Chương 1:

MA TRẬN VÀ HỆ PHƯƠNG TRÌNH TUYẾN TÍNH

Lê Văn Luyện

lvluyen@yahoo.com

http://www.math.hcmus.edu.vn/~lvluyen/09tt

Đại học Khoa Học Tự Nhiên Tp. Hồ Chí Minh

Chương 1. MA TRẬN VÀ HỆ PHƯƠNG TRÌNH TUYẾN TÍNH

1. Ma trận
2. Các phép biến đổi sơ cấp trên dòng
3. Hệ phương trình tuyến tính
4. Ma trận khả nghịch
5. Phương trình ma trận

1. Ma trận

1.1. Định nghĩa và ký hiệu

Định nghĩa. Một *ma trận* cấp $m \times n$ trên $\mathbb{R}$ là một bảng chữ nhật gồm m dòng, n cột với mn hệ số trong $\mathbb{R}$ có dạng

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Viết tắt: $\mathrm{A} = (\mathrm{a_{ij}})_{\mathrm{m \times n}}$ hay $\mathrm{A} = (\mathrm{a_{ij}})$, trong đó $a_{ij} \in \mathbb{R}$.

$\mathrm{a_{ij}}$ hay $\mathrm{A_{ij}}$ là phần tử ở vị trí dòng i cột j của A

$M_{m\times n}(\mathbb{R})$ là tập hợp tất cả những ma trận cấp $m \times n$ trên $\mathbb{R}$.

1.1. Định nghĩa và ký hiệu

Ví dụ.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \in M_{2\times 3}(\mathbb{R}); \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \in M_{3\times 2}(\mathbb{R}).$$

▷ Ma trận có các phần tử bằng 0 được gọi là ***ma trận không***, ký hiệu $0_{m\times n}$ (hay 0)

Ví dụ.

$$0_{3\times 4} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1.2. Ma trận vuông

Định nghĩa. Nếu $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ (số dòng bằng số cột) thì A được gọi là ***ma trận vuông***.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

$M_n(\mathbb{R})$: Tập hợp tất cả các ma trận vuông cấp n trên $\mathbb{R}$.

Ví dụ.

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 5 & 2 & 3 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R}); \quad 0_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

1.2. Ma trận vuông

Định nghĩa. Nếu $A = (a_{ij}) \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ thì đường chứa các phần tử $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}$ được gọi là ***đường chéo chính*** hay ***đường chéo*** của A.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Ví dụ.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ -2 & -3 & 3 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

• Nếu các phần tử nằm dưới đường chéo của A đều bằng 0 (nghĩa là $a_{ij} = 0, \forall i > j$) thì A được gọi là ma trận ***tam giác trên***.

• Nếu các phần tử nằm trên đường chéo của A đều bằng 0 (nghĩa là $a_{ij} = 0, \forall i < j$) thì A được gọi là ma trận ***tam giác dưới***.

• Nếu mọi phần tử nằm ngoài đường chéo bằng 0 thì A (nghĩa là $a_{ij} = 0, \forall i \neq j$) được gọi là ***ma trận đường chéo***, ký hiệu $\mathrm{diag}(\mathrm{a}_1, \mathrm{a}_2, \ldots, \mathrm{a}_\mathrm{n})$.

Ví dụ. $$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -4 \end{pmatrix}.$$

$$C = \mathrm{diag}(-1, 0, 5) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

Ma trận đơn vị

Ma trận vuông cấp n có các phần tử trên đường chéo bằng 1, các phần tử nằm ngoài đường chéo bằng 0 được gọi là ***ma trận đơn vị cấp n***, ký hiệu $\mathrm{I_n}$ (hoặc I.)

Ví dụ.

$$I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Nhận xét. *Ma trận A là ma trận đường chéo khi và chỉ khi vừa là ma trận tam giác vừa là ma trận tam giác dưới.*

1.3. Các phép toán trên ma trận

a) So sánh hai ma trận

Cho $A, B \in M_{m\times n}$. Khi đó, nếu $a_{ij} = b_{ij}, \forall i, j$ thì A và B được gọi là hai ma trận bằng nhau, ký hiệu $\mathrm{A} = \mathrm{B}$.

Ví dụ. Tìm x, y, z để $\begin{pmatrix} x+1 & 1 \\ 2x-1 & z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3y-4 & 1 \\ y-1 & 2z+2 \end{pmatrix}$.

Giải. Ta có

$$\begin{cases} x+1 = 3y-4; \\ 2x-1 = y-1; \\ z = 2z+2. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1; \\ y = 2; \\ z = -2. \end{cases}$$

1.3. Các phép toán trên ma trận

b) Chuyển vị ma trận

Cho $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$. Ta gọi ***ma trận chuyển vị*** của A, ký hiệu $A^\top$, là ma trận cấp $n \times m$, có được từ A bằng cách xếp các dòng của A thành các cột tương ứng, nghĩa là

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \text{ thì } A^\top = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Ví dụ.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 & 5 \\ 6 & -8 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & -3 & 6 \end{pmatrix} \Longrightarrow A^\top = \begin{pmatrix} 1 & 6 & 0 \\ -1 & -8 & 4 \\ 4 & 0 & -3 \\ 5 & 1 & 6 \end{pmatrix}.$$

- Nếu $A^\top = A$ thì ta nói A là ***ma trận đối xứng***.
- Nếu $A^\top = -A$ thì nói A là ***ma trận phản xứng***.

Ví dụ. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 4 & 5 \\ -2 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ là ma trận đối xứng.

$B = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & -3 \\ -1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$ là ma trận phản xứng.

Tính chất. *Cho $A, B \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$. Khi đó:*

i) $(A^\top)^\top = A$;

ii) $A^\top = B^\top \Leftrightarrow A = B$.

c) Nhân một số với ma trận

Cho ma trận $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R}), \alpha \in \mathbb{R}$. Ta định nghĩa αA là ma trận có từ A bằng cách nhân tất cả các hệ số của A với α, nghĩa là

$$(\alpha A)_{ij} = \alpha A_{ij}, \forall i, j.$$

Ma trận $(-1)A$ được ký kiệu là $-$A được gọi là *ma trận đối* của A.

Ví dụ. Nếu $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}$ thì

$$2A = \begin{pmatrix} 6 & 8 & 2 \\ 0 & 2 & -6 \end{pmatrix};.$$

$$-A = \begin{pmatrix} -3 & -4 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Tính chất. *Cho A là ma trận và α, $\beta \in \mathbb{R}$, ta có*

i) $(\alpha\beta)A = \alpha(\beta A)$;

ii) $(\alpha A)^\top = \alpha A^\top$;

iii) $0.A = 0$ *và* $1.A = A$.

d) Tổng hai ma trận

Cho $A, B \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$. Khi đó ***tổng*** của A và B, ký hiệu $\mathrm{A}+\mathrm{B}$ là ma trận được xác định bởi:

$$(A+B)_{ij} = A_{ij} + B_{ij}.$$

Như vậy, để tính $A+B$ thì:

- A và B cùng cấp;
- Các vị trí tương ứng cộng lại.

