

Bài giảng môn học Toán Rời Rạc

Nguyễn Anh Thi

2017

Chương 1

Cơ sở logic

Nội dung

1 Chương 1: Cơ sở logic

Mệnh đề

Phép tính mệnh đề

Dạng mệnh đề

Vị từ và lượng từ

Quy tắc suy diễn

Phương pháp quy nạp toán học

Mệnh đề

Định nghĩa

Mệnh đề toán học (gọi tắt là mệnh đề) là một khẳng định có giá trị chân lý xác định (đúng hoặc sai, nhưng không thể vừa đúng vừa sai).

Ví dụ

- "Số 25 chia hết cho 5" là một mệnh đề đúng.
- "Mặt trời xoay quanh trái đất" là một mệnh đề sai.
- "Bạn bao nhiêu tuổi?" không phải là một mệnh đề toán học vì nó là một câu hỏi không có giá trị chân lý xác định (đúng hay sai).

Mệnh đề

Ta thường ký hiệu các mệnh đề bằng các chữ cái: $P, Q, R \dots$

Định nghĩa

Mệnh đề phức hợp là mệnh đề được xây dựng từ các mệnh đề khác nhờ liên kết chúng lại bằng các liên từ (và, hay, nếu...thì...) hoặc trạng từ không.

Ví dụ

Nếu tôi rảnh rỗi, thì tôi sẽ đi chơi.

Chân trị của mệnh đề

Một mệnh đề chỉ có thể đúng hoặc sai, không thể vừa đúng vừa sai. Khi mệnh đề P đúng, ta nói P có **chân trị đúng**, ngược lại ta nói P có **chân trị sai**. Chân trị đúng và chân trị sai sẽ được ký hiệu lần lượt là 1, hay Đ, hay T (True), và 0, hay S, hay F (False).

Phép tính mệnh đề

Mục đích của phép tính mệnh đề là nghiên cứu chân trị của một mệnh đề phức hợp từ chân trị của các mệnh đề đơn giản hơn và các phép nối những mệnh đề này thể hiện qua liên từ hoặc trạng từ "không".

Các phép nối

- **Phép phủ định:** **phủ định** của mệnh đề P được ký hiệu bởi $\neg P$ (đọc là không P). Chân trị của $\neg P$ là 0 nếu chân trị của P là 1 và ngược lại. Ta có bảng sau, gọi là bảng chân trị của phép phủ định.

P	$\neg P$
0	1
1	0

Phép tính mệnh đề

Ví dụ

- 10 là số chẵn.
Phủ định: 10 không là số chẵn.
- $4 > 10$
Phủ định: $4 \leq 10$

Phép tính mệnh đề

- **Phép nối liền:** mệnh đề **nối liền** của hai mệnh đề P, Q được ký hiệu bởi $P \wedge Q$ (đọc là P và Q). Chân trị của $P \wedge Q$ là 1 nếu cả P lẫn Q đều có chân trị 1. Trong các trường hợp khác $P \wedge Q$ có chân trị 0. Nói cách khác phép nối liền được xác định bởi bảng chân trị sau:

P	Q	$P \wedge Q$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Phép tính mệnh đề

Ví dụ

- *Hôm nay trời đẹp và trận bóng đá sẽ hấp dẫn.*
- *15 chia hết cho 3 và 14 chia hết cho 5.*

Phép tính mệnh đề

- **Phép nối rời:** mệnh đề **nối rời** của hai mệnh đề P, Q là mệnh đề ký hiệu bởi $P \vee Q$ (đọc là P hay Q). Chân trị của $P \vee Q$ là 0 nếu cả hai P, Q cùng chân trị 0. Trong các trường hợp khác, $P \vee Q$ có chân trị 1. Nói cách khác phép nối rời được xác định bởi bảng chân trị sau

P	Q	$P \vee Q$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Phép tính mệnh đề

Ví dụ

- Ba đang đọc báo hay mẹ đang xem tivi.*
- 2 là số nguyên tố hay là số chẵn.*

Phép tính mệnh đề

- **Phép loại trừ:** mệnh đề **loại trừ** của hai mệnh đề P, Q là mệnh đề ký hiệu bởi $P \vee Q$ (đọc là P hoặc Q). Chân trị của $P \vee Q$ là 0 nếu cả hai P, Q có cùng chân trị 0 hay 1. Ta có bảng chân trị,

