Chương 2:

ĐỊNH THỨC

Lê Văn Luyện

lvluyen@yahoo.com

http://www.math.hcmus.edu.vn/∼lvluyen/09tt

Đại học Khoa Học Tự Nhiên Tp. Hồ Chí Minh

Nội dung

Chương 2. ĐỊNH THỨC

1. Định nghĩa và các tính chất
2. Định thức và ma trận khả nghịch
3. Quy tắc Cramer

1. Định nghĩa và các tính chất

Định nghĩa. Cho $A = (a_{ij})_{n\times n} \in M_n(\mathbb{R})$. ***Định thức*** của A, được ký hiệu là detA hay |A|, là một số thực được xác định bằng quy nạp theo n như sau:

- Nếu $n = 1$, nghĩa là $A = (a)$, thì $|A| = a$.
- Nếu $n = 2$, nghĩa là $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, thì $|A| = ad - bc$.
- Nếu $n > 2$, nghĩa là $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \multicolumn{4}{c}{\dotfill} \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}$, thì

$$|A| \xlongequal{\text{dòng } 1} a_{11}\big|A(1|1)\big| - a_{12}\big|A(1|2)\big| + \cdots + a_{1n}(-1)^{1+n}\big|A(1|n)\big|.$$

trong đó $A(i|j)$ là ma trận có được từ A bằng cách xóa đi dòng i và cột j của A.

Ví dụ. Cho $A = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$. Khi đó $|A| = 4.5 - (-2).3 = 26.$

Ví dụ. Tính định thức của ma trận

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Giải.

$$\begin{aligned} |A| &= 1(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} + 2(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} + (-3)(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} \\ &= 12 - 16 + 15 = 11. \end{aligned}$$

Quy tắc Sarrus

Theo định nghĩa định thức, khi $n = 3$, ta có

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

$$\begin{aligned} |A| &= a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \\ &= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\ &\qquad - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}. \end{aligned}$$

Từ đây ta suy ra công thức Sarrus dựa vào sơ đồ sau:

$$\begin{array}{c} \begin{matrix} \text{cột1} & \text{cột2} & \text{cột3} & \text{cột1} & \text{cột2} \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{matrix} \\ \left(\begin{array}{ccc|cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{array}\right). \\ - \quad - \quad - \quad + \quad + \quad + \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc}
\text{cột1} & \text{cột2} & \text{cột3} & \text{cột1} & \text{cột2} \\
\downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\
\end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|cc}
a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\
a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\
a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32}
\end{array}\right).$$

$$- \qquad - \qquad - \qquad + \qquad + \qquad +$$

$$\begin{aligned}|A| &= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\ &\quad -(a_{13}a_{22}a_{31} + a_{11}a_{23}a_{32} + a_{12}a_{21}a_{33}).\end{aligned}$$

(Tổng ba đường chéo đỏ - tổng ba đường chéo xanh)

Ví dụ.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 5 \end{vmatrix} = 1.2.5 + 2.1.3 + 3.4.1 - 3.2.3 - 1.1.1 - 2.4.5 = -31.$$

s

1.3 Khai triển định thức theo dòng và cột

Định nghĩa. Cho $A = (a_{ij})_{n\times n} \in M_n(\mathbb{R})$. Với mỗi i, j, ta gọi

$$\mathrm{c_{ij}} = (-1)^{i+j}\det A(i|j)$$

là ***phần bù đại số*** của hệ số a_{ij}, trong đó $A(i|j)$ là ma trận vuông cấp $(n-1)$ có được từ A bằng cách xoá dòng i, cột j.

Ví dụ. Cho $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 0 \end{pmatrix}$. Khi đó

$$c_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} = -4; \quad c_{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = 3.$$

Định lý. *Cho* $A = (a_{ij})_{n\times n} \in M_n(\mathbb{R})$. *Với mỗi* i, j, *gọi* c_{ij} *là phần bù đại số của hệ số* a_{ij}. *Ta có*

- *Công thức khai triển* $|A|$ *theo dòng* i: $|A| = \sum\limits_{k=1}^{n} a_{ik}c_{ik}$.
- *Công thức khai triển* $|A|$ *theo cột* j: $|A| = \sum\limits_{k=1}^{n} a_{kj}c_{kj}$.