Ký hiệu $\mathrm{A}-\mathrm{B} := A+(-B)$ và gọi là ***hiệu*** của A và B.

Ví dụ.

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 \\ 7 & 8 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 3 & -4 \\ 8 & 10 & -6 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 \\ 7 & 8 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ -6 & -6 & 0 \end{pmatrix}.$$

Tính chất. *Với* $A, B, C \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ *và* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, *ta có*

i) $A + B = B + A$ *(tính* giao hoán*);*

ii) $(A + B) + C = A + (B + C)$ *(tính* kết hợp*);*

iii) $0_{m\times n} + A = A + 0_{m\times n} = A$*;*

iv) $A + (-A) = (-A) + A = 0_{m\times n}$*;*

v) $(A + B)^\top = A^\top + B^\top$*;*

vi) $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$*;*

vii) $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$*;*

viii) $(-\alpha)A = \alpha(-A) = -(\alpha A)$.

e) Tích hai ma trận

Cho hai ma trận $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R}), B \in M_{n\times p}(\mathbb{R})$. Khi đó, ***tích*** của A với B (ký hiệu AB) là ma trận thuộc $M_{m\times p}(\mathbb{R})$ được xác định bởi:

$$(AB)_{ij} = A_{i1}B_{1j} + A_{i2}B_{2j} + \ldots + A_{in}B_{nj}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{i1} & a_{i2} & \ldots & a_{in} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & \ldots & b_{1j} & \ldots & b_{1n} \\ b_{21} & \ldots & b_{2j} & \ldots & b_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ b_{n1} & \ldots & b_{nj} & \ldots & b_{nn} \end{pmatrix}$$

Như vậy, để tính AB thì:

- Số cột của A bằng số dòng của B;
- Phần tử thứ i, j của AB bằng dòng i của A nhân cột j của B.

Ví dụ. Với $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$,

ta có:

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 11 & 8 \end{pmatrix};$$

$$BA = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 5 & 5 \\ 5 & 5 & 0 \\ 0 & 5 & -5 \end{pmatrix};$$

$$BC = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 5 & -2 \\ 5 & -3 \end{pmatrix};$$

nhưng AC và CB không xác định.

Tính chất. *Với* $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$, $B, B_1, B_2 \in M_{n\times p}(\mathbb{R})$, $C \in M_{p\times q}(\mathbb{R})$, $D_1, D_2 \in M_{q\times n}(\mathbb{R})$, *ta có*

i) $I_m A = A$ *và* $AI_n = A$. *Đặc biệt, với* $A \in M_n(\mathbb{R})$, *ta có*
$$I_n A = AI_n = A.$$

ii) $0_{p\times m}A = 0_{p\times n}$ *và* $A0_{n\times q} = 0_{m\times q}$. *Đặc biệt, với* $A \in M_n(\mathbb{R})$, *ta có*
$$0_{n\times n}A = A0_{n\times n} = 0_{n\times n}.$$

iii) $(AB)^\top = B^\top A^\top$.

iv) $(AB)C = A(BC)$.

v) $A(B_1 + B_2) = AB_1 + AB_2$

$(D_1 + D_2)A = D_1A + D_2A$.

f) Lũy thừa ma trận

Cho $A \in M_n(\mathbb{R})$. Ta gọi ***lũy thừa*** bậc k của A là một ma trận thuộc $M_n(\mathbb{R})$, ký hiệu A^{k}, được xác định như sau:

$$A^0 = I_n; A^1 = A; A^2 = AA; \ldots ; A^k = A^{k-1}A.$$

Như vậy $A^k = \underbrace{A \ldots A}_{k \text{ lần}}$.

Ví dụ. Cho $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Tính A^2, A^3, từ đó suy ra A^{200}.

Giải.

$$A^2 = AA = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$A^3 = A^2A = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 9 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Suy ra $A^{200} = \begin{pmatrix} 1 & 200 \times 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Ví dụ. Cho $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Tính A^{100}.

Ví dụ. Cho $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Tính A^n với $n > 1$.

Tính chất. *Cho* $A \in M_n(\mathbb{R})$ *và* $k, l \in \mathbb{N}$. *Khi đó:*

i) $I^k = I$;

ii) $A^{k+l} = A^k A^l$;

iii) $A^{kl} = (A^k)^l$

g) Đa thức ma trận Cho $A \in M_n(\mathbb{R})$ và

$$f(x) = \alpha_m x^m + \alpha_{m-1}x^{m-1} + \ldots + \alpha_1 x + \alpha_0$$

là một đa thức bậc m trên $\mathbb{R}$ ($\alpha_i \in \mathbb{R}$). Khi đó ta định nghĩa

$$f(A) = \alpha_m A^m + \alpha_{m-1}A^{m-1} + \ldots + \alpha_1 A + \alpha_0 I_n$$

và ta gọi f(A) là ***đa thức theo ma trận*** A.

Ví dụ. Cho $A = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ và $f(x) = 3x^2 - 2x + 2$. Tính $f(A)$.

Giải. Ta có $A^2 = \begin{pmatrix} 7 & -9 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$, $f(A) = 3A^2 - 2A + 2I_2$.

Suy ra

$$f(A) = 3\begin{pmatrix} 7 & -9 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 27 & -33 \\ -11 & 16 \end{pmatrix}$$

2. Các phép biến đổi sơ cấp trên dòng

2.1 Các phép biến đổi sơ cấp trên dòng

Định nghĩa. Cho $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$. Ta gọi ***phép biến đổi sơ cấp trên dòng***, viết tắt là phép ***BĐSCTD*** trên A, là một trong ba loại biến đổi sau:

Loại 1. Hoán vị hai dòng i và j $(i \neq j)$.
Ký hiệu : $\mathrm{d_i} \leftrightarrow \mathrm{d_j}$

Loại 2. Nhân dòng i cho một số $\alpha \neq 0$.
Ký hiệu: $\mathrm{d_i} := \alpha \mathrm{d_i}$

Loại 3. Cộng vào một dòng i với β lần dòng j $(j \neq i)$.
Ký hiệu: $\mathrm{d_i} := \mathrm{d_i} + \beta \mathrm{d_j}$

Với φ là một phép biến đổi sơ cấp, ký hiệu $\varphi(A)$ chỉ ma trận có từ A qua φ.

Ví dụ. $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{d_1 \leftrightarrow d_2} \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{d_2 := 2d_2} \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}.$

Ví dụ.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 2 \\ 3 & 6 & -1 & -3 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{d_1 \leftrightarrow d_3} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 4 \\ 3 & 6 & -1 & -3 \\ 1 & -2 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{d_2 := 2d_2} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 4 \\ 6 & 12 & -2 & -6 \\ 1 & -2 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{d_1 := d_1 + 2d_3} \begin{pmatrix} 4 & -3 & 9 & 8 \\ 6 & 12 & -2 & -6 \\ 1 & -2 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Tương đương dòng

Nhận xét.