P	Q	$P \vee Q$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Phép tính mệnh đề

Ví dụ

- *15 là số chẵn hoặc là số lẻ.*
- *7 là số nguyên tố hoặc không phải là số nguyên tố.*

Phép tính mệnh đề

- **Phép kéo theo:** mệnh đề **nếu P thì Q** được ký hiệu là $P \rightarrow Q$ (cũng đọc là P **kéo theo** Q , hay P là điều kiện đủ của Q , hay Q là điều kiện cần của P . Ta có bảng chân trị của phép kéo theo:

P	Q	$P \rightarrow Q$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

Phép tính mệnh đề

Ví dụ

- *Nếu trời mưa thì tôi sẽ ở nhà xem tivi.*
- *Nếu $2 > 3$ thì $3 > 4$.*
- *Nếu $2 < 3$ thì $3 > 4$.*

Phép tính mệnh đề

- **Phép kéo theo hai chiều:** mệnh đề nếu P thì Q và ngược lại được ký hiệu bởi $P \leftrightarrow Q$ (cũng đọc là P khi và chỉ khi Q , P nếu và chỉ nếu Q , P là điều kiện cần và đủ để có Q). Ta có bảng chân trị của phép kéo theo hai chiều:

P	Q	$P \leftrightarrow Q$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Phép tính mệnh đề

Ví dụ

- $2 = 4$ *khi và chỉ khi* $2 + 1 = 0$.
- 6 *chia hết cho* 3 *khi và chỉ khi* 5 là số nguyên tố.
- Paris là thủ đô của nước Pháp *khi và chỉ khi* Quy Nhơn là thủ đô của Việt Nam.

Dạng mệnh đề

Định nghĩa

Dạng mệnh đề là một biểu thức được xây dựng từ:

- Các mệnh đề (các hằng mệnh đề).
- Các biến mệnh đề $p, q, \dots$ tức là các biến lấy giá trị là các mệnh đề nào đó.
- Các phép toán $\neg, \wedge, \vee, \underline{\vee}, \rightarrow, \leftrightarrow$ và dấu đóng mở ngoặc $"()"$.

Ví dụ

$E(p, q, r) = (p \wedge q) \vee ((\neg r \rightarrow P))$ là một dạng mệnh đề trong đó p, q, r là các biến mệnh đề còn P là một hằng mệnh đề.

Dạng mệnh đề

Định nghĩa

Bảng chân trị của dạng mệnh đề $E(p, q, r)$ là bảng ghi tất cả các trường hợp chân trị có thể xảy ra đối với dạng mệnh đề E theo chân trị của các biến mệnh đề p, q, r . Nếu có n biến, bảng này sẽ có 2^n dòng, chưa kể dòng tiêu đề.

Ví dụ

Lập bảng chân trị của những dạng mệnh đề sau:

$$E(p, q) = \neg(p \wedge q) \wedge p$$

$$E(p, q, r) = (p \vee q) \wedge r$$

Dạng mệnh đề

Ví dụ

Ta xây dựng bảng chân trị của dạng mệnh đề
 $E(p, q, r) = p \vee (q \wedge r)$ theo các biến mệnh đề p, q, r .

p	q	r	$q \wedge r$	$p \vee (q \wedge r)$
0	0	0	0	0
0	0	1	0	0
0	1	0	0	0
0	1	1	1	1
1	0	0	0	1
1	0	1	0	1
1	1	0	0	1
1	1	1	1	1

Dạng mệnh đề

Định nghĩa

Hai dạng mệnh đề E và F được nói là **tương đương logic** nếu chúng có cùng bảng chân trị. Khi ấy ta viết $E \Leftrightarrow F$.

Ví dụ

Xây dựng bảng chân trị của hai dạng mệnh đề $p \rightarrow q$ và $\neg p \vee q$. Hai dạng mệnh đề $p \rightarrow q$ và $\neg p \vee q$ có cùng bảng chân trị. Ta nói chúng tương đương logic.

p	q	$\neg p$	$p \rightarrow q$	$\neg p \vee q$
0	0	1	1	1
0	1	1	1	1
1	0	0	0	0
1	1	0	1	1

Dạng mệnh đề

Dạng mệnh đề được gọi là **hằng đúng** nếu nó luôn lấy giá trị 1.
Dạng mệnh đề được gọi là **hằng sai** (hay mâu thuẫn) nếu nó luôn lấy giá trị 0.

