ĐẠI HỌC QUỐC GIA TP. HỒ CHÍ MINH
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN
Khoa Toán-Tin Học
Bộ Môn Giải Tích

# HƯỚNG DẪN GIẢI BÀI TẬP MÔN VI TÍCH PHÂN B2
## (Qua các tuần-Tập 1)



TP. Hồ Chí Minh - 2017

ĐẠI HỌC QUỐC GIA TP. HỒ CHÍ MINH
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN
Khoa Toán-Tin Học
Bộ Môn Giải Tích

GVLT: TS. Ông Thanh Hải - Ths. Nguyễn Vũ Huy

# HƯỚNG DẪN GIẢI BÀI TẬP MÔN VI TÍCH PHÂN B2
## (Qua các tuần-Tập 1)

GVTH: Nguyễn Hựng Hưng
Lê Thị Mai Thanh
Hồ Thị Kim Vân

TP. Hồ Chí Minh - 2017

# Lời nói đầu

Ngành vi tích phân nghiên cứu về những đại lượng biến thiên phi tuyến tính, được sử dụng rộng rãi trong các ngành khoa học và kỹ thuật xuất phát từ việc những thứ mà chúng ta được học (như vận tốc, gia tốc, dòng điện trong mạch) trong thực tế không hề đơn giản, gọn gàng, đẹp đẽ. Nếu những đại lượng thay đổi 1 cách liên tục, chúng ta cần phép vi tích phân để tìm hiểu xem chuyện gì đã xảy ra với đại lượng đấy.

Ngành vi tích phân được phát triển bởi một nhà khoa học người Anh tên Issac Newton và một nhà khoa học người Đức là Gottfried Lebniz, 2 nhà khoa học này nghiên cứu 1 cách độc lập với nhau về những đại lượng biến thiên vào khoảng cuối thế kỷ 17. Đã có 1 cuộc tranh cãi rằng ai là người đầu tiên phát triển ngành vi tích phân, nhưng do 2 nhà khoa học này nghiên cứu độc lập với nhau nên chúng ta có sự hòa lẫn không được như ý về ký hiệu và cách diễn đạt khi dùng vi tích phân. Từ Lebniz ta có ký hiệu $\frac{dy}{dx}$ và $\int$.

Sự phát triển của đồng hồ chạy chính xác từng giây vào thế kỷ 17 mang lại nhiều ý nghĩa quan trọng trong khoa học nói chung và toán học nói riêng, và đỉnh cao của sự phát triển đó là ngành vi tích phân.

Trong chương trình đại học của trường Đại học Khoa học Tự nhiên-ĐHQG-TP.HCM hiện nay môn "Vi tích phân B2" là một môn học đóng vai trò cung cấp kiến thức căn bản về toán vi tích phân cho các ngành Công nghệ thông tin, Điện tử-Viễn thông, Vật lý, Hải Dương-Khí tượng và Thủy văn, Khoa học vật liệu, giúp sinh viên có nền tảng toán phục vụ cho các môn học chuyên ngành. Kiến thức sẽ trang bị cho sinh viên: Tập hợp $\mathbb{R}^n$, Hàm số thực nhiều biến liên tục. Đạo hàm riêng, Đạo hàm hàm số nhiều biến. Sự khả vi, Cực trị. Tích phân 2 lớp, Tích phân 3 lớp. Tích phân đường loại I và loại II. Định lý Green. Phương trình vi phân cấp 1, phương trình vi phân cấp 2 ...

Để hỗ trợ tốt nhất cho việc học tập môn "Vi tích phân B2". Các giảng viên thực hành đã biên soạn tài liệu này, nhằm tập hợp các lời giải gợi ý cho mỗi bài tập qua các tuần, giúp các bạn sinh viên hình dung được cách giải cho các dạng bài tập của môn học này. Trong quá trình biên soạn, do nhiều yếu tố khách quan và chủ quan, tài liệu này không tránh khỏi sự sai sót. Vì vậy, chúng tôi mong được nhận các ý kiến đóng góp để chúng tôi hoàn thiện tài liệu này hơn. Đồng thời, trong mỗi tuần chúng tôi đều có chú thích tên người chịu trách nhiệm, do đó nếu trong quá trình đọc tài liệu này, mà sinh viên có bất kỳ thắc mắc nào có thể gửi tin nhắn qua địa chỉ Mail của từng giảng viên chịu trách nhiện tuần đó (Lưu ý: địa chỉ mail được cung cấp trên lớp).

Chúng tôi xin chân thành cảm ơn sự giúp đỡ của thầy Ông Thanh Hải đã góp ý trong quá trình giảng dạy và chia sẻ một số tài liệu tham khảo hữu ích để chúng tôi hoàn thành tài liệu này.

*Tp.HCM, ngày 21 tháng 05 năm 2017*

Tác giả

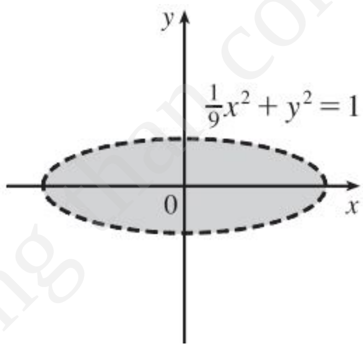
## TUẦN 1 (N.N. Hưng)

**Chương 2A (Hàm số nhiều biến)**:

**Bài 1**. Cho hàm $g(x, y) = cos(x + 2y)$
a) Tính $g(-2, 1) = cos(-2 + 2.1) = 1$.
b) Tìm miền xác định của g. $D = \mathbb{R}^2$
c) Tìm miền giá trị của g :$z| - 1 \leq z \leq 1$.

*Tìm và phác họa miền xác định của các hàm sau*

**Bài 2**. Cho $f(x, y) = ln(9 - x^2 - 9y^2)$
Hàm f xác đinh khi $9 - x^2 - 9y^2 > 0$ hay$\frac{1}{9}x^2 + y^2 < 1$.
Vậy miền xác định của f là $D = \{(x, y)|\frac{1}{9}x^2 + y^2 < 1\}$



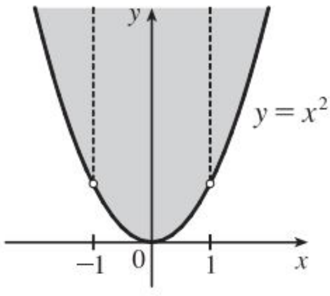

Hình 1: Ảnh của miền xác định

**Bài 3**. Cho $f(x, y) = \frac{\sqrt{y-x^2}}{1-x^2}$
Hàm f xác đinh khi $y - x^2 \geq 0$ và $x \neq \pm 1$.
Vậy miền xác định của f là $D = \{(x, y)|y \geq x^2, x \neq \pm 1\}$

*Tìm giới hạn của các hàm sau nếu nó tồn tại và chứng minh nếu nó không tồn tại*

**Bài 4.** $f(x, y) = (5y^4 \cos^2 x)/(x^4 + y^4)$. Trước tiên ta tiến về (0,0) theo trục x, ta có

$$\lim_{(x,y)\to(x,0)} f(x, y) = f(x, 0) = 0/x^4 = 0 \quad \text{với} x \neq 0$$




Hình 2: Ảnh của miền xác định

.
Kế tiếp ta tiến về (0,0) theo trục y, ta có

$$\lim_{(x,y)\to(0,y)} f(x,y) = f(0,y) = 5y^4/y^4 = 5 \text{ với} y \neq 0$$

.
Vì $f$ có đến hai giới hạn khác nhau trên 2 trục khác nhau, suy ra giới hạn của nó không tồn tại.

**Bài 5.** $f(x,y) = \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$. Áp dụng định lý Squeeze $0 \leq \left|\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}\right| \leq |x|$ vì $|y| \leq \sqrt{x^2+y^2}$ và $|x| \to 0$ khi $(x,y) \to (0,0)$ và do đó $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$

**Bài 6** $f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$
Chọn $(x,y) = (\frac{1}{n}, \frac{1}{n})$. Khi $n \to \infty$ thì $(x,y) \to (0,0)$.

$$\begin{aligned} lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2} &= lim_{n\to\infty} \frac{1/n.1/n}{1/n^2+1/n^2} \\ &= lim_{n\to\infty} \frac{1/n^2}{2/n^2} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Chọn $(x,y) = (\frac{1}{n}, \frac{2}{n})$. Khi $n \to \infty$ thì $(x,y) \to (0,0)$.

$$\begin{aligned} lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2} &= lim_{n\to\infty} \frac{1/n.2/n}{1/n^2+4/n^2} \\ &= lim_{n\to\infty} \frac{1/n^2}{5/n^2} = \frac{5}{2} \end{aligned}$$

Vì hàm f có hai giới hạn khác nhau khi chọn các cặp (x,y) khác nhau nên suy ra giới hạn của f không tồn tại.

**Bài 7.** Mô tả đồ thị của hàm g được cho từ đồ thị của f.
a)$g(x, y) = f(x, y) + 2$ có nghĩa là đồ thị của g là đồ thị của f dịch chuyển lên 2 đơn vị.
b) $g(x, y) = 2f(x, y)$ có nghĩa là đồ thị của g có độ dốc gấp đôi so với f.
c) $g(x, y) = -f(x, y)$ đồ thị của g là đồ thị của f đối xứng qua mặt phẳng Oxy.
d)$g(x, y) = -f(x, y) + 2$ đồ thị của g đối xứng với f qua mp xy và dịch chuyển lên 2 đơn vị
**14.2 sách caculus-version7-J.Stewart**
**14.2.5** $f(x, y) = 5x^3 - x^2y^2$ là một đa thức và do đó nó liên tục. Suy ra $\lim\limits_{(x,y)\to(1,2)} f(x, y) = f(1, 2) = 5(1)^3 - (1)^2(2)^2 = 1$.
**8.** $\frac{1+y^2}{x^2+xy}$ là một hàm hữu tỷ và vì thế liên tục trên miền của nó trong đó có $(1, 0)$. $\ln t$ là một hàm liên tục với $t > 0$, do đó $f(x, y) = \ln\left(\frac{1+y^2}{x^2+xy}\right)$ liên tục với mọi $\frac{1+y^2}{x^2+xy} > 0$. Do đó $f$ liên tục tại $(1, 0)$ và ta có $\lim\limits_{(x,y)\to(1,0)} f(x, y) = f(1, 0) = \ln\left(\frac{1+0^2}{1^2+1.0}\right) = \ln\frac{1}{1} = 0$.
**14.2.10** $f(x, y) = (5y^4\cos^2 x)/(x^4 + y^4)$. trước tiên ta tiến về (0,0) theo trục x, ta có $\lim\limits_{(x,y)\to(x,0)} f(x, y) = f(x, 0) = 0/x^4 = 0$ với $x \neq 0$. kế tiếp ta tiến về (0,0) theo trục y, ta có $\lim\limits_{(x,y)\to(0,y)} f(x, y) = f(0, y) = 5y^4/y^4 = 5$ với $y \neq 0$. Vì vậy $f$ có đến hai giới hạn khác nhau trên 2 trục khác nhau, suy ra lim của nó không tồn tại.
**14.2.51** (a) $z = f(x) + g(y)$ suy ra $\frac{\partial z}{\partial x} = f'(x), \frac{\partial z}{\partial y} = g'(x)$
(b) $z = f(x + y)$. Đặt $u = x + y$, thì $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{df}{du}\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{df}{du}(1) = f'(u) = f'(x + y)$, $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{df}{du}\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{df}{du}(1) = f'(u) = f'(x + y)$

## TUẦN 2 (L.T.M. Thanh)

**Chương 2B (giới hạn và sự liên tục của hàm số nhiều biến)**:

**Bài 12/T24**

$lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^4-y^4}{x^2+y^2} = lim_{(x,y)\to(0,0)}x^2 - y^2 = 0.$

*Tìm h(x,y)=g(f(x,y)) và tìm tập hợp mà h liên tục trên đó.*

**Bài 21/T25**. $h(x,y) = g(f(x,y)) = (2x+3y-6)^2 + sqrt(2x+3y-6)$

Vì f là 1 đa thức nên nó liên tục trên $\mathbb{R}^2$, g liên tục trên miền $\{t|t \geq 0\}$. Do đó h liên tục trên miền D=$\{(x,y)|y \geq -2/3x+2\}$.

**Bài 22/T25**. $h(x,y) = g(f(x,y)) = \frac{1-xy}{1+x^2y^2} + ln\left(\frac{1-xy}{1+x^2y^2}\right)$

Vì f là 1 phân thức và $1+x^2y^2 > 0$ nên nó liên tục trên $\mathbb{R}^2$, g liên tục trên miền $\{t|t \geq 0\}$. Do đó h liên tục trên miền

$$D = \left\{(x,y)|\frac{1-xy}{1+x^2y^2} > 0\right\}$$
$$= \left\{(x,y)|y < \frac{1}{x}\right\}.$$

**Bài 26/T25**. Xác định tập hợp các điểm mà tại đó f liên tục

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2y^3}{2x^2+y^2} \text{ nếu}(x,y) \neq (0,0) \\ 1 \text{ nếu}(x,y) = (0,0) \end{cases}$$

$\forall(x,y) \neq (0,0)$ ta cò là hàm phân thức và nó liên tục trên $\mathbb{R}^2$. Ta có

$$0 \leq |\frac{x^2y^3}{2x^2+y^2}| \leq |y^3| \to 0 \text{ khi} y \to 0$$

Suy ra $lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2y^3}{2x^2+y^2} = 0$

Với (x,y)=(0,0) thì f=1. Vậy f không liên tục tại (0,0).

Kết luận: f liên tục trên $\{(x,y)|(x,y) \neq (0,0)\}$.

**Bài 29/T25**. Đặt $x = rcos\phi, y = rsin\phi \Rightarrow x^2+y^2 = r^2$

$$\begin{aligned}
lim_{(x,y)\to(0,0)}(x^2+y^2)ln(x^2+y^2) &= lim_{r\to 0}r^2ln(r^2)\\
&= lim_{r\to 0}\frac{lnr^2}{1/r^2}\\
&= lim_{r\to 0}\frac{(1/r^2)2r}{-2/r^3} = 0
\end{aligned}$$

**Bài 30/T25**.

$$\begin{aligned}
lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{e^{-x^2-y^2}-1}{x^2+y^2} &= lim_{r\to 0}\frac{e^{-r^2}-1}{r^2}\\
&= lim_{r\to 0}\frac{-2re^{-r^2}}{2r}\\
&= lim_{r\to 0}-e^{-r^2} = -1.
\end{aligned}$$

**Bài 2/T26**.
a) $f_T(-15,30) = lim_{h\to 0}\frac{f(-15+h),30)-f(-15,30)}{h}$ ta có thể xem như $h=\pm 5$.
Với h=5: $f_T(-15,30) = 1,2$.
Với h=-5: $f_T(-15,30) = 1,4$.
Giá trị trung bình $f_T(-15,30) = 1,3$.
$f_v(-15,30) = lim_{k\to 0}\frac{f(-15+k),30)-f(-15,30)}{k}$ ta có thể xem như $k=\pm 10$.
Với k=10: $f_v(-15,30) = -0.1$.
Với k=-10: $f_v(-15,30) = -0.2$.
Giá trị trung bình $f_v(-15,30) = -0.15$.
b) Khi cố định vận tốc gió v thì giá trị của hệ số W tăng khi nhiệt độ T cũng tăng, vì thế $\frac{\partial W}{\partial T} > 0$. Khi cố định T thì giá trị của hệ số W giảm khi v tăng, vì thế $\frac{\partial W}{\partial v} < 0$.
c) Cố định giá trị của T thì hàm giá trị f(T,v) dương như trở thành hằng khi v tăng, vì thế tương ứng với tốc độ biến thiên là 0 hoặc gần 0 khi $v\to\infty$, do đó một cách trực quan thì $lim_{v\to\infty}\frac{\partial W}{\partial v} = 0$.

