

Bài giảng môn học Toán Rời Rạc

Nguyễn Anh Thị

Trường Đại học Khoa học Tự nhiên, Tp Hồ Chí Minh

2017

Chương 2

Tập hợp và ánh xạ

Tập hợp

Định nghĩa

Tập hợp được dùng để chỉ một nhóm các đối tượng nào đó mà chúng ta đang quan tâm xem xét, và nhóm này phải được xác định tốt.

Ví dụ

- Tập hợp sinh viên của một trường đại học.
- Tập hợp các số nguyên tố.

Tập hợp

Các đối tượng trong tập hợp được gọi là **phần tử** hay **thành viên** của tập hợp. Khi đối tượng là một phần tử của tập hợp, ta nói đối tượng **thuộc về**, (ký hiệu $\in$), tập hợp. Khi đối tượng không phải là một phần tử của tập hợp, ta nói đối tượng **không thuộc** về tập hợp.

Tập hợp

Định nghĩa

Số phần tử của một tập hợp A được gọi là lực lượng của tập hợp, ký hiệu $|A|$.

Nếu A có hữu hạn phần tử, ta nói A là tập hữu hạn. Ngược lại, nếu A có vô hạn phần tử, ta nói A là tập vô hạn.

Ví dụ

- $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{R}$ là các tập hợp vô hạn.
- $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ là tập hợp hữu hạn có số phần tử là $|A| = 6$.

Tập hợp

Định nghĩa

Tập hợp A và B được xem là **bằng nhau** khi chúng có cùng các phần tử, tức là mỗi phần tử thuộc A đều là phần tử thuộc B và ngược lại. Ta viết $A = B$.

Tập hợp không có phần tử nào được gọi là tập hợp **rỗng**, và được ký hiệu là $\emptyset$.

Tập hợp

Cách xác định tập hợp

- Cách liệt kê

Ta liệt kê tất cả các phần tử của tập hợp giữa hai dấu ngoặc "{" và "}".

Ví dụ

$$A = \{1, 2, 3, 4\}$$

- Cách nêu đặc trưng của các phần tử.

Ví dụ

$$B = \{n \in \mathbb{N} | n \text{ chia hết cho } 3\}.$$

Tập hợp

Định nghĩa

Cho A và B là hai tập hợp mà các phần tử của chúng đều thuộc một tập hợp lớn U (hay còn gọi là tập vũ trụ). Ta nói tập A **bao hàm trong** (hay **chứa trong**) tập B nếu mỗi phần tử của tập hợp A đều thuộc tập hợp B . Ta cũng nói rằng B bao hàm A (hay B chứa A), và viết là: $A \subset B$ (hay $B \supset A$).
Khi $A \subset B$ chúng ta nói A là một tập hợp con của B .

Ví dụ

- $\{0, 1, 2\} \subset \{n \in \mathbb{N} : n < 10\}$
- $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$

Tập hợp

Định nghĩa

Cho X là một tập hợp. Nhóm tất cả các tập hợp con của X được ký hiệu là $P(X)$, là một tập hợp mà mỗi phần tử của nó là một tập hợp con của X .

Tính chất

- $\emptyset \subset A$ và $A \subset A$, với mọi tập hợp A .
- $(A \subset B) \wedge (B \subset A) \Rightarrow (A = B)$.
- $(A \subset B) \wedge (B \subset C) \Rightarrow (A \subset C)$.
- $X \subset Y \Rightarrow P(X) \subset P(Y)$.
- Nếu tập hợp X có n phần tử thì tập hợp $P(X)$ có 2^n phần tử.

Tập hợp

Các phép toán tập hợp

- Giao của hai tập hợp A và B , ký hiệu bởi $A \cap B$, là tập hợp gồm tất cả các phần tử vừa thuộc tập A , vừa thuộc tập B .

$$A \cap B = \{x : (x \in A) \wedge (x \in B)\}$$

- Hội của hai tập hợp A và B , ký hiệu bởi $A \cup B$, là tập hợp gồm tất cả các phần tử sao cho nó thuộc tập A hay thuộc tập B .

$$A \cup B = \{x : (x \in A) \vee (x \in B)\}$$

- Hiệu của hai tập hợp A và B , ký hiệu bởi $A \setminus B$ (hay $A - B$), là tập hợp gồm tất cả các phần tử sao cho nó thuộc tập A và không thuộc tập B .
- Phần bù của tập A (trong U), ký hiệu bởi A^c , là tập hợp tất cả các phần tử của U mà không thuộc A . Nói cách khác, $A^c = U - A$.