1) $A \xrightarrow{d_i \leftrightarrow d_j} A' \Rightarrow A' \xrightarrow{d_i \leftrightarrow d_j} A;$

2) $A \xrightarrow{d_i := \alpha d_i} A' \Rightarrow A' \xrightarrow{d_i := \frac{1}{\alpha} d_i} A;$

3) $A \xrightarrow{d_i := d_i + \beta d_j} A' \Rightarrow A' \xrightarrow{d_i := d_i - \beta d_j} A.$

Định nghĩa. Cho $A, B \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$. Ta nói A ***tương đương dòng*** với B, ký hiệu $A \sim B$, nếu B có được từ A qua hữu hạn phép biến đổi sơ cấp trên dòng nào đó. Vậy,

$A \sim B \Leftrightarrow$ Tồn tại các phép BĐSCTD $\varphi_1, \ldots, \varphi_k$ sao cho

$$A \xrightarrow{\varphi_1} A_1 \xrightarrow{\varphi_2} \ldots \xrightarrow{\varphi_k} A_k = B.$$

Nhận xét. *Quan hệ tương đương dòng là một quan hệ tương đương trên* $M_{m\times n}(\mathbb{R})$*, nghĩa là* $\forall A, B, C \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$*, ta có:*

i) $A \sim A$ *(tính phản xạ).*

ii) $A \sim B \Rightarrow B \sim A$ *(tính đối xứng).*

iii) $A \sim B$ *và* $B \sim C \Rightarrow A \sim C$ *(tính bắc cầu).*

Ví dụ. $$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 3 \\ 1 & 2 & 5 & 1 \\ 2 & 3 & -2 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 & 1 \\ 5 & 8 & 1 & 3 \\ 3 & 6 & -6 & 9 \end{pmatrix} = B.$$

Vì B có được từ A qua lần lượt các phép BĐSCTD sau: $d_1 \leftrightarrow d_3$, $d_2 := d_2 + 2d_1$, $d_3 := 3d_3$.

Hỏi. Làm cách nào kiểm tra hai ma trận tương đương dòng với nhau?

2.2 Ma trận bậc thang

Định nghĩa. Cho $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$. Phần tử khác không đầu tiên của một dòng kể từ bên trái được gọi là ***phần tử cơ sở*** của dòng đó.

Ví dụ. Cho ma trận $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Khi đó:

Dòng 1 có phần tử cơ sở là -1, dòng 2 có phần tử cơ sở là 3, dòng 3 không có phần tử cơ sở.

Định nghĩa. Một ma trận được gọi là ***ma trận bậc thang*** nếu nó thỏa 2 tính chất sau:

- Dòng không có phần tử cơ sở (nếu tồn tại) thì nằm dưới cùng;
- Phần tử cơ sở của dòng dưới nằm bên phải so với phần tử cơ sở của dòng trên.

Như vậy ma trận bậc thang sẽ có dạng

$$\begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & a_{1k_1} & \dots & \dots & a_{1k_2} & \dots & \dots & a_{1k_r} & \dots & a_{1n} \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & a_{2k_2} & \dots & \dots & a_{2k_r} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & a_{rk_r} & \dots & a_{rn} \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

Ví dụ. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$

A là trận bậc thang, B không là ma trận bậc thang.

ma trận bậc thang rút ngọn

Định nghĩa. Ma trận A được gọi là *ma trận bậc thang rút ngọn* nếu thỏa các điều kiện sau:

- A là ma trận bậc thang.
- Các phần tử cơ sở đều bằng 1.
- Trên các cột có chứa phần tử cơ sở, tất cả các hệ số khác đều bằng 0.

Ví dụ. $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -7 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; $D = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 2 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

C là ma trận bậc thang rút gọn.

D không là ma trận bậc thang rút gọn.

2.3 Hạng của ma trận

Dạng bậc thang

Định nghĩa. Nếu A tương đương dòng với một ma trận bậc thang B thì B được gọi là một ***dạng bậc thang*** của A.

Ví dụ. Cho

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -2 \\ -2 & -5 & 1 & -4 \\ 3 & 6 & 9 & -6 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -2 \\ 0 & -1 & 7 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Khi đó B là một dạng bậc thang của A vì B có được từ A thông qua các phép biến đổi: $d_2 := d_2 + 2d_1$, $d_3 = d_3 - 3d_1$.

Hỏi. Dạng bậc thang của một ma trận có duy nhất không?

Hạng của ma trận

Nhận xét. *Một ma trận A thì có nhiều dạng bậc thang, tuy nhiên các dạng bậc thang của A đều có chung số dòng khác 0. Ta gọi số dòng khác 0 của một dạng bậc thang của A là* ***hạng*** *của A, ký hiệu* r(A).

Mệnh đề. *Cho* $A, B \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$. *Khi đó:*

i) $0 \leq r(A) \leq m, n$;

ii) $r(A) = 0 \Leftrightarrow A = 0$;

iii) $r(A^\top) = r(A)$;

iv) *Nếu* $A \sim B$ *thì* $r(A) = r(B)$.

Định nghĩa. Nếu A tương đương dòng với một ma trận bậc thang rút gọn B thì B được gọi là ***dạng bậc thang rút gọn của*** A.

Nhận xét. *Dạng bậc thang rút gọn của một ma trận A là duy nhất và ký hiệu* R_A.

Ví dụ. Cho $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -2 \\ -2 & -5 & 1 & -4 \\ 3 & 6 & 9 & -6 \end{pmatrix}$. Khi đó

$$R_A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 17 & -18 \\ 0 & 1 & -7 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

R_A có được từ A thông qua các phép biến đổi: $d_2 := d_2 + 2d_1$, $d_3 = d_3 - 3d_1, d_2 := -1d_2, d_1 := d_1 - 2d_2$.

Thuật toán Gauss

Tìm một dạng bậc thang của $A = (a)_{ij} \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$

Bước 1: $i := 1, j := 1$.

Bước 2: Nếu $i > m$ hoặc $j > n$ thì kết thúc.

Bước 3: Nếu $a_{ij} = 0$ thì sang Bước 4. Nếu $a_{ij} \neq 0$ thì thực hiện các phép BĐSCTD sau:

$$d_k := d_k - \frac{a_{kj}}{a_{ij}} d_i \quad \text{với} \quad k > i.$$

Sau đó $i := i + 1, j := j + 1$ và quay về Bước 2.

Bước 4: Nếu $a_{kj} = 0$ với mọi $k > i$ thì $j := j + 1$ và quay về Bước 2. Nếu $a_{kj} \neq 0$ với một $k > i$ nào đó thì chọn một k như vậy và thực hiện phép BĐSCTD: $d_i \leftrightarrow d_k$ và quay về Bước 3.

Ví dụ. Tìm một ma trận dạng bậc thang R của ma trận

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 7 & -1 & -2 & -2 \\ 2 & 14 & 2 & 7 & 0 \\ 6 & 42 & 3 & 13 & -3 \end{pmatrix}.$$

Từ đó xác định hạng của A.

