Chương 4:

ÁNH XẠ TUYẾN TÍNH

Lê Văn Luyện

lvluyen@yahoo.com

http://www.math.hcmus.edu.vn/~lvluyen/09tt

Đại học Khoa Học Tự Nhiên Tp. Hồ Chí Minh

Chương 4. ÁNH XẠ TUYẾN TÍNH

1. Định nghĩa
2. Nhân và ảnh của ánh xạ tuyến tính
3. Ma trận biểu diễn ánh xạ tuyến tính

1. Định nghĩa

1.1 Ánh xạ

Định nghĩa. Cho X và Y là hai tập hợp khác rỗng. ***Ánh xạ*** giữa hai tập X và Y là một qui tắc sao cho mỗi x thuộc X tồn tại duy nhất một y thuộc Y để $y = f(x)$.
Ta viết

$$\begin{aligned} f : X &\longrightarrow Y \\ x &\longmapsto y = f(x) \end{aligned}$$

Nghĩa là $\forall x \in X, \exists! y \in Y, y = f(x)$.

Ví dụ.

- $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ xác định bởi $f(x) = x^2 + 2x - 1$ là ánh xạ.
- $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ xác định bởi $g(x, y, z) = (2x + y, x - 3y + z)$ là ánh xạ.
- $h : \mathbb{Q} \to \mathbb{Z}$ xác định bởi $h(\dfrac{m}{n}) = m$ không là ánh xạ.

Định nghĩa. Hai ánh xạ f và g từ X vào Y được gọi là ***bằng nhau*** nếu $\forall x \in X, f(x) = g(x)$.

Ví dụ. Xét ánh xạ $f(x) = (x-1)(x+1)$ và $g(x) = x^2 - 1$ từ $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Ta có $f = g$.

Định nghĩa. Cho hai ánh xạ $f : X \to Y$ và $g : Y' \to Z$ trong đó $Y \subset Y'$. ***Ánh xạ tích*** h của f và g là ánh xạ từ X vào Z xác định bởi:

$$\begin{aligned} h : \; X &\longrightarrow Z \\ x &\longmapsto h(x) = g(f(x)) \end{aligned}$$

Ta viết: $h = g_o f$.

Ví dụ. Cho $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ xác định bởi $f(x) = 2x + 1$ và $g(x) = x^2 + 2$. Khi đó

$$f_o g(x) = f(g(x)) = f(x^2+2) = 2(x^2+2) + 1 = 2x^2 + 5.$$

$$g_o f(x) = g(f(x) = g(2x+1) = (2x+1)^2 + 2 = 4x^2 + 4x + 3.$$

Ảnh và ảnh ngược của ánh xạ

Định nghĩa. Cho $f : X \to Y$ là ánh xạ, $A \subset X, B \subset Y$. Khi đó:

- $\mathrm{f(A)} = \{f(x) | x \in A\} = \{y \in Y \mid \exists x \in A, y = f(x)\}$ được gọi là ***ảnh*** của A.
- $\mathrm{f}^{-1}\mathrm{(B)} = \{x \in X \mid f(x) \in B\}$ được gọi là ***ảnh ngược*** của B.
- $f(X)$ được gọi là ***ảnh của ánh xạ*** f, ký hiệu Imf.

Ví dụ. Cho $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ được xác định $f(x) = x^2 + 1$. Khi đó:

$$\begin{array}{ll} f([1,3]) = [2,10] & f([-2,-1]) = [2,5] \\ f([-1,3]) = [1,10] & f((1,5)) = (2,26) \\ f^{-1}(1) = \{0\} & f^{-1}(2) = \{-1,1\} \\ f^{-1}(-5) = \emptyset & f^{-1}([2,5]) = [-2,-1] \cup [1,2] \end{array}$$

Phân loại ánh xạ

a) **Đơn ánh.** Ta nói $f : X \to Y$ là một ***đơn ánh*** nếu hai phần tử khác nhau bất kỳ của X đều có ảnh khác nhau.

Nghĩa là: $\forall x_1, x_2 \in X, x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$.

Ví dụ.

- $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ được xác định $f(x) = x^2 + 1$ (là đơn ánh)
- $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ được xác định $g(x) = x^2 + 1$ (không đơn ánh)

b) **Toàn ánh.** Ta nói $f : X \to Y$ là một ***toàn ánh*** nếu $f(X) = Y$.

Nghĩa là: $\forall y \in Y, \exists x \in X, f(x) = y$.