Ví dụ. Tính định thức của $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 3 \\ 5 & 2 & 2 \\ 4 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Lưu ý. Trong việc tính toán tính định thức ta nên chọn dòng hay cột có nhiều số 0.

Mệnh đề. *Cho* $A \in M_n(\mathbb{R})$. *Khi đó:*

i) $|A^\top| = |A|$.

ii) *Nếu ma trận vuông* A *có một dòng hay một cột bằng 0 thì* $|A| = 0$.

iii) *Nếu* A *là một ma trận tam giác thì* $|A|$ *bằng tích các phần tử trên đường chéo của* A, *nghĩa là*

$$|A| = a_{11}.a_{22}\ldots a_{nn}.$$

Định lý. *Nếu* $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ *thì* $|AB| = |A||B|$.

Ví dụ.

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & -3 & 6 & 7 \\ 0 & 0 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-3) \cdot 5 \cdot 4 = -120.$$

1.4 Định thức và các phép biến đổi sơ cấp

Định lý. *Cho* $A, A' \in M_n(\mathbb{R})$. *Khi đó*

i) *Nếu* $A \xrightarrow[i \neq j]{d_i \leftrightarrow d_j} A'$ *thì* $|A'| = -|A|$;

ii) *Nếu* $A \xrightarrow{d_i := \alpha d_i} A'$ *thì* $|A'| = \alpha |A|$;

iii) *Nếu* $A \xrightarrow[i \neq j]{d_i := d_i + \beta d_j} A'$ *thì* $|A'| = |A|$.

Ví dụ. Tính định thức của $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 7 \\ 2 & 6 & -8 \\ 5 & -12 & 4 \end{pmatrix}$

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 7 \\ 2 & 6 & -8 \\ 5 & -12 & 4 \end{vmatrix} \xlongequal{\text{dòng } 2} 2\begin{vmatrix} 1 & 3 & 7 \\ 1 & 3 & -4 \\ 5 & -12 & 4 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{\text{cột } 2} 2.3\begin{vmatrix} 1 & 1 & 7 \\ 1 & 1 & -4 \\ 5 & -4 & 4 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{d_2:=d_2-d_1} 6\begin{vmatrix} 1 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & -11 \\ 5 & -4 & 4 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{\text{dòng } 2} 6(-11)(-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 5 & -4 \end{vmatrix} = -594.$$

Lưu ý. Vì $|A^\top| = |A|$ nên trong quá trình tính định thức ta có thể sử dụng các phép biến đổi sơ cấp trên cột.

Ví dụ.

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & -4 & 5 \\ 3 & -5 & 2 & 4 \\ 5 & 4 & 3 & -2 \\ -4 & 2 & 5 & 3 \end{vmatrix} \xlongequal[\substack{d_1:=d_1-2d_2 \\ d_3:=d_3-5d_2}]{\substack{d_2:=d_2-d_1 \\ d_4:=d_4+2d_1}} \begin{vmatrix} 0 & 19 & -16 & 7 \\ 1 & -8 & 6 & -1 \\ 0 & 44 & -27 & 3 \\ 0 & 8 & -3 & 13 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{\text{cột } 1} 1.(-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 19 & -16 & 7 \\ 44 & -27 & 3 \\ 8 & -3 & 13 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[d_1:=d_1-7d_3]{\substack{d_3:=d_3-4d_2 \\ d_2:=d_2-3d_3}} - \begin{vmatrix} 1195 & -751 & 0 \\ 548 & -342 & 0 \\ -168 & 105 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{\text{cột } 1} - \begin{vmatrix} 1195 & -751 \\ 548 & -342 \end{vmatrix} = -2858.$$

Ví dụ.