Định lý

Hai dạng mệnh đề E và F tương đương với nhau khi và chỉ khi $E \leftrightarrow F$ là hằng đúng.

Định nghĩa

F được gọi là **hệ quả logic** của E nếu $E \rightarrow F$ là hằng đúng.

Dạng mệnh đề

Trong phép tính mệnh đề người ta không phân biệt những mệnh đề tương đương logic với nhau. Do đó đối với những dạng mệnh đề có công thức phức tạp, ta thường biến đổi để nó tương đương với những mệnh đề đơn giản hơn. Để thực hiện các phép biến đổi ta sử dụng quy tắc thay thế và quy luật logic.

Dạng mệnh đề

Quy tắc thay thế: Trong dạng mệnh đề E , nếu ta thay thế biểu thức con F bởi một dạng mệnh đề tương đương logic thì dạng mệnh đề thu được vẫn còn tương đương logic với E .

Ví dụ

$$\neg(p \wedge q) \vee r \Leftrightarrow (\neg p \vee \neg q) \vee r$$

Dạng mệnh đề

Các luật logic

- Phủ định của phủ định:

$$\neg\neg p \Leftrightarrow p$$

- Luật De Morgan:

$$\neg(p \wedge q) \Leftrightarrow \neg p \vee \neg q$$

$$\neg(p \vee q) \Leftrightarrow \neg p \wedge \neg q$$

Dạng mệnh đề

- Luật giao hoán:

$$p \wedge q \Leftrightarrow q \wedge p$$

$$p \vee q \Leftrightarrow q \vee p$$

- Luật kết hợp:

$$p \wedge (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \wedge r$$

$$p \vee (q \vee r) \Leftrightarrow (p \vee q) \vee r$$

Dạng mệnh đề

- Luật phân bố:

$$p \wedge (q \vee r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$$

$$p \vee (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)$$

- Luật lũy đẳng:

$$p \wedge p \Leftrightarrow p$$

$$p \vee p \Leftrightarrow p$$

Dạng mệnh đề

- Luật trung hòa:

$$p \wedge 1 \Leftrightarrow p$$

$$p \vee 0 \Leftrightarrow p$$

- Luật về phần tử bù:

$$p \wedge \neg p \Leftrightarrow 0$$

$$p \vee \neg p \Leftrightarrow 1$$

Dạng mệnh đề

- Luật thống trị:

$$p \wedge 0 \Leftrightarrow 0$$

$$p \vee 1 \Leftrightarrow 1$$

- Luật hấp thụ:

$$p \wedge (p \vee q) \Leftrightarrow p$$

$$p \vee (p \wedge q) \Leftrightarrow p$$

- Luật về phép kéo theo:

$$p \rightarrow q \Leftrightarrow \neg p \vee q \Leftrightarrow \neg q \rightarrow \neg p$$

Vị từ và lượng từ

Định nghĩa

Một **vị từ** là một khẳng định $p(x, y, \dots)$ trong đó có chứa một số biến $x, y, \dots$ lấy giá trị trong những tập hợp cho trước $A, B, \dots$ sao cho:

- bản thân $p(x, y, \dots)$ không phải là mệnh đề
- nếu thay $x, y, \dots$ bằng những phần tử cố định nhưng tùy ý $a \in A, b \in B, \dots$ ta sẽ được một mệnh đề $p(a, b, \dots)$, nghĩa là chân trị của nó hoàn toàn xác định. Các biến $x, y, \dots$ được gọi là biến tự do của vị từ.

Vị từ và lượng từ

Ví dụ

- $p(n) = "n \text{ là một số nguyên tố}"$ là một vị từ theo một biến tự do $n \in \mathbb{N}$, với $n = 1, 2, 11$ ta được các mệnh đề đúng $p(1), p(2), p(11)$, còn với $n = 4, 6, 15$ ta được các mệnh đề sai $p(4), p(6), p(15)$.
- $q(x, y) = "y + 2, x - y, x + 2y \text{ là số chẵn}"$ là một vị từ với 2 biến tự do $x, y \in \mathbb{Z}$, chẳng hạn $q(4, 2)$ là một mệnh đề đúng trong khi $q(5, 2), q(4, 7)$ là những mệnh đề sai.