Giải.

$$A \xrightarrow[d_4:=d_4-6d_1]{\substack{d_2:=d_2-d_1 \\ d_3:=d_3-2d_1}} \begin{pmatrix} 1 & 7 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -5 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & -5 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{d_4:=d_4-\frac{3}{2}d_2} \begin{pmatrix} 1 & 7 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -5 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{5}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{d_4:=d_4-\frac{3}{2}d_2} \begin{pmatrix} 1 & 7 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -5 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{5}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{d_4:=d_4-\frac{5}{2}d_3} \begin{pmatrix} 1 & 7 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -5 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = R.$$

Ta có $A \sim R$ và R có dạng bậc thang với 3 dòng khác 0 nên A có hạng là $r(A) = 3$.

Lưu ý. Trong quá trình đưa ma trận về dạng bậc thang, ta có thể dùng các phép BĐSCTD phù hợp để tránh việc tính toán các số lẻ.

Ví dụ.

Tìm hạng của ma trận sau:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 3 \\ 2 & 4 & 6 & 9 \\ 2 & 6 & 7 & 6 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & 9 \\ -2 & 0 & -1 & -3 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & -1 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & -3 & 7 & 4 \\ -1 & 1 & 2 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

Ví dụ. Tìm tất cả giá trị m để $r(A) = 3$ với

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 2 & m & m+1 \end{pmatrix}$$

Ví dụ. Tìm tất cả giá trị m để $r(B) = 2$ với

$$B = \begin{pmatrix} 1 & m & m \\ m & 1 & m \\ m & m & 1 \end{pmatrix}$$

Thuật toán Gauss-Jordan

Tìm một dạng bậc thang rút gọn của $A = (a)_{ij} \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$

Chỉ khác Thuật toán Gauss ở Bước 3, ta cần thực hiện các phép biến đổi sau:

$$\begin{aligned} d_k &:= d_k - \frac{a_{kj}}{a_{ij}} d_i \quad \text{với } k \neq i; \\ d_i &:= \frac{1}{a_{ij}} d_i. \end{aligned}$$

Ví dụ. Tìm ma trận dạng bậc thang rút gọn của ma trận

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 7 & -1 & -2 & -2 \\ 2 & 14 & 2 & 7 & 0 \\ 6 & 42 & 3 & 13 & -3 \end{pmatrix}.$$

Giải.

$$\begin{pmatrix} 1 & 7 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 7 & -1 & -2 & -2 \\ 2 & 14 & 2 & 7 & 0 \\ 6 & 42 & 3 & 13 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow[d_4:=d_4-6d_1]{\substack{d_2:=d_2-d_1 \\ d_3:=d_3-2d_1}} \begin{pmatrix} 1 & 7 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -5 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & -5 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[d_2:=-\frac{1}{2}d_2]{\substack{d_1:=d_1+\frac{1}{2}d_2 \\ d_4:=d_4-\frac{3}{2}d_2}} \begin{pmatrix} 1 & 7 & 0 & \frac{1}{2} & -1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{5}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{5}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[d_4:=d_4-\frac{5}{2}d_3]{\substack{d_1:=d_1-\frac{1}{2}d_3 \\ d_2:=d_2-\frac{5}{2}d_3}} \begin{pmatrix} 1 & 7 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = R_A.$$

Ta thấy R_A là ma trận dạng bậc thang rút gọn của A.

Ví dụ.

Tìm dạng ma trận bậc thang rút gọn của các ma trận sau:

a) $\begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \end{pmatrix}$;

b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 2 & 3 & 1 & 6 \\ 3 & 1 & 2 & 6 \end{pmatrix}$;

c) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 5 & -1 \\ 1 & 1 & -2 & 3 \\ 3 & -1 & 8 & 1 \\ 1 & 3 & -9 & 7 \end{pmatrix}$;

d) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & -1 \\ 2 & 5 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 6 & 13 \\ -2 & -6 & 8 & 10 \end{pmatrix}$.

3. Hệ phương trình tuyến tính

3.1 Định nghĩa hệ phương trình tuyến tính

Mở đầu

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcrcr} 2x_1 & - & 2x_2 & + & x_3 & - & x_4 & + & x_5 & = & 1; \\ x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & + & x_4 & - & 2x_5 & = & 1; \\ 4x_1 & - & 10x_2 & + & 5x_3 & - & 5x_4 & + & 7x_5 & = & 1; \\ 2x_1 & - & 14x_2 & + & 7x_3 & - & 7x_4 & + & 11x_5 & = & -1. \end{array}\right.$$

3.1 Định nghĩa hệ phương trình tuyến tính

Định nghĩa. Một ***hệ phương trình tuyến tính*** trên $\mathbb{R}$ gồm m phương trình, n ẩn số là một hệ có dạng

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & +\cdots+ & a_{1n}x_n & = & b_1; \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & +\cdots+ & a_{2n}x_n & = & b_2; \\ \multicolumn{7}{c}{\dotfill} \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & +\cdots+ & a_{mn}x_n & = & b_m, \end{array}\right. \qquad (*)$$

trong đó

- $a_{ij} \in \mathbb{R}$: các hệ số;
- $b_i \in \mathbb{R}$: các hệ số tự do;
- $x_1, x_2, \ldots, x_n$: các ẩn số nhận giá trị trong $\mathbb{R}$.

Nếu (*) có các hệ số tự do =0 thì ta nói (*) là ***hệ phương trình thuần nhất*** trên $\mathbb{R}$.

Đặt

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

Ta gọi A là ma trận hệ số, X là cột các ẩn, B là cột các hệ số tự do của hệ $(*)$. Khi đó hệ $(*)$ được viết dưới dạng $AX = B$. Đặt

$$\tilde{A} = (A|B) = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

$\tilde{A}$ được gọi là ***ma trận mở rộng*** (hay ma trận bổ sung) của hệ $(*)$.

3.2 Nghiệm hệ phương trình tuyến tính

Định nghĩa. Ta nói $u = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ là ***nghiệm*** của hệ phương trình $(*)$ nếu ta thay thế $x_1 := \alpha_1, x_2 := \alpha_2, \ldots x_n := \alpha_n$ thì tất cả các phương trình trong $(*)$ đều thỏa.

Định nghĩa. Hai hệ phương trình được gọi là ***tương đương*** nhau nếu chúng có cùng tập nghiệm.

