end{array}\right) \Rightarrow [\alpha]_{a} = \begin{pmatrix} c_1 = 2u+v \\ c_2 = 5u+2v \end{pmatrix}$

$f(\alpha) = f(c_1\alpha_1 + c_2\alpha_2)$

$= c_1 f(\alpha_1) + c_2 f(\alpha_2)$

$= (2u+v)(2, -1, 3) + (5u+2v)(-3, 2, 4)$

$= (-11u - 4v, 8u + 3v, 26u + 11v)$

b) Cách 2: Dùng ma trận biểu diễn AXTT

$S = P(B_0 \to a) = (\alpha_1^T \; \alpha_2^T) = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}$

có $S^{-1} = -\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 5 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$

$[f]_{a B_0'} = ([f(\alpha_1)]_{B_0'} \quad [f(\alpha_2)]_{B_0'})$

$= ([B_1]_{B_0'} \quad [B_2]_{B_0'})$

$= \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow [f]_{B_0, B_0'} = [f]_{a B_0'} \cdot S^{-1}$

$= \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -11 & -4 \\ 8 & 3 \\ 26 & 11 \end{pmatrix}$

Vậy $f \in L(R^2, R^3)$

$f(u, v) = (-11u - 4v, 8u + 3v, 26u + 11v)$

Một số bài tập mẫu

1) R^2, R^3, R^4 có cơ sở chính tắc lần lượt A, B, C

a) Cho $f(u,v,w) = (u-2v+3w,\ v-w+3u,\ 4w-2u-3v,\ 5u-3v+5w) \subset R^4$

- Giải thích $f \in L(R^3, R^4)$
- Viết $[f]_{BC}$
- Tìm cơ sở cho $Im(f)$ và $Ker(f)$
- Khi nào $y = (x, y, z, t) \in Im(f)$?

b) Cho $[g]_{AB} = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ Tính g.
$g \in L(R^2, R^3)$

Giải:

+ Giải thích $f \in L(R^3, R^4)$

$\forall X = (u, v, w) \in R^3$, ta có

$$f(X) = (u-2v+3w,\ 3u+v-w,\ -2u-3v+4w,\ 5u-3v+5w) \subset R^4$$

$$= \underbrace{(u\ v\ w)}_{X} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 5 \\ -2 & 1 & -3 & -3 \\ 3 & -1 & 4 & 5 \end{pmatrix}}_{A}$$

$= X \quad A \quad$ (với $A \in M_{34}$)

$\Rightarrow f \in L(R^3, R^4)$

+ $[f]_{BC} = \left([f(\varepsilon_1)]_C \quad [f(\varepsilon_2)]_C \quad [f(\varepsilon_3)]_C \right)$

$= \left(f(\varepsilon_1)^T \quad f(\varepsilon_2)^T \quad f(\varepsilon_3)^T \right)$

$f(\varepsilon_1 = (1,0,0)) = (1,3,-2,5)$

$f(\varepsilon_2 = (0,1,0)) = (-2,1,-3,-3)$

$f(\varepsilon_3 = (0,0,1)) = (3,-1,4,5)$

$+ [f]_{BC} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 3 & 1 & -1 \\ -2 & -3 & 4 \\ 5 & -3 & 5 \end{pmatrix}$

+ Tìm cơ sở $Im(f)$

R^3 có cơ sở chính tắc $B = \{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3\}$

R^4 có cơ sở chính tắc $C = \{\varepsilon_1', \varepsilon_2', \varepsilon_3', \varepsilon_4'\}$

$f(B) = \{f(\varepsilon_1)\ f(\varepsilon_2)\ f(\varepsilon_3)\}$

$= \{(1,3,-2,5), (-2,1,-3,-3), (3,-1,4,5)\}$

Ta có $\langle f(B)\rangle = Im(f)$

Tìm cơ sở ∂ cho $Im(f)$ từ $f(B)$

$A = \begin{pmatrix} f(\varepsilon_1) \\ f(\varepsilon_2) \\ f(\varepsilon_3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 5 \\ -2 & 1 & -3 & -3 \\ 3 & -1 & 4 & 5 \end{pmatrix} \longrightarrow$

$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 5 \\ 0 & 7 & -7 & 7 \\ 0 & -10 & 10 & -10 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

Vậy Đặt $\Sigma_1 = (1,3,-2,5)$

$\Sigma_2 = (0,1,-1,1)$

$Im(f)$ có cơ sở $\partial = \{\Sigma_1 = (1,3,-2,5), \Sigma_2 = (0,1,-1,1)\}$

Tìm cơ sở cho Ker(f)

$f(u, v, w) = (u - 2v + 3w, 3u + v - w, -2u - 3v + 4w, 5u - 3v + 5w)$

$Ker(f) = \{X(u, v, w) / f(X) = 0 = (0, 0, 0, 0)\}$

$$\Rightarrow \begin{cases} u - 2v + 3w = 0 \\ 3u + v - w = 0 \\ -2u - 3v + 4w = 0 \\ 5u - 3v + 5w = 0 \end{cases} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & -1 & 0 \\ -2 & -3 & 4 & 0 \\ 5 & -3 & 5 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\substack{(2) - 3(1) \\ (3) + 2(1) \\ (4) - 5(1)}]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 7 & -10 & 0 \\ 0 & -7 & 10 & 0 \\ 0 & 7 & -10 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{(3) \to (3) + (2) \\ (4) \to (4) - (2)}]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 7 & -10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 7 & -10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} = \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \end{array}$$

