Bài giảng môn học Toán cao cấp B2

Nguyễn Anh Thi

2015

Chương 3

PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN CẤP 1

Nội dung

Định nghĩa phương trình vi phân

Định nghĩa

Phương trình vi phân là phương trình liên hệ giữa biến độc lập x với hàm cần tìm y và các đạo hàm của nó $y', y", \ldots, y^{(n)}$. Như vậy phương trình vi phân là phương trình có dạng

$$F(x, y, y', y", \ldots, y^{(n)}) = 0$$

- Cấp của phương trình vi phân là cấp cao nhất của đạo hàm có trong phương trình.
- Nếu thay y bằng hàm số $y(x)$ vào phương trình vi phân, ta được đồng nhất thức, thì ta nói $y = y(x)$ là nghiệm của phương trình vi phân đó. Giải phương trình vi phân là tìm tất cả các nghiệm của nó.

Phương trình vi phân cấp 1

Định nghĩa

Phương trình vi phân cấp 1 là phương trình có dạng:
$F(x, y, y') = 0$

Bài toán Cauchy là bài toán tìm nghiệm $y = y(x)$ của phương trình vi phân thỏa điều kiện đầu $y(x_0) = y_0$

- Hàm số $y = \varphi(x, C)$ gọi là nghiệm tổng quát của phương trình vi phân trên miền $D \subset \mathbb{R}^2$ nếu với mọi $(x_0, y_0) \in D$ tồn tại duy nhất C_0 sao cho $y = \varphi(x, C_0)$ là nghiệm của bài toán Cauchy với điều kiện đầu $y(x_0) = y_0$.
- Nghiệm nhận được từ nghiệm tổng quát khi cho C một giá trị cụ thể gọi là nghiệm riêng.

Ví dụ

Giải phương trình vi phân $y' = \sin x$ và tìm nghiệm của bài toán Cauchy $y' = \sin x$, $y(0) = 1$.

Phương trình vi phân dạng tách biến

Định nghĩa

Phương trình vi phân dạng tách biến là phương trình vi phân có dạng $y' = f(x)g(y)$.

Cách giải: Với điều kiện $g(y) \neq 0$, chia hai vế cho $g(y)$ ta được $\frac{dy}{g(y)} = f(x)dx$. Lấy tích phân hai vế.

Ví dụ

Giải các phương trình vi phân:

1. $y' = 5x^2$.
2. $xy' = y^2 + 1$.
3. $y' = x^2y^3$.

Phương trình vi phân tuyến tính cấp 1

Định nghĩa

Phương trình vi phân tuyến tính cấp 1 là phương trình vi phân có dạng $y' + p(x)y = q(x)$

Cách giải: Gọi $P(x)$ là một nguyên hàm của $p(x)$. Nhân hai vế cho $e^{P(x)}$ ta được

$$\begin{aligned} e^{P(x)}y' + e^{P(x)}p(x)y &= e^{P(x)}q(x) \\ (e^{P(x)}y)' &= e^{P(x)}q(x) \\ e^{P(x)}y &= \int e^{P(x)}q(x)dx \\ y &= e^{-P(x)} \int e^{P(x)}q(x)dx \end{aligned}$$

Phương trình vi phân tuyến tính cấp 1

Ví dụ

Tìm nghiệm tổng quát của phương trình vi phân

1. $y' - xy = x.$
2. $\frac{1}{x}\frac{dy}{dx} - \frac{2y}{x^2} - x\cos x = 0$
3. $x^2y' + xy = 1, x > 0, y(1) = 2.$

Phương trình vi phân toàn phần

Định nghĩa

Phương trình $P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$ được gọi là phương trình vi phân toàn phần nếu có $u(x,y)$ thỏa $du(x,y) = P(x,y)dx + Q(x,y)dy$

Nếu tìm được $u(x,y)$ thì phương trình trở thành $du(x,y) = 0$, suy ra $u(x,y) = C$.

Mệnh đề (Điều kiện đủ để có $u(x,y)$)

Nếu các đạo hàm riêng $\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y), \frac{\partial P}{\partial y}(x,y)$ đều liên tục trên $D \subset \mathbb{R}$ và $\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial P}{\partial y}(x,y)$. Thì tồn tại hàm $u(x,y)$ thỏa $du(x,y) = P(x,y)dx + Q(x,y)dy$

Cách tìm $u(x,y)$

Cố định y, tính tích phân theo x 2 vế của $u_x(x,y) = P(x,y)$

$$u(x,y) = \int P(x,y)dx = \phi(x,y) + C(y)$$

Cố định x, lấy đạo hàm theo y

$$u_y(x,y) = \phi_y(x,y) + C'(y).$$

Cho $u_y(x,y) = Q(x,y)$, suy ra $C(y)$ và ta được $u(x,y)$.

Ví dụ

Giải phương trình vi phân

1. $(3y^2 + 2xy + 2x)dx + (6xy + x^2 + 3)dy = 0$
2. $(x^2 + 4y)y' + 2xy + 1 = 0$
3. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{xy^2 - \cos x \sin x}{y(1-x^2)}, y(0) = 2$

Phương trình vi phân đẳng cấp

Định nghĩa

Phương trình vi phân đẳng cấp là phương trình vi phân có dạng $y' = h(\frac{y}{x})$.

Cách giải: Đặt $u = \frac{y}{x}$ và đưa về dạng tách biến.

Ví dụ

Giải các phương trình vi phân

1. $y' = \frac{y^2+2xy}{x^2}$
2. $\begin{cases} xy' &= y + 3\sqrt{xy} \\ y(1) &= 9 \end{cases}$
3. $xy' = (3x+2y)ln\frac{3x+2y}{x} + y$

Giải các phương trình vi phân

1. $xdy = (x^5 e^x + 4y)dx$
2. $(\sqrt{x} + y) + (\sqrt{y} + x)\frac{dy}{dx} = 0$
3. $x^2 \frac{dy}{dx} = y - xy$
4. $\frac{dy}{dx} = \frac{y^2 + 2xy}{x^2}$
5. $x^2 y' = y^2 - xy + x^2, y(1) = 2$
6. $y' = \frac{x^2 + 3y}{x}, y(2) = 8$
7. $y' - \frac{y}{x-1} = x^2(x^2 - 1)$
8. $\sin(2x)dx + \frac{ydy}{x(y+1)} = 0, y(\frac{\pi}{2}) = 0$
9. $xy' = \frac{y^2}{y-x}, y(1) = e$
10. $(x^2 + 1)y' + y(y - 1) = 0$