Ví dụ.

- $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ được xác định $f(x) = x^3 + 1$ (là toàn ánh)
- $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ được xác định $g(x) = x^2 + 1$ (không toàn ánh)

$c)$ **Song ánh.** Ta nói $f : X \to Y$ là một ***song ánh*** nếu f là đơn ánh và toàn ánh.

Ví dụ.

- $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ được xác định $f(x) = 2x + 1$ (là song ánh)
- $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ được xác định $g(x) = x^2 + 1$ (không song ánh)

Ánh xạ ngược

Xét $f : X \to Y$ là một song ánh. Khi đó, với mọi $y \in Y$, tồn tại duy nhất một phần tử $x \in X$ thỏa $f(x) = y$. Do đó tương ứng $y \longmapsto x$ là một ánh xạ từ Y vào X. Ta gọi đây là ánh xạ ngược của f và ký hiệu $f^{\breve{}1}$. Như vậy:

$$\begin{aligned} f^{-1} : Y &\longrightarrow X \\ y &\longmapsto f^{-1}(y) = x \text{ sao cho } f(x) = y \end{aligned}$$

Ví dụ. Cho $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ với $f(x) = 2x + 1$. Khi đó $f^{-1}(y) = \dfrac{y-1}{2}$.

1. 2. Ánh xạ tuyến tính

Định nghĩa. Cho V và W là hai không gian vectơ trên trường $\mathbb{R}$. Ta nói $f : V \longrightarrow W$ là một ***ánh xạ tuyến tính*** nếu nó thỏa hai điều kiện dưới đây:

i) $f(u+v) = f(u) + f(v), \forall u, v \in V$,

ii) $f(\alpha u) = \alpha f(u), \forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall u \in V$.

Nhận xét. *Điều kiện i) và ii) trong định nghĩa có thể được thay thế bằng một điều kiện :*

$$f(\alpha u + v) = \alpha f(u) + f(v), \forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall u, v \in V.$$

Ký hiệu.

- $\mathrm{L}(\mathrm{V}, \mathrm{W})$ là tập hợp các ánh xạ tuyến tính từ $V \to W$.
- Nếu $f \in L(V, V)$ thì f được gọi là một ***toán tử tuyến tính*** trên V. Viết tắt $f \in L(V)$.

Nhận xét. *Nếu* $f \in L(V, W)$ *thì*

- $f(0) = 0;$
- $f(-u) = -f(u), \forall u \in V.$

Ví dụ. Cho ánh xạ $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ xác định bởi

$$f(x, y, z) = (x + 2y - 3z, 2x + z).$$

Chứng tỏ f là ánh xạ tuyến tính.

Giải. $\forall u = (x_1, y_1, z_1), v = (x_2, y_2, z_2) \in \mathbb{R}^3$. Ta có

$$\begin{aligned} f(u+v) &= f(x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2) \\ &= (x_1 + x_2 + 2y_1 + 2y_2 - 3z_1 - 3z_2, 2x_1 + 2x_2 + z_1 + z_2) \\ &= (x_1 + 2y_1 - 3z_1, 2x_1 + z_1) + (x_2 + 2y_2 - 3z_2, 2x_2 + z_2) \\ &= f(u) + f(v). \end{aligned}$$

Tính chất $\forall \alpha \in \mathbb{R}, f(\alpha u) = \alpha f(u)$ kiểm tra tương tự.

Định lý. *Cho* V *và* W *là hai không gian vectơ,* $\mathcal{B} = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ *là cơ sở của* V. *Khi đó, nếu* $S = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ *là một tập hợp của* W *thì tồn tại duy nhất một* $f \in L(V, W)$ *sao cho*

$$f(u_1) = v_1, f(u_2) = v_2, \ldots, f(u_n) = v_n.$$

Hơn nữa, nếu $[u]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$ *thì*

$$f(u) = \alpha_1 f(u_1) + \alpha_2 f(u_2) + \ldots + \alpha_n f(u_n)$$

Ví dụ. Trong không gian $\mathbb{R}^3$ cho các vectơ:

$$u_1 = (1, -1, 1); u_2 = (1, 0, 1); u_3 = (2, -1, 3).$$

i) Chứng tỏ $\mathcal{B} = (u_1, u_2, u_3)$ là một cơ sở của $\mathbb{R}^3$.

ii) Tìm ánh xạ tuyến tính $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ thỏa:

$$f(u_1) = (2, 1, -2); f(u_2) = (1, 2, -2); f(u_3) = (3, 5, -7).$$

Giải.