*Tìm các đạo hàm riêng bậc nhất của hàm số.*
**Bài 13/T28**. $f(x,y) = e^{-t}cos(\pi x)$
$\frac{\partial f}{\partial x} = -\pi e^{-t}sin(\pi x)$
$\frac{\partial f}{\partial t} = -e^{-t}cos(\pi x)$

**Bài 24/T28** $f(x,y) = \int_x^y cos(t^2)dt$

Đặt G(t) là nguyên hàm của $g(t) = cos(t^2)$.
Khi đó $f(x, y) = G(y) - G(x)$.
$f_x(x, y) = -G'(x) = -cos(x^2)$.
$f_y(x, y) = G'(y) = cos(y^2)$.

**Bài 33/T28** $u = \sqrt{x_1^2 + ... + x_n^2}$
$u_{x_i} = \frac{x_i}{\sqrt{x_1^2+...+x_n^2}}$ $\forall i = 1, ..., n$

**Bài 4/T44** $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2y}{x^2+y^2} \text{ nếu}(x, y) \neq (0, 0) \\ 0 \text{ nếu}(x, y) = (0, 0) \end{cases}$ tại (0,0)
$f_x(0, 0) = lim_{h\to 0}\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = lim_{h\to 0}\frac{\frac{h^2.0}{h^2}-0}{h} = 0$
$f_y(0, 0) = lim_{h\to 0}\frac{f(0,h)-f(0,0)}{h} = lim_{h\to 0}\frac{\frac{0^2.h}{h^2}-0}{h} = 0$

## TUẦN 3 (N.N. Hưng)

**Chương 2-C (Đạo Hàm Riêng)**:

Bài **36**. Tính các đạo hàm riêng tại điểm được chỉ rõ:

$$f(x,y) = \arctan(y/x); \qquad f_x(2,3)$$

Lời giải:

$f(x,y) = \arctan(y/x); \qquad f_x(2,3) \Rightarrow f_x(x,y) = \frac{1}{1+(y/x)^2}(-yx^{-2}) = \frac{-y}{x^2(1+y^2/x^2)} = -\frac{y}{x^2+y^2}$,

Do đó $f_x(2,3) = -\frac{3}{2^2+3^2} = -\frac{3}{13}$.

Bài **40**. Sử dụng định nghĩa đạo hàm riêng như là giới hạn để tính $f_x$ và $f_y$ tại $(x,y)$ nói chung; hoặc tại các điểm được chỉ rõ:

$$f(x,y) = \frac{x}{x+y^2}$$

Lời giải:

$f(x,y) = \frac{x}{x+y^2} \Rightarrow$

$f_x(x,y) = \lim\limits_{h\to 0} \frac{f(x+h,y)-f(x,y)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \frac{\frac{x+h}{x+h+y^2} - \frac{x}{x+y^2}}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \frac{(x+h)(x+y^2)-x(x+h+y^2)}{h(x+h+y^2)(x+y^2)}$

$= \lim\limits_{h\to 0} \frac{y^2h}{h(x+h+y^2)(x+y^2)} = \lim\limits_{h\to 0} \frac{y^2}{(x+h+y^2)(x+y^2)} = \frac{y^2}{(x+y^2)^2}$

$f_y(x,y) = \lim\limits_{h\to 0} \frac{f(x,y+h)-f(x,y)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \frac{\frac{x}{x+(y+h)^2} - \frac{x}{x+y^2}}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \frac{(x)(x+y^2)-x(x+(y+h)^2)}{h(x+(y+h)^2)(x+y^2)}$

$= \lim\limits_{h\to 0} \frac{h(-2xy-xh)}{h(x+(y+h)^2)(x+y^2)} = \lim\limits_{h\to 0} \frac{-2xy-xh}{(x+(y+h)^2)(x+y^2)} = \frac{-2xy}{(x+y^2)^2}$

Bài **48**. Sử dụng công thức tính đạo hàm riêng của hàm ẩn, tìm $\partial z/\partial x$ và $\partial z/\partial y$:

$$yz + x\ln(y) = z^2$$

Lời giải:

$yz + x\ln(y) = z^2 \Rightarrow \frac{\partial}{\partial x}(yz + x\ln y) = \frac{\partial}{\partial x}(z^2) \Rightarrow y\frac{\partial z}{\partial x} + \ln y = 2z\frac{\partial z}{\partial x} \Rightarrow \ln y = 2z\frac{\partial z}{\partial x} - y\frac{\partial z}{\partial x} \Rightarrow \ln y = (2z-y)\frac{\partial z}{\partial x}$

do đó $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\ln y}{2z-y}$.

$\frac{\partial}{\partial x}(yz + x\ln y) = \frac{\partial}{\partial x}(z^2) \Rightarrow y\frac{\partial z}{\partial y} + z.1 + x.\frac{1}{y} = 2z\frac{\partial z}{\partial y} \Rightarrow z + \frac{x}{y} = 2z\frac{\partial z}{\partial y} - y\frac{\partial z}{\partial y} \Rightarrow z + \frac{x}{y} = (2z-y)\frac{\partial z}{\partial y}$

do đó $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{z+(x/y)}{2z-y} = \frac{x+yz}{y(2z-y)}$.

Bài **51**. Tìm $\partial z/\partial x$ và $\partial z/\partial y$:

$$z = f(x)g(y)$$

Lời giải:
$z = f(x)g(y) \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial x} = f'(x)g(x), \frac{\partial z}{\partial y} = f(x)g'(y)$
Bài **52**. Tìm $\partial z/\partial x$ và $\partial z/\partial y$:

$$z = f(xy)$$

Lời giải:
Đặt $u = xy$. Thì $\frac{\partial u}{\partial x} = y$ và $\frac{\partial u}{\partial y} = x$. Do đó $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{df}{du}\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{df}{du}.y = y.f'(u) = yf'(xy)$ và $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{df}{du}\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{df}{du}.x = x.f'(u) = xf'(xy)$
Bài **55**. Tìm tất cả các đạo hàm riêng cấp 2:

$$f(x, y) = \sin^2(mx + ny)$$

Lời giải:
$f_x(x, y) = 2\sin(mx + ny)\cos(mx + ny).m = m\sin(2mx + 2ny)$.
$f_y(x, y) = 2\sin(mx + ny)\cos(mx + ny).n = n\sin(2mx + 2ny)$.
Thì $f_{xx}(x, y) = m\cos(2mx + 2ny).2m = 2m^2\cos(2mx + 2ny)$
$f_{xy}(x, y) = m\cos(2mx + 2ny).2n = 2mn\cos(2mx + 2ny)$.
$f_{yx}(x, y) = n\cos(2mx + 2ny).2m = 2mn\cos(2mx + 2ny)$.
$f_{yy}(x, y) = n\cos(2mx + 2ny).2n = 2n^2\cos(2mx + 2ny)$.
Bài **71**. Tìm các đạo hàm riêng được chỉ rõ:

$$u = x^a y^b z^c; \qquad \frac{\partial^6 u}{\partial x \partial y^2 \partial z^3}$$

Lời giải:
Nếu $a = 0$ hoặc nếu $b = 0$ hoặc 1, hoặc nếu c=0,1, hoặc 2, Thì $\frac{\partial^6 u}{\partial x \partial y^2 \partial z^3} = 0$.
Trong các trường hợp khác, $\frac{\partial u}{\partial z} = cx^a y^b z^{c-1}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = c(c-1)x^a y^b z^{c-2}$, $\frac{\partial^3 u}{\partial z^3} = c(c-1)(c-2)x^a y^b z^{c-3}$, $\frac{\partial^4 u}{\partial y \partial z^3} = bc(c-1)(c-2)x^a y^{b-1} z^{c-3}$, $\frac{\partial^5 u}{\partial y^2 \partial z^3} = b(b-1)c(c-1)(c-2)x^a y^{b-2} z^{c-3}$ và $\frac{\partial^6 u}{\partial x \partial y^2 \partial z^3} = ab(b-1)c(c-1)(c-2)x^{a-1} y^{b-2} z^{c-3}$
Bài **72**. Sử dụng bảng giá trị của $f(x, y)$ dưới đây, hãy ước tính giá trị của $f_x(3, 2)$, $f_x(3, 2.2)$ và $f_{xy}(3, 2)$.
Lời giải: Từ định nghĩa về đạo hàm riêng, ta có $f_x(3, 2) = \lim_{h\to 0} \frac{f(3+h,2)-f(3,2)}{h}$, chúng ta có thể xấp xỉ giá trị này bằng việc xét $h = 0.5$ và $h = -0.5$: $f_x(3, 2) \approx \frac{f(3.5,2)-f(3,2)}{0.5} = \frac{22.4-17.5}{0.5} = 9.8$, $f_x(3, 2) \approx \frac{f(2.5,2)-f(3,2)}{-0.5} = \frac{10.2-17.5}{-0.5} = 14.6$, lấy trung bình hai giá trị vừa được, chúng ta ước tính $f_x(3, 2)$ xấp xỉ 12.2. Tương tự, $f_x(3, 2.2) = \lim_{h\to 0} \frac{f(3+h,2.2)-f(3,2.2)}{h}$, chúng ta có thể xấp xỉ giá trị này bằng việc xét $h = 0.5$ và $h = -0.5$: $f_x(3, 2.2) \approx \frac{f(3.5,2.2)-f(3,2.2)}{0.5} = \frac{26.1-15.9}{0.5} = 20.4$, $f_x(3, 2.2) \approx \frac{f(2.5,2.2)-f(3,2.2)}{-0.5} = \frac{9.2-15.9}{-0.5} = 13.2$, lấy

trung bình hai giá trị vừa được, chúng ta ước tính $f_x(3, 2.2)$ xấp xỉ 16.8.
Để ước lượng $f_{xy}(3, 2)$, trước tiên chúng ta cần ước lượng $f_x(3, 1.8)$:
$f_x(3, 1.8) \approx \frac{f(3.5,1.8)-f(3,1.8)}{0.5} = \frac{20.0-18.1}{0.5} = 3.8$, $f_x(3, 1.8) \approx \frac{f(2.5,1.8)-f(3,1.8)}{-0.5} = \frac{12.5-18.1}{-0.5} = 11.2$, lấy trung bình hai giá trị vừa được, chúng ta ước tính $f_x(3, 1.8)$ xấp xỉ 7.5. Bây giờ, $f_{xy}(x, y) = \frac{\partial}{\partial y}[f_x(x, y)]$ và $f_x(x, y)$ cũng là hàm 2 biến, vì vậy ta có $f_{xy}(x, y) = \frac{\partial}{\partial y}[f_x(x, y)] = \lim\limits_{h\to 0} \frac{f_x(x,y+h)-f_x(x,y)}{h} \Rightarrow f_{xy}(3, 2) = \lim\limits_{h\to 0} \frac{f_x(3,2+h)-f_x(3,2)}{h}$ chúng ta có thể xấp xỉ giá trị này bằng việc xét $h = 0.2$ và $h = -0.2$: $f_{xy}(3, 2) \approx \frac{f_x(3,2.2)-f_x(3,2)}{0.2} = \frac{16.8-12.2}{0.2} = 23$, $f_{xy}(3, 2) \approx \frac{f_x(3,1.8)-f_x(3,2)}{-0.2} = \frac{9.2-15.9}{-0.2} = 23.5$, lấy trung bình hai giá trị vừa được, chúng ta ước tính $f_{xy}(3, 2)$ xấp xỉ 23.25.
Bài **74**. Chứng minh hàm số $u = e^{-\alpha^2k^2t}\sin kx$ là nghiệm của phương trình truyền nhiệt $u_t = \alpha^2 u_{xx}$ ($u(x, t)$ là nhiệt độ tại vị trí $x$ trên thanh dẫn nhiệt dài, tại thời điểm t)
Lời giải: $u = e^{-\alpha^2k^2t}\sin kx \Rightarrow u_x = ke^{-\alpha^2k^2t}\cos kx, u_{xx} = -k^2e^{-\alpha^2k^2t}\sin kx$, và $u_t = -\alpha^2k^2e^{-\alpha^2k^2t}\sin kx$. Do đó $\alpha^2 u_{xx} = u_t$
Bài **78**. Nếu $f$ và $g$ là các hàm số một biến có đạo hàm đến cấp 2, chứng minh rằng hàm số

$$u(x, t) = f(x + at) + g(x - at)$$

là nghiệm của phương trình truyền sóng $u_{tt} = \alpha^2 u_{xx}$ (ví dụ, $u(x, t)$ là tung độ của dây đàn tại vị trí $x$ tại thời điểm t)
Lời giải: Đặt $v = x + at$, $w = x - at$. thì $u_t = \frac{\partial[f(v)+g(w)]}{\partial t} = \frac{df(v)}{dv}\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{dg(w)}{dw}\frac{\partial w}{\partial t} = af'(v) - ag'(w)$ và $u_{tt} = \frac{\partial[af'(v)-ag'(w)]}{\partial t} = a[af''(v) - ag''(w)] = a^2[f''(v) + g''(w)]$. Tương tự, chúng ta có $u_x = f'(v) + g'(w)$ và $u_{xx} = f''(v) + g''(w)$. Do đó $u_{tt} = a^2 u_{xx}$.
Bài **79**. Nếu $u = e^{a_1x_1+a_2x_2+...+a_nx_n}$, trong đó $a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2 = 1$, chứng minh rằng

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + ... + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2} = u$$

Lời giải: Với mỗi $i$, $i = 1, ..., n$, $\partial u/\partial x_i = a_i e^{a_1x_1+a_2x_2+...+a_nx_n}$ và
$\partial^2 u/\partial x_i^2 = a_i^2 e^{a_1x_1+a_2x_2+...+a_nx_n}$.
Thì $\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + ... + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2} = (a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2)e^{a_1x_1+a_2x_2+...+a_nx_n} = e^{a_1x_1+a_2x_2+...+a_nx_n} = u$ vì $a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2 = 1$.
Bài **80**. Chứng minh rằng hàm số $z = \ln(e^x + e^y)$ là nghiệm của các phương trình sau $\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} = 1$ và $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - (\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y})^2 = 0$
Lời giải: $z = \ln(e^x + e^y) \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{e^x}{e^x+e^y}$ và $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{e^y}{e^x+e^y}$ do đó $\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{e^x}{e^x+e^y} + \frac{e^y}{e^x+e^y} = \frac{e^x+e^y}{e^x+e^y} = 1$.
$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{e^x(e^x+e^y)-e^x(e^x)}{(e^x+e^y)^2} = \frac{e^{x+y}}{(e^x+e^y)^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{0-e^y(e^x)}{(e^x+e^y)^2} = -\frac{e^{x+y}}{(e^x+e^y)^2}$ và $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{e^y(e^x+e^y)-e^y(e^y)}{(e^x+e^y)^2} =$

$\frac{e^{x+y}}{(e^x+e^y)^2}$. Do đó

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}-(\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y})^2=\frac{e^{x+y}}{(e^x+e^y)^2}.\frac{e^{x+y}}{(e^x+e^y)^2}-(-\frac{e^{x+y}}{(e^x+e^y)^2})^2=\frac{(e^{x+y})^2}{(e^x+e^y)^4}-\frac{(e^{x+y})^2}{(e^x+e^y)^4}=0$$

