Bài 4: ỨNG DỤNG MATLAB GIẢI GẦN ĐÚNG PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN

1. **Phương pháp chuỗi Taylor**
   $y(x)$ xấp xỉ bằng tổng N số hạng đầu của chuỗi Taylor. N càng lớn, độ chính xác càng cao. Tuy nhiên phương pháp này chỉ cho $y(x)$ gần đúng với các x gần. Do vậy, phương pháp này ít được sử dụng và ít được đề cập tới trong các sách:
   $$y(x) = y(x_0) + \frac{y'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{y''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + ... + \frac{y^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k \quad (1)$$

2. **Phương pháp Euler(Ơ-Le)**
   Chia đoạn $[x_0, X]$ thành N đoạn bằng nhau: $h = (X - x_0)/N$.

   Mục đích của phương pháp Ơ-le là tính gần đúng giá trị của $y(x)$ chỉ tại một nút x_i mà thôi, chứ không phải tại mọi $x \in [x_0, X]$:
   $$y_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i) \quad (2)$$
   Để tăng độ chính xác ta giảm bước nhảy h, nhưng nếu $h < h_0$, với h_0 là giá trị h tối ưu của phương pháp Ơ-le, thì sai số lại tăng.

3. **Phương pháp hiện ẩn hình thang**
   Tương tự phương pháp Ơ-le, mục đích của phương pháp hiện ẩn hình thang cũng là tính gần đúng giá trị của $y(x)$ chỉ tại một nút x_i mà thôi, chứ không phải tại mọi $x \in [x_0, X]$.

   Bước 1: lấy xấp xỉ đầu bằng phương pháp Ơ-le:
   $$y^1_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i) \quad (3)$$
   Bước 2: dùng hàm lặp tính lại giá trị của y_{i+1}:
   $$y^m_{i+1} = y_i + \frac{h}{2}[f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, y^{m-1}_{i+1})] \quad (4)$$
   Hàm lặp dừng khi $|y^m_{i+1} - y^{m-1}_{i+1}| < \epsilon$

   Trong đó ϵ là sai số cho trước, m = 2, 3, 4,...

4. **Phương pháp hiện ẩn trung điểm**
   Tương tự phương pháp hiện ẩn hình thang, mục đích của phương pháp này cũng là tính gần đúng giá trị của $y(x)$ chỉ tại một nút x_i mà thôi, chứ không phải tại mọi $x \in [x_0, X]$. Phương pháp hiện ẩn hình thang có độ chính xác bậc 2 (khi h tương đối bé).

   Bước 1: Tính giá trị đầu y^-_{i+1}:
   $$y^-_{i+1} = y_i + \frac{h}{2}f(x_i, y_i) \quad (5)$$
   Bước 2: Tính lại giá trị của y_{i+1}:
   $$y_{i+1} = y_i + hf(x_i + h/2, y^-_{i+1}) \quad (6)$$

5. Phương pháp Runge – Kutta (R-K)

Tương tự phương pháp hiện ẩn hình thang, mục đích của phương pháp này cũng là tính gần đúng giá trị của $y(x)$ chỉ tại một nút x_i mà thôi, chứ không phải tại mọi $x \in [x_0, X]$. Phương pháp Runge - Kutta có độ chính xác bậc 4.

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \tag{7}$$

Trong đó:

$$k_1 = hf(x_i, y_i) \tag{8}$$

$$k_2 = hf(x_i + 0.5h, y_i + 0.5k_1) \tag{9}$$

$$k_3 = hf(x_i + 0.5h, y_i + 0.5k_2) \tag{10}$$

$$k_4 = hf(x_i + h, y_i + k_3) \tag{11}$$