Nhận xét. *Khi giải một hệ phương trình tuyến tính, các phép biến đổi sau đây cho ta các hệ tương đương:*

- *Hoán đổi hai phương trình cho nhau.*
- *Nhân hai vế của một phương trình cho một số khác 0.*
- *Cộng vào một phương trình một bội của phương trình khác.*

Định lý. *Nếu hai hệ phương trình tuyến tính có ma trận mở rộng tương đương dòng với nhau thì hai hệ phương trình đó tương đương nhau.*

Ví dụ. Giải phương trình

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & - & y & - & 2z & = & -3; \\ 2x & - & y & + & z & = & 1; \\ x & + & y & + & z & = & 4. \end{array}\right. \tag{1}$$

Giải. $\tilde{A} = \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & -2 & -3 \\ 2 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \end{array}\right) \xrightarrow[d_3:=d_3-d_1]{d_2:=d_2-2d_1} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 5 & 7 \\ 0 & 2 & 3 & 7 \end{array}\right)$

$$\xrightarrow[d_3:=d_3-2d_2]{d_1:=d_1+d_2} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 5 & 7 \\ 0 & 0 & -7 & -7 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{d_1:=d_1-3d_3 \\ d_2:=d_2-5d_3}]{d_3:=\frac{-1}{7}d_3} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Ta có $\tilde{A} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$. Suy ra

$$(1) \quad \Leftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & + & 0y & + & 0z & = & 1; \\ 0x & + & y & + & 0z & = & 2; \\ 0x & + & 0y & + & z & = & 1. \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{rcl} x & = & 1; \\ y & = & 2; \\ z & = & 1. \end{array}\right.$$

Ví dụ. Giải hệ phương trình

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & - & 2z & = & 4; \\ 2x & + & 3y & + & 3z & = & 3; \\ 5x & + & 7y & + & 4z & = & 10. \end{array}\right. \tag{2}$$

Giải. Ma trận hóa hệ phương trình tuyến tính, ta có

$$\tilde{A} = \left(\begin{array}{ccr|r} 1 & 1 & -2 & 4 \\ 2 & 3 & 3 & 3 \\ 5 & 7 & 4 & 10 \end{array}\right)$$

$$\tilde{A} \xrightarrow[d_3:=d_3-5d_1]{d_2:=d_2-2d_1} \left(\begin{array}{ccr|r} 1 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & 7 & -5 \\ 0 & 2 & 14 & -10 \end{array}\right) \xrightarrow[d_3:=d_3-2d_2]{d_1:=d_1-d_2} \left(\begin{array}{ccr|r} 1 & 0 & -9 & 9 \\ 0 & 1 & 7 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Như vậy,

$$(2) \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ccccccc} x & & & - & 9z & = & 9 \\ & & y & + & 7z & = & -5 \end{array}\right.$$

Như vậy nghiệm của (2) là

$$\left\{\begin{array}{lcl} x & = & 9+9t; \\ y & = & -5-7t; \\ z & = & t. \end{array}\right.$$

Ví dụ. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x + y - 2z = 4; \\ 2x + 3y + 3z = 3; \\ 5x + 7y + 4z = 5. \end{cases} \tag{3}$$

Giải. Ma trận hóa hệ phương trình tuyến tính, ta có

$$\tilde{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 4 \\ 2 & 3 & 3 & 3 \\ 5 & 7 & 4 & 5 \end{array}\right)$$

$$\tilde{A} \xrightarrow[d_3:=d_3-5d_1]{d_2:=d_2-2d_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & 7 & -5 \\ 0 & 2 & 14 & -15 \end{array}\right) \xrightarrow[d_3:=d_3-2d_2]{d_1:=d_1-d_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -9 & 9 \\ 0 & 1 & 7 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & -5 \end{array}\right)$$

Hệ (3) vô nghiệm vì $0x + 0y + 0z = -5$.

▸ Tiếp tục Gauss-Jordan

Nhận xét. *Hệ phương trình tuyến tính thuần nhất*

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0; \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = 0, \end{cases}$$

luôn có một nghiệm $u = (0, 0, \dots, 0)$*. Nghiệm này được gọi là* ***nghiệm tầm thường****.*

Định lý. *Số nghiệm của phương trình tuyến tính chỉ có 3 trường hợp sau:*

- *Vô nghiệm;*
- *Duy nhất một nghiệm;*
- *Vô số nghiệm.*

3.3 Giải hệ phương trình tuyến tính

Có 2 phương pháp

- Gauss
- Gauss - Jordan

Phương pháp Gauss

Bước 1. Lập ma trận mở rộng $\tilde{A} = (A|B)$.

Bước 2. Đưa ma trận $\tilde{A}$ về dạng bậc thang R.

Bước 3. Tùy theo trường hợp dạng bậc thang R ma ta kết luận nghiệm như sau:

- Trường hợp 1. Xuất hiện một dòng

$$(0\ 0\ 0\ 0 \ldots 0\ 0| \neq 0).$$

Kết luận hệ phương trình vô nghiệm.

- Trường hợp 2. Ma trận R có dạng

$$\left(\begin{array}{cccc|c} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} & \alpha_1 \\ 0 & c_{22} & \dots & c_{2n} & \alpha_2 \\ \multicolumn{4}{c}{\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots} & \dots \\ 0 & 0 & \dots & c_{nn} & \alpha_n \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \multicolumn{4}{c}{\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots} & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Khi đó hệ phương trình có nghiệm duy nhất. Việc tính nghiệm được thực hiện từ dưới lên trên.

- Trường hợp 3. Khác 2 trường hợp trên. Khi đó hệ có vô số nghiệm, và:

- Ẩn tương ứng với các cột không có phần tử cơ sở sẽ là ẩn tự do (lấy giá trị tùy ý).
- Ẩn tương ứng với cột có phần tử cơ sở sẽ được tính từ dưới lên trên và theo các ẩn tự do.

Ví dụ. Giải hệ phương trình sau:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 7; \\ x_2 + 2x_1 + 2x_3 + 3x_4 = 6; \\ 3x_1 + 2x_2 + 2x_4 + x_3 = 7; \\ 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 = 18, \end{cases}$$

Giải. Ta có

$$\tilde{A} = (A|B) = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 7 \\ 2 & 1 & 2 & 3 & 6 \\ 3 & 2 & 1 & 2 & 7 \\ 4 & 3 & 2 & 1 & 18 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[d_4:=d_4-4d_1]{\substack{d_2:=d_2-2d_1 \\ d_3:=d_3-3d_1}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 7 \\ 0 & -3 & -4 & -5 & -8 \\ 0 & -4 & -8 & -10 & -14 \\ 0 & -5 & -10 & -15 & -10 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[d_4:=d_4-4d_1]{\substack{d_2:=d_2-2d_1\\ d_3:=d_3-3d_1}} \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 2 & 3 & 4 & 7 \\ 0 & -3 & -4 & -5 & -8 \\ 0 & -4 & -8 & -10 & -14 \\ 0 & -5 & -10 & -15 & -10 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{d_2:=d_2-d_3} \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 2 & 3 & 4 & 7 \\ 0 & 1 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & -4 & -8 & -10 & -14 \\ 0 & -5 & -10 & -15 & -10 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[d_4:=d_4+5d_2]{d_3:=d_3+4d_2} \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 2 & 3 & 4 & 7 \\ 0 & 1 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 8 & 10 & 10 \\ 0 & 0 & 10 & 10 & 20 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 7 \\ 0 & 1 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 8 & 10 & 10 \\ 0 & 0 & 10 & 10 & 20 \end{array}\right) \xrightarrow[d_3:=\frac{1}{10}d_3]{d_3\leftrightarrow d_4} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 7 \\ 0 & 1 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 8 & 10 & 10 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{d_4:=d_4-8d_3} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 7 \\ 0 & 1 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -6 \end{array}\right)$$