Vị từ và lượng từ

Các phép toán trên vị từ: Cho các vị từ $p(x), q(x)$ theo một biến $x \in A$. Khi ấy, ta cũng có các phép toán tương ứng như trên mệnh đề:

- Phủ định: $\neg p(x)$.
- Phép nối liền: $p(x) \wedge q(x)$.
- Phép nối rời: $p(x) \vee q(x)$.
- Phép kéo theo: $p(x) \rightarrow q(x)$.
- Phép kéo theo hai chiều: $p(x) \leftrightarrow q(x)$.

Vị từ và lượng từ

Giả sử $p(x)$ là một vị từ theo biến $x \in A$. Khi ấy có 3 trường hợp có thể xảy ra:

- khi thay x bởi một phần tử a tùy ý trong A , ta được mệnh đề đúng $p(a)$.
- với một số giá trị $a \in A$ thì $p(a)$ là mệnh đề đúng, một số giá trị $b \in A$ thì $p(b)$ là mệnh đề sai.
- khi thay x bởi phần tử a tùy ý trong A , ta được mệnh đề sai $p(a)$.

Vị từ và lượng từ

Định nghĩa

Các mệnh đề " $\forall x \in A, p(x)$ " và " $\exists x \in A, p(x)$ " được gọi là **lượng từ hóa** của vị từ $p(x)$ bởi **lượng từ phổ dụng** (" $\forall$ ") và **lượng từ tồn tại** (" $\exists$ ").

Mệnh đề " $\forall x \in A, p(x)$ " đúng khi và chỉ khi $p(a)$ đúng với mọi giá trị $a \in A$.

Mệnh đề " $\exists x \in A, p(x)$ " đúng khi và chỉ khi có ít nhất một giá trị $x = a_0$ nào đó sao cho mệnh đề $p(a_0)$ đúng.

Vị từ và lượng từ

Ví dụ

Các mệnh đề sau đúng hay sai

- $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 + 3x + 1 \leq 0$
- $\exists x \in \mathbb{R}, x^2 + 3x + 1 \leq 0$
- $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 + 1 \geq 2x$
- $\exists x \in \mathbb{R}, x^2 + 1 < 0$

Vị từ và lượng từ

Định nghĩa

Cho $p(x, y)$ là một vị từ theo hai biến x, y xác định trên $A \times B$.
Ta định nghĩa các **mệnh đề lượng từ hóa** của $p(x, y)$ như sau:

$$"\forall x \in A, \forall y \in B, p(x, y)" = "\forall x \in A, (\forall y \in B, p(x, y))"$$

$$"\forall x \in A, \exists y \in B, p(x, y)" = "\forall x \in A, (\exists y \in B, p(x, y))"$$

$$"\exists x \in A, \forall y \in B, p(x, y)" = "\exists x \in A, (\forall y \in B, p(x, y))"$$

$$"\exists x \in A, \exists y \in B, p(x, y)" = "\exists x \in A, (\exists y \in B, p(x, y))"$$

Vị từ và lượng từ

Ví dụ

- *Mệnh đề " $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, x + 2y < 1$ " đúng hay sai?
Mệnh đề sai vì tồn tại $x_0 = 0, y_0 = 1 \in \mathbb{R}$ mà $x_0 + 2y_0 \geq 1$.*
- *Mệnh đề " $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, x + 2y < 1$ " đúng hay sai?
Mệnh đề đúng vì với mỗi $x = a \in \mathbb{R}$, tồn tại $y_a \in \mathbb{R}$ như
sau $y_a = \frac{-a}{2}$, sao cho $a + y_a < 1$.*

Vị từ và lượng từ

Ví dụ

- Mệnh đề " $\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, x + 2y < 1$ " đúng hay sai?
Mệnh đề sai vì không thể có $x = a \in \mathbb{R}$ để bất đẳng thức $a + 2y < 1$ được thỏa với mọi $y \in \mathbb{R}$ (chẳng hạn, $y = \frac{-a}{2} + 2$ không thể thỏa bất đẳng thức này.)
- Mệnh đề $\exists x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, x + 2y < 1$ đúng hay sai? Mệnh đề đúng vì tồn tại $x_0 = 0, y_0 = 0 \in \mathbb{R}$ thỏa $x_0 + 2y_0 < 1$.