Nghiệm $w \in R$

$v = +\frac{10}{7} w$

$u = -3w + 2v = \frac{-1}{7} w$

$Ker(f) = \{X = (\frac{-1}{7} w, \frac{10}{7} w, w)\}$

$= \{X = \frac{w}{7}(\frac{-1}{7}, \frac{10}{7}, 7)\}$

Đặt $\gamma = (-1, 10, 7)$

$S = \{\gamma = (-1, 10, 7)\}$ là cơ sở của Ker(f)

$y(x, y, z, t) \in Im(f)$

$\Leftrightarrow$ y là 1 tổ hợp tuyến tính của $f(B)$

$\Leftrightarrow$ $y = c_1\alpha_1 + c_2\alpha_2$

$$\begin{array}{cc} c_1 & c_2 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & x \\ 3 & 1 & y \\ -2 & -1 & z \\ 5 & 1 & t \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & x \\ 0 & 1 & y-3x \\ 0 & -1 & z+2x \\ 0 & 1 & t-5x \end{array}\right)$$

Hệ có n_0 $\Leftrightarrow \begin{cases} -z-2x = t-5x \\ y-3x = t-5x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+y-t=0 \\ -3x+z+t=0 \end{cases}$

b) Cho $[g]_{AB} = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$. Tính g

Đặt $\gamma = (u, v)$

$[\gamma]_A = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$

$$\begin{array}{cc} c_1 & c_2 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & u \\ 0 & 1 & v \end{array}\right) \Rightarrow [\gamma]_A = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

$$[g(\gamma)]_B = [g]_{AB} \cdot [\gamma]_A = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -u+3v \\ 2v \\ -2u+v \end{pmatrix}$$

$g(\gamma) = (-u+3v)(1,0,0) + 2u(0,1,0) + (-2u+v)(0,0,1)$

$= (-u+3v, 2u, -2u+v)$

5) R^3, R^4 có các cơ sở chính tắc lần lượt là B và C

a) Giải thích $E = \{\alpha_1 = (2,-1,5), \alpha_2 = (-1,0,-1), \alpha_3 = (-4,-2,1)\}$ là một cơ sở R^3. Tìm $[\alpha]_E$ nếu $\alpha = (u, v, w) \in R^3$

Giải

. $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in R^3 \Rightarrow E \subset R^3$

. Lập $A = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 5 \\ -1 & 0 & -1 \\ -4 & -2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[(3) \to (3) + 2(1)]{(2) \to 2(2) + (1)} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 5 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & -4 & 11 \end{pmatrix}$

$\xrightarrow[(3) \to (3) - 4(2)]{} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 5 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow |E| = r(A) = 3 = \dim(R^3)$

Vậy E là 1 cơ sở của R^3

$[\alpha]_E = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$

Ta có
$$\begin{array}{c} \begin{matrix} c_1 & c_2 & c_3 \end{matrix} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & -4 & u \\ -1 & 0 & -2 & v \\ 5 & -1 & 1 & w \end{array}\right) \end{array} \xrightarrow[\substack{(2) \to (2) - (1) \\ (3) \to (3) - 5(1)}]{(1) \to (1) + (2)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -6 & u+v \\ 0 & 1 & 8 & -u-2v \\ 0 & 4 & 31 & w+5u+5v \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\substack{(2) \to -(2) \\ (3) \to (3) - 4(2)}]{(1) \to (1) - (2)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & -v \\ 0 & 1 & 8 & -u-2v \\ 0 & 0 & -1 & w+u-3v \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{(1) \to (1) + 2(3) \\ (2) \to (2) + 8(3) \\ (3) \to -(3)}]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2u-7v+2w \\ 0 & 1 & 0 & 7u+22v+8w \\ 0 & 0 & 1 & u-3v-w \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[(3) \to -(3) + 4(2)]{(1) \to (1) + (2)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & -v \\ 0 & 1 & 8 & -u-2v \\ 0 & 0 & 1 & u-3v-w \end{array}\right) \xrightarrow[(2) \to (2) - (3).8]{(1) \to (1) - (3).2}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -2u+5v+2w \\ 0 & 1 & 0 & -9u+22v+8w \\ 0 & 0 & 1 & u-3v-w \end{array}\right)$$

Vậy $[\alpha]_E = \begin{pmatrix} -2u+5v+2w \\ -9u+22v+8w \\ u-3v-w \end{pmatrix}$

b) Cho $\beta_1 = (-2, 3, 1)$, $\beta_2 = (1, 0, -3)$, $\beta_3 = (3, 4, 1) \in R^3$

Tìm $f \in L(R^3)$ thỏa $f(\alpha_j) = \beta_j \ \forall j = 1, 2, 3$

(dùng $[\alpha]_E$ hay $[f]_{E,B}$)

Dùng $[\alpha]_E$: Ta có $\alpha = (u, v, w) \in R^3$

Tìm $f(\alpha)$.