Vậy hệ đã cho tương đương với hệ sau:

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & + & 4x_4 & = & 7; \\ & & x_2 & + & 4x_3 & + & 5x_4 & = & 6; \\ & & & & x_3 & + & x_4 & = & 2; \\ & & & & & & 2x_4 & = & -6 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcr} x_1 & = & 2; \\ x_2 & = & 1; \\ x_3 & = & 5; \\ x_4 & = & -3. \end{array}\right.$$

Ví dụ. Giải hệ phương trình sau:

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & + & 2x_2 & - & 3x_3 & + & 5x_4 & = & 1; \\ x_1 & + & 3x_2 & - & 13x_3 & + & 22x_4 & = & -1; \\ 3x_1 & + & 5x_2 & + & x_3 & - & 2x_4 & = & 5; \\ 2x_1 & + & 3x_2 & + & 4x_3 & - & 7x_4 & = & 4, \end{array}\right.$$

Giải. Ta có

$$\tilde{A} = (A|B) = \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 2 & -3 & 5 & 1 \\ 1 & 3 & -13 & 22 & -1 \\ 3 & 5 & 1 & -2 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & -7 & 4 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[d_4:=d_4-2d_1]{\substack{d_2:=d_2-d_1 \\ d_3:=d_3-3d_1}} \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 2 & -3 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & -10 & 17 & -2 \\ 0 & -1 & 10 & -17 & 2 \\ 0 & -1 & 10 & -17 & 2 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 2 & -3 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & -10 & 17 & -2 \\ 0 & -1 & 10 & -17 & 2 \\ 0 & -1 & 10 & -17 & 2 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[d_4:=d_4+d_2]{d_3:=d_3+d_2} \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 2 & -3 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & -10 & 17 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Vậy hệ đã cho tương đương với hệ sau:

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & + & 2x_2 & - & 3x_3 & + & 5x_4 & = & 1; \\ & & x_2 & - & 10x_3 & + & 17x_4 & = & -2. \end{array}\right.$$

Chọn $x_3 = \alpha, x_4 = \beta$, ta tính được

$$\left\{\begin{array}{rcrcr} x_2 & = & -2 + 10x_3 - 17x_4 & = & -2 + 10\alpha - 17\beta; \\ x_1 & = & 1 - 2x_2 + 3x_3 - 5x_4 & = & 5 - 17\alpha + 29\beta. \end{array}\right.$$

Vậy hệ đã cho có vô số nghiệm với hai ẩn tự do.

Ví dụ. Giải hệ phương trình sau:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 = 2; \\ 3x_1 + 3x_2 - 5x_3 + x_4 = -3; \\ -2x_1 + x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 5; \\ 3x_1 + 3x_3 - 10x_4 = 8. \end{cases}$$

Giải. Ta có

$$\tilde{A} = (A|B) = \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & -2 & 3 & -4 & 2 \\ 3 & 3 & -5 & 1 & -3 \\ -2 & 1 & 2 & -3 & 5 \\ 3 & 0 & 3 & -10 & 8 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[d_4:=d_4-3d_1]{\substack{d_2:=d_2-3d_1 \\ d_3:=d_3+2d_1}} \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & -2 & 3 & -4 & 2 \\ 0 & 9 & -14 & 13 & -9 \\ 0 & -3 & 8 & -11 & 9 \\ 0 & 6 & -6 & 2 & 2 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & -2 & 3 & -4 & 2 \\ 0 & 9 & -14 & 13 & -9 \\ 0 & -3 & 8 & -11 & 9 \\ 0 & 6 & -6 & 2 & 2 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{d_2 \leftrightarrow d_3} \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & -2 & 3 & -4 & 2 \\ 0 & -3 & 8 & -11 & 9 \\ 0 & 9 & -14 & 13 & -9 \\ 0 & 6 & -6 & 2 & 2 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[d_4 := d_4 + 2d_2]{d_3 := d_3 + 3d_2} \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & -2 & 3 & -4 & 2 \\ 0 & -3 & 8 & -11 & 9 \\ 0 & 0 & 10 & -20 & 18 \\ 0 & 0 & 10 & -20 & 20 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{d_4 := d_4 - d_3} \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & -2 & 3 & -4 & 2 \\ 0 & -3 & 8 & -11 & 9 \\ 0 & 0 & 10 & -20 & 18 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right).$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 3 & -4 & 2 \\ 0 & -3 & 8 & -11 & 9 \\ 0 & 0 & 10 & -20 & 18 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right)$$

Vậy hệ đã cho tương đương với hệ sau:

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & - & 2x_2 & + & 3x_3 & - & 4x_4 & = & 2; \\ & - & 3x_2 & + & 8x_3 & - & 11x_4 & = & 9; \\ & & & & 10x_3 & - & 20x_4 & = & 18; \\ & & & & & & 0 & = & 2. \end{array}\right.$$

Hệ này vô nghiệm. Do đó hệ đã cho cũng vô nghiệm.

Phương pháp Gauss - Jordan

Bước 1. Lập ma trận mở rộng $\tilde{A} = (A|B)$.

Bước 2. Đưa ma trận $\tilde{A}$ về dạng bậc thang rút gọn R_A.

Bước 3. Tùy theo trường hợp dạng bậc thang rút gọn R_A mà ta kết luận nghiệm như sau:

- Trường hợp 1. Xuất hiện một dòng $(0\ 0\ 0\ 0 \dots 0\ 0| \neq 0)$. Kết luận hệ phương trình vô nghiệm.

- Trường hợp 2. Ma trận R_A có dạng

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & \dots & 0 & \alpha_1 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & \alpha_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & \alpha_n \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Khi đó hệ phương trình có nghiệm duy nhất là

$$x_1 = \alpha_1,\ x_2 = \alpha_2, \ldots, x_n = \alpha_n.$$

- Trường hợp 3. Khác 2 trường hợp trên. Khi đó hệ có vô số nghiệm, và:

- Ẩn tương ứng với các cột không có phần tử cơ sở 1 sẽ là ẩn tự do (lấy giá trị tùy ý).
- Ẩn tương ứng với cột có phần tử cơ sở 1 sẽ được tính theo các ẩn tự do.

Số ẩn tự do được gọi là ***bậc tự do*** của hệ phương trình.

Xem lại ví dụ đầu tiên

3.4 Định lý Kronecker- Capelli

Định lý. *Nếu* $\tilde{A} = (A|B)$ *là ma trận mở rộng của hệ gồm* n *ẩn dạng* $AX = B$ *thì* $r(\tilde{A}) = r(A)$ *hoặc* $r(\tilde{A}) = r(A) + 1$.
Hơn nữa,

- *nếu* $r(\tilde{A}) = r(A) + 1$ *thì hệ vô nghiệm;*
- *nếu* $r(\tilde{A}) = r(A) = n$ *thì hệ có nghiệm duy nhất;*
- $r(\tilde{A}) = r(A) < n$ *thì hệ có vô số nghiệm với bậc tự do là* $n - r(A)$.