$a)$ Chứng tỏ $\mathcal{B} = (u_1, u_2, u_3)$ là một cơ sở của $\mathbb{R}^3$.

Lập $A = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$. Ta có $|A| = 1$. Suy ra $\mathcal{B}$ độc lập tuyến tính. Vì $\dim\mathbb{R}^3 = 3$ bằng số vectơ của $\mathcal{B}$ nên $\mathcal{B}$ là một cơ sở của $\mathbb{R}^3$.

$b)$ Tìm ánh xạ tuyến tính $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ thỏa:

$$f(u_1) = (2, 1, -2); f(u_2) = (1, 2, -2); f(u_3) = (3, 5, -7).$$

Cho $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Tìm $[u]_{\mathcal{B}}$.

Lập

$$(u_1^\top\ u_2^\top\ u_3^\top\ |u^\top) = \left(\begin{array}{rrr|c} 1 & 1 & 2 & x \\ -1 & 0 & -1 & y \\ 1 & 1 & 3 & z \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|l} 1 & 0 & 0 & x-y-z \\ 0 & 1 & 0 & 2x+y-z \\ 0 & 0 & 1 & -x+z \end{array}\right).$$

Vậy $[u]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} x-y-z \\ 2x+y-z \\ -x+z \end{pmatrix}$.

Suy ra $u = (x-y-z)u_1 + (2x+y-z)u_2 + (-x+z)u_3$.

Vậy, ta có

$$\begin{aligned} f(u) &= (x-y-z)f(u_1) + (2x+y-z)f(u_2) + (-x+z)f(u_3) \\ &= (x-y-z)(2,1,-2) + (2x+y-z)(1,2,-2) \\ &\qquad + (-x+z)(3,5,-7) \\ &= (x-y, y+2z, x-3z). \end{aligned}$$

2. Nhân và ảnh của ánh xạ tuyến tính

1.1 **Không gian nhân**

1.2 **Không gian ảnh**

2.1 Không gian nhân

Định nghĩa. Cho $f : V \to W$ là một ánh xạ tuyến tính. Ta đặt

$$\mathrm{Ker} f = \{u \in V \mid f(u) = 0\}$$

Khi đó $\mathrm{Ker} f$ là không gian con của V, ta gọi $\mathrm{Ker} f$ là ***không gian nhân*** của f.

Nhận xét. *Dựa vào Định nghĩa, ta được*

$$u \in \mathrm{Ker} f \Leftrightarrow f(u) = 0.$$

Ví dụ. Cho $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ được xác định bởi:

$$f(x, y, z) = (x + y - z, 2x + 3y - z, 3x + 5y - z)$$

Tìm một cơ sở của $\mathrm{Ker} f$.

Giải. Gọi $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

$$u \in \mathrm{Ker} f \Leftrightarrow f(u) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & - & z & = & 0 \\ 2x & + & 3y & - & z & = & 0 \\ 3x & + & 5y & - & z & = & 0 \end{array}\right.$$

Ma trận hóa, $\tilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & -1 \\ 3 & 5 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Hệ phương trình có nghiệm $(x, y, z) = (2t, -t, t)$ với $t \in \mathbb{R}$.

Nghiệm cơ bản của hệ là $u_1 = (2, -1, 1)$.

Vậy, $\mathrm{Ker} f$ có cơ sở là $\{u_1 = (2, -1, 1)\}$.

2.1 Không gian ảnh

Định nghĩa. Cho $f : V \to W$ là một ánh xạ tuyến tính. Ta đặt

$$\mathrm{Im} f = \{f(u) \,|\, u \in V\}$$

Khi đó $\mathrm{Im} f$ là không gian con của W, ta gọi $\mathrm{Im} f$ là ***không gian ảnh*** của f.

Định lý. *Cho $f : V \to W$ là một ánh xạ tuyến tính. Khi đó, nếu*

$$S = \{u_1, u_2, \ldots, u_m\}$$

là tập sinh của V thì

$$f(S) = \{f(u_1), f(u_2), \ldots, f(u_m)\}$$

là tập sinh của $\mathrm{Im} f$.