Bài **81**.Nhiệt độ tại điểm (x,y) trên một tấm kim loại phẳng được cho bởi $T(x,y)=60/(1+x^2+y^2)$, trong đó $T$ là nhiệt độ theo độ C và x,y theo mét. Tìm tốc độ biến thiên nhiệt độ theo khoảng cách tại điểm (2,1) theo hướng x và theo hướng y.
Lời giải: (+) $\partial T/\partial x=-60(2x)/(1+x^2+y^2)^2$, ví thế tại (2,1), $T_x=-240/(1+4+1)^2=\frac{-20}{3}$
(+) $\partial T/\partial y=-60(2y)/(1+x^2+y^2)^2$, ví thế tại (2,1), $T_y=-120/36=\frac{-10}{3}$. Do đó tại điểm (2,1) nhiệt độ đã giảm với tỷ lệ $\frac{-20^oC}{3}$ theo trục x và cũng giảm với tỷ lệ $\frac{-10^oC}{3}$ theo trục y.
Bài **82**. Tại nhiệt độ tuyệt đối $T$, áp suất $P$ và thể tích $V$ định luật chất khí đối với một khối lượng $m$ cố định của khí lý tưởng là $PV=mRT$, trong đó $R$ hằng số phụ thuộc chất khí (the gas constant). Chứng minh rằng $\frac{\partial P}{\partial V}\frac{\partial V}{\partial T}\frac{\partial T}{\partial P}=-1$ và $T\frac{\partial P}{\partial V}\frac{\partial V}{\partial T}=mR$
Lời giải: $P=\frac{mRT}{V}$ vì thế $\frac{\partial P}{\partial V}=\frac{-mRT}{V^2}$; $V=\frac{mRT}{P}$ vì thế $\frac{\partial V}{\partial T}=\frac{mR}{P}$; $T=\frac{PV}{mR}$ vì thế $\frac{\partial T}{\partial P}=\frac{V}{mR}$.
Do đó $\frac{\partial P}{\partial V}\frac{\partial V}{\partial T}\frac{\partial T}{\partial P}=\frac{-mRT}{V^2}\frac{mR}{P}\frac{V}{mR}=\frac{-mRT}{PV}=-1$ (vì $PV=mRT$).
$PV=mRT\Rightarrow P=\frac{mRT}{V}$ vì thế $\frac{\partial P}{\partial T}=\frac{mR}{V}$. Cũng vì, $PV=mRT\Rightarrow V=\frac{mRT}{P}$ và $\frac{\partial V}{\partial T}=\frac{mR}{P}$. Vì $T=\frac{PV}{mR}$, chúng ta có $T\frac{\partial P}{\partial V}\frac{\partial V}{\partial T}=\frac{PV}{mR}\frac{mR}{V}\frac{mR}{P}=mR$.
Bài **85**. Cho hàm số $f$ xác định bởi

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^3y-xy^3}{x^2+y^2}\text{ , nếu } (x,y)\neq(0,0),\\ 0\text{ , nếu } (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

a) Tìm $f_x(x,y)$ và $f_y(x,y)$ khí $(x,y)\neq(0,0)$.

b) Tìm $f_x(0,0)$ và $f_y(0,0)$.

c) Chứng minh $f_{xy}(0,0)=-1$ và $f_{yx}(0,0)=1$.

d) kết quả trong phần c) có mâu thuẫn với định lý Clairaut không? vì sao?

Lời giải: (a) với $(x,y)\neq(0,0)$
$f_x(x,y)=\frac{(3x^2y-y^3)(x^2+y^2)-(x^3y-xy^3)(2x)}{(x^3+y^2)^2}=\frac{x^4y+4x^2y^3-y^5}{(x^3+y^2)^2}$
và từ tính chất đối xứng $f_y(x,y)=\frac{x^5+4y^2x^3-xy^4}{(x^3+y^2)^2}$

(b) $f_x(0,0) = \lim\limits_{h\to 0} \frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \frac{(0/h^2)-0}{h} = 0$ và $f_y(0,0) = \lim\limits_{h\to 0} \frac{f(0,h)-f(0,0)}{h} = 0$
(c) $f_{xy}(0,0) = \frac{\partial f_x}{\partial y} = \lim\limits_{h\to 0} \frac{f_x(0,h)-f_x(0,0)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \frac{(-h^5-0)/h^4}{h} = -1$, $f_{yx}(0,0) = \frac{\partial f_y}{\partial x} = \lim\limits_{h\to 0} \frac{f_y(h,0)-f_y(0,0)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \frac{h^5/h^4}{h} = 1$ (d) Với $(x,y) \neq (0,0)$ ta tính được $f_{xy}(x,y) = \frac{x^6+9x^4y^2-9x^2y^4-y^6}{(x^2+y^2)^2}$

Bây giờ khi $(x,y) \to (0,0)$ theo trục x, thì $f_{xy}(x,y) \to 1$ trong khi đó nếu cho $(x,y) \to (0,0)$ theo trục y, thì $f_{xy}(x,y) \to -1$. Do đó $f_{xy}$ không liên tục tại (0,0) và định lý Clairaut's không được áp dụng, vì thế nên không có mâu thuẫn.

**TUẦN 4 (H.T.K. Vân)**

## Chương 2E.Bài tập phần quy tắc mắc xích

### Bài 3:

$$z = \sqrt{1 + x^2 + y^2}, \qquad x = lnt, \quad y = cost$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{t} \qquad \frac{dy}{dt} = -sint$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{1 + x^2 + y^2}} \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{1 + x^2 + y^2}}$$

$$\begin{aligned}
\frac{dz}{dt} &= \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt} \\
&= \frac{x}{\sqrt{1 + x^2 + y^2}}\frac{1}{t} + \frac{y}{\sqrt{1 + x^2 + y^2}}(-sint) \\
&= \frac{lnt}{\sqrt{1 + (lnt)^2 + (cost)^2}}\frac{1}{t} + \frac{cost}{\sqrt{1 + (lnt)^2 + (cost)^2}}(-sint) \\
&= \frac{\frac{lnt}{t} - \frac{1}{2}sin(2t)}{\sqrt{1 + (lnt)^2 + (cost)^2}}
\end{aligned}$$

**Bài 11:** $z = e^r cos\theta, \qquad r = st, \qquad \theta = \sqrt{s^2 + t^2}$

$$\frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\partial z}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial \theta}\frac{\partial \theta}{\partial s} = e^r cos\theta.t + e^r(-sin\theta).\frac{s}{\sqrt{s^2 + t^2}}$$

$$\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial z}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial \theta}\frac{\partial \theta}{\partial t} = e^r cos\theta.s + e^r(-sin\theta).\frac{t}{\sqrt{s^2 + t^2}}$$

**Bài 13:**

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt}$$

$$\Rightarrow t = 3 \text{ thì } \quad \frac{dz}{dt} = f_x(g(3), h(3)).g'(3) + f_y(g(3), h(3)).h'(3)$$

$$= f_x(2, 7).g'(3) + f_y(2, 7).h'(3) = 6.5 + (-8).(-4) = 62$$

**Bài 19:**

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial s}\frac{\partial s}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial x}$$

$$\frac{\partial w}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial s}\frac{\partial s}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial y}$$

**Bài 25:**

$$\frac{\partial u}{\partial p} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial p} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial p} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial p} = 2x.rcos\theta + z.rsin\theta + y$$

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial r} = 2x.pcos\theta + z.psin\theta + y$$

$$\frac{\partial u}{\partial \theta} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \theta} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial \theta} = 2x. - prsin\theta + z.prcos\theta + 0$$

Khi $p = 2, r = 3, \theta = 0$ thì $x = 6, y = 0, z = 5$. Ta có:

$$\frac{\partial u}{\partial p} = 2.6.3.cos0 + 5.3.sin0 + 0 = 36,$$

$$\frac{\partial u}{\partial r} = 2.6.2.cos0 + 5.2sin0 + 0 = 24,$$

$$\frac{\partial u}{\partial \theta} = 2.6. - 2.sin0 + 5.2.3cos0 = 30$$

**Bài 27:**

Đặt $F(x, y) = \sqrt{xy} - 1 - x^2y = 0$. Áp dụng công thức đạo hàm ẩn ta có:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{F_x}{F_y} = -\frac{\frac{y}{2\sqrt{xy}} - 2xy}{\frac{x}{2\sqrt{xy}} - x^2} = -\frac{y - 4xy\sqrt{xy}}{x - 2x^2\sqrt{xy}}$$

**Bài 34:**

Đặt $F(x, y, z) = yz - ln(x + z) = 0$. Áp dụng công thức đạo hàm ẩn ta có:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x}{F_z} = -\frac{-\frac{1}{x+z}}{y - \frac{1}{x+z}} = \frac{1}{y(x+z) - 1}$$
$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F_y}{F_z} = -\frac{z}{y - \frac{1}{x+z}} = -\frac{z(x+z)}{y(x+z) - 1}$$

**Bài 39:**

Tại một thời điểm $l$ và $w$ tăng với tốc độ $2m/s$ và $h$ giảm với tốc độ $3m/s$. Có nghĩa là, lúc đó: $\frac{dl}{dt} = \frac{dw}{dt} = 2$ và $\frac{dh}{dt} = -3$

a) Thể tích hình hộp được tính theo công thức $V = lwh$. Áp dụng quy tắc mắc xích để tính tốc độ biến thiên của thể tích:

$$\begin{aligned}\frac{dV}{dt} &= \frac{\partial V}{\partial l}\frac{dl}{dt} + \frac{\partial V}{\partial w}\frac{dw}{dt} + \frac{\partial V}{\partial h}\frac{dh}{dt} \\ &= wh\frac{dl}{dt} + lh\frac{dw}{dt} + lw\frac{dh}{dt} = 2.2.2 + 1.2.2 + 1.2(-3) = 6\end{aligned}$$

b) Diện tích xung quanh được tính theo công thức $S = 2(lw + lh + wh)$. Áp dụng quy tắc mắc xích để tính tốc độ biến thiên của S:

$$\begin{aligned}\frac{dS}{dt} &= \frac{\partial S}{\partial l}\frac{dl}{dt} + \frac{\partial S}{\partial w}\frac{dw}{dt} + \frac{\partial S}{\partial h}\frac{dh}{dt} \\ &= 2(w+h)\frac{dl}{dt} + 2(l+h)\frac{dw}{dt} + 2(l+w)\frac{dh}{dt} \\ &= 2(2+2)2 + 2(1+2)2 + 2(1+2)(-3) = 10\end{aligned}$$

**Bài 45** Ta có:

$$\frac{\partial z}{\partial r} = \frac{\partial z}{\partial x}cos\theta + \frac{\partial z}{\partial y}sin\theta, \quad \frac{\partial z}{\partial \theta}$$

$$= \frac{\partial z}{\partial x}(-rsin\theta) + \frac{\partial z}{\partial y}r.cos\theta$$

$$\left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)^2 = \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 cos^2\theta + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 sin^2\theta + 2\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y}sin\theta cos\theta.$$

$$\left(\frac{\partial z}{\partial \theta}\right)^2 = \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 r^2 sin^2\theta + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 r^2 cos^2\theta - 2\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y}r^2 sin\theta cos\theta$$

Do đó:

$$\left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial z}{\partial \theta}\right)^2 = \left[\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2\right](cos^2\theta + sin^2\theta) = \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2$$

**Bài 47:** Đặt $u = x - y$

$$\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{dz}{du}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{dz}{du}\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{dz}{du}.1 + \frac{dz}{du}(-1) = 0$$

# TUẦN 5 (L.T.M. Thanh)

## Chương 2F.Đạo Hàm Theo Hướng và Vecor gradient

**Bài 7/T10** $f(x,y) = sin(2x+3)$

a)Vecto gradient của f: $\nabla f(x,y) = 2cos(2x+3y)i + 3cos(2x+3y)j$

b)Vecto gradient của f tại $P(-6,4)$: $\nabla f(-6,4) = 2i + 3j$

c)Tốc độ biến thên của f tại P theo hướng của vecto $\overrightarrow{u} = 1/2(\sqrt{3}\,\overrightarrow{i} - \overrightarrow{j})$

$D_{\overrightarrow{u}} f(-6,4) = \nabla f(-6,4).\overrightarrow{u} = (2i+3j)1/2(\sqrt{3}i - j) = \sqrt{3} - 3/2.$

**Bài 13** $g(p,q) = p^4 - p^2q^3$

$\nabla g(p,q) = (4p^3 - 2p^2q^3)i + (-3p^2q^2)j$

$\nabla g(2,1) = 28i - 12j$

Vecto đơn vị theo hướng của v là $u = \frac{\overrightarrow{v}}{|v|} = \frac{i+3j}{\sqrt{1+3^2}} = \frac{1}{\sqrt{10}}(i+3j)$

**Bài 28** $f(x,y) = ye^{-xy}$

$f_x(x,y) = -y^2e^{-xy}, f_y(x,y) = (1-xy)e^{-xy}$

$f_x(0,2) = -4, f_y(0,2) = 1$

Nếu u là 1 vecto đơn vị tạo ra 1 góc $\theta$ với trục Ox dương thì

$D_u f(0,2) = f_x(0,2)cos(\theta) + f_y(0,2)sin\theta = -4cos\theta + sin\theta$

Để $D_u f(0,2) = 1$ thì $-4cos\theta + sin\theta = 1$ $(*)$

$\Rightarrow sin\theta = 1 + 4cos\theta \Rightarrow sin^2\theta = (1+4cos\theta)^2$

$\Rightarrow 1 - cos^2\theta = 1 + 8cos\theta + 16cos^2\theta \Rightarrow cos\theta(17cos\theta + 8) = 0 \Rightarrow cos\theta = 0$ hoặc $cos\theta = \frac{-8}{17}$

Nếu $cos\theta = 0$ thì $\theta = \frac{\pi}{2}$ hoặc $\theta = \frac{3pi}{2}$ nhưng $\theta = \frac{3pi}{2}$ không thỏa (*).

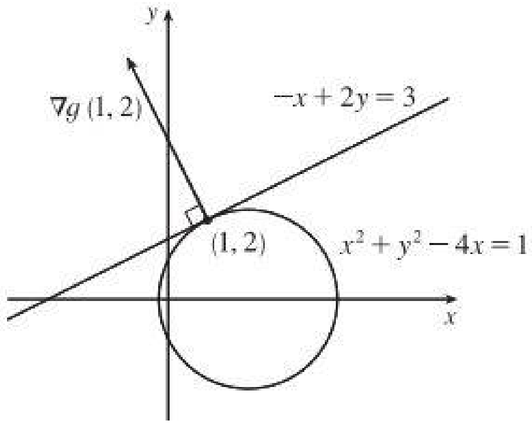
Nếu $cos\theta = \frac{-8}{17}$ thì $\theta = cos^{-1}\left(\frac{-8}{17}\right)$ hoặc $\theta = 2\pi - cos^{-1}\left(\frac{3\pi}{2}\right)$ nhưng cả hai không thỏa (*).