Vị từ và lượng từ

Định lý

*Cho $p(x, y)$ là một vị từ theo hai biến x, y xác định trên $A \times B$.
Khi đó:*

- 1) " $\forall x \in A, \forall y \in B, p(x, y)$ " $\Leftrightarrow$ " $\forall y \in B, \forall x \in A, p(x, y)$ "
- 2) " $\exists x \in A, \exists y \in B, p(x, y)$ " $\Leftrightarrow$ " $\exists y \in B, \exists x \in A, p(x, y)$ "
- 3) " $\exists x \in A, \forall y \in B, p(x, y)$ " $\Rightarrow$ " $\forall y \in B, \exists x \in A, p(x, y)$ "

Chiều đảo của 3) nói chung không đúng.

Vị từ và lượng từ

Định lý

Phủ định của mệnh đề lượng từ hóa vị từ $p(x, y, \dots)$ có được bằng cách thay $\forall$ thành $\exists$, thay $\exists$ thành $\forall$ và vị từ $p(x, y, \dots)$ thành $\neg p(x, y, \dots)$.

Với vị từ theo 1 biến ta có:

$$\overline{\forall x \in A, p(x)} \Leftrightarrow \exists x \in A, \overline{p(x)}$$

$$\overline{\exists x \in A, p(x)} \Leftrightarrow \forall x \in A, \overline{p(x)}$$

Vị từ và lượng từ

Với vị từ theo 2 biến.

$$\overline{\forall x \in A, \forall y \in B, p(x, y)} \Leftrightarrow \exists x \in A, \exists y \in B, \overline{p(x, y)}$$

$$\overline{\forall x \in A, \exists y \in B, p(x, y)} \Leftrightarrow \exists x \in A, \forall y \in B, \overline{p(x, y)}$$

$$\overline{\exists x \in A, \forall y \in B, p(x, y)} \Leftrightarrow \forall x \in A, \exists y \in B, \overline{p(x, y)}$$

$$\overline{\exists x \in A, \exists y \in B, p(x, y)} \Leftrightarrow \forall x \in A, \forall y \in B, \overline{p(x, y)}$$

Vị từ và lượng từ

Quy tắc đặc biệt hóa phổ dụng: Nếu một mệnh đề đúng có dạng lượng từ hóa trong đó một biến $x \in A$ bị buộc bởi lượng từ phổ dụng $\forall$, khi ấy nếu thay thế x bởi $a \in A$ ta sẽ được một mệnh đề đúng.

Ví dụ

"Mọi người đều chết".

"Socrate là người".

Vậy "Socrate cũng chết".

Quy tắc suy diễn

Quy tắc suy diễn

Trong một chứng minh toán học, xuất phát từ một số khẳng định đúng $p_1, p_2, \dots, p_n$ gọi là **tiền đề**, ta áp dụng các **quy tắc suy diễn** để suy ra chân lý của một khẳng định q mà ta gọi là **kết luận**. Nói cách khác, các quy tắc suy diễn được áp dụng để suy ra q là hệ quả logic của $p_1 \vee p_2 \vee \dots \vee p_n$, hay nói cách khác dạng mệnh đề

$$(p_1 \vee p_2 \vee \dots \vee p_n) \rightarrow q$$

là một hằng đúng, trong đó $p_1, p_2, \dots, p_n, q$ là các dạng mệnh đề theo một số biến logic nào đó.

Quy tắc suy diễn

Các quy tắc suy diễn

Quy tắc khẳng định (Modus Ponens)

Quy tắc này được thể hiện bằng hằng đúng:

$$[(p \rightarrow q) \wedge p] \rightarrow q$$

hoặc dưới dạng sơ đồ

$$\frac{\begin{array}{l} p \rightarrow q \\ p \end{array}}{\therefore q}$$

Quy tắc suy diễn

Ví dụ

*Nếu Minh học chăm thì Minh đậu môn Toán rời rạc.
mà Minh học chăm.*

Suy ra *Minh đậu môn Toán rời rạc.*

Ví dụ

*Nếu trời mưa thì đường trơn.
Mà hôm nay trời mưa.*

Suy ra, *hôm nay đường trơn.*

Quy tắc suy diễn

Quy tắc phủ định (Modus Tollens)

