BÀI 5A: ỨNG DỤNG MATLAB GIẢI GẦN ĐÚNG PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN

I. TÓM LƯỢC LÝ THUYẾT

Dạng toán giải phương trình vi phân bậc 1:

$$y' = f(x,y) \text{ và } y(x_0) = A = constant \rightarrow Tìm\ y = f(x)$$

Khi việc giải bài toán trở nên phức tạp, việc tìm gần đúng là cần thiết. Ở đây, bài thực hành đề cập tới các phương pháp tính gần đúng sau:

1.1. Phương pháp chuỗi Taylor:

$$y(x) = y(x_0) + \frac{y'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{y''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{y^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + \cdots$$

y(x) xấp xỉ bằng tổng n số hạng đầu của chuỗi Taylor, n càng lớn, độ chính xác càng cao khi n càng lớn. Tuy nhiên phương pháp này chỉ cho y(x) gần đúng với các x gần x_0. Do vậy, phương pháp này ít được sử dụng và ít được đề cập tới trong các sách.

1.2. Phương pháp Euler (Ơ-le):

Chia đoạn $[x_0, X]$ thành N đoạn bằng nhau. $h = (X - x_0)/N$.

Mục đích của phương pháp Ơ-le là tính gần đúng giá trị của y(x) chỉ tại một nút x_i mà thôi, chứ không phải tại mọi $x \in [x_0, X]$:

$$y_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i)$$

Để tăng độ chính xác ta giảm bước nhảy h, nhưng nếu $h < h_0$, với h_0 là giá trị h tối ưu của phương pháp Ơ-le, thì sai số lại tăng.

1.3. Phương pháp hiện ẩn hình thang:

Tương tự phương pháp Ơ-le, mục đích của phương pháp hình thang cũng là tính gần đúng giá trị của y(x) chỉ tại một nút x_i mà thôi, chứ không phải tại mọi $x \in [x_0, X]$. Phương pháp hiện ẩn trung điểm có độ chính xác bậc 2 (khi h tương đối bé).

Bước 1: lấy xấp xỉ đầu bằng phương pháp Ơ-le

$$y_{i+1}^{-} = y_i + hf(x_i, y_i)$$

Bước 2: dùng hàm lặp công thức tính sau

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2}[f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, y_{i+1}^{-})]$$

Hàm lặp dừng khi:

$$\left|y_{i+1}^{(m)} - y_{i+1}^{(m-1)}\right| \leq \varepsilon$$

Trong đó, ε là sai số cho trước, m = 1, 2, 3, …

Số lần lặp càng nhỏ khi h càng nhỏ.

1.4. Phương pháp hiện ẩn trung điểm (Ơ-le cải tiến):

Tương tự phương pháp hiện ẩn hình thang, mục đích của phương pháp hiện ẩn trung điểm cũng là tính gần đúng giá trị của y(x) chỉ tại một nút x_i mà thôi, chứ không phải tại mọi $x \in [x_0, X]$. Phương pháp hiện ẩn trung điểm có độ chính xác bậc 2 (khi h tương đối bé) được tính như sau:

$$y_{i+1}^{-} = y_i + \frac{h}{2} f(x_i, y_i)$$

$$y_{i+1} = y_i + hf(x_i + \frac{h}{2}, y_{i+1}^{-})$$

1.5. Phương pháp Runge – Kutta (R-K):

Tương tự phương pháp hiện ẩn hình thang, mục đích của phương pháp Runge – Kutta cũng là tính gần đúng giá trị của y(x) chỉ tại một nút x_i, chứ không phải tại mọi $x \in [x_0, X]$. Phương pháp R-K có độ chính xác cấp 4.

Khi đã biết u_i thì tính u_{i+1} như sau:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

Với:

$$k_1 = hf(x_i, y_i)$$

$$k_2 = hf(x_i + 0.5h, y_i + 0.5k_1)$$

$$k_3 = hf(x_i + 0.5h, y_i + 0.5k_2)$$

$$k_4 = hf(x_i + h, y_i + k_3)$$

PHỤ LỤC

CÁC CÂU LỆNH MATLAB ĐƯỢC SỬ DỤNG TRONG BÀI THỰC HÀNH

Lệnh	Miêu tả
x=linspace(a,b,N)	Tạo một mảng x có N điểm cách đều nhau từ a tới b.