Chương 0:

SỐ PHỨC

Lê Văn Luyện

lvluyen@yahoo.com

http://www.math.hcmus.edu.vn/∼lvluyen/09tt

Đại học Khoa Học Tự Nhiên Tp. Hồ Chí Minh

Chương 0. SỐ PHỨC

1. Dạng lượng giác của số phức

Định nghĩa.

Ta ký hiệu i là số thỏa mãn điều kiện $i^2 = -1$. Khi đó $i \notin \mathbb{R}$ nên i được gọi là ***đơn vị ảo***.

Tập số phức được ký hiệu $\mathbb{C}$ và

$$\mathbb{C} = \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{R}\}.$$

Dạng đại số của số phức là: $z = a + bi$, trong đó

- a : được gọi là ***phần thực*** của số phức z, ký hiệu Re(z).
- b : được gọi là ***phần ảo*** của số phức z, ký hiệu là Im(z).

Ví dụ. Cho $z = 3 - 2i$. Khi đó $Re(z) = 3$ và $Im(z) = -2$.

Phép toán trên số phức

Ta định nghĩa phép toán cộng trừ, nhân, chia trên $\mathbb{C}$ một cách tự nhiên như trên $\mathbb{R}$ (chú ý $i^2 = -1$.)

Mệnh đề. *Cho $z = a + ib; z' = c + id$. Khi đó*

- $z = z' \Leftrightarrow a = c, b = d;$
- $z \pm z' = (a \pm c) + i(b \pm d);$
- $zz' = (ac - bd) + i(ad + bc);$
- *Nếu* $z' \neq 0$ *thì* $\dfrac{z}{z'} = \dfrac{(ac + bd) + i(bc - ad)}{c^2 + d^2}.$

Ví dụ.

1) $(2 + 5i)^3 = 2^3 + 3.2^2.5i + 3.2.5^2 i^2 + 5^3 i^3$
$= 8 + 60i - 150 - 125i = -142 - 65i.$

2) $\dfrac{7 + 5i}{3 - 4i} = \dfrac{(7 + 5i)(3 + 4i)}{(3 - 4i)(3 + 4i)} = \dfrac{1 + 43i}{25} = \dfrac{1}{25} + \dfrac{43}{25}i.$

Số phức liên hợp

Định nghĩa. Cho số phức $z = a + ib$. Ta gọi ***số phức liên hợp*** của z, ký hiệu là $\bar{z}$, là số phức $a - ib$.

Định lý. *Với mọi số phức $z, \bar{z}$, ta có*

i) $\bar{z} = 0 \Leftrightarrow z = 0;$

ii) $\bar{\bar{z}} = z;$

iii) $Re(z) = \dfrac{z + \bar{z}}{2}$ và $Im(z) = \dfrac{z - \bar{z}}{2i};$

iv) $\overline{z \pm z'} = \bar{z} \pm \bar{z}';$

v) $\overline{zz'} = \bar{z}\,\bar{z}';$

vi) $\overline{\left(\dfrac{z}{z'}\right)} = \dfrac{\bar{z}}{\bar{z}'}$ $(z' \neq 0).$

Môđun của số phức

Nhận xét.

i) $z = \bar{z} \Leftrightarrow Im(z) = 0$, *nghĩa là* $z \in \mathbb{R}$.

ii) $z = -\bar{z} \Leftrightarrow Re(z) = 0$, *nghĩa là* $z = ib, b \in \mathbb{R}$. *Trong trường hợp* $z = ib$ *ta nói* z *là số* ***thuần ảo***.

Định nghĩa. Cho số phức $z = a + ib$. Ta gọi ***môđun*** của z, ký hiệu là $|z|$, là số thực không âm $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Ví dụ. Với $z = 3 - 4i$, ta có

$$|z| = \sqrt{3^2 + (-4)^2} = \sqrt{25} = 5.$$

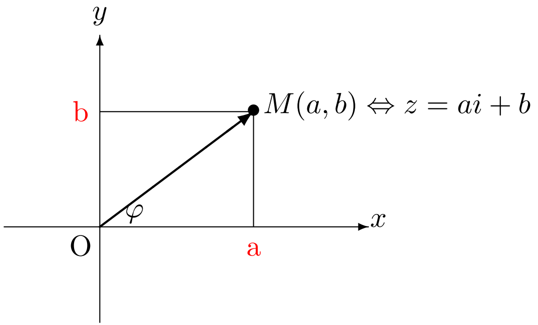
Ví dụ. Cho các số phức $z = 3 - 4i; z' = -6 + 8i$. Hãy tìm môđun của $z, z'; z + z'; z - z'; zz'; z/z'; z^4$ và z'^{-3}.

Giải.