Nhận xét. *Dựa vào định lý trên, để tìm cơ sở* $\operatorname{Im} f$*, ta chọn một tập sinh* S *của* V *(để đơn giản ta có thể chọn cơ sở chính tắc). Khi đó* $\operatorname{Im} f$ *sinh bởi tập ảnh của* S*.*

Ví dụ. Cho $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ được xác định bởi:

$$f(x, y, z) = (x + y - z, 2x + 3y - z, 3x + 5y - z)$$

Tìm một cơ sở của $\operatorname{Im} f$.

Giải. Gọi $\mathcal{B}_0 = \{e_1, e_2, e_3\}$ là cơ sở chính tắc của $\mathbb{R}^3$. Ta có

$$\begin{aligned} f(e_1) = f(1,0,0) &= (1,2,3) \\ f(e_2) = f(0,1,0) &= (1,3,5) \\ f(e_3) = f(0,0,1) &= (-1,-1,-1) \end{aligned}$$

Ta có $\operatorname{Im} f$ sinh bởi $\{f(e_1), f(e_2), f(e_3)\}$.

Lập ma trận $A = \begin{pmatrix} f(e_1) \\ f(e_2) \\ f(e_3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Do đó, $\mathrm{Im}f$ có cơ sở là $\{v_1 = (1,2,3), v_2 = (0,1,2)\}$.

Định lý. *Cho $f: V \to W$ là ánh xạ tuyến tính và V hữu hạn chiều. Khi đó*

$$\mathrm{dim}\mathrm{Im}f + \mathrm{dim}\mathrm{Ker}f = \mathrm{dim}V.$$

Mệnh đề. *Cho $f: V \to W$ là ánh xạ tuyến tính. Khi đó*

i) *f là đơn cấu khi và chỉ khi* $\mathrm{Ker}f = \{0\}$.

ii) *f là toàn cấu khi và chỉ khi* $\mathrm{Im}f = W$.

iii) *f là đẳng cấu khi và chỉ khi* $\mathrm{Ker}f = \{0\}$ *và* $\mathrm{Im}f = W$.

Định nghĩa. Cho V có cơ sở $\mathcal{B} = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$, W có cơ sở $\mathcal{B}' = (v_1, v_2, \ldots, v_m)$ và $f \in L(V, W)$. Đặt

$$P = ([f(u_1)]_{\mathcal{B}'} \ [f(u_2)]_{\mathcal{B}'} \ldots [f(u_n)]_{\mathcal{B}'})$$

Khi đó ma trận P được gọi là ***ma trận biểu diễn*** của ánh xạ f theo cặp cơ sở $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$, ký hiệu $P = [\mathrm{f}]_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$ (hoặc $[f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$).

Nếu $f \in L(V)$ thì ma trận $[f]_{\mathcal{B},\mathcal{B}}$ được gọi là *ma trận biểu diễn* toán tử tuyến tính f, ký hiệu $[\mathrm{f}]_{\mathcal{B}}$

Ví dụ. Xét ánh xạ tuyến tính $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ xác định bởi

$$f(x, y, z) = (x - y, 2x + y + z)$$

và cặp cơ sở $\mathcal{B} = (u_1 = (1, 1, 0), u_2 = (0, 1, 2), u_3 = (1, 1, 1))$, $\mathcal{C} = (v_1 = (1, 3), v_2 = (2, 5))$. Tìm $[f]_{\mathcal{B},\mathcal{C}}$.

Ta có

$$\begin{aligned} f(u_1) &= (0,3) \\ f(u_2) &= (-1,3) \\ f(u_3) &= (0,4) \end{aligned}$$

Với $v = (a,b) \in \mathbb{R}^2$, tìm $[v]_{\mathcal{C}}$.

Lập $(v_1^\top \ v_2^\top | v^\top) \to \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & a \\ 3 & 5 & b \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -5a+2b \\ 0 & 1 & 3a-b \end{array}\right)$

Suy ra $[v]_{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} -5a+2b \\ 3a-b \end{pmatrix}$

Lần lượt thay $f(u_1), f(u_2), f(u_3)$ ta có

$$[f(u_1)]_{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \end{pmatrix}, [f(u_2)]_{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 11 \\ -6 \end{pmatrix}, [f(u_3)]_{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 8 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

Vậy

$$[f]_{\mathcal{B},\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 6 & 11 & 8 \\ -3 & -6 & -4 \end{pmatrix}.$$

Ví dụ. Cho ánh xạ tuyến tính $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ định bởi

$$f(x, y, z, t) = (x - 2y + z - t, x + 2y + z + t, 2x + 2z).$$

Tìm ma trận biểu diễn ánh xạ tuyến tính f theo cặp cơ sở chính tắc.

