

Bài giảng môn học Toán Rời Rạc

Nguyễn Anh Thi

Trường Đại học Khoa học Tự nhiên, Tp Hồ Chí Minh

2017

Chương 3

Phép đếm

Nội dung

- 1 Các nguyên lý
- 2 Giải tích tổ hợp
- 3 Hoán vị lặp, tổ hợp lặp

Các nguyên lý

Nguyên lý cộng: Giả sử để làm công việc A ta có thể chọn một trong hai biện pháp khác nhau (theo nghĩa là cách thực hiện biện pháp thứ nhất luôn luôn khác cách thực hiện biện pháp thứ hai). Nếu biện pháp thứ nhất có m cách, biện pháp thứ hai có n cách, thì ta có số cách làm công việc A là $m + n$.

Tổng quát, giả sử để làm công việc A ta có thể chọn một trong k biện pháp khác nhau, mỗi biện pháp có m_i cách làm với $i = 1, 2, \dots, k$, khi đó số cách làm công việc A là $m_1 + m_2 + \dots + m_k$.

Ví dụ

Ta chọn một viên bi bất kỳ từ hai hộp A và B . Biết rằng hộp A chứa 5 viên bi màu đỏ, hộp B chứa 3 viên bi màu xanh. Vậy số cách chọn là $5 + 3 = 8$.

Các nguyên lý

Nguyên lý nhân: Giả sử chúng ta phải thực hiện một công việc bao gồm hai công việc kế tiếp nhau. Để thực hiện công việc thứ nhất chúng ta có m cách, và ứng với mỗi cách chọn thực hiện công việc thứ nhất ta có n cách thực hiện công việc thứ hai. Vậy ta có số cách thực hiện công việc đó là $m.n$.

Tổng quát, Giả sử một công việc bao gồm k bước kế tiếp nhau, nếu mỗi bước ta có n_i cách làm với $i = 1, 2, \dots, k$. Vậy ta có $n_1.n_2.\dots.n_k$ cách để thực hiện công việc.

Ví dụ

Ta chọn hai viên bi màu khác nhau từ hai hộp A và B. Biết rằng hộp A chứa 5 viên bi màu đỏ, hộp B chứa 3 viên bi màu xanh. Vậy số cách chọn là $5.3 = 15$.

Các nguyên lý

Nguyên lý chuồng bồ câu (Derichlet) Gọi $[x]$ là số nguyên nhỏ nhất lớn hơn hay bằng x . Giả sử có n chim bồ câu trong k chuồng. Khi đó tồn tại ít nhất một chuồng chứa từ $\lceil n/k \rceil$ bồ câu trở lên.

Ví dụ

Trong nhóm có 367 người thì ít nhất có 2 người sinh cùng ngày.

Các nguyên lý

Nguyên lý bù trừ: Cho A và B là hai tập hữu hạn. Khi đó

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

Ví dụ

Trong lớp có 24 học sinh học tiếng Pháp, 26 học sinh học tiếng Anh, có 15 học sinh vừa học tiếng Anh, vừa học tiếng Pháp. Hỏi lớp có bao nhiêu học sinh?

Gọi A là tập hợp những học sinh học tiếng Pháp, B là tập hợp những học sinh học tiếng Anh. Khi đó số học sinh của lớp là $A \cup B = |A| + |B| - |A \cap B| = 24 + 26 - 15 = 35$.

Nguyên lý bù trừ: Cho A, B và C là các tập hữu hạn. Khi đó
 $|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |B \cap C| - |A \cap C| + |A \cap B \cap C|.$

Ví dụ

Ở một trường trung học có 14 học sinh chơi bóng đá, 17 học sinh chơi bóng rổ, 18 học sinh chơi bóng bầu dục. Trong đó có 4 học sinh chơi cả bóng đá và bóng rổ, 3 học sinh chơi cả bóng đá và bóng bầu dục, 5 học sinh chơi cả bóng rổ và bóng bầu dục, và có 1 học sinh chơi cả 3 môn. Hỏi có bao nhiêu học sinh chơi ít nhất một trong những môn thể thao trên?