- $|z| = \sqrt{3^2 + (-4)^2} = 5 \Rightarrow \left|z^4\right| = |z|^4 = 5^4 = 625;$
- $|z'| = \sqrt{(-6)^2 + 8^2} = 10 \Rightarrow \left|z'^{-3}\right| = |z'|^{-3} = 10^{-3} = 0,001;$
- $z + z' = -3 + 4i \Rightarrow |z + z'| = \sqrt{(-3)^2 + 4^2} = 5;$
- $z - z' = 9 - 12i \Rightarrow |z - z'| = \sqrt{9^2 + (-12)^2} = 15;$
- $|zz'| = |z|\,|z'| = 5.10 = 50;$
- $\left|\dfrac{z}{z'}\right| = \dfrac{|z|}{|z'|} = \dfrac{5}{10} = \dfrac{1}{2}.$

2. Dạng lượng giác của số phức

Cho số phức $z = a + bi$. Khi đó có thể xem z như là điểm $M(a, b)$ mặt phẳng tọa độ Oxy và ta gọi M là ***biểu diễn hình học của*** z.



Gọi φ là góc định hướng (Ox, OM) và r là độ dài đoạn OM. Khi đó

$$r = \sqrt{a^2 + b^2}, \quad a = r\cos\varphi, \quad b = r\sin\varphi.$$

Như vậy $z = a + bi = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$.

Dạng biểu số phức theo r và φ được gọi là ***dạng lượng giác*** của z. Trong đó

- r là môđun của z, $r = |z|$
- φ được gọi là ***đối số*** (hay ***argument***) của z, ký hiệu $\varphi = \arg(z)$.

Ví dụ.

- $1 = \cos 0 + i\sin 0;\quad i = \cos\dfrac{\pi}{2} + i\sin\dfrac{\pi}{2}$;
- $1 + i\sqrt{3} = 2(\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}) = 2\left(\cos\dfrac{\pi}{3} + i\sin\dfrac{\pi}{3}\right)$;
- $-1 + i\sqrt{3} = 2(-\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}) = 2\left(\cos\dfrac{2\pi}{3} + i\sin\dfrac{2\pi}{3}\right)$;
- $-1 - i\sqrt{3} = 2(-\dfrac{1}{2} - i\dfrac{\sqrt{3}}{2}) = 2\left(\cos\dfrac{4\pi}{3} + i\sin\dfrac{4\pi}{3}\right)$.

Mệnh đề. *Cho các số phức* $z, z' \neq 0$ *dưới dạng lượng giác*

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi), \quad z' = r'(\cos\varphi' + i\sin\varphi').$$

Khi đó

- $zz' = rr'[\cos(\varphi + \varphi') + i\sin(\varphi + \varphi')]$;
- $\dfrac{z}{z'} = \dfrac{r}{r'}[\cos(\varphi - \varphi') + i\sin(\varphi - \varphi')]$.

Ví dụ. Viết các số phức sau dưới dạng lượng giác:

$$z_1 = (1 - i)(\sqrt{3} - i); \quad z_2 = \frac{1 - i}{\sqrt{3} - i}.$$

Giải. Ta có

$$\begin{aligned} 1-i &= \sqrt{2}(\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}) = \sqrt{2}\left[\cos(-\frac{\pi}{4}) + i\sin(-\frac{\pi}{4})\right]; \\ \sqrt{3}-i &= 2(\frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2}) = 2\left[\cos(-\frac{\pi}{6}) + i\sin(-\frac{\pi}{6})\right]. \end{aligned}$$

Suy ra

$$\begin{aligned} z_1 &= (1-i)(\sqrt{3}-i) = 2\sqrt{2}\left[\cos(-\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6}) + i\sin(-\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6})\right] \\ &= 2\sqrt{2}\left[\cos(-\frac{5\pi}{12}) + i\sin(-\frac{5\pi}{12})\right]; \\ z_2 &= \frac{1-i}{\sqrt{3}-i} = \frac{\sqrt{2}}{2}\left[\cos(-\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{6}) + i\sin(-\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{6})\right] \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2}\left[\cos(-\frac{\pi}{12}) + i\sin(-\frac{\pi}{12})\right]. \end{aligned}$$

Công thức Moivre

Định lý. *[công thức Moivre] Cho số phức $z \neq 0$ dưới dạng lượng giác: $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$. Khi đó với mọi số nguyên n ta có*

$$z^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi). \tag{4}$$

Ví dụ. Tính $(1-i)^{1945}$

Giải. Ta viết $1-i$ dưới dạng lượng giác

$$1 - i = \sqrt{2}\left[\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right].$$

Theo công thức Moivre ta có

$$(1-i)^{1945} = \left[\sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)\right]^{1945}$$

$$\begin{aligned}
(1-i)^{1945} &= \left[\sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)\right]^{1945} \\
&= \sqrt{2}^{1945}\left[\cos\left(-\frac{1945\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{1945\pi}{4}\right)\right] \\
&= 2^{972}\sqrt{2}\left[\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right] \\
&= 2^{972}(1-i).
\end{aligned}$$

Ví dụ. Tính $\cos 3x$ theo $\cos x$ và $\sin 3x$ theo $\sin x$.