Giải.

$$[f]_{\mathcal{B}_0,\mathcal{B}_0'} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Ví dụ. Cho $f \in L(\mathbb{R}^2)$ xác định bởi $f(x, y) = (2x + y, x - 4y)$. Khi đó ma trận biểu diễn f theo cơ sở chính tắc $\mathcal{B}_0$ là:

$$[f]_{\mathcal{B}_0} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}.$$

Định lý. *Cho V và W là các không gian vectơ hữu hạn chiều; $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ và $\mathcal{C}, \mathcal{C}'$ tương ứng là các cặp cơ sở trong V và W. Khi đó, với mọi ánh xạ tuyến tính $f : V \to W$ ta có*

i) $\forall u \in V, [f(u)]_{\mathcal{C}} = [f]_{\mathcal{B},\mathcal{C}}[u]_{\mathcal{B}}$.

ii) $[f]_{\mathcal{B}',\mathcal{C}'} = (\mathcal{C} \to \mathcal{C}')^{-1}[f]_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(\mathcal{B} \to \mathcal{B}')$.

Hệ quả. *Cho $\mathcal{B}$ và $\mathcal{B}'$ là hai cơ sở của không gian hữu hạn chiều V. Khi đó đối với mọi toán tử tuyến tính $f \in L(V)$ ta có*

i) $\forall u \in V, [f(u)]_{\mathcal{B}} = [f]_{\mathcal{B}}[u]_{\mathcal{B}}$.

ii) $[f]_{\mathcal{B}'} = (\mathcal{B} \to \mathcal{B}')^{-1}[f]_{\mathcal{B}}(\mathcal{B} \to \mathcal{B}')$.

Ví dụ. Trong không gian $\mathbb{R}^3$ cho cơ sở

$$\mathcal{B} = (u_1 = (1,1,0); u_2 = (0,2,1); u_3 = (2,3,1))$$

và ánh xạ tuyến tính $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ định bởi:
$f(x,y,z) = (2x + y - z, x + 2y - z, 2x - y + 3z)$. Tìm $[f]_{\mathcal{B}}$

Giải. Gọi $\mathcal{B}_0$ là cơ sở chính tắc của $\mathbb{R}^3$, ta có

$$[f]_{\mathcal{B}_0} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Áp dụng hệ quả, ta có

$$[f]_{\mathcal{B}} = (\mathcal{B}_0 \to \mathcal{B})^{-1}[f]_{\mathcal{B}_0}(\mathcal{B}_0 \to \mathcal{B}),$$

trong đó $(\mathcal{B}_0 \to \mathcal{B}) = (u_1^\top \ u_2^\top \ u_3^\top) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, do đó

$$(\mathcal{B}_0 \to \mathcal{B})^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -4 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Suy ra

$$[f]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -4 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -8 & 7 & -13 \\ -3 & 2 & -3 \\ 5 & -3 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -8 \\ -1 & 1 & -3 \\ 2 & 0 & 7 \end{pmatrix}.$$

Ví dụ. Cho ánh xạ tuyến tính $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, biết ma trận biểu diễn của f trong cặp cơ sở $\mathcal{B} = (u_1 = (1,1,1); u_2 = (1,0,1); u_3 = (1,1,0))$ và $\mathcal{C} = (v_1 = (1,1); v_2 = (2,1))$ là

$$[f]_{\mathcal{B},\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 0 & 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Tìm công thức của f.

Giải.

Cách 1. Do $[f]_{\mathcal{B},\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 0 & 3 & 4 \end{pmatrix}$.

Ta có

- $[f(u_1)]_{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$. Suy ra $f(u_1) = 2v_1 + 0v_2 = (2, 2)$
- $[f(u_2)]_{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$. Suy ra $f(u_2) = v_1 + 3v_2 = (7, 4)$
- $[f(u_3)]_{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix}$. Suy ra $f(u_3) = -3v_1 + 4v_2 = (5, 1)$

Cho $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Tìm $[u]_{\mathcal{B}}$.

Lập $(u_1^\top\ u_2^\top\ u_3^\top\ |u^\top) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & x \\ 1 & 0 & 1 & y \\ 1 & 1 & 0 & z \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & x-y-z \\ 0 & 1 & 0 & 2x+y-z \\ 0 & 0 & 1 & -x+z \end{array}\right)$.