$f(\alpha) =$

$\alpha = (\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3).[\alpha]_E = (\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3)\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$

$= c_1\alpha_1 + c_2\alpha_2 + c_3\alpha_3$

$$\begin{aligned} f(\alpha) &= f(c_1\alpha_1) + f(c_2\alpha_2) + f(c_3\alpha_3) \\ &= c_1 f(\alpha_1) + c_2 f(\alpha_2) + c_3 f(\alpha_3) \\ &= c_1 \beta_1 + c_2 \beta_2 + c_3 \beta_3 \\ &= (-2u+5v+2w)(-2, 3, 1) + (-9u+22v+8w)(1, 0, -3) \\ &\quad + (u-3u-w)(3, 4, 1) \\ &= (-2u+3v-16w, -2u+3v+2w, 26u - [illegible]v - 23w) \end{aligned}$$

tính không đảm bảo đúng.

Ngày ......tháng ......năm......

$$\Rightarrow [\alpha]_E = \begin{pmatrix} -2u+15v+2w \\ -9u+62v+8w \\ u-8v-w \end{pmatrix}$$

(b) $\beta_1 = (-2,3,1)$, $\beta_2 = (1,0,-3)$, $\beta_3 = (3,4,1) \in \mathbb{R}^3$

$f \in L(\mathbb{R}^3)$

• $[\alpha]_E = \begin{pmatrix} -2u+15v+2w \\ -9u+62v+8w \\ u-8v-w \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \alpha = (-2u+15v+2w)\alpha_1 + (-9u+62v+8w)\alpha_2 + (u-8v-w)\alpha_3$

$f \in L(\mathbb{R}^3)$

$\Rightarrow f(\alpha) = (-2u+15v+2w) f(\alpha_1) + (-9u+62v+8w) f(\alpha_2) + (u-8v-w) f(\alpha_3)$

$= (-2u+15v+2w)(-2,3,1) + (-9u+62v+8w)(1,0,-3) + (u-8v-w)(3,4,1)$

$= (-2u+w, -2u+13v+2w, 26u-179v-23w)$

• $[f]_{E,B} = \left([f(\alpha_1)]_B \quad [f(\alpha_2)]_B \quad [f(\alpha_3)]_B \right)$

$= (\beta_1^t \quad \beta_2^t \quad \beta_3^t)$ (do B là cơ sở chính tắc của $\mathbb{R}^3$)

Ngày ......tháng ......năm......

$$= \begin{pmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & 4 \\ 1 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

$[f(\alpha)]_B = [f]_{E,B} \, P(E \to B)$

$$P(E \to B) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -4 \\ -1 & 0 & -2 \\ 5 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow [f(\alpha)]_B = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & 4 \\ 1 & -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -4 \\ -1 & 0 & -2 \\ 5 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 10 & -1 & 9 \\ 26 & -7 & -8 \\ 10 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

do B là cơ sở chính tắc của $\mathbb{R}^3$

$$\Rightarrow \cancel{f(\alpha)} \quad [f]_B = \begin{pmatrix} 10 & -1 & 9 \\ 26 & -7 & -8 \\ 10 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

$\forall \alpha = (u, v, w) \in \mathbb{R}^3$, $[f(\alpha)]_B = [f]_B \cdot [\alpha]_B$

$$= \begin{pmatrix} 10 & -1 & 9 \\ 26 & -7 & -8 \\ 10 & -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}$$ (do B là cơ sở ct of $\mathbb{R}^3$)

Ngày ......tháng ......năm......

$= \begin{pmatrix} & \\ & \end{pmatrix} \Rightarrow f = \ldots$

ⓒ $\gamma_1 = (1,-1,0,1)$, $\gamma_2 = (-2,1,3,0)$, $\gamma_3 = (3,0,-4,$

$g \in L(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^4)$ thoả $g(\alpha_j) = \gamma_j \ \forall j = 1,2,3$

(+)

$$[\alpha]_E = \begin{pmatrix} -2u + 15v + 2w \\ -9u + 62v + 8w \\ u - 8v - w \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow \alpha = (-2u + 15v + 2w)\alpha_1 + (-9u + 62v + 8w)$

$+ (u - 8v - w)\alpha_3$

$\Rightarrow g(\alpha) = (-2u + 15v + 2w) g(\alpha_1) + (-9u + 62v + 8w)$

$+ (u - 8v - w) g(\alpha_3)$

(do $g \in L(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^4)$)

$= (-2u + 15v + 2w)\gamma_1 + (-9u + 62v + 8w$

$+ (u - 8v - w)\gamma_3$

$= \ldots$

(+) $[g(\alpha)]_C = [g]_{B,C} [\alpha]_B$

(*) $[g]_{B,C} = [g]_{E,C} P(E \to B$