$$\begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \end{vmatrix} \xlongequal[d_3:=60d_3]{\substack{d_1:=6d_1 \\ d_2:=12d_2}} \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{12}\cdot\frac{1}{60}\begin{vmatrix} 6 & 3 & 2 \\ 6 & 4 & 3 \\ 20 & 15 & 12 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[c_3:=c_3-2c_2]{\substack{c_1:=c_1-2c_2 \\ c_2:=c_2-c_3}} \frac{1}{4320}\begin{vmatrix} {\color{cyan}0} & {\color{red}1} & {\color{cyan}0} \\ -2 & 1 & 1 \\ -10 & 3 & 6 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{\text{dòng } 1} -\frac{1}{4320}\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ -10 & 6 \end{vmatrix} = \frac{1}{2160}.$$

Nhận xét. *Trong quá trình tính định thức, phép BĐSC loại 3 được khuyến khích dùng bởi nó không thay đổi giá trị định thức.*

Ví dụ. Tính định thức của ma trận sau

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 5 & 0 \\ 3 & 2 & 6 & -2 \\ -2 & 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & -2 & 0 \\ -3 & 1 & 4 & -2 \\ 4 & 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Kết quả $|A| = -19, \quad |B| = -30.$

Ví dụ. Tính định thức của ma trận sau

$$C = \begin{pmatrix} 13 & 18 & 6 & -1 & 7 \\ 4 & 7 & 3 & 4 & 1 \\ 7 & 9 & 3 & -1 & 4 \\ 6 & 9 & 3 & -2 & 3 \\ 6 & 3 & 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}; \quad D = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & -3 & 5 & 1 & 8 \\ -4 & -7 & 2 & -2 & 4 \\ 3 & -5 & 4 & 3 & 5 \\ 8 & 6 & -4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Giải. $|C| = 24; \quad |D| = -174.$

2. Định thức và ma trận khả nghịch

Định nghĩa.

Cho $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$. Đặt $C = (c_{ij})$ với $c_{ij} = (-1)^{i+j}|A(i,j)|$ là phần bù đại số của a_{ij}. Ta gọi ma trận chuyển vị $C^\top$ của C là ***ma trận phụ hợp*** của A, ký hiệu là adj(A).

Ví dụ. Cho $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 3 & 4 & -2 \end{pmatrix}$.

Khi đó $C = \begin{pmatrix} -6 & 10 & 11 \\ 10 & -7 & 1 \\ 7 & -2 & -8 \end{pmatrix}$. Suy ra $\mathrm{adj}(A) = \begin{pmatrix} -6 & 10 & 7 \\ 10 & -7 & -2 \\ 11 & 1 & -8 \end{pmatrix}$.

Nhận diện ma trận khả nghịch

Định lý. *Ma trận vuông A khả nghịch khi và chỉ khi $|A| \neq 0$.Hơn nữa, nếu A khả nghịch thì*

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\mathrm{adj}(A).$$

Ví dụ. Tìm ma trận nghịch đảo của $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 0 \end{pmatrix}$.

Giải. Ta có $|A| = -2 \neq 0$. Suy ra A khả nghịch.

$$c_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} = -4; \quad c_{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = 3;$$

$c_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -1; \quad c_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} = 4$

$c_{22} = -3; c_{23} = -1; c_{31} = -2; c_{32} = 1; c_{33} = 1.$

Suy ra

$$C = \begin{pmatrix} -4 & 3 & -1 \\ 4 & -3 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ và } \operatorname{adj}(A) = \begin{pmatrix} -4 & 4 & -2 \\ 3 & -3 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ta có

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\operatorname{adj}(A) = \frac{1}{-2}\begin{pmatrix} -4 & 4 & -2 \\ 3 & -3 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Hệ quả. *Ma trận* $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ *khả nghịch khi và chỉ khi* $ad - bc \neq 0$. *Khi đó*

$$A^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

Ví dụ. Cho $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$. Suy ra $A^{-1} = \frac{1}{-2}\begin{pmatrix} 5 & -4 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$.

Ví dụ. Tìm ma trận nghịch đảo bằng phương pháp định thức của

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \\ 3 & 5 & 2 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{-2}\begin{pmatrix} 11 & 1 & -5 \\ -7 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Ví dụ. Tìm tất cả các giá trị của m để ma trận sau khả nghịch

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 5 & 3 \\ 5 & 0 & 7 & m \\ -1 & 2 & 3 & -3 \end{pmatrix}.$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & m \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 5 & 7 & 5 \end{pmatrix}.$$

Ví dụ. Cho $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 3 & 5 \end{pmatrix}$. Tính:$|A^{-1}|; \quad |5A^{-1}|; \quad |adj(A)|$.