Giải. Đặt $z = \cos x + i \sin x$. Theo công thức Moivre ta có

$$z^3 = \cos 3x + i \sin 3x.$$

Mặt khác

$$\begin{aligned} z^3 &= (\cos x + i \sin x)^3 \\ &= \cos^3 x + 3\cos^2 x(i \sin x) + 3\cos x(i \sin x)^2 + (i \sin x)^3 \\ &= (\cos^3 x - 3\cos x \sin^2 x) + i(3\cos^2 x \sin x - \sin^3 x). \end{aligned}$$

Suy ra

$$\begin{aligned} \cos 3x &= \cos^3 x - 3\cos x \sin^2 x = 4\cos^3 x - 3\cos x; \\ \sin 3x &= 3\cos^2 x \sin x - \sin^3 x = 3\sin x - 4\sin^3 x. \end{aligned}$$

3. Căn của số phức

Định nghĩa. *Căn bậc $n > 0$* của số phức u là số phức z thỏa $z^n = u$.

Định lý. *Mọi số phức $u \neq 0$ đều có đúng n căn bậc n định bởi*

$$z_k = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + k2\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi + k2\pi}{n}\right), \qquad (1)$$

với $k \in \overline{0, n-1}$, trong đó $r = |z|$, $\varphi = \arg(z)$.

Ví dụ. Tìm căn bậc 5 của 1.

Giải. Ta viết 1 dưới dạng lượng giác

$$1 = \cos 0 + i\sin 0.$$

$$1 = \cos 0 + i \sin 0.$$

Theo công thức (1), ta có các căn bậc 5 của 1 là

$$z_k = \cos \frac{k2\pi}{5} + i \sin \frac{k2\pi}{5} \text{ với } k = 0, 1, 2, 3, 4.$$

Đó là các số phức:

$$\begin{aligned}
z_0 &= 1; \\
z_1 &= \cos \frac{2\pi}{5} + i \sin \frac{2\pi}{5}; \\
z_2 &= \cos \frac{4\pi}{5} + i \sin \frac{4\pi}{5}; \\
z_3 &= \cos \frac{6\pi}{5} + i \sin \frac{6\pi}{5}; \\
z_4 &= \cos \frac{8\pi}{5} + i \sin \frac{8\pi}{5}.
\end{aligned}$$

Ví dụ. Tìm căn bậc 3 của $1+i$.

Giải. Ta viết $1+i$ dưới dạng lượng giác

$$1+i=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right).$$

Theo công thức (1), các căn bậc 3 của $1+i$ là

$$z_k=\sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{\frac{\pi}{4}+k2\pi}{3}+i\sin\frac{\frac{\pi}{4}+k2\pi}{3}\right) \text{ với } k=0,\ 1,\ 2.$$

Vậy $1+i$ có 3 căn bậc 3 là

$$\begin{aligned}
z_0 &= \sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12}\right);\\
z_1 &= \sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{9\pi}{12}+i\sin\frac{9\pi}{12}\right);\\
z_2 &= \sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{17\pi}{12}+i\sin\frac{17\pi}{12}\right).
\end{aligned}$$

Căn bậc hai của số phức

Định lý. *Cho số phức* $u = a + ib \neq 0$. *Khi đó* u *có* 2 *căn bậc hai đối nhau* $z = x + iy$, *trong đó*

$$\begin{cases} x^2 &= \dfrac{a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2}; \\ y^2 &= -\dfrac{a - \sqrt{a^2 + b^2}}{2}. \end{cases}$$

Hơn nữa, tích số xy *luôn luôn cùng dấu với* b *(nếu* $b \neq 0$*).*

Ví dụ. Tìm căn bậc hai của số phức $z = 3 + 4i$.

Giải. Ta có $a = 3, b = 4$. Suy ra $\begin{cases} x^2 &= 4; \\ y^2 &= 1; \\ xy &> 0 \text{ (vì } b = 4 > 0). \end{cases}$

Vậy căn bậc hai của z là $z_1 = -2 - i$; $\quad z_2 = 2 + i$.

Phương trình bậc hai

Định lý. *Phương trình bậc hai* $az^2 + bz + c = 0$ *với* $a, b, c \in \mathbb{C}, a \neq 0$, *luôn luôn có các nghiệm định bởi*

$$z = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}, \quad \textit{trong đó } \Delta = b^2 - 4ac,$$

với quy ước $\sqrt{\Delta}$ *là một trong hai căn bậc hai của số phức* Δ.