Do đó hướng là $\theta = \frac{\pi}{2}$

**Bài 29/T46** $f(x, y) = x^2 + y^2 - 2x - 4y$
Hướng biến thiên nhanh nhất là $\triangle f(x, y) = (2x - 2)i + (2y - 4)j$. Ta cần tìm tất cả các điểm (x,y) để $\triangle f(x, y)$ song song với $i + j \Leftrightarrow (2x - 2)i + (2y - 4)j = k(i + j) \Leftrightarrow k = 2x - 2$ hoặc $k = 2y - 4$. Suy ra $2x - 2 = 2y - 4 \Leftrightarrow y = x + 1$. Vậy tại tất các điểm trên đường $y = x + 1$ thì hướng biến thiên nhanh nhất của hàm f là $i + j$ .

**Bài 39/48**
Đặt $F(x, y, z) = 2(x - 2)^2 + (y - 1)^2 + (z - 3)^2$.
Khi đó $2(x - 2)^2 + (y - 1)^2 + (z - 3)^2 = 10$ là 1 mặt đồng mức của F.
$F_x(x, y, z) = 4(x - 2) \Rightarrow F_x(3, 3, 5) = 4$.
$F_y(x, y, z) = 2(y - 1) \Rightarrow F_y(3, 3, 5) = 4$.
$F_z(x, y, z) = 2(z - 2) \Rightarrow F_z(3, 3, 5) = 4$.
Phương trình mặt phẳng tiếp xúc tai (3,3,5) là
$4(x - 3) + 4(y - 3) + 4(z - 5) = 0$
$\Leftrightarrow x + y + z = 11$.
Phương trình chính tắc của đường pháp tuyến
$\frac{x-3}{4} = \frac{y-3}{4} = \frac{z-5}{4}$
$\Leftrightarrow x - 3 = y - 3 = z - 5$.

**Bài 46/T48** $g(x, y) = x^2 + y^2 - 4x$.
Khi đó $\nabla g(x, y) = \langle 2x - 4, 2y\rangle \Rightarrow \nabla g(1, 2) = \langle -2, 4\rangle$.
Do $\nabla g(1, 2)$ vuông góc với tiếp tuyến nên tiếp tuyến có phương trình là
$\nabla g(1, 2)\langle x - 1, y - 2\rangle = 0$
$\Rightarrow -2(x - 1) + 4(y - 2) = 0 \Rightarrow -x + 2y = 3$.




Hình 3: hình Minh Họa

**Bài 47/T48** $f(x, y, z) = x^2/a^2 + y^2/b^2 + z^2/c^2$.
$\nabla f(x_0, y_0, z_0) = \left\langle \frac{2x_0}{a^2}, \frac{2y_0}{b^2}, \frac{2z_0}{c^2} \right\rangle$.
Phương trình của mặt phẳng tiếp xúc tại $(x_0, y_0, z_0)$ là

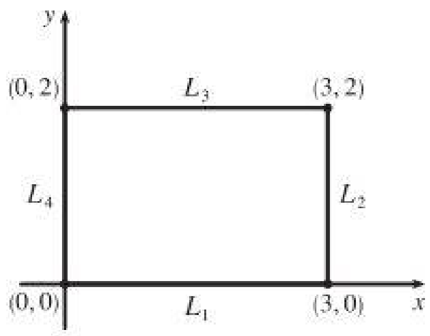
$$\frac{2x_0}{a^2}(x - x_0) + \frac{2y_0}{b^2}(y - y_0) + \frac{2z_0}{c^2}(z - z_0) = 0$$
$$\frac{2x_0}{a^2}x + \frac{2y_0}{b^2}y + \frac{2z_0}{c^2}z = \frac{2x_0^2}{a^2} + \frac{2y_0^2}{b^2} + \frac{2z_0^2}{c^2} = 2\left(\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} + \frac{z_0^2}{c^2}\right) = 2.1 = 2$$

Vậy $\frac{x_0}{a^2}x + \frac{y_0}{b^2}y + \frac{z_0}{c^2}z = 1$ là một phương trình của mặt phẳng tiếp xúc.

**Bài 50/T49** $F(x, y, z) = x^2 + z^2 - y$.
Khi đó parabol $y = x^2 + z^2$ là một mặt đồng mức của F.
$\nabla F(x, y, z) = \langle 2x, -1, 2z \rangle$ là vecto pháp tuyến tới mặt phẳng tiếp xúc của parabol tại (x,y,z). Mặt phẳng tiếp xúc song song với mặt $x + 2y + 3z = 1$ khi vecto pháp tuyến của hai mặt phẳng song song với nhau. Vì thế ta cần tìm 1 điểm $(x_0, y_0, z_0)$ trên parabol mà $\langle 2x_0, -1, 2z_0 \rangle = k\langle 1, 2, 3 \rangle \Rightarrow k = -1/2$. Suy ra $\langle 2x_0, -1, 2z_0 \rangle = \langle -1/2, -1, -3/2 \rangle$ và $2x_0 = -1/2 \Rightarrow x_0 = -1/4, 2z_0 = -3/2 \Rightarrow z_0 = -3/4$. Từ đó suy ra $y_0 = x_0^2 + z_0^2 - (-1/4)^2 + (-3/4)^2 = 5/8$. Vậy điểm cần tìm là $(-1/4, 5/8, -3/4)$.

**Chương 2G.Cực trị không điều kiện của hàm số nhiều biến**

**Bài 24/** Tìm giá trị cực đại và cực tiểu tuyệt đối của f trên D.




Hình 4: Hình minh họa

$f(x, y) = x^4 + y^4 - 4xy + 2$ là hàm đa thức nên liên tục trên $D = \{(x, y)|0 \leq x \leq 3, 0 \leq y \leq 2\}$. do đò có cực đạ và cực tiểu tuyệt đối trên D.

$f_x(x, y) = 4x^3 - 4y, f_x = 0 \Leftrightarrow y = x^3$.

$f_y(x, y) = 4y^3 - 4x, f_y = 0 \Leftrightarrow x = y^3$.

Suy ra $x^9 - x = 0 \Leftrightarrow x(x^8 - 1) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ hoặc $x = \pm 1$. Do đó điểm tới hạn là $(0, 0), (1, 1), (-1, -1)$ nhưng chỉ có (1,1) với $f(1, 1) = 0$ thì nằm trong D.

Trên $L_1 : y = 0, f(x, 0) = x^4 + 2, 0 \leq x \leq 3$. Suy ra giá trị cực đại của f tại x=3 là $f(3, 0) = 83$, giá trị cực tiểu của f tại x=0 là f(0,0)=2.

Trên $L_2 : x = 3, f(3, y) = y^4 - 12y + 83, 0 \leq y \leq 2$. Suy ra giá trị cực tiểu của f tại $y = 3^{1/3}$ là $f(3, 3^{1/3}) \approx 70$, giá trị cực đại của f tại y=0 là f(3,0)=83.

Trên $L_3 : y = 2, f(x, 2) = x^4 - 8x + 18, 0 \leq x \leq 3$. Suy ra giá trị cực đại của f tại x=3 là $f(3, 2) = 75$, giá trị cực tiểu của f tại $x = 2^{1/3}$ là $f(2^{1/3}, 2) = 18 - 6.2^{1/3} \approx 10, 4$.

Trên $L_4 : x = 0, f(0, y) = y^4 + 2, 0 \leq y \leq 2$. Suy ra giá trị cực đại của f tại $y = 2$ là $f(0, 2) = 18$, giá trị cực tiểu của f tại y=0 là f(0,0)=2.
Vậy cực đại tuyệt đối của f trên D là $f(3, 0) = 83$, cực tiểu tuyệt đối của f trên D là $f(1, 1) = 0$

**Bài 32**

Gọi d khoảng cách từ điểm $(4, 2, 0)$ đến $(x, y, z)$ trên mặt nón.
$d = \sqrt{(x-4)^2 + (y-2)^2 + z^2}$, trong đó $z^2 = x^2 + y^2$.
$d^2 = (x-4)^2 + (y-2)^2 + x^2 + y^2 = f(x, y)$
$f_x(x, y) = 2(x-4) + 2x = 4x - 8$.
$f_y(x, y) = 2(y-2) + 2y = 4 - 4$.
Điểm tới hạn xảy ra khi $f_x = 0 \Rightarrow x = 2, f_y = 0 \Rightarrow y = 1$. Do đó chỉ có 1 điểm tới hạn là (2,1).
Vậy điểm trên mặt nón gần nhất với điểm (4,2,0) là $(2, 1, \pm\sqrt{5})$.

**Bài 37**

Đặt $(x, y, z)$ là các chiều của hộp hình chữ nhật.
Diện tích bề mặt là $2xy+2xz+2yz$. Thể tích là $xyz = 1000 \Rightarrow z = \frac{1000}{xy}$.

$$\begin{aligned} f(x, y) &= 2xy + 2x\frac{1000}{xy} + 2y\frac{1000}{xy} \\ &= 2xy + \frac{2000}{y} + \frac{2000}{x} \end{aligned}$$

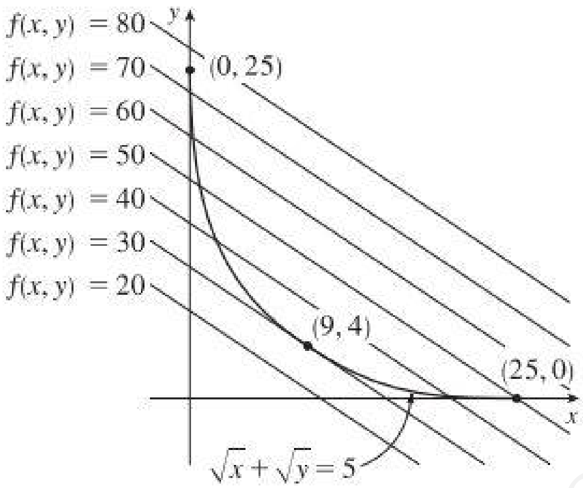
Khi đó $f_x(x, y) = 2y - \frac{2000}{x^2}, f_y = 2x - \frac{2000}{y^2}$.
Cho $f_x = 0 \Rightarrow y = \frac{1000}{x^2}$, $f_y = 0$ suy ra ta có $x - \frac{x^4}{1000} \Rightarrow x^3 = 1000 \Rightarrow x = 10$.
Diện tích bề mặt có 1 cực tiểu nhưng không có cực đại và nó xảy ra tại điểm tới han vì thế diện tích bề mặt nhỏ nhất xảy ra trên hộp chữ nhật có chiều là $x = 10cm, y = 1000/10^2 = 10cm, z = 1000/10^2 = 10cm$.

## Chương 2H.Nhân tử Lagrange: cực trị có điều kiện

**Bài 18** Tìm cực trị tuyệt đối trên miền được cho bởi bất đẳng thức.
$f(x,y) = e^{-xy}, x^2 + 4y^2 \le 1$.
$f_x(x,y) = -ye^{-xy}, f_y(x,y) = -xe^{-xy}$ suy ra chỉ có 1 điểm tới hạn là (0,0) và $f(0,0) = 1$.
Sử dụng nhân tử Lagrange $g(x,y) = x^2 + 4y^2 = 1 \Rightarrow \lambda\nabla g = \langle 2\lambda x, 8\lambda y\rangle$.
Với $\nabla f = \lambda\nabla g$ ta được $-ye^{-xy} = 2\lambda x, -xe^{-xy} = 8\lambda y$, suy ra $e^{-xy} = -2\lambda x/y$ và $2\lambda x^2/y = 8\lambda y \Rightarrow x^2 = 4y^2$. Kết hợp với điều kiện $x^2 + 4y^2 = 1$ ta được $x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}, y = \pm\frac{1}{2\sqrt{2}}$. Khi đó $f\big(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}, y = \mp\frac{1}{2\sqrt{2}}\big) = e^{1/4} \approx 1.294$ là cực đại trên miền, $f\big(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}, y = \pm\frac{1}{2\sqrt{2}}\big) = e^{-1/4} \approx 0.779$ là cực tiểu trên miền.

**Bài 19** $f(x,y) = 2x + 3y$, điều kiện ràng buộc $g(x,y) = \sqrt{x} + \sqrt{y} = 5$.
a) $\nabla f = \langle 2,3\rangle = \lambda\nabla g = \lambda\langle \frac{1}{2\sqrt{x}}, \frac{1}{2\sqrt{y}}\rangle$.
Khi đó $2 = \frac{\lambda}{2\sqrt{x}}, 3 = \frac{\lambda}{2\sqrt{y}} \Rightarrow 4\sqrt{x} = \lambda = 6\sqrt{y} \Rightarrow \sqrt{y} = 2/3\sqrt{x}$. Kết hợp điều kiện $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 5$ ta được $\sqrt{x} + 2/3\sqrt{x} = 5 \Rightarrow \sqrt{x} = 3 \Rightarrow x = 9$, suy ra $y = 4$. Do đó cực trị duy nhất chịu sự ràng buộc là $f(9,4) = 30$.
b) $f(25,0) = 50 > f(9,4) = 30$.
c)

Từ đường đồng mức của f ta thấy cực đại xảy ra tại (0,25) của đường ràng buộc g. Giá trị cực đại là $f(0,25) = 75$.
d) $\nabla g$ không tồn tại nếu x=0 hoặc y=0. Vì thế phương pháp nhân tử Lagrange sẽ không xác định được bất kì điểm liên quan. Ngoài ra phương pháp nhân tử Lagrange xác định các điểm mà đường đồng mức của f chia sẻ 1 đường tiếp tuyến chung với đường cong ràng buộc g. Điều này không xảy ra tại điểm cuối mặc dù cực đại, cực tiểu tuyệt đối có thể xảy ra ở đó .
e) f(9,4) là cực tiểu tuyệt đối của f theo g.




Hình 5: Hình minh họa

## TUẦN 6 (N.N. Hưng)

### Chương 3A.Tích Phân kép trên một hình chữ nhật

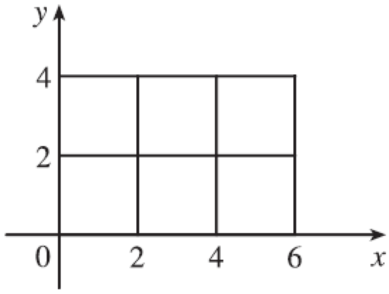
**Bài 1/T59** a) Ước lượng thể tích khối răn nằm dưới mặt $z = xy$ và trên hình chữ nhật $R = \{(x, y)|0 \leq x \leq 6, 0 \leq y \leq 4\}$ dùng tổng Riemenn với $m = 3, n = 2$ với các điểm mẫu ở góc trên bên phải của mỗi ô vuông.

b) Dùng quy tắc trung điểm để ước tính thể tích khối rắn trong câu a.