Ví dụ. Cho $A, B \in M_3(\mathbb{R})$ và $|A| = 3, |B| = -2$. Tính $|(4AB)^{-1}|$ và $|adj(AB)|$.

3. Quy tắc Cramer

Định lý. *Cho hệ phương trình tuyến tính $AX = B$ $(*)$ gồm n ẩn và n phương trình. Đặt*

$$\Delta = \det A; \qquad \Delta_j = \det(A_j), \quad j \in \overline{1, n},$$

trong đó A_j là ma trận có từ A bằng cách thay cột j bằng cột B. Khi đó:

i) *Nếu $\Delta \neq 0$ thì $(*)$ có một nghiệm duy nhất là:*

$$x_j = \frac{\Delta_j}{\Delta}, j \in \overline{1, n}.$$

ii) *Nếu $\Delta = 0$ và $\Delta_j \neq 0$ với một j nào đó thì (1) vô nghiệm.*

iii) *Nếu $\Delta = 0$ và $\Delta_j = 0 \forall j \in \overline{1, n}$ thì hệ vô nghiệm hoặc vô số nghiệm.*

Ví dụ. Giải phương trình

$$\begin{cases} x - y - 2z = -3; \\ 2x - y + z = 1; \\ x + y + z = 4. \end{cases} \quad (1)$$

Giải. Ta có

$$\Delta = |A| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -7; \quad \Delta_1 = |A_1| = \begin{vmatrix} -3 & -1 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 4 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -7;$$

$$\Delta_2 = |A_2| = \begin{vmatrix} 1 & -3 & -2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \end{vmatrix} = -14; \quad \Delta_3 = |A_3| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -3 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{vmatrix} = -7.$$

Vì $\Delta \neq 0$ nên hệ có nghiệm duy nhất

$$x = \frac{\Delta_1}{\Delta} = 1; y = \frac{\Delta_2}{\Delta} = 2; z = \frac{\Delta_3}{\Delta} = 1.$$

Ví dụ. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x + y - 2z = 4; \\ 2x + 3y + 3z = 3; \\ 5x + 7y + 4z = 5. \end{cases} \tag{2}$$

Giải. Ta có

$$\Delta = |A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 2 & 3 & 3 \\ 5 & 7 & 4 \end{vmatrix} = 0; \quad \Delta_1 = |A_1| = \begin{vmatrix} 4 & 1 & -2 \\ 3 & 3 & 3 \\ 5 & 7 & 4 \end{vmatrix} = -45;$$

Suy ra hệ phương trình vô nghiệm.

Ví dụ. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x + y - 2z = 4; \\ 2x + 3y + 3z = 3; \\ 5x + 7y + 4z = 10. \end{cases} \tag{3}$$

Giải. Ta có

$$\Delta = |A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 2 & 3 & 3 \\ 5 & 7 & 4 \end{vmatrix} = 0; \quad \Delta_1 = |A_1| = \begin{vmatrix} 4 & 1 & -2 \\ 3 & 3 & 3 \\ 10 & 7 & 4 \end{vmatrix} = 0;$$

$$\Delta_2 = |A_2| = \begin{vmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 2 & 3 & 3 \\ 5 & 10 & 4 \end{vmatrix} = 0; \quad \Delta_3 = |A_3| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 2 & 3 & 3 \\ 5 & 7 & 10 \end{vmatrix} = 0.$$

Vì $\Delta = \Delta_1 = \Delta_2 = \Delta_3 = 0$ nên không kết luận được nghiệm của hệ. Do đó ta phải dùng Gauss hoặc Gauss-Jordan để giải.