Vậy $[u]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} -x+y+z \\ x-y \\ x-z \end{pmatrix}$.

Suy ra $u = (-x+y+z)u_1 + (x-y)u_2 + (x-z)u_3$.

Vậy, ta có

$$\begin{aligned} f(u) &= (-x+y+z)f(u_1) + (x-y)f(u_2) + (x-z)f(u_3) \\ &= (-x+y+z)(2,2) + (x-y)(7,4) + (x-z)(5,1) \\ &= (10x-5y-3z, 3x-2y+z). \end{aligned}$$

Cách 2. Gọi $\mathcal{B}_0$ và $\mathcal{C}_0$ lần lượt là cơ sở chính tắc của $\mathbb{R}^3$ và $\mathbb{R}^2$. Áp dụng công thức ta có

$$[f]_{\mathcal{B}_0,\mathcal{C}_0} = (\mathcal{C} \to \mathcal{C}_0)^{-1}[f]_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(\mathcal{B} \to \mathcal{B}_0).$$

Ta có

- $(\mathcal{C} \to \mathcal{C}_0)^{-1} = (\mathcal{C}_0 \to C) = (v_1^\top \; v_2^\top) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$
- $(\mathcal{B}_0 \to \mathcal{B}) = (u_1^\top \; u_2^\top \; u_3^\top) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$

Suy ra $(\mathcal{B} \to \mathcal{B}_0) = (\mathcal{B}_0 \to \mathcal{B})^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Vậy

$$\begin{aligned}
[f]_{\mathcal{B}_0,\mathcal{C}_0} &= (\mathcal{C} \to \mathcal{C}_0)^{-1}[f]_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(\mathcal{B} \to \mathcal{B}_0) \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 0 & 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 2 & 7 & 5 \\ 2 & 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 10 & -5 & -3 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Suy ra $f(x, y, z) = (10x - 5y - 3z, 3x - 2y + z)$.

Mệnh đề. *Cho V, W là hai không gian vectơ n chiều và $f \in L(V, W)$. Khi đó f là song ánh khi và chỉ khi tồn tại các cơ sở $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ lần lượt của V và W sao cho $[f]_{\mathcal{A},\mathcal{B}}$ khả nghịch.*

Hơn nữa, khi đó $f^{-1} : W \to V$ cũng là một ánh xạ tuyến tính và

$$[f^{-1}]_{\mathcal{B},\mathcal{A}} = [f]_{\mathcal{A},\mathcal{B}}^{-1}.$$

Đặc biệt, nếu $V = W$ và $\mathcal{A} = \mathcal{B}$ thì

$$[f^{-1}]_{\mathcal{B}} = [f]_{\mathcal{B}}^{-1}.$$

Ví dụ. Cho $\mathcal{B} = (u_1 = (1,1,1), u_2 = (1,1,2), u_3 = (1,2,1))$ là cơ sở của $\mathbb{R}^3$. Với f là toán tử tuyến tính trong $\mathbb{R}^3$ có

$$[f]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Chứng minh f là song ánh và tìm f^{-1}.

Giải. Ta có $|[f]_{\mathcal{B}}| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -1$. Suy ra $[f]_{\mathcal{B}}$ khả nghịch. Vậy f là song ánh.

Gọi $\mathcal{B}_0$ là cơ sở chính tắc ta có

$$\begin{aligned} [f]_{\mathcal{B}_0} &= (\mathcal{B} \to \mathcal{B}_0)^{-1}[f]_{\mathcal{B}}(\mathcal{B} \to \mathcal{B}_0) \\ &= (\mathcal{B}_0 \to \mathcal{B})[f]_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}_0 \to \mathcal{B})^{-1} \end{aligned}$$

Ta có $(\mathcal{B}_0 \to \mathcal{B}) = (u_1^\top \ u_2^\top \ u_3^\top) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Suy ra $(\mathcal{B}_0 \to \mathcal{B})^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Vậy

$$\begin{aligned}
[f]_{\mathcal{B}_0} &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 3 & 1 & 5 \\ 4 & 3 & 6 \\ 4 & 1 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ 3 & 2 & -1 \\ 4 & 3 & -3 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Suy ra $[f^{-1}]_{\mathcal{B}_0} = [f]_{\mathcal{B}_0}^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -2 \\ -5 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Vậy $f^{-1}(x, y, z) = (3x - 2z, -5x + y + 3z, -x + y)$.