Ví dụ. Giải và biện luận hệ phương trình tuyến tính sau theo tham số m

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcl} 3x_1 & + & 5x_2 & + & 3x_3 & - & 4x_4 & = & 1; \\ 2x_1 & + & 3x_2 & + & x_3 & + & x_4 & = & 0; \\ 5x_1 & + & 9x_2 & + & 6x_3 & - & 15x_4 & = & 2; \\ 13x_1 & + & 22x_2 & + & 13x_3 & - & 22x_4 & = & 2m, \end{array}\right.$$

$$\tilde{A} = (A|B) = \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 5 & 3 & -4 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 1 & 0 \\ 5 & 9 & 6 & -15 & 2 \\ 13 & 22 & 13 & -22 & 2m \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{d_1:=d_1-d_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 2 & -5 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 1 & 0 \\ 5 & 9 & 6 & -15 & 2 \\ 13 & 22 & 13 & -22 & 2m \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[d_4:=d_4-13d_1]{\substack{d_2:=d_2-2d_1 \\ d_3:=d_3-5d_1}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 2 & -5 & 1 \\ 0 & -1 & -3 & 11 & -2 \\ 0 & -1 & -4 & 10 & -3 \\ 0 & -4 & -13 & 43 & 2m-13 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[d_4:=d_4-4d_2]{d_3:=d_3-d_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 2 & -5 & 1 \\ 0 & -1 & -3 & 11 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 2m-5 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[d_4:=d_4-4d_2]{d_3:=d_3-d_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 2 & -5 & 1 \\ 0 & -1 & -3 & 11 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 2m-5 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{d_4:=d_4-d_3} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 2 & -5 & 1 \\ 0 & -1 & -3 & 11 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2m-4 \end{array}\right)$$

Biện luận:

1) $2m-4 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq 2$: Khi đó hệ (1) vô nghiệm nên hệ đã cho cũng vô nghiệm.

2) $m = 2$: Hệ (1) tương đương với hệ sau:

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & + & 2x_2 & + & 2x_3 & - & 5x_4 & = & 1; \\ & - & x_2 & - & 3x_3 & + & 11x_4 & = & -2; \\ & & & - & x_3 & - & x_4 & = & -1. \end{array}\right.$$

Chọn $x_4 = \alpha$ ta tính được

$$\begin{cases} x_3 = 1 - x_4 = 1 - \alpha; \\ x_2 = 2 - 3x_3 + 11x_4 = -1 + 14\alpha; \\ x_1 = 1 - 2x_2 - 2x_3 + 5x_4 = 1 - 21\alpha. \end{cases}$$

Vậy khi $m = 2$, hệ đã cho có vô số nghiệm với một ẩn tự do

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) = (1 - 21\alpha, -1 + 14\alpha, 1 - \alpha, \alpha)$$

với $\alpha \in \mathbb{R}$ tùy ý.

Ví dụ. Giải và biện luận hệ phương trình tuyến tính sau theo tham số m

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = 1; \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 4x_4 = 2; \\ x_1 - x_2 + 4x_3 - x_4 = m; \\ 4x_1 + 3x_2 - x_3 + mx_4 = m^2 - 6m + 4, \end{cases}$$

$$\tilde{A} = (A|B) = \left(\begin{array}{rrrr|l} 1 & 1 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -3 & 4 & 2 \\ 1 & -1 & 4 & -1 & m \\ 4 & 3 & -1 & m & m^2-6m+4 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[d_4:=d_4-4d_1]{\substack{d_2:=d_2-d_1 \\ d_3:=d_3-d_1}} \left(\begin{array}{rrrr|l} 1 & 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & 5 & -3 & m-1 \\ 0 & -1 & 3 & m-8 & m^2-6m \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[d_4:=d_4+d_2]{d_3:=d_3+2d_2} \left(\begin{array}{rrrr|l} 1 & 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & m+1 \\ 0 & 0 & 1 & m-6 & m^2-6m+1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{d_4:=d_4-d_3} \left(\begin{array}{rrrr|l} 1 & 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & m+1 \\ 0 & 0 & 0 & m-7 & m^2-7m \end{array}\right).$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & m+1 \\ 0 & 0 & 0 & {\color{red}m-7} & m^2-7m \end{array}\right)$$

Biện luận:

1) $m-7 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq 7$: Khi đó hệ (1) cho ta

$$\begin{cases} x_4 &= m; \\ x_3 &= m+1-x_4 = 1; \\ x_2 &= 1+2x_3-2x_4 \quad = 3-2m; \\ x_1 &= 1-x_2+x_3-2x_4 \quad = -1. \end{cases}$$

Suy ra khi m $\neq$ 7 hệ đã cho có duy nhất một nghiệm là

$$(x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4) = (-1,\ 3-2m,\ 1,\ m).$$

2) $m=7$: Hệ (1) tương đương với hệ sau:

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} x_1 & + & x_2 & - & x_3 & + & 2x_4 & = & 1; \\ & & x_2 & - & 2x_3 & + & 2x_4 & = & 1; \\ & & & & x_3 & + & x_4 & = & 8. \end{array}\right. \qquad (2)$$

Chọn $x_4=\alpha$ ta tính được

$$\begin{cases} x_3 = 8 - x_4 = 8-\alpha; \\ x_2 = 1+2x_3-2x_4 = 17-4\alpha; \\ x_1 = 1-x_2+x_3-2x_4 = -8+\alpha. \end{cases}$$

Vậy khi $m=7$ hệ đã cho có vô số nghiệm với một ẩn tự do

$$(x_1,x_2,x_3,x_4) = (-8+\alpha, 17-4\alpha, 8-\alpha\ ,\ \alpha)$$

với $\alpha\in\mathbb{R}$ tùy ý.

4. Ma trận khả nghịch

4.1 Định nghĩa

Mở đầu

Xét trên tập số thực $\mathbb{R}$. Cho $x \in \mathbb{R}$, hỏi tồn tại hay không y sao cho

$$xy = 1.$$

Hỏi. Trên tập hợp ma trận thì sao?

Định nghĩa. Cho $A \in M_n(\mathbb{R})$. Ta nói A ***khả nghịch*** nếu tồn tại ma trận B sao cho $AB = BA = I_n$. Nếu B thỏa diều kiện trên được gọi là ***ma trận nghịch đảo*** của A.

Nhận xét. *Ma trận nghịch dảo của một ma trận khả nghịch là duy nhất. Ta ký hiệu ma trận nghịch đảo của A là* A^{-1}.

Ví dụ. Cho $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. Khi đó $A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$.

Mệnh đề. *Cho $A \in M_n(\mathbb{R})$. Giả sử A khả nghịch và có nghịch đảo là A^{-1}. Khi đó*

i) A^{-1} *khả nghịch và* $(A^{-1})^{-1} = A$.

ii) $A^\top$ *khả nghịch và* $(A^\top)^{-1} = (A^{-1})^\top$.

iii) $\forall \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, αA *khả nghịch và* $(\alpha A)^{-1} = \frac{1}{\alpha} A^{-1}$.