Biện luận hệ phương trình bằng Cramer

Ví dụ. Giải và biện luận phương trình

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 0; \\ -2x_1 + (m-2)x_2 + (m-5)x_3 = 2; \\ mx_1 + x_2 + (m+1)x_3 = -2. \end{cases}$$

Giải. Ta có

$$\Delta = |A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -2 & m-2 & m-5 \\ m & 1 & m+1 \end{vmatrix} = m^2 - 4m + 3 = (m-1)(m-3);$$

$$\Delta_1 = |A_1| = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & m-2 & m-5 \\ -2 & 1 & m+1 \end{vmatrix} = -4m + 12;$$

$$\Delta_2 = |A_2| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -2 & 2 & m-5 \\ m & -2 & m+1 \end{vmatrix} = 0;$$

$$\Delta_3 = |A_3| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -2 & m-2 & 2 \\ m & 1 & -2 \end{vmatrix} = 2m-6 = 2(m-3).$$

Biện luận:

▷ Nếu $\Delta \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 1 \\ m \neq 3 \end{cases}$ .Khi đó hệ có nghiệm duy nhất là

$$(x_1, x_2, x_3) = \left(\frac{-4}{m-1}, 0, \frac{2}{m-1}\right).$$

▷ Nếu $\Delta = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 1 \\ m = 3 \end{array}\right.$

- Với $m = 1$, ta có $\Delta_1 = 8 \neq 0$ nên hệ vô nghiệm.

- Với $m = 3$, ta có $\Delta_1 = \Delta_2 = \Delta_3 = 0$. Khi đó hệ phương trình là:

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & -2 & 2 \\ 3 & 1 & 4 & -2 \end{array}\right)$$

Nghiệm của hệ là $(x_1, x_2, x_3) = (3t - 2, t, 1 - \frac{5}{2}t)$ với t tự do.

Ví dụ. Giải và biện luận hệ phương trình sau theo tham số $m \in \mathbb{R}$:

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} (m-7)x & + & 12y & - & 6z & = & m; \\ -10x & + & (m+19)y & - & 10z & = & 2m; \\ -12x & + & 24y & + & (m-13)z & = & 0. \end{array}\right. \qquad (1)$$

Giải. $$\Delta = \begin{vmatrix} m-7 & 12 & -6 \\ -10 & m+19 & -10 \\ -12 & 24 & m-13 \end{vmatrix} = (m-1)^2(m+1)$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} m & 12 & -6 \\ 2m & m+19 & -10 \\ 0 & 24 & m-13 \end{vmatrix} = m(m-1)(m-17)$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} m-7 & m & -6 \\ -10 & 2m & -10 \\ -12 & 0 & m-13 \end{vmatrix} = 2m(m-1)(m-14)$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} m-7 & 12 & m \\ -10 & m+19 & 2m \\ -12 & 24 & 0 \end{vmatrix} = 36m(m-1)$$

Biện luận:

▷ Nếu $\Delta \neq 0 \Leftrightarrow m \neq -1$ và $m \neq 1$. Khi đó hệ có nghiệm duy nhất là

$$\begin{cases} x = \dfrac{\Delta_1}{\Delta} = \dfrac{m(m^2-18m+17)}{(m-1)(m^2-1)} = \dfrac{m(m-17)}{m^2-1}; \\ y = \dfrac{\Delta_2}{\Delta} = \dfrac{m(m^2-15m+14)}{(m-1)(m^2-1)} = \dfrac{m(m-14)}{m^2-1}; \\ z = \dfrac{\Delta_3}{\Delta} = \dfrac{-36m(m-1)}{(m-1)(m^2-1)} = \dfrac{-36m}{m^2-1}. \end{cases}$$

▷ Nếu $\Delta = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = -1 \\ m = 1 \end{array} \right.$

- Với $m = -1$, ta có $\Delta_1 = -36 \neq 0$ nên hệ (1) vô nghiệm.
- Với $m = 1$, ta có $\Delta_1 = \Delta_2 = \Delta_3 = 0$. Hệ (1) trở thành

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcr} -6x & + & 12y & - & 6z & = & 1; \\ -10x & + & 20y & - & 10z & = & 2; \\ -12x & + & 24y & - & 12z & = & 0 \end{array} \right.$$

Hệ vô nghiệm.