Ví dụ. Giải phương trình phức

$$2z^2 + (2i+1)z + 8i + 11 = 0.$$

Giải. Ta có

$$\Delta = b^2 - 4ac = (2i+1)^2 - 4.2(8i+11) = -91 - 60i.$$

Gọi $z = x + iy$ là một căn bậc hai của $\Delta = -91 - 60i$. Khi đó

$$\begin{aligned} x^2 &= \frac{-91 + \sqrt{91^2 + 60^2}}{2} = 9; \\ y^2 &= -\frac{-91 - \sqrt{91^2 + 60^2}}{2} = 100. \\ xy &< 0 \text{ (cùng dấu với } -60). \end{aligned}$$

Vậy $z = \pm(3 - 10i)$ là các căn bậc hai của $\Delta = -91 - 60i$. Suy ra nghiệm phương trình đã cho là

$$\begin{aligned} z_1 &= \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(2i + 1) + (3 - 10i)}{2.2} = \frac{1}{2} - 3i; \\ z_2 &= \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(2i + 1) - (3 - 10i)}{2.2} = -1 + 2i. \end{aligned}$$

Ví dụ. Giải phương trình phức

$$144z^2 + 192z + 73 = 0.$$

Giải. Ta có

$$\Delta' = b'^2 - ac = 96^2 - 144.73 = -1296.$$

Vậy $\sqrt{\Delta'} = \sqrt{-1296} = \sqrt{(36i)^2} = \pm 36i$. Suy ra nghiệm phương trình đã cho là

$$z = \frac{-b' \pm \sqrt{\Delta'}}{a} = \frac{-96 \pm 36i}{144} = -\frac{2}{3} \pm \frac{1}{4}i.$$

Ví dụ. Giải phương trình

$$z^2 - 2\overline{z} + 1 = 0.$$

Giải. Đặt $z = x + iy$. Ta viết lại phương trình đã cho dưới dạng

$$(x^2 - y^2 + 2ixy) - 2(x - iy) + 1 = 0$$

$$(x^2 - y^2 + 2ixy) - 2(x - iy) + 1 = 0$$

hay

$$(x^2 - y^2 - 2x + 1) + 2i(x + 1)y = 0$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 - 2x + 1 = 0; & (1) \\ (x+1)y = 0. & (2) \end{cases}$$

Từ (2) $\Rightarrow \left[\begin{array}{ccc} x & = & -1 \\ y & = & 0 \end{array} \right.$

- $x = -1$, (1) trở thành $4 - y^2 = 0 \Leftrightarrow y = \pm 2$.
- $y = 0$, (1) trở thành $x^2 - 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$.

Vậy phương trình đã có 3 nghiệm là

$$z_1 = -1 + 2i; \quad z_2 = -1 - 2i; \quad z_3 = 1.$$

4. Định lý cơ bản của Đại số

Bổ đề. *Cho $f(x) \in \mathbb{R}[x]$ là một đa thức bất kỳ với các hệ số thực. Giả sử $\alpha \in \mathbb{C}$ là một nghiệm nào đó của $f(x)$. Khi đó $\overline{\alpha}$ cũng là nghiệm của $f(x)$.*

Định lý. *[Định lý căn bản của Đại số]*
Mọi đa thức bậc lớn hơn hay bằng 1 với hệ số phức đều có nghiệm phức.

Định lý.
Nếu $f(x) \in \mathbb{R}[x]$ và bậc của $f(x)$ lớn hơn hay bằng 1 thì $f(x)$ có thể phân tích thành tích các đa thức trong $\mathbb{R}[x]$ có bậc tối đa là 2.

Ví dụ. Giải phương trình $z^4 + 4z^3 + 11z^2 + 14z + 10 = 0$. Biết phương trình này có 1 nghiệm là $z_1 = -1 + i$.

Giải. Nhận xét $z_1 = -1 + i$ là nghiệm của phương trình thì $z_2 = -1 - i$ cũng là nghiệm của phương trình.

Ta có

$$\begin{aligned}(z - z_1)(z - z_2) &= (z + 1 - i)(z + 1 + i) \\ &= z^2 + 2z + 2.\end{aligned}$$

Chia đa thức ta được

$$z^4 + 4z^3 + 11z^2 + 14z + 10 = \left(\mathrm{z}^2 + 2z + 2\right)\left(\mathrm{z}^2 + 2z + 5\right).$$

Phương trình $\mathrm{z}^2 + 2z + 5 = 0$ có hai nghiệm là $-1 \pm 2i$.

Vậy phương trình ban đầu có 4 nghiệm là

$$-1 + i; \quad -1 - i; \quad -1 - 2i; \quad -1 + 2i.$$