Lời giải:

(a) theo giả thiết Mặt có đồ thị là $f(x, y) = xy$ và $\Delta A = 4$ do đó chúng ta có ước lượng

$$
\begin{aligned}
V &\approx \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{2} f(x_i, y_j)\Delta A \\
&= f(2,2)\Delta A + f(2,4)\Delta A + f(4,2)\Delta A + f(4,4)\Delta A + f(6,2)\Delta A \\
&+ f(6,4)\Delta A \\
&= 4(4) + 8(4) + 8(4) + 16(4) + 12(4) + 24(4) = 288.
\end{aligned}
$$



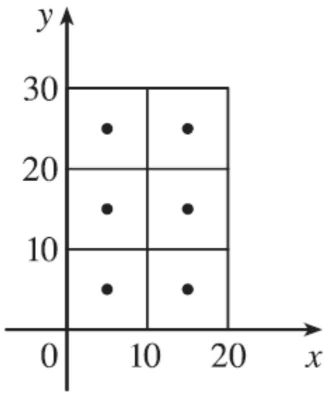

Hình 6: Hình minh họa

(b)

$$\begin{aligned}V &\approx \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{2} f(\bar{x}_i, \bar{y}_j)\Delta A \\ &= f(1,1)\Delta A + f(1,3)\Delta A + f(3,1)\Delta A + f(3,3)\Delta A + f(5,1)\Delta A \\ &+ f(5,3)\Delta A \\ &= 1(4) + 3(4) + 3(4) + 9(4) + 5(4) + 15(4) = 144.\end{aligned}$$

**Bài 6/T60**

để xấp xỉ thể tích, ta đặt $R$ là miền phẳng tương ứng với mặt nước trong hồ và vị trí $R$ trên trục tọa độ sao cho x và y tương ứng là các kích thước được đưa ra. Chúng ta xác định $f(x, y)$ là độ sâu của nước tại $(x, y)$, từ đó thể tích của nước trong hồ là thể tích của khối nằm phía trên hình chữ nhật $R = [0, 20] \times [0, 30]$ và phía dưới đồ thị của $f(x, y)$. Chúng ta có thể ước lượng thể tích này bằng cách sử dụng trung điểm như trong hình




Hình 7: Hình minh họa

Ta có

$$V \approx \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{3} f(\bar{x}_i, \bar{y}_j)\Delta A$$
$$= f(5,5)\Delta A + f(5,15)\Delta A + f(5,25)\Delta A + f(15,5)\Delta A + f(15,15)\Delta A$$
$$+ f(15,25)\Delta A$$
$$= 3(100) + 7(100) + 10(100) + 3(100) + 5(100) + 8(100) = 3600.$$

do đó, chúng ta ước tính được hồ chứa 3600 khối nước.
Thêm vào đó, chúng ta có thể xấp xỉ thể tích bằng tổng Riemenn với $m = 4, n = 6$ và các điểm mẫu được lấy ở phía trên bên phải của mỗi hình chữ nhật con. Thì $\Delta A = 25$ và

$$V \approx \sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{6} f(x_i, y_j)\Delta A$$
$$= 25[3 + 4 + 7 + 8 + 10 + 8 + 4 + 6 + 8 + 10 + 12 + 10 + 3 + 4 + 5$$
$$+ 6 + 8 + 7 + 2 + 2 + 2 + 3 + 4 + 4]$$
$$= 25(140) = 3500.$$

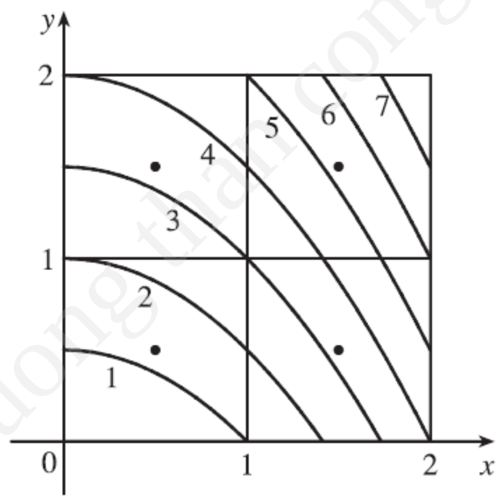
vì vậy chúng ta ước lượng lượng nước mà hồ chứa là $3500ft^3$

**Bài 7/T60**

Giá trị $f(x, y) = \sqrt{52 - x^2 - y^2}$ nhỏ dần khi chúng ta di chuyển xa điểm gốc hơn, vì thế trên bất kỳ hình tam giác vuông trong bài toán, hàm số của nó sẽ có giá trị lớn hơn tại những điểm ở phía dưới bên trái của những hình chữ nhật con và giá trị của nó nhỏ hơn tại những điểm phía trên bên phải, và bất kỳ giá trị khác sẽ mằn giữa 2. Vì thế sử dụng những hình chữ nhật con chúng ta có $U < V < L$.

**Bài 8/T60**

chia $R$ thành 4 hình chữ nhật bằng nhau (hình vuông) và xác định trung điểm của mỗi hình chữ nhật con như trong hình vẽ




Hình 8: Hình minh họa

diện tích của mỗi hình chữ nhật con là $\Delta A = 1$, do đó chúng ta sử dụng contour map để ước lượng các hàm giá trị tại mỗi trung điểm, chúng ta có

$$\begin{aligned}\int\int_R f(x,y)dA &\approx \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2} f(\bar{x}_i,\bar{y}_j)\Delta A\\ &= f(1/2,1/2)\Delta A + f(1/2,3/2)\Delta A + f(3/2,1/2)\Delta A\\ &+ f(3/2,3/2)\Delta A\\ &\approx (1.3)(1)+(3.3)(1)+(3.2)(1)+(5.2)(1) = 13.0\end{aligned}$$

**Bài 9/T61**

(a) với $m = n = 2$, chúng ta có $\Delta A = 4$. Dùng contour map chúng t ước lượng giá trị của $f$ tại tâm của những hình chữ nhật con, chúng ta có

$$\begin{aligned}\int\int_R f(x,y)dA &\approx \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2} f(\bar{x}_i,\bar{y}_j)\Delta A\\ &= f(1,1)\Delta A + f(1,3)\Delta A + f(3,1)\Delta A\\ &+ f(3,3)\Delta A\\ &\approx (27)(4)+(4)(4)+(14)(4)+(17)(4) = 248\end{aligned}$$

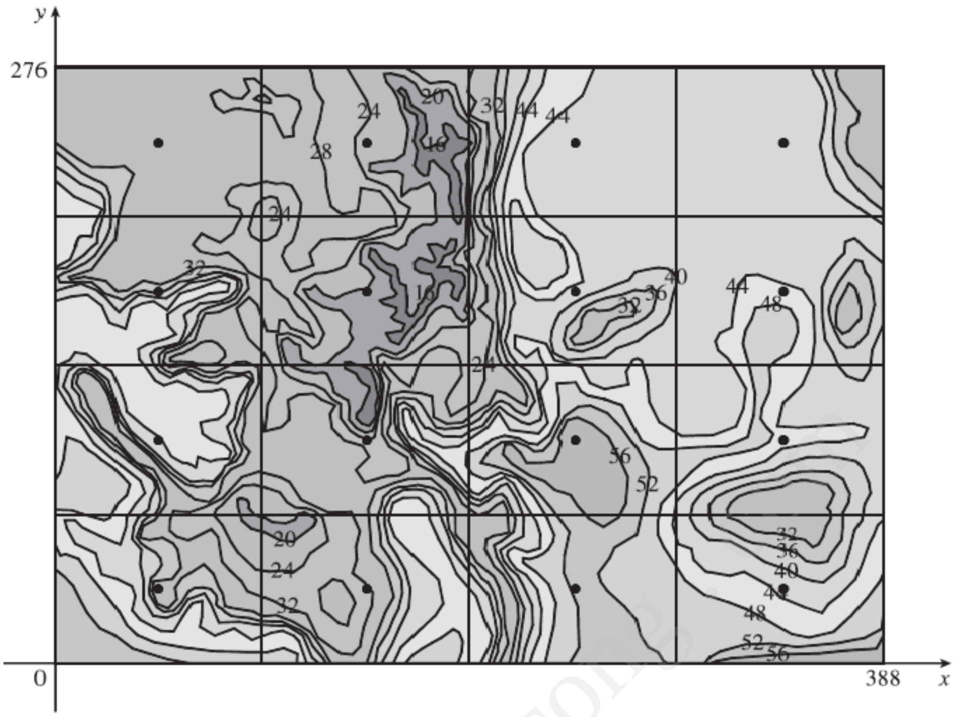
(b) $f_{ave} = \frac{1}{A(R)}\int\int_R f(x,y)dA \approx \frac{1}{16}(248) = 15.5$

**Bài 10/T61**

Chúng ta đặt gốc tại gốc tây nam của tiểu bang. Thì $R = [0,388]\times[0,276]$ là hình chử nhật tương ứng với colorado và chúng ta xác định $f(x,y)$ là nhiệt độ tại $(x,y)$. nhiệt độ trung bình được cho bởi

$$f_{ave} = \frac{1}{A(R)}\int\int_R f(x,y)dA = \frac{1}{388.276}\int\int_R f(x,y)dA$$

để sử dụng luật trung điểm với $m = n = 4$, chúng ta chia R thành 16 miền có cùng kích thước, như trong hình vẽ, với tâm của những hình chữ nhật con được chỉ định




Hình 9: Hình minh họa

diện tích của mỗi hình chữ nhật con là $\Delta A = \frac{388}{4}.\frac{276}{4} = 6693$, do đó sử dụng cantour map để ước giá trị hàm số tại mỗi trung điểm, chúng ta có

$$\int\int_R f(x,y)dA \approx \sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{4} f(\bar{x}_i,\bar{y}_j)\Delta A$$
$$\approx \Delta A[31+28+52+43+43+25+57+46+36+20$$
$$+42+45+30+23+43+41] = 6693.(605)$$

do đó, $f_{ave} = \frac{6693.605}{388.276} \approx 37.8$, vì thế nhiệt độ trung bình ở Colorado tại 4:00 PM ngày 26 tháng 2 năm 2007, xấp xỉ là $37.8^0F$.

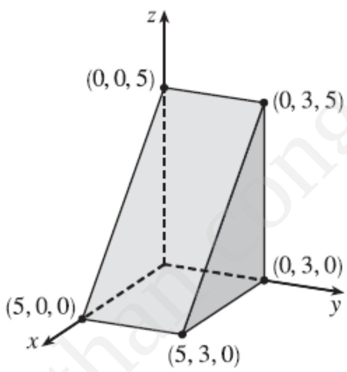
**Bài 11/T62**

$z = 3 > 0$, vì thế chúng ta có thể giải thích tích phân như thể tích của khối rắn $S$ nằm dưới mặt phẳng $z = 3$ và trên hình chữ nhật $[-2,2]\times[1,6]$. $S$ là khối rắn hình chủ nhật, do đó $\int\int_R 3dA = 4.5.3 = 60$.

**Bài 12/T62**

$z = 5 - x \geq 0$ với $0 \leq x \leq 5$, do đó chúng ta có thể giải thích tích phân như thể tích của khối rắn $S$ nằm dưới mặt $z = 5 - x$ và nằm trên hình chữ nhật $[0, 5] \times [0, 3]$. $S$ là một khối trụ tam giác có thể tích là 3.(diện tích tam giác)=3(1/2.5.5)=37.5. do đó

$$\int\int_R (5 - x)dA = 37.5$$




Hình 10: Hình minh họa

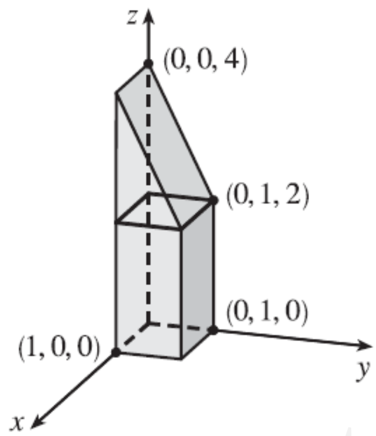
**Bài 13/T62**

$z = f(x, y) = 4 - 2y \geq 0$ với $0 \leq y \leq 1$. Do đó tích phân đại diện cho thể tích của một nữa khối rắn chữ nhật $[0, 1] \times [0, 1] \times [0, 4]$ nằm dưới mặt phẳng $z = 4 - 2y$. Vì thế

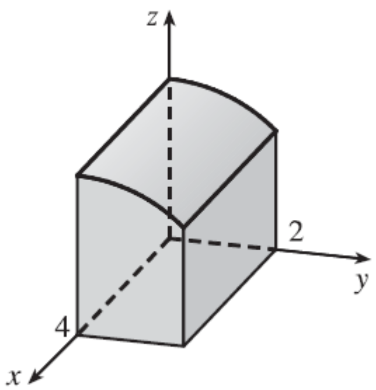
$$\int\int_R (4 - 2y)dA = (1)(1)(2) + \frac{1}{2}(1)(1)(2) = 3$$

**Bài 14/T62**

cho $z = \sqrt{9 - y^2}$ vì $z^2 + y^2 = 9, z \geq 0$. Do đó tích phân đại diện cho thể tích của nửa trên cùng của một phần của hình trụ tròn $z^2 + y^2 = 9$ nằm trên hình chữ nhật $[0, 4] \times [0, 2]$.




Hình 11: Hình minh họa




Hình 12: Hình minh họa

# TUẦN 7 (H.T.K. Vân)

**Bài 3:**

$$\int_1^3\int_0^1 (1{+}4xy)dxdy = \int_1^3 \left[x + 2x^2y\right]_0^1 dy = \int_1^3 1{+}2ydy = \left[y + y^2\right]_1^3 = 10$$

**Bài 5:**

$$\int_0^2\int_0^{\pi/2} xsinydydx = \int_0^2 x\Big[-cosy\Big]_0^{\pi/2} dx = \int_0^2 xdx = 2$$

**Bài 8:**

$$\begin{aligned}\int_0^1\int_1^2 \frac{xe^x}{y}dydx &= \int_0^1 xe^x dx \int_1^2 \frac{1}{y}dy \\ &= \left(\Big[xe^x\Big]_0^1 - \int_0^1 e^x dx\right).\Big[ln(y)\Big]_1^2 \text{ (tích phân từng phần )} \\ &= \left(e - \Big[e^x\Big]_0^1\right) ln(2) = ln(2)\end{aligned}$$

**Bài 16:**

$$\int\int_R cos(x+2y)dA \qquad R = \{(x,y)|0 \le x \le \pi, -3 \le y \le \pi/2\}$$

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi}\int_{-3}^{\pi/2} cos(x+2y)dydx &= \int_0^{\pi} 1/2\Big[sin(x+2y)\Big]_{-3}^{\pi/2}dx \\ &= \int_0^{\pi} 1/2(sin(x+\pi) - sin(x-6))dx \\ &= \frac{1}{2}\Big[-cos(x+\pi) + cos(x-6)\Big]_0^{\pi} \\ &= \frac{1}{2}(-cos(2\pi) + cos(pi-6) \\ &- (-cos(\pi) + cos(-6))) \\ &= -2 - cos(-6)\end{aligned}$$

**Bài 20:**

$$\int\int_R \frac{x}{1+xy}dA \qquad R = \{(x,y)|0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1\}$$

$$\begin{aligned}\int_0^1\int_0^1 \frac{x}{1+xy}dydx &= \int_0^1 \Big[ln(1+xy)\Big]_0^1 dx = \int_0^1 ln(1+x)dx \\ &= \Big[(x+1)ln(1+x)\Big]_0^1 - \int_0^1 1dx\end{aligned}$$

(tích phân từng phần với $u = ln(1+x) \quad dv = 1 \Rightarrow du = \dfrac{1}{1+x},\ v = x+1$).