Phương pháp này thể hiện bởi hằng đúng

$$[(p \rightarrow q) \wedge \neg q] \rightarrow \neg p$$

hay dưới dạng sơ đồ

$$\frac{\begin{array}{c} p \rightarrow q \\ \neg q \end{array}}{\therefore \neg p}$$

Quy tắc suy diễn

Ví dụ

*Nếu Minh học chăm chỉ thì Minh đậu môn Toán rời rạc.
Minh rớt môn Toán rời rạc.
Suy ra, Minh không học chăm chỉ.*

Quy tắc suy diễn

Quy tắc tam đoạn luận

Quy tắc này được thể hiện bởi hằng đúng:

$$[(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r)] \rightarrow (p \rightarrow r)$$

hay dưới dạng sơ đồ

$$\frac{\begin{array}{l} p \rightarrow q \\ q \rightarrow r \end{array}}{\therefore p \rightarrow r}$$

Quy tắc suy diễn

Ví dụ

Minh đi chơi thì Minh không học Toán rời rạc.

Minh không học Toán rời rạc thì Minh trượt Toán rời rạc.

Suy ra, nếu Minh đi chơi thì Minh trượt Toán rời rạc.

Ví dụ

Nếu trời mưa thì đường ướt.

Nếu đường ướt thì đường trơn.

Nếu trời mưa thì đường trơn.

Quy tắc suy diễn

Quy tắc tam đoạn luận rời

Quy tắc này được thể hiện bằng hằng đúng:

$$[(p \vee q) \wedge \neg q] \rightarrow p$$

hoặc dưới dạng sơ đồ

$$\frac{p \vee q \quad \neg q}{\therefore p}$$

Ý nghĩa của quy tắc: nếu một trong hai trường hợp có thể xảy ra, chúng ta biết có một trường hợp không xảy ra thì chắc chắn trường hợp còn lại sẽ xảy ra.

Quy tắc suy diễn

Ví dụ

Chủ nhật, Minh thường đá bóng hoặc đi về quê.

Chủ nhật này, Minh không về quê.

***Suy ra**, chủ nhật này, Minh đi đá bóng.*

Quy tắc suy diễn

Quy tắc nối liền:

Quy tắc này được thể hiện bằng hằng đúng:

$$(p \wedge q) \rightarrow (p \wedge q)$$

hoặc dưới dạng sơ đồ

$$\frac{p}{q} \therefore p \wedge q$$

Quy tắc suy diễn

Quy tắc đơn giản

Quy tắc này thể hiện bằng hằng đúng:

$$(p \wedge q) \rightarrow p$$

hoặc dưới dạng sơ đồ

$$p \wedge q$$

$$\frac{}{\therefore p}$$

Quy tắc suy diễn

Quy tắc mâu thuẫn (Chứng minh bằng phản chứng)
Ta có tương đương logic

$$[(p_1 \wedge p_2 \wedge \dots \wedge p_n) \rightarrow q] \Leftrightarrow [(p_1 \wedge p_2 \wedge \dots \wedge p_n \wedge \neg q) \rightarrow 0]$$

Để chứng minh vế trái là một hằng đúng, ta chứng minh nếu thêm phủ định của q vào các tiền đề thì được một mâu thuẫn.

Quy tắc suy diễn

Quy tắc chứng minh theo trường hợp Dựa trên hằng đúng

$$[(p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow r)] \rightarrow [(p \vee q) \rightarrow r]$$

Ý nghĩa: Nếu p suy ra r và q suy ra r thì p hay q cũng có thể suy ra r .

Quy tắc suy diễn

Để chứng minh một phép suy luận là sai hay

$$p_1 \wedge p_2 \wedge \cdots \wedge p_n \rightarrow q$$

không là một hằng đúng. Ta chỉ cần chỉ ra một phản ví dụ.

Quy nạp yếu

Phương pháp:

Khi chứng minh một khẳng định nào đó đúng với mọi số nguyên dương m bằng phương pháp quy nạp yếu, ta sẽ chứng minh theo các bước sau:

- Chứng minh khẳng định đúng cho trường hợp m nhận các giá trị nhỏ nhất, (thường là $0, 1, 2 \dots$).
- Giả sử khẳng định đúng với $m = n$. Ta chứng minh khẳng định đúng với $m = n + 1$.