Các tính chất của phép toán

- Tính giao hoán: $A \cap B = B \cap A, A \cup B = B \cup A$
- Tính chất kết hợp: $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C,$
 $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$
- Tính phân bố: $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C),$
 $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
- Luật De Morgan: $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c, (A \cup B)^c = A^c \cap B^c$
- Phần tử trung hòa: $A \cup \emptyset = A, A \cap U = A$
- Phần bù: $A \cup A^c = U, A \cap A^c = \emptyset$
- Tính thống trị: $A \cup U = U, A \cap \emptyset = \emptyset$

Tập hợp

Định nghĩa

Tích Descartes của hai tập hợp A và B , ký hiệu là $A \times B$, là tập hợp gồm tất cả các cặp (a, b) sao cho $a \in A$ và $b \in B$. Tức là $A \times B = \{(a, b) : (a \in A) \wedge (b \in B)\}$.

Trong trường hợp $B = A$, ta ký hiệu $A \times B$ là A^2 .

Định nghĩa

Tích Descartes của n tập hợp $A_1, A_2, \dots, A_n$, ký hiệu là $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$ là tập hợp gồm tất cả các bộ n phần tử $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ với $a_i \in A_i$ ($\forall i = 1, \dots, n, n > 1$).

Nếu $A_1 = A_2 = \dots = A_n = A$ thì tập hợp tích $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$ sẽ được viết là A^n .

Định nghĩa

Cho hai tập hợp $X, Y \neq \emptyset$. **Ảnh xạ** giữa hai tập hợp X và Y là một quy tắc sao cho mỗi $x \in X$ tồn tại duy nhất một $y \in Y$ để $f(x) = y$. Ta viết

$$\begin{aligned} f: X &\longrightarrow Y \\ x &\longmapsto y = f(x) \end{aligned}$$

Nghĩa là với mỗi $x \in X$, tồn tại duy nhất $y \in Y$ sao cho $y = f(x)$.

Ánh xạ

Ví dụ

a. *Ánh xạ đồng nhất trên X*

$$\begin{aligned} id_X : X &\longrightarrow X \\ x &\longmapsto x. \end{aligned}$$

b. Cho $A \subset X$, ta có *ánh xạ bao hàm* (ánh xạ nhúng) từ A vào X ,

$$\begin{aligned} i_A : A &\longrightarrow X \\ a &\longmapsto a. \end{aligned}$$

Ánh xạ

Định nghĩa

Hai ánh xạ f và g từ X vào Y được gọi là **bằng nhau** nếu
 $\forall x \in X, f(x) = g(x)$.

Ví dụ

Xét ánh xạ $f(x) = (x - 1)(x + 1)$ và $g(x) = x^2 - 1$

Định nghĩa

Cho $f: X \longrightarrow Y$ và $g: Y \longrightarrow Z$, lúc đó $g \circ f: X \longrightarrow Z$ là **ánh xạ hợp** của g và f , được xác định bởi $g \circ f(x) = g(f(x))$.

Định nghĩa

Cho $f: X \longrightarrow Y$,

- a. Cho $A \subset X$, **ảnh** của A bởi f là tập

$$f(A) = \{f(x) | x \in A\} \subset Y;$$

- b. Cho $V \subset Y$, **ảnh ngược** của V bởi f là tập

$$f^{-1}(V) = \{x \in X | f(x) \in V\} \subset X.$$

- c. Ta ký hiệu $\text{Im}(f) = f(X)$, gọi là **ảnh của f** .

Định nghĩa

Cho $f: X \rightarrow Y$ là ánh xạ từ X và Y .

- f được gọi là một **đơn ánh** khi và chỉ khi $\forall x_1, x_2 \in X, f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$. Hay nói cách khác, f được gọi là một **đơn ánh** khi và chỉ khi $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$
- f được gọi là một **toàn ánh** khi và chỉ khi $\forall y \in Y, \exists x \in X : f(x) = y$. Hay nói cách khác, f được gọi là một **toàn ánh** khi và chỉ khi $\text{Im}(f) = Y$.
- f được gọi là một **song ánh** khi và chỉ khi f vừa là đơn ánh vừa là toàn ánh. Hay nói cách khác, f được gọi là một **song ánh** khi và chỉ khi $\forall y \in Y, \exists! x \in X : f(x) = y$.

Ví dụ

- Cho

$$\begin{aligned} f: \mathbb{N} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto x^2 + 1 \end{aligned}$$

khi đó f là một đơn ánh.

- Cho

$$\begin{aligned} g: \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto x^3 + 1 \end{aligned}$$

khi đó f là một toàn ánh.

- Cho

$$\begin{aligned} g: \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto x^3 + 1. \end{aligned}$$

khi đó f là một song ánh.

Định nghĩa

Khi f là một song ánh từ X vào Y , quy tắc với mỗi phần tử $y \in Y$, ta xác định được duy nhất một $x \in X$ (thỏa $f(x) = y$) là một ánh xạ từ Y vào X , gọi là **ánh xạ ngược** của f , ký hiệu f^{-1} .

Ví dụ

Cho

$$\begin{array}{ccc} f: & [0; 2] & \longrightarrow & [0; 4] \\ & x & \longmapsto & x^2 \end{array}$$

thì

$$\begin{array}{ccc} f^{-1}: & [0; 4] & \longrightarrow & [0; 2] \\ & y & \longmapsto & \sqrt{y} \end{array}$$