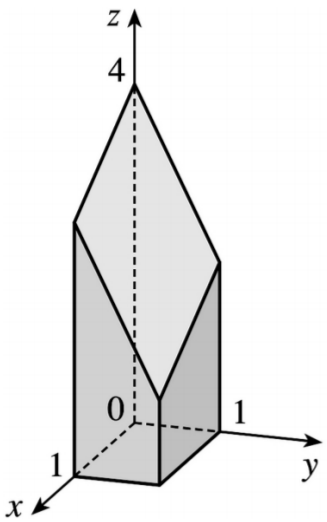
$$= 2ln2 - 1$$

**Bài 23:**

Phác họa thể tích khối chất rắn được cho bởi: $\int_0^1\int_0^1(4-x-2y)dxdy$

**Bài 26:**

Thể tích khối rắn dưới mặt hyperbolic paraboloid $z = 4 + x^2 - y^2$:




$$V = \int_{-1}^{1}\int_{0}^{2} 4 + x^2 - y^2 dydx = \int_{-1}^{1}\Big[4y + x^2y - 1/3y^3\Big]_0^2 dx$$
$$= \int_{-1}^{1} \frac{16}{3} + 2x^2 dx = 12.$$

**Bài 29:** Vì khối chất rắn nằm trong góc phần tám thứ nhất, nên bị chặn bởi 3 mặt phẳng: $x = 0$, $y = 0$ , $z = 0$.

• $z = 0$ cắt $z = 16 - x^2$ tại $x = \pm 4$. Nhưng $x = -4$ không nằm trong góc phần tám thứ nhất, nên ta chỉ nhận $x = 4$. Do đó, với khối chất rắn này ta nhận giá trị $x : 0 \leq x \leq 4$.

Vậy miền $R$ cần tìm của mình $(x, y) \in [0, 4] \times [0, 5]$, như vậy ta có thể tích của khối rắn được tính bằng tích phân sau:

$$V = \int_{0}^{4}\int_{0}^{5} 16 - x^2 dydx = \int_{0}^{4} \Big[y(16 - x^2)\Big]_0^5 dx$$
$$= 5\int_{0}^{4} (16 - x^2)dx = 5\Big[16x - 1/3x^3\Big]_0^4 = \frac{640}{3}$$

**Bài 31:** Ta có : $R$ là hình chữ nhật $[-1, 1] \times [0, 5]$. Suy ra diện tích miền $R$: $A(R) = 2.5 = 10$.Giá trị trung bình của $f$ trên $R$ là:

$$f_{tb} = \frac{1}{A(R)} \int\int_R x^2 y dA = \frac{1}{10}\int_{-1}^{1}\int_0^5 x^2 y dy dx$$
$$= \frac{1}{10}\int_{-1}^{1}\left[\frac{1}{2}x^2y^2\right]_0^5 dx = \int_{-1}^{1}\frac{5}{4}x^2 dx = 0$$

**Tích phân kép trên một miền tổng quát**

**Bài 1:**

$$\int_0^4\int_0^{\sqrt{y}} xy^2 dx dy = \int_0^4 \left[\frac{1}{2}x^2y^2\right]_0^{\sqrt{y}} dy = \frac{1}{2}\int_0^4 y^3 dy = 24.$$

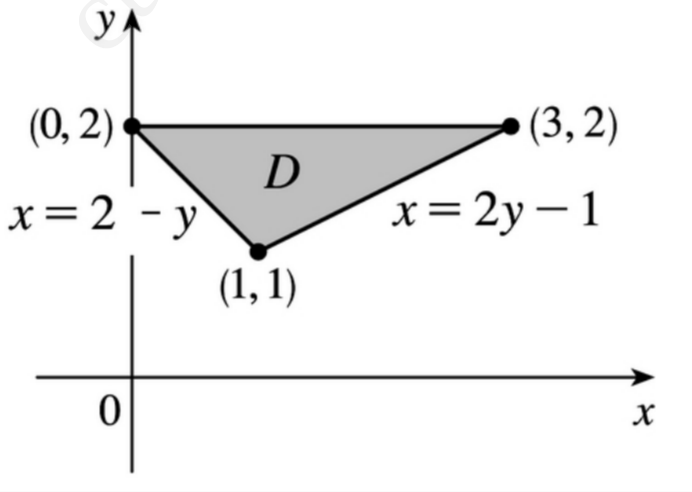
**Bài 4:**

$$\int_0^{\pi/2}\int_0^{cos\theta} e^{sin\theta} dr d\theta = \int_0^{pi/2}\left[re^{sin\theta}\right]_{r=0}^{r=cos\theta} d\theta$$
$$= \int_0^{pi/2}(cos\theta)e^{sin\theta} d\theta = \left[e^{sin\theta}\right]_0^{pi/2} = e - 1$$

**Bài 11:**

$$\int_0^1\int_0^y x\sqrt{y^2 - x^2} dx dy = \int_0^1 \left[-\frac{1}{3}(y^2 - x^2)^{\frac{3}{2}}\right]_{x=0}^{x=y} dy = \frac{1}{3}\int_0^1 y^3 dy = \frac{1}{12}$$

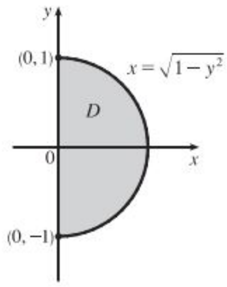
**Bài 14:**



$$\begin{aligned}
\int_1^2 \int_{2-y}^{2y-1} y^3 dx dy &= \int_1^2 \left[ xy^3 \right]_{x=2-y}^{x=2y-1} dy \\
&= \int_1^2 [(2y-1)-(2-y)]y^3 dy = \int_1^2 (3y^4 - 3y^3) dy \\
&= \left[ \frac{3}{5}y^5 - \frac{3}{4}y^4 \right]_1^2 = \frac{147}{20}
\end{aligned}$$

# TUẦN 8 (L.T.M. Thanh)

## Bài 15/T65

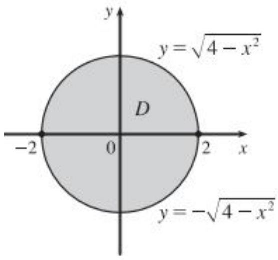



Hình 13: Ảnh minh họa

$$\begin{aligned}\int\int_D xy^2 dA &= \int_{-1}^{1}\int_0^{\sqrt{1-y^2}} xy^2 dxdy\\ &= \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} y^2(1-y^2)dy\\ &= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{3}y^3-\frac{1}{5}y^5\right]_{-1}^{1}\\ &= \frac{2}{15}\end{aligned}$$

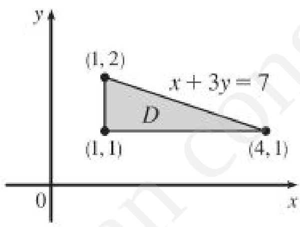
## Bài 16/T65

$$\begin{aligned}\int\int_D (2x-y)dA &= \int_{-2}^{2}\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} (2x-y)dydx\\ &= \int_{-2}^{2} 4x\sqrt{4-x^2}dx\\ &= \frac{-4}{3}(4-x^2)^{3/2}\Big|_{-2}^{2}\\ &= 0\end{aligned}$$




Hình 14: Ảnh minh họa

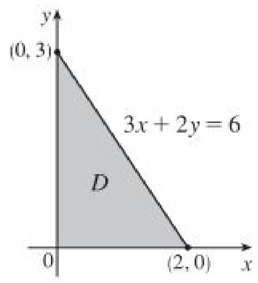
## Bài 20/T65




Hình 15: Ảnh minh họa

$$
\begin{aligned}
V &= \int_1^2 \int_1^{7-3y} xydxdy \\
&= \frac{1}{2}\int_1^2 (48y - 42y^2 + 9y^3)dy \\
&= \frac{1}{2}\left[24y^2 - 14y^3 + \frac{9}{4}y^4\right]_1^2 \\
&= \frac{31}{8}
\end{aligned}
$$

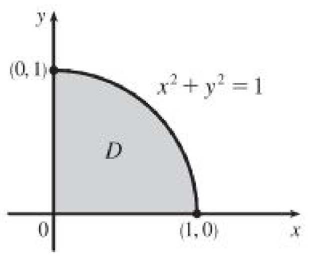
## Bài 22/T65




Hình 16: Ảnh minh họa

$$
\begin{aligned}
V &= \int_0^2 \int_0^{3-\frac{3}{2}x} (6 - 3x - 2y)dydx \\
&= \int_0^2 \left( \frac{9}{4}x^2 - 9x + 9 \right) dx \\
&= \frac{1}{2} \left[ \frac{3}{4}x^3 - \frac{9}{2}x^2 + 9x^2 \right]_0^2 \\
&= 6
\end{aligned}
$$

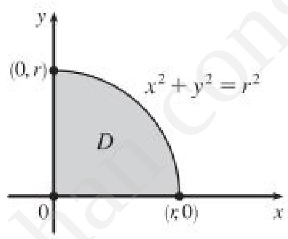
**Bài 26/T66**




Hình 17: Ảnh minh họa

$$\begin{aligned} V &= \int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} ydydx \\ &= \int_0^1 \frac{1-x^2}{2}dx \\ &= \frac{1}{2}\left[x - \frac{1}{3}x^3\right]_0^1 \\ &= \frac{1}{3} \end{aligned}$$

**Bài 27/T66**




Hình 18: Ảnh minh họa

Do tính đối xứng nên thể tích cần tìm bằng 8 lần thể tích $V_1$ trong góc phần tám thứ nhất

$$\begin{aligned} V_1 &= \int_0^r \int_0^{\sqrt{r^2-y^2}} \sqrt{r^2-y^2}dxdy \\ &= \int_0^r (r^2-y^2)dy \\ &= \left[r^2y - \frac{1}{3}y^3\right]_0^r = \frac{2}{3}r^3 \end{aligned}$$

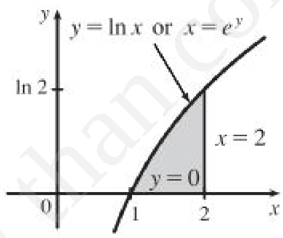
$$V = 8V_1 = \frac{16}{3}r^3$$

**Bài 28/T66**

$y = 1 - x^2 vy = x^2 - 1$ giao tai $(\pm 1, 0)$ với $1 - x^2 \geq x^2 - 1$ trên [-1,1].

$$V = \int_{-1}^{1}\int_{x^2-1}^{1-x^2}(2x+2y+10)dydx - \int_{-1}^{1}\int_{x^2-1}^{1-x^2}(2-x-y)dydx$$
$$= \int_{-1}^{1}\int_{x^2-1}^{1-x^2}(3x+3y+8)dydx$$
$$= \int_{-1}^{1}(-6x^3-16x^2+6x+16)dx$$
$$= \frac{64}{3}$$

**Bài 36/T66**



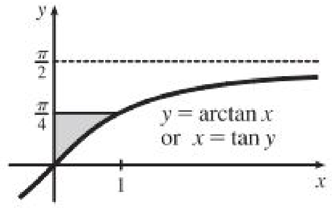

Hình 19: Ảnh minh họa

$D = \{(x,y)|0 \le y \le \ln x, 1 \le x \le 2\} = \{(x,y)|e^y \le x \le 2, 0 \le y \le \ln 2\}$
Khi đó ta có

$$\int_0^2\int_0^{\ln x} f(x,y)dydx = \int_0^{\ln 2}\int_{e^y}^{2} f(x,y)dxdy$$

**Bài 37/T66**

$D = \left\{(x,y)|\arctan x \le y \le \frac{\pi}{4}, 0 \le x \le 1\right\}$
$= \left\{(x,y)|0 \le x \le \tan y, 0 \le y \le \frac{\pi}{4}\right\}$




Hình 20: Ảnh minh họa

Khi đó ta có

$$\int_0^1 \int_{\arctan x}^{\frac{\pi}{4}} f(x,y)dydx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_0^{\tan y} f(x,y)dxdy$$

**Bài 44/T67**

$$\begin{aligned} &D = \{(x,y)|0 \le x \le 1, -x+1 \le y \le 1\} \\ &\cup \{(x,y)| -1 \le x \le 0, x+1 \le y \le 1\} \\ &\cup \{(x,y)|0 \le x \le 1, -1 \le y \le x-1\} \\ &\cup \{(x,y)| -1 \le x \le 0, -1 \le y \le -x-1\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int\int_D x^2 dA &= \int_0^1 \int_{1-x}^1 x^2 dydx + \int_{-1}^0 \int_{1+x}^1 x^2 dydx \\ &+ \int_0^1 \int_{-1}^{x-1} x^2 dydx + \int_{-1}^0 \int_{-1}^{-x-1} x^2 dydx \\ &= 4\int_0^1 \int_{1-x}^1 x^2 dydx \text{ (bởi tính đối xứng của miền và } f(x,y) = x^2 \ge 0) \\ &= 1 \end{aligned}$$

**Bài 45/T67**

$$D = \{(x,y)| -1 \le y \le 0, -1 \le x \le y - y^3\}$$

$\cup \left\{(x,y)|0 \le y \le 1, \sqrt{y}-1 \le x \le y-y^3\right\}$

$$\begin{aligned}\int\int_D ydA &= \int_{-1}^{0}\int_{-1}^{y-y^3} ydxdy + \int_0^1\int_{\sqrt{y}-1}^{y-y^3} ydxdy \\ &= \int_{-1}^{0}(y^2-y^4+y)dy + \int_0^1 (y^2-y^4-y^{3/2}+y)dy \\ &= \frac{-2}{15}\end{aligned}$$

**Bài 46/T67**

$Q = \left\{(x,y)|x^2+y^2 \le \frac{1}{4}, x \ge 0, y \ge 0\right\}$

Và $0 \le (x^2+y^2)^2 \le \left(\frac{1}{4}\right)^2 \Longrightarrow \dfrac{-1}{16} \le -(x^2+y^2)^2 \le 0$

$\Longrightarrow e^{-1/16} \le e^{-(x^2+y^2)^2} \le 1$ ($e^t$ là hàm tăng)

Ta có: $A(Q) = \dfrac{1}{4}\pi\left(\dfrac{1}{2}\right)^2 = \dfrac{\pi}{16}$

Khi đó: $e^{-1/16}A(Q) \le \displaystyle\int\int_Q e^{-(x^2+y^2)^2}dA \le A(Q)$

hay $\dfrac{\pi}{16}e^{-1/16} \le \displaystyle\int\int_Q e^{-(x^2+y^2)^2}dA \le \dfrac{\pi}{16}$

hay $0.1844 \le \displaystyle\int\int_Q e^{-(x^2+y^2)^2}dA \le 0.1964$

# TUẦN 9 (N.N. Hưng)

## Chương 3D.Tích Phân kép trong tọa độ cực

**Bài 14(trang 69)** Dùng tích phân kép để tính diện tích các miền sau: "Một cách hoa có $r = \cos 3\theta$".

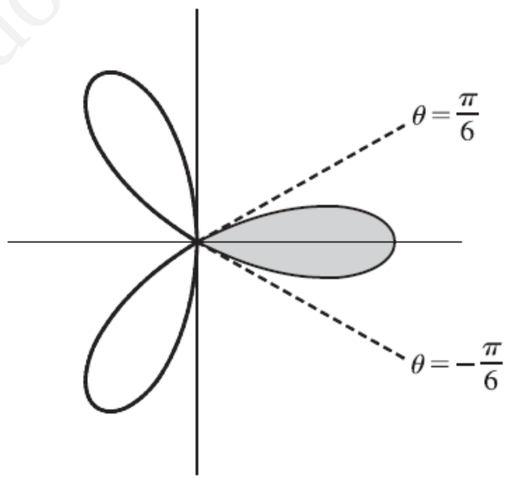
Lời giải:

cho $r = 0$ ta suy ra $\theta \in [-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}]$, do đó ta có miền

$$D = \{(r,\theta) | -\pi/6 \leq \theta \leq \pi/6, 0 \leq r \leq \cos 3\theta\}$$

từ đó ta có

$$\begin{aligned}
\int\int_D dA &= \int_{-\pi/6}^{\pi/6}\int_0^{\cos 3\theta} r.drd\theta = \int_{-\pi/6}^{\pi/6}\left[\frac{1}{2}r^2\right]_{r=0}^{r=\cos 3\theta} d\theta \\
&= \int_{-\pi/6}^{\pi/6}\frac{1}{2}\cos^2 3\theta d\theta = 2\int_0^{\pi/6}\frac{1}{2}\left(\frac{1+\cos 6\theta}{2}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left[\theta + \frac{1}{6}\sin 6\theta\right]_0^{\pi/6} = \frac{\pi}{12}
\end{aligned}$$




Hình 21: Hình minh họa

**Bài 20(trang 69)** Dùng tọa độ cực để tính các khối rắn sau: "Miền được bao bởi $-x^2 - y^2 + z^2 = 1$ và mặt phẳng $z = 2$".