Ví dụ

Với mọi số nguyên dương m , chứng minh rằng

$$1^2 + 2^2 + \dots + m^2 = \frac{m(m+1)(2m+1)}{6}.$$

Ví dụ

Cho $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Tính A^n , với n là một số nguyên dương nào đó.

Ví dụ

Cho $a_0 = 0$, và $a_{n+1} = 3a_n + 1$ với mọi số nguyên dương n .
Tìm một công thức cho a_m .

HD: Ta thử tính những giá trị đầu tiên của dãy số trên:
1, 4, 13, 40, 121, Có thể đoán được dạng của dãy số trên là

$$a_m = (3^m - 1)/2.$$

Ta sẽ chứng minh khẳng định này bằng quy nạp. Dễ dàng thấy rằng kết luận đúng với trường hợp $m = 0, 1$. Giả sử khẳng định đúng với $m = n$. Ta chứng minh khẳng định đúng với $m = n + 1$.

Theo giả thiết quy nạp ta có

$$a_{n+1} = 3a_n + 1 = \frac{3 \cdot (3^n - 1)}{2} + 1 = \frac{3^{n+1} - 1}{2}.$$

Ví dụ

Với mọi số nguyên dương n , chứng minh rằng số các tập con của tập $[n]$ là 2^n .

HD: Với $n = 1$, ta thấy tập $[1]$ có hai (2^1) tập con là $\{1\}, \emptyset$. Giả sử khẳng định đúng với $n = k$, ta chứng minh khẳng định đúng với $n = k + 1$. Ta chia các tập con của $[n + 1]$ ra thành hai nhóm. Nhóm một chứa phần tử $n + 1$ và nhóm hai không chứa phần tử $n + 1$. Ta dễ dàng thấy số phần tử của nhóm hai là 2^n , chính là số tập con của $[n]$. Nhóm chứa $n + 1$ gồm tập con của $[n]$ và $n + 1$. Do đó số phần tử của nhóm này cũng là 2^n . Suy ra số tập con của $[n + 1]$ là $2^n + 2^n = 2^{n+1}$.

Quy nạp mạnh

Phương pháp

Khi chứng minh một khẳng định nào đó đúng với mọi số nguyên dương m bằng phương pháp quy nạp mạnh, ta sẽ chứng minh theo các bước sau:

- Chứng minh khẳng định đúng cho trường hợp m nhận các giá trị nhỏ nhất, (thường là $0, 1, 2 \dots$).
- Giả sử khẳng định đúng với mọi số nguyên m nhỏ hơn hay bằng n . Ta chứng minh khẳng định đúng với $m = n + 1$.

Ví dụ

Cho dãy số $\{a_n\}$ được định nghĩa như sau $a_0 = 0$, và $a_{n+1} = a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_n + n + 1$ với $n \geq 1$. Chứng minh rằng với mọi số nguyên n , ta có $a_n = 2^n - 1$.

HD: Với $n = 0$, ta thấy khẳng định đúng. Giả sử khẳng định đúng với mọi số nguyên m nhỏ hơn hay bằng n , ta chứng minh khẳng định đúng với $m = n + 1$. Bởi quan hệ đệ quy ta có $a_{n+1} = a_0 + a_1 + \cdots + a_n + n + 1 = (2^0 - 1) + (2^1 - 1) + \cdots + (2^n - 1) + n + 1 = 1 + 2 + 4 + \cdots + 2^n = 2^{n+1} - 1$.

Ví dụ

Cho hàm $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ thỏa mãn điều kiện

$f(m + n) = f(m) + f(n)$ với mọi m và n . Chứng minh rằng tồn tại một hằng số c sao cho $f(n) = cn$.

HD: Với $m = 0$, ta có $f(n + 0) = f(n) + f(0)$, suy ra $f(0) = 0$.

Giả sử khẳng định đúng với mọi số nguyên dương nhỏ hơn hay bằng n . Nghĩa là tồn tại một hằng số c sao cho $f(k) = ck$ với $k \leq n$. Ta có

$$f(n + 1) = f(n) + f(1) = cn + c = c(n + 1).$$