Gọi A là tập hợp những học sinh chơi bóng đá, B là tập hợp những học sinh chơi bóng rổ, và C là tập hợp những học sinh chơi bóng bầu dục. Số học sinh chơi ít nhất một trong những môn thể thao trên là:

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C| = 14 + 17 + 18 - 4 - 3 - 5 + 1 = 38.$$

Giải tích tổ hợp

Định nghĩa

Cho tập hợp A có n phần tử. Mỗi cách sắp đặt có thứ tự n phần tử của A được gọi là một **hoán vị** có n phần tử. Số các hoán vị của n phần tử ký hiệu là P_n , và $P_n = n! = n.(n-1).(n-2)...2.1$, quy ước $0! = 1$.

Ví dụ

- Cho X là tập hợp có n phần tử thì số song ánh từ X vào X là $n!$
- Cho $A = \{a, b, c\}$. Khi đó A có các hoán vị sau: $abc, acb, bac, bca, cab, cba$.
- Cho $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, hỏi có bao nhiêu số tự nhiên gồm 5 chữ số khác nhau được tạo thành từ tập X ?

Giải tích tổ hợp

Định nghĩa

Cho A là tập hợp gồm n phần tử. Mỗi bộ gồm k phần tử ($1 \leq k \leq n$) sắp thứ tự của tập hợp A được gọi là một **chỉnh hợp chập k của n phần tử**. Số các chỉnh hợp chập k của n , ký hiệu là A_n^k . Ta có công thức $A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$

Ví dụ

Cho $X = \{a, b, c\}$. Khi đó X có các chỉnh hợp chập 2 của các phần tử của X là: ab, ac, bc, ba, ca, cb .

Ví dụ

Có bao nhiêu số tự nhiên gồm 3 chữ số khác nhau được tạo thành từ $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$?

Giải tích tổ hợp

Định nghĩa

Cho tập hợp A gồm n phần tử. Mỗi tập con gồm k phần tử của A được gọi là một tổ hợp chập k của n phần tử. Số các tổ hợp chập k của n phần tử được ký hiệu là C_n^k hay $\binom{n}{k}$. Ta có công thức

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Tính chất

$$C_n^{n-k} = C_n^k$$

$$C_n^k + C_n^{k-1} = C_{n+1}^k$$

Ví dụ

Cho $X = \{1, 2, 3, 4\}$. Tổ hợp chập 3 của 4 phần tử của X là $\{1, 2, 3\}, \{1, 2, 4\}, \{1, 3, 4\}, \{2, 3, 4\}$

Ví dụ

*Một lớp có 30 học sinh, hỏi có bao nhiêu cách chọn 10 bạn.
Số cách chọn là tổ hợp chập 10 của 30: C_{30}^{10} .*

Giải tích tổ hợp

Định lý

Với x, y là các biến thực, n là số nguyên không âm tùy ý, thì:

$$(x + y)^n = \sum_{i=0}^n C_n^i x^{n-i} y^i$$

Hoán vị lặp, tổ hợp lặp

Định nghĩa

Cho n đối tượng trong đó có n_i đối tượng loại i giống hệt nhau ($i = 1, 2, \dots, k; n_1 + n_2 + \dots + n_k = n$). Mỗi cách sắp xếp có thứ tự n đối tượng đã cho gọi là một **hoán vị lặp** của n .

Số hoán vị của n đối tượng, trong đó có n_1 đối tượng giống nhau thuộc loại 1, n_2 đối tượng giống nhau thuộc loại 2, ..., n_k đối tượng giống nhau thuộc loại k , là

$$\frac{n!}{n_1! n_2! \dots n_k!}$$

Hoán vị lặp, tổ hợp lặp

Ví dụ

Có bao nhiêu chuỗi ký tự khác nhau bằng cách sắp xếp các chữ cái của từ SUCCESS?

Trong từ SUCCESS có 3 chữ S, 1 chữ U, 2 chữ C, và 1 chữ E.
Do đó số chuỗi có được là

$$\frac{7!}{3!1!2!1!} = 420$$

Hoán vị lặp, tổ hợp lặp

Định nghĩa

Mỗi cách chọn ra k vật từ n loại vật khác nhau (trong đó mỗi loại vật có thể được chọn lại nhiều lần) được gọi là **tổ hợp lặp chập k của n** . Số các tổ hợp lặp chập k của n được ký hiệu là K_n^k .

$$K_n^k = C_{n+k-1}^k$$

Ví dụ

Có 3 loại nón A, B, C . An mua 2 cái nón. Hỏi An có bao nhiêu cách chọn?

Mỗi cách chọn là một tổ hợp lặp chập 2 của 3. Cụ thể AA, AB, BB, BC, CC, AC , $K_3^2 = C_{3+2-1}^2 = C_4^2 = 6$.