Lời giải:
Thay $z = 2$ vào phương trình $-x^2 - y^2 + z^2 = 1$ ta thu được $-x^2 - y^2 + 4 = 1 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 3$. vì thế ta có khối rắn là vùng nằm trên mặt $z = \sqrt{1 + x^2 + y^2}$ và dưới mặt phẳng $z = 2$ với $x^2 + y^2 \leq 3$, và thể tích của nó là

$$V = \int \int\limits_{x^2+y^2\leq 3} (2 - \sqrt{1 + x^2 + y^2})dA = \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{3}} (2 - \sqrt{1 + r^2})r.drd\theta$$
$$= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{3}} (2r - r\sqrt{1 + r^2})dr = [\theta]_0^{2\pi} \left[r^2 - \frac{1}{3}(1 + r^2)^{3/2}\right]_0^{\sqrt{3}}$$
$$= 2\pi(3 - \frac{8}{3} - 0 + \frac{1}{3}) = \frac{4}{3}\pi.$$

**Bài 22(trang 69)** Dùng tọa độ cực để tính các khối rắn sau: "một quả cầu bán kính $a$".
Lời giải:
vì tính đối xứng, ta có

$$V = 2\int \int\limits_{x^2+y^2\leq a^2} \sqrt{a^2 - x^2 - y^2})dA = 2\int_0^{2\pi} \int_0^{a} (\sqrt{a^2 - r^2})r.drd\theta$$
$$= 2\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{a} r\sqrt{a^2 - r^2}dr$$
$$= 2[\theta]_0^{2\pi} \left[-\frac{1}{3}(a^2 - r^2)^{3/2}\right]_0^{a} = 2(2\pi)(0 + \frac{1}{3}a^3) = \frac{4\pi}{3}a^3.$$

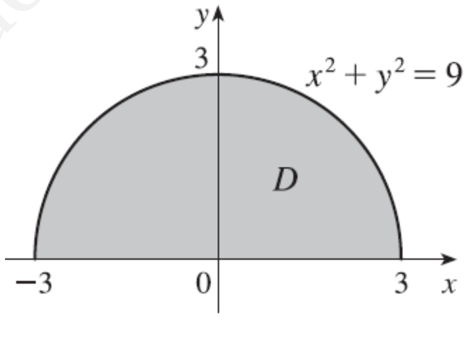
**Bài 25(trang 69)** Dùng tọa độ cực để tính các khối rắn sau: "miền được bao bởi Hyperboloid $z = 3x^2 + 3y^2$ và mặt $z = 4 - x^2 - y^2$".
Lời giải:
phương trình giao điểm của 2 mặt là $3x^2 + 3y^2 = 4 - x^2 - y^2 \Leftrightarrow x^2 + y^2 =$

1. vì thế

$$V = \iint\limits_{x^2+y^2\le 1} [4 - x^2 - y^2 - 3x^2 - 3y^2]dA = \int_0^{2\pi}\int_0^1 4(1-r^2)r.drd\theta$$
$$= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 (4r - 4r^3)dr = [\theta]_0^{2\pi}[2r^2 - r^4]_0^1 = 2\pi.$$

**Bài 28(trang 70)** Dùng tích phân kép để tính miền sau.
Lời giải:

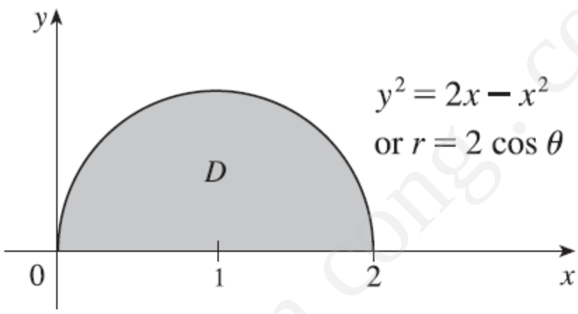
$$\begin{aligned}\int_{-3}^{3}\int_0^{\sqrt{9-x^2}} \sin(x^2+y^2)dydx &= \int_0^{\pi}\int_0^3 \sin(r^2)r.drd\theta \\ &= \int_0^{\pi} d\theta \int_0^3 \sin(r^2)r.dr \\ &= [\theta]_0^{\pi}\left[-\frac{1}{2}\cos(r^2)\right]_0^3 \\ &= \pi(-\frac{1}{2})(\cos 9 - 1) = \frac{\pi}{2}(1-\cos 9).\end{aligned}$$




Hình 22: Hình minh họa

**Bài 31(trang 70)** Dùng tích phân kép để tính miền sau.
Lời giải:

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi/2}\int_0^{2\cos\theta} r^2 dr d\theta &= \int_0^{\pi/2}\left[\frac{1}{3}r^3\right]_{r=0}^{r=2\cos\theta} d\theta\\ &= \int_0^{\pi/2}\left(\frac{8}{3}\cos^3\theta\right)d\theta = \frac{8}{3}\int_0^{\pi/2}(1-\sin^2\theta)\cos\theta d\theta\\ &= \frac{8}{3}\left[\sin\theta - \frac{1}{3}\sin^3\theta\right]_0^{\pi/2} = \frac{16}{9}.\end{aligned}$$




Hình 23: Hình minh họa

**Bài 33(trang 70)** Dùng tọa độ cực để gộp tổng thành một tích phân kép. Tính tích phân đó.

Lời giải:

$$\begin{aligned}\int_{1/\sqrt{2}}^{1}\int_{\sqrt{1-x^2}}^{x} xydydx + \int_1^{\sqrt{2}}\int_0^x xydydx + \int_{\sqrt{2}}^{2}\int_0^{\sqrt{4-x^2}} xydydx\\ &= \int_0^{\pi/4}\int_1^2 r^3\cos\theta\sin\theta dr d\theta\\ &= \int_0^{\pi/4}\left[\frac{r^4}{4}\cos\theta\sin\theta\right]_{r=1}^{r=2} d\theta\\ &= \frac{15}{4}\int_0^{\pi/4}\sin\theta\cos\theta d\theta = \frac{15}{4}\left[\frac{\sin^2\theta}{2}\right]_0^{\pi/4} = \frac{15}{16}.\end{aligned}$$

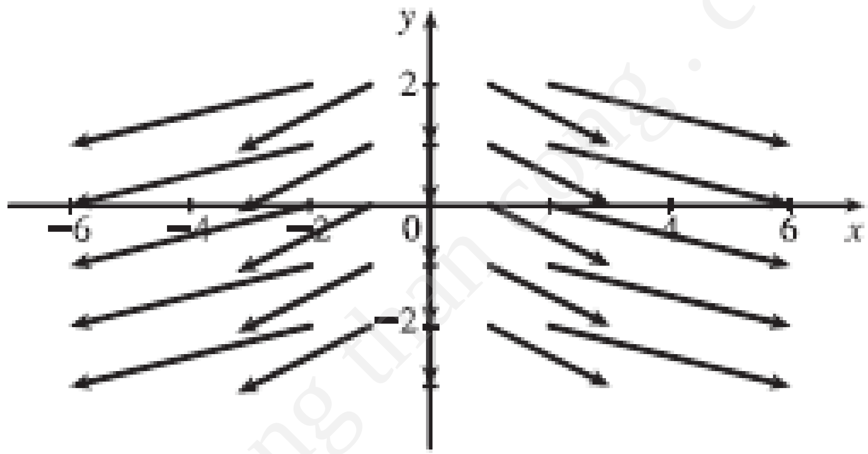
**Chương 16.1 Sách Caculus-Stewart, version 7: Trường Vectơ**

**Bài 25(trang 1086)** Tìm trường vecto gradient $\bigtriangledown f$ của f và phát họa nó.

Lời giải:

$f(x,y) = x^2 - y \Rightarrow \bigtriangledown f(x,y) = 2xi - j$.

độ dài của $\bigtriangledown f(x,y)$ là $\sqrt{4x^2+1}$. Khi $x \neq 0$, các vecto chỉ ra từ trục y và hướng đi xuống với chiều dài tăng khi khoảng cách đến trục y tăng.




Hình 24: Hình minh họa

**Bài 26(trang 1086)** Tìm trường vecto gradient $\bigtriangledown f$ của f và phát họa nó.

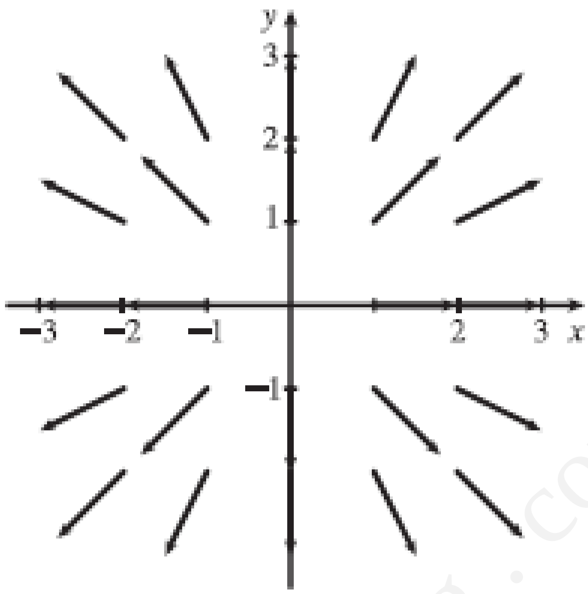
Lời giải:

$f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2} \Rightarrow$

$\bigtriangledown f(x,y) = \frac{1}{2}(x^2+y^2)^{-1/2}(2x)i + \frac{1}{2}(x^2+y^2)^{-1/2}(2y)j$

$= \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}(xi+yj)$

$\bigtriangledown f(x,y)$ không xác định tại gốc tọa độ, nhưng ở bất kỳ đâu tất cả các vecto đều có độ dại 1 và hướng ra ngoài gốc tọa độ.




Hình 25: Hình minh họa

**Bài 33(trang 1086)**

Lời giải:

tại $t = 3$ hạt ở (2,1) vì thế nó có vận tốc là $V(2,1) = \langle 4, 3\rangle$. Sau khi lệch 0.01 đơn vị thời gian, do đó vị trí thay đổi của chất điểm đó sẽ là $0.01V(2,1) = 0.01\langle 4,3\rangle = \langle 0.04, 0.03\rangle$, vậy hạt đó sẽ nằm tại tọa độ (2.04,1.03).

**Bài 34(trang 1086)**

Lời giải:

tại $t = 1$ hạt ở (1,3) vì thế nó có vận tốc là $F(1,3) = \langle 1, -1\rangle$. Sau khi lệch 0.05 đơn vị thời gian, do đó vị trí thay đổi của chất điểm đó sẽ là $0.05F(2,1) = 0.05\langle 1, -1\rangle = \langle 0.05, -0.05\rangle$, vậy hạt đó sẽ nằm tại tọa độ (1.05,2.95).

# TUẦN 10 (H.T.K. Vân)

## Tích phân đường

Ước lượng các tích phân đường sau:

**Bài 1 phần 16.2 Caculus-7th)** $\int_C y^3 ds; \quad x = t^3, y = t, 0 \le t \le 2$

Lời giải

$$\int_C y^3 ds = \int_0^2 t^3 \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dx}{dt}\right)^2} dt = \int_0^2 t^3 \sqrt{(3t^2)^2 + 1^2} dt$$
$$= \int_0^2 t^3 (9t^4 + 1)^{1/2} dt = [\frac{2}{3}\frac{1}{9.4}(9t^4+1)^{3/2}]_0^2 = \frac{1}{54}(145^{3/2} - 1)$$

**Bài 3 phần 16.2 Caculus-7th)** $\int_C xy^4 ds, C$ là nửa bên phải của đường tròn $x^2 + y^2 = 4$

Lời giải

C là nửa bên phải đường tròn $x^2 + y^2 = 4$, do đó : $x = 4\cos t; y = 4\sin t$ với $\frac{-\pi}{2} \le t \le \frac{\pi}{2}$.

$$\int_C xy^4 ds = \int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 4^5 \cos t.\sin^4 t \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dx}{dt}\right)^2} dt$$
$$= \int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 4^5 \cos t.\sin^4 t \sqrt{(-4\sin t)^2 + (4cost)^2} dt = \int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 4^6 \cos t.\sin^4 t dt$$
$$= 4^6 [\frac{1}{5} sin^5 t]_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{2.4^6}{5}$$

**Bài 21 phần 16.2 Caculus-7th)** Ước lượng tích phân đường $\int_C F.dr$, với $C$ được cho trước theo hàm $r(t)$

$F(x,y,z) = \sin x\mathbf{i} + \cos y\mathbf{j} + xz\mathbf{k}$

$r(t) = t^3\mathbf{i} - t^2\mathbf{j} + t\mathbf{k}; 0 \le t \le 1$

Lời giải:

$$\begin{aligned}\int_C F.dr &= \int_0^1 \langle \sin(t^3), \cos(-t^2), t^4\rangle.\langle 3t^2, -2t, t\rangle dt\\ &= \int_0^1 3t^2\sin(t^3) - 2t\cos(-t^2) + t^4 dt = \Big[-\cos t^3 - \sin t^2 + \frac{1}{5}\Big]_0^1\\ &= \frac{6}{5} - \cos 1 - \sin 1\end{aligned}$$

**Định lý cơ bản của tích phân đường.**

**Bài 7 phần 16.3 Caculus-7th)** Xác định trường $F$ có bảo toàn hay không. Nếu có tìm $f$ để $\nabla f = F$:

$F(x,y) = (ye^x + \sin y)\mathbf{i} + (e^x + x\cos y)\mathbf{j}$

Lời giải:

$\frac{\partial P}{\partial y} = e^x + \cos y \qquad \frac{\partial Q}{\partial x} = e^x + \cos y$

$\Rightarrow \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$, vậy $F$ là bảo toàn. Nên tồn tại $f$ sao cho $\nabla f = F$

Suy ra: $f_x(x,y) = ye^x + \sin y \Rightarrow f(x,y) = ye^x + x\sin y + g(y) \Rightarrow f_y(x,y) = e^x + x\cos y + g'(y)$.

Mặt khác, $f_y(x,y) = e^x + x\cos y$, do đó $g'(y) = 0$ hay $g(y) = K$ (hằng số).

Vậy $f(x,y) = ye^x + x\sin y + K$

**Bài 15 phần 16.3 Caculus-7th)**

$F(x,y,z) = yz\mathbf{i} + xz\mathbf{j} + (xy + 2z)\mathbf{k}$ , C là đường từ (1,0,-2) đến (4,6,3).

a) Tìm hàm $f$ để $F = \nabla f$.

b) Dùng câu a để tính $\int_C F dr$, với đường C cho trước.