Mệnh đề. *Cho $A, B \in M_n(\mathbb{R})$. Nếu A và B khả nghịch thì AB khả nghịch, hơn nữa*

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}.$$

4.2 Nhận diện và tìm ma trận khả nghịch

Định lý. *Cho $A \in M_n(\mathbb{R})$. Khi đó các khẳng định sau tương đương:*

i) *A khả nghịch.*

ii) $r(A) = n$.

iii) $A \sim I_n$.

iv) *Tồn tại các phép BĐSCTD $\varphi_1, \ldots, \varphi_k$ biến ma trận A thành ma trận đơn vị I_n:*

$$A \xrightarrow{\varphi_1} A_1 \longrightarrow \ldots \xrightarrow{\varphi_k} A_k = I_n.$$

Hơn nữa, khi đó qua chính các phép BĐSCTD $\varphi_1, \ldots, \varphi_k$, ma trận đơn vị I_n sẽ biến thành ma trận nghịch đảo A^{-1}:

$$I_n \xrightarrow{\varphi_1} B_1 \longrightarrow \ldots \xrightarrow{\varphi_k} B_k = A^{-1}.$$

Phương pháp tìm ma trận nghịch đảo

Lập $(A|I_n)$ và dùng các phép BĐSCTD biến A về dạng ma trận bậc thang rút gọn:

$$(A\,|I_n\,) \xrightarrow{\varphi_1} (\,A_1|\,B_1) \longrightarrow \ldots \xrightarrow{\varphi_p} (\,A_p|\,B_p) \longrightarrow \ldots .$$

Trong quá trình biến đổi có thể xảy ra hai trường hợp:

- Trường hợp 1: Tồn tại p sao cho trong dãy biến đổi trên, ma trận A_p có ít nhất một dòng hay một cột bằng 0. Khi đó A không khả nghịch.
- Trường hợp 2: Mọi ma trận A_i trong dãy biến đổi trên đều không có dòng hay cột bằng 0. Khi đó ma trận cuối cùng của dãy trên có dạng $(I_n|B)$. Ta có A khả nghịch và $A^{-1} = B$.

Lưu ý. Nếu bài toán chỉ yêu cầu kiểm tra ma trận A có khả nghịch hay không, ta chỉ cần tính hạng của ma trận (dùng Gauss).

Ví dụ. Xét tính khả nghịch của A và tìm A^{-1} (nếu có)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 5 & 4 & 7 \\ 3 & 7 & 8 & 12 \\ 4 & 8 & 14 & 19 \end{pmatrix}$$

Giải.

$$(A|I_4) = \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 4 & 7 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 7 & 8 & 12 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 8 & 14 & 19 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[d_4:=d_4-4d_1]{\substack{d_2:=d_2-2d_1 \\ d_3:=d_3-3d_1}} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & -4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & -4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[d_3:=d_3-d_2]{d_1:=d_1-2d_2} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 7 & 6 & 5 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & -4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[d_4:=d_4-2d_3]{\substack{d_1:=d_1-7d_3\\ d_2:=d_2+2d_3}} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 12 & 5 & -7 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -4 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 2 & -2 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[d_3:=d_3-d_4]{\substack{d_1:=d_1+d_4\\ d_2:=d_2-d_4}} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 10 & 7 & -9 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -2 & -3 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -3 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 2 & -2 & 1 \end{array}\right) = (I_4|A^{-1}).$$

Như vậy, A khả nghịch và

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 10 & 7 & -9 & 1 \\ -2 & -3 & 4 & -1 \\ 1 & -3 & 3 & -1 \\ -2 & 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ví dụ. Xét tính khả nghịch của A và tìm A^{-1} (nếu có)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 2 & 1 \\ 4 & -1 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

Giải.

$$(A|I_4) = \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & -1 & 0 & -3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[d_4:=d_4-4d_1]{\substack{d_2:=d_2-2d_1\\ d_3:=d_3-3d_1}} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -5 & -8 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & -7 & -11 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -9 & -12 & -19 & -4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[d_4:=d_4-3d_2]{d_3:=d_3-2d_2} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -5 & -8 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 5 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 5 & 2 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{d_4:=d_4-d_3} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -5 & -8 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 5 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ \color{red}{0} & \color{red}{0} & \color{red}{0} & \color{red}{0} & 1 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

Ta có $r(A) < 4$. Suy ra A không khả nghịch.

5. Phương trình ma trận

Định lý. *Cho các ma trận* $A, A' \in M_n(\mathbb{R})$ *khả nghịch và* $B \in M_{n\times p}(\mathbb{R})$, $C \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$, $D \in M_n(\mathbb{R})$. *Khi đó*

i) $AX = B \Leftrightarrow X = A^{-1}B;$

ii) $XA = C \Leftrightarrow X = CA^{-1};$

iii) $AXA' = D \Leftrightarrow X = A^{-1}DA'^{-1}.$

Ví dụ. Giải phương trình $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}.$

Giải. Phương trình có dạng $AX = B$. Ta có A khả nghịch, nên

$$X = A^{-1}B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & 1 \\ 16 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ví dụ. Giải phương trình $X\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$.

Giải. Phương trình có dạng $XA = B$. Ta có A khả nghịch, nên

$$X = BA^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -19 & 11 \\ -21 & 13 \end{pmatrix}.$$

Ví dụ. Tìm ma trận X thỏa

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} X \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Giải. Phương trình có dạng $AXB = C$. Ta có A, B khả nghịch, nên

$$X = A^{-1}CB^{-1}$$

$$X = A^{-1}CB^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 1 \\ 2 & -1. \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & -5 \\ 3 & 5 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 17 & -13 \\ -11 & 9 \\ 5 & -4 \end{pmatrix}.$$

Ví dụ. Tìm ma trận X thỏa $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -2 & -3 & 1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Giải. Đặt $X = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \\ x_5 & x_6 \end{pmatrix}$. Ta có

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -2 & -3 & 1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} x_1 + 2x_3 - x_5 & x_2 + 2x_4 - x_6 \\ -2x_1 - 3x_3 + x_5 & -2x_2 - 3x_4 + x_6 \end{pmatrix}.$$

Suy ra hệ phương trình $\begin{cases} x_1 + 2x_3 - x_5 &= 1; \\ x_2 + 2x_4 - x_6 &= -2; \\ -2x_1 - 3x_3 + x_5 &= -1 \\ -2x_2 - 3x_4 + x_6 &= 1. \end{cases}$

$$\begin{aligned} \tilde{A} &= \left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & 2 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & -1 & -2 \\ -2 & 0 & -3 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 0 & -3 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \\ &\sim \left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & -3 \end{array}\right) \end{aligned}$$

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & -3 \end{array}\right)$$

Suy ra

$$\begin{cases} x_1 = -1 - t; \\ x_2 = 4 - s; \\ x_3 = 1 + t; \\ x_4 = -3 + s; \\ x_5 = t; \\ x_6 = s. \end{cases} \quad t, s \in \mathbb{R}$$

Vậy $X = \begin{pmatrix} -1-t & 4-s \\ 1+t & -3+s \\ t & s \end{pmatrix}$ với t, s tự do.