Lời giải:

a) Vì $F = \nabla f$ nên : - $f_x(x,y,z) = yz \Rightarrow f(x,y,z) = xyz + g(y,z) \Rightarrow f_y(x,y,z) = xz + g_y(y,z)$. (1)

- $f_y(x,y,z) = xz$ (2)

(1),(2) suy ra $g_y(y,z) = 0$ hay $g(y,z) = h(z)$ (hàm $h$ chỉ theo biến $z$).

Do đó, $f(x,y,z) = xyz + h(z)$ tiếp tục, ta đạo hàm $f$ theo biến $z$ : $f_z(x,y,z) = xy + h'(z)$.
Mặt khác, ta lại có: $f_z(x,y,z) = xy + 2z$ suy ra : $h'(z) = 2z \Rightarrow h(z) = z^2 + K$ ($K$ là hằng số).
Vậy $f(x,y,z) = xyz + z^2 + K$.
b) $\int_C F dr = \int_C \nabla f dr = f(4,6,3) - f(1,0,-2) = 77$

Định lý Green

**Bài 7 phần 16.4 Caculus-7th)**

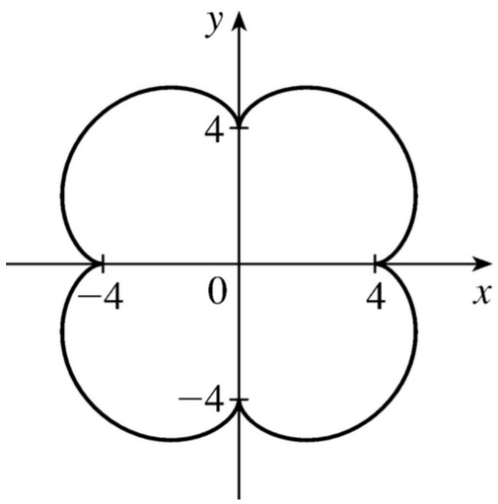
Dung định lý Green để tính:
$\int_C (y + e^{\sqrt{x}})dx + (2x + \cos y^2)dy$ với C là miền kín bị chặn bởi 2 đường : $y = x^2; x = y^2$

Lời giải:

Hai đường parabol $y = x^2$ và $x = y^2$ cắt nhau tại (0,0), (1,1).
Áp dụng định lý Green, ta có:

$$\begin{aligned}
&\int_C (y + e^{\sqrt{x}})dx + (2x + \cos y^2)dy \\
&\qquad = \int\int_D [\frac{\partial(2x + \cos y^2)}{\partial x} - \frac{\partial(y + e^{\sqrt{x}})}{\partial y}]dA \\
&\qquad = \int_0^1 \int_{y^2}^{\sqrt{y}} (2-1)dxdy \\
&\qquad = \int_0^1 (y^{1/2} - y^2)dy = \frac{1}{3}
\end{aligned}$$

**Bài 7 phần 16.4 Caculus-7th)** Sử dụng công thức: $A = \oint_C xdy = -\oint_C ydx = \frac{1}{2}\oint_C xdy - ydx$ để tính diện tịch miền sau:
Cho đường tròn C cuộn theo bên ngoài đường tròn $x^2 + y^2 = 16$. Chọn 1 điểm P trên C thì ta có pt tham số như sau: $x = 5\cos t - \cos 5t, y = 5\sin t - \sin 5t$.




Lời giải:

Áp dụng công thức : $A = \oint_C x dy$ ta được:

$$\begin{aligned} A &= \oint_C x dy = \int_0^{2\pi} (5\cos t - \cos 5t)(5\cos t - 5\cos 5t) dt \\ &= \int_0^{2\pi} (25\cos^2 t - 30\cos t \cos 5t + 5\cos^2 5t) dt \\ &= \Big[ 25\big(\frac{1}{2}t + \frac{1}{4}\sin 2t\big) - 30\big(\frac{1}{8}\sin 4t + \frac{1}{12}\sin 6t\big) + 5\big(\frac{1}{2}t + \frac{1}{20}\sin 10t\big) \Big]_0^{2\pi} \\ &= 30\pi \end{aligned}$$

**Curl và divergence**

**Bài 7 phần 16.4 Caculus-7th)** : Tính a) curl của F b) tính divergence của F:

$F(x, y, z) = \langle e^x \sin y, e^y \sin z, e^z \sin x \rangle$

Lời giải:

a)

$$\begin{aligned} curlF = \nabla \times F &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ e^x \sin y & e^y \sin z & e^z \sin x \end{vmatrix} \\ &= (0 - e^x \cos y)\mathbf{i} + (0 - e^z \cos x)\mathbf{j} + (0 - e^y \cos z)\mathbf{k} \\ &= (-e^x \cos y)\mathbf{i} + (-e^z \cos x)\mathbf{j} + (-e^y \cos z)\mathbf{k} \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} divF = \nabla.F &= \frac{\partial e^x \sin y}{\partial x} + \frac{\partial e^y \sin x}{\partial y} + \frac{\partial e^z \sin x}{\partial z} \\ &= e^x \sin y + e^y \sin z + e^z \sin x \end{aligned}$$

**Bài 13 phần 16.4 Caculus-7th)** Trường vector sau có bảo toàn hay không? Nếu có, tìm $f$ sao cho $F = \nabla f$

$$F(x, y, z) = y^2z^3\mathbf{i} + 2xyz^3\mathbf{j} + 3xy^2z^2\mathbf{k}$$

<u>Lời giải:</u>

$$\begin{aligned} curlF = \nabla \times F &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ y^2z^3 & 2xyz^3 & 3xy^2z^2 \end{vmatrix} \\ &= (2yz^3 - 2yz^3)\mathbf{i} + (3z^2y^2 - 3z^2y^2)\mathbf{j} + (2yz^3 - 2yz^3)\mathbf{k} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Suy ra,trường $F$ bảo toàn. Nên tồn tại $f$ sao cho $F = \nabla f$
$\Rightarrow f_x(x, y, z) = y^2z^3 \Rightarrow f(x, y, z) = xy^2z^3 + g(y, z) \Rightarrow f_y(x, y, z) = 2xyz^3 + g_y(y, z)$
Mặt khác, $f_y(x, y, z) = 2xyz^3$ nên $g_y(y, z) = 0$ hay $g(y, z) = h(z)$.

Tương tự như trên, ta cũng có $f_z(x,y,z) = 3xy^2z^2 + h'(z)$ và $f_z(x,y,z) = 3xy^2z^2$. Nên $h'(z) = 0$ hay $h(z) = K$ (hằng số).
Vậy hàm $f$ cần tìm là : $f(x,y,z) = xy^2z^3 + K$

## TUẦN 11 (L.T.M. Thanh)

**Bài 7** Giải phương trình vi phân

$\dfrac{dy}{dt} = \dfrac{te^t}{y\sqrt{1+y^2}}$

$\Rightarrow y\sqrt{1+y^2}dy = te^t dt$

$\Rightarrow \displaystyle\int y\sqrt{1+y^2}dy = \int te^t dt$

Ta tính từng tích phân

$\displaystyle\int y\sqrt{1+y^2}dy = \frac{1}{2}\int \sqrt{u}du = \frac{1}{3}\left(1+y^2\right)^{3/2}$

$\displaystyle\int te^t dt = te^t - \int e^t dt = e^t(t-1) + C$

Suy ra

$\dfrac{1}{3}\left(1+y^2\right)^{3/2} = e^t(t-1) + C$

$\Rightarrow y = \pm\sqrt{(3e^t(t-1)+C)^{2/3} - 1}$

**Bài 17** Tìm nghiệm của phương trình vi phân thỏa điều kiện đầu cho trước.

$$y' \tan x = a + y, y(\pi/3) = a, \ 0 < x < \pi/2$$

$\Rightarrow \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{a+y}{\tan x} \Rightarrow \dfrac{dy}{a+y} = \cot x dx \ (a + y \neq 0)$

$\Rightarrow \displaystyle\int \frac{dy}{a+y} = \int \frac{\cos x}{\sin x}dx \Rightarrow ln|a+y| = ln|\sin x| + C \Rightarrow |a+y| = e^C|\sin x|$

$\Rightarrow a + y = K\sin x, K = \pm e^C$

$y(\pi/3) = a \Rightarrow a + a = K\sin(\pi/3) \Rightarrow K = \dfrac{4a}{\sqrt{3}}.$

Do đó $y = \dfrac{4a}{\sqrt{3}}\sin x - a$

**Bài 21** Gải phương trình $y' = x + y$ bằng cách đổi biến $u = x + y$

$$u = x + y \Rightarrow \frac{du}{dx} = \frac{d(x+y)}{dx} \Rightarrow \frac{du}{dx} = 1 + \frac{dy}{dx}$$

mà $\dfrac{dy}{dx} = x + y = u$ vì thế $\dfrac{du}{dx} = 1 + u \Rightarrow \dfrac{du}{1+u} = dx \ (u \neq -1)$

$\Rightarrow \displaystyle\int \frac{du}{1+u} = \int dx \Rightarrow \ln|1+u| = x + C \Rightarrow |1+u| = e^{x+C}$

$\Rightarrow 1 + u = \pm e^C e^x \Rightarrow u = \pm e^C e^x - 1 \Rightarrow x + y = \pm e^C e^x - 1 \Rightarrow y = Ke^x - x - 1,\ K = \pm e^C \neq 0.$

Nếu $u = -1$ thì $-1 = x + y \Rightarrow y = -x - 1$ với $K = 0$.

Vậy nghiệm tổng quát là: $y = Ke^x - x - 1, K \in \mathbb{R}$.

**Bài 48** Giải bài toán giá trị đầu

$$(x^2+1)\frac{dy}{dx} + 3x(y-1) = 0 \Rightarrow y' + \frac{3x}{x^2+1}y = \frac{3x}{x^2+1}$$

$(x^2+1)^{3/2}y' + 3x(x^2+1)^{1/2}y = 3x(x^2+1)^{1/2} \Rightarrow \left[(x^2+1)^{3/2}y\right]' = 3x(x^2+1)^{1/2}$

$\Rightarrow (x^2+1)^{3/2}y = \displaystyle\int 3x(x^2+1)^{1/2} = (x^2+1)^{3/2} + C \Rightarrow y = 1 + C(x^2+1)^{-3/2}$

Do $y(0) = 2$ nên ta có $2 = 1 + C \Rightarrow C = 1$. Do đó $y = 1 + (x^2+1)^{-3/2}$

**Bài 5/T76** Giải phương trình vi phân

$$9y'' - 12y' + 4y = 0$$

Phương trình đặc trưng: $9k^2 - 12k + 4 = 0 \Rightarrow r^2 = \dfrac{-9}{25} \Rightarrow r = \pm\dfrac{3}{5}i.$

Vậy nghiệm tổng quát là: $y = C_1e^{2x/3} + C_2xe^{2x/3}$

**Bài 12/T76** Giải phương trình vi phân

$$8\frac{d^2y}{dt^2} + 12\frac{dy}{dt} + 5y = 0$$

Phương trình đặc trưng: $8k^2 + 12k + 5 = 0 \Rightarrow r = \dfrac{-12 \pm \sqrt{16i^2}}{16} = \dfrac{-3}{4} \pm \dfrac{1}{4}i$.
Vậy nghiệm tổng quát là: $y = e^{-3t/4}\left[C_1\cos(\frac{1}{4}t) + C_2\sin(\frac{1}{4}t)\right]$

**Bài 20/T77** Giải bài toán giá trị đầu

$$y'' + 2y' + 2y = 0,\ y(0) = 2, y'(0) = 1$$

Phương trình đặc trưng: $k^2 + 2k + 2 = 0$ có 2 nghiệm phức liên hợp là $k = -1 \pm i$.
Nghiệm tổng quát là $y = (C_1\cos x + C_2\sin x)e^{-x}$
Ta lại có: $2 = y(0) = C_1$
$y' = (-C_1\sin x + C_2\cos x)e^{-x} - (C_1\cos x + C_2\sin x)e^{-x} \Rightarrow y'(0) = C_2 - 2 = 1 \Rightarrow C_2 = 3$
Vậy nghiệm của bài toán giá trị đầu là: $y = (2\cos x + 3\sin x)e^{-x}$

**Bài 38/T78** Giải bài toán giá trị đầu bằng phương pháp bất định

$$y'' + y = e^x + x^3,\ y(0) = 2,\ y'(0) = 0$$

Phương trình thuần nhất: $y'' + y = 0$
Phương trình đặc trưng: $k^2 + 1 = 0$ có nghiệm là $k = \pm i$.
Vậy nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất là: $y_{tq} = C_1\cos x + C_2\sin x$.
Với $y'' + y = e^x$ ta tìm nghiệm riêng có dạng $y_1(x) = Ae^x$
Khi đó $y_1' = y_1'' = Ae^x$ suy ra $Ae^x + Ae^x = e^x \Rightarrow A = \dfrac{1}{2}$. Vậy $y_1(x) = \dfrac{1}{2}e^x$.
Với $y'' + y' = x^3 \quad (*)$ ta tìm nghiệm riêng có dạng $y_2(x) = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$

Khi đó $y_2' = 3Ax^2 + 2Bx + C$ và $y_2'' = 6Ax + 2B$ thế vào (*) ta được $6Ax + 2B + Ax^3 + Bx^2 + Cx + D = x^3$

Giải hệ phương trình trên ta đươc: $A = 1, B = 0, C = -6, D = 0$. Do đó $y_2 = x^3 - 6x$

Vậy ngiệm tổng quát là: $y(x) = y_{tq}(x) + y_1(x) + y_2(x) = C_1 \cos x + C_2 \sin x + \frac{1}{2}e^x + x^3 - 6x$.

Ta lại có $2 = y(0) = C_1 + \frac{1}{2} \Rightarrow C_1 = \frac{3}{2}$ và $0 = y'(0) = C_2 + \frac{1}{2} - 6 \Rightarrow C_2 = \frac{11}{2}$

Vậy nghiệm bài toán giá trị đầu là: $y(x) = \frac{3}{2}\cos x + \frac{11}{2}\sin x + \frac{1}{2}e^x + x^3 - 6x$.

**Bài 52/T78** Giải phương trình bằng cách dùng phương pháp biến thiên hằng số

$$y'' + y = sec^2 x,\ 0 < x < \frac{\pi}{2}$$

Nghiệm của tổng quát của phương trình thuần nhất là: $y = C_1 \sin x + C_2 \cos x$.

Đặt $y_1 = \sin x, y_2 = \cos x$. Khi đó $y_1y_2' + y_2y_1' = -\sin^2 x - \cos^2 x = -1$, vì thế $u_1' = -\frac{\sec^2 x \cos x}{-1} = \sec x \Rightarrow u_1(x) = \int \sec x dx = \ln(\sec x + \tan x)$

$u_2' = \frac{\sec^2 x \sin x}{-1} = -\sec x \tan x \Rightarrow u_2(x) = -\sec x$. Do đó

$y_p = \ln(\sec x + \tan x)\sin x - \sec x \cos x = \sin x \ln(\sec x + \tan x) - 1$.

Vậy nghiệm tổng quát là: $y(x) = C_1 \sin x + C_2 \cos x + \sin x \ln(\sec x + \tan x) - 1$.

# Tài Liệu Tham khảo

1 Slides lý thuyết môn "Vi tích phân B2", trích dịch và soạn thảo: L.K. Hà, O.T. Hải, N.V. Huy, B.L.T. Thanh.

2 Tài liệu "BÀI TẬP GIẢI TÍCH B2"

3 Sách "Calculus", J. Stewart, tái bản lần thứ 7.