

**Bài giảng môn
học Toán Rời
Rạc**

**Nguyễn Anh
Thi**

Nội dung

Hệ thức đệ quy tuyến
tính với hệ số hằng

Nghiệm của hệ thức
đệ quy tuyến tính
thuần nhất

Nghiệm của hệ thức
đệ quy tuyến tính
không thuần nhất

Bài giảng môn học Toán Rời Rạc

Nguyễn Anh Thi

Trường Đại học Khoa học Tự nhiên, Tp Hồ Chí Minh

2017

Hệ thức đệ quy tuyến
tính với hệ số hằng

Nghiệm của hệ thức
đệ quy tuyến tính
thuần nhất

Nghiệm của hệ thức
đệ quy tuyến tính
không thuần nhất

Chương 4

Hệ thức đệ quy

Hệ thức đệ quy tuyến
tính với hệ số hằng

Nghiệm của hệ thức
đệ quy tuyến tính
thuần nhất

Nghiệm của hệ thức
đệ quy tuyến tính
không thuần nhất

Nội dung

Hệ thức đệ quy tuyến tính với hệ số hằng
Nghiệm của hệ thức đệ quy tuyến tính thuần nhất
Nghiệm của hệ thức đệ quy tuyến tính **không** thuần nhất

Hệ thức đệ quy tuyến tính với hệ số hằng

Định nghĩa

Một *hệ thức đệ quy tuyến tính cấp k với hệ số hằng* là một hệ thức có dạng

$$a_0x_n + a_1x_{n-1} + \cdots + a_kx_{n-k} = f_n$$

trong đó

- $a_0 \neq 0, a_1, a_2, \dots, a_k$ là các hệ số thực,
- $\{f_n\}$ là một dãy các số thực cho trước,
- $\{x_n\}$ là dãy ẩn nhận giá trị thực.

Trường hợp dãy $f_n = 0$ với mọi n thì hệ thức trên trở thành

$$a_0x_n + a_1x_{n-1} + \cdots + a_kx_{n-k} = 0(*)$$

và ta gọi $(*)$ là **hệ thức đệ quy tuyến tính thuần nhất cấp k với hệ số hằng**.

Ví dụ

- $2x_n + 3x_{n-1} + 5x_{n-2} = n^2 + 1$
- $x_{n+2} - x_{n+1} + x_n = 0$
- $x_n + x_{n-1} - 2x_{n-2} = 3^n(n^3 + 1)$

Định nghĩa

Mỗi dãy $\{x_n\}$ thỏa mãn hệ thức

$$a_0x_n + a_1x_{n-1} + \cdots + a_kx_{n-k} = f_n$$

được gọi là một **ng nghiệm** của hệ thức đó.

Ta thấy mỗi nghiệm $\{x_n\}$ của hệ thức trên được hoàn toàn xác định bởi k giá trị ban đầu $x_0, x_1, \dots, x_{k-1}$.

Họ dãy số $\{x_n = x_n(C_1, C_2, \dots, C_k)\}$ phụ thuộc vào k họ tham số $C_1, C_2, \dots, C_k$ được gọi là **ng nghiệm tổng quát** nếu mọi dãy của họ này đều là nghiệm.

Với k giá trị ban đầu $y_0, y_1, \dots, y_{k-1}$ tồn tại duy nhất các giá trị của k tham số $C_1, C_2, \dots, C_k$ sao cho nghiệm $\{x_n\}$ tương ứng thỏa

$$x_0 = y_0, x_1 = y_1, \dots, x_{k-1} = y_{k-1}$$

Khi đó nghiệm x_n tương ứng được gọi là nghiệm riêng ứng với điều kiện ban đầu.

Chú ý

Giải một hệ thức đệ quy là đi tìm nghiệm tổng quát của nó. Nếu hệ thức đệ quy có đi kèm điều kiện ban đầu, ta phải tìm nghiệm thỏa mãn điều kiện ban đầu đó.

Ví dụ

- $2x_n - 3x_{n-1} = 0$ có nghiệm tổng quát là $x_n = C(\frac{3}{2})^n$.
- $\begin{cases} x_n - 5x_{n-1} + 6x_{n-2} = 0; \\ x_0 = 4; \\ x_1 = 9. \end{cases}$ có nghiệm là $x_n = 3 \cdot 2^n + 3^n$.

Nghiem của hệ thức đệ quy tuyến tính thuần nhất

Nội dung

Hệ thức đệ quy tuyến
tính với hệ số hằng

Nghiem của hệ thức
đệ quy tuyến tính
thuần nhất

Nghiem của hệ thức
đệ quy tuyến tính
không thuần nhất

Định nghĩa

Xét hệ thức đệ quy tuyến tính thuần nhất

$$a_0x_n + a_1x_{n-1} + \cdots + a_kx_{n-k} = 0$$

Phương trình đặc trưng của hệ thức trên là phương trình bậc k định bởi

$$a_0\lambda^k + a_1\lambda^{k-1} + \cdots + a_k = 0.$$

- Với $k = 1$, phương trình đặc trưng trở thành $a_0\lambda + a_1 = 0$, và có nghiệm là $\lambda_0 = -\frac{a_1}{a_0}$. Khi đó hệ thức đệ quy có nghiệm tổng quát là $x_n = C.\lambda_0^n$.
- Với $k = 2$, phương trình đặc trưng trở thành $a_0\lambda^2 + a_1\lambda + a_2 = 0$.
 - Nếu phương trình đặc trưng có hai nghiệm thực phân biệt λ_1, λ_2 thì hệ thức đệ quy có nghiệm tổng quát là $x_n = C_1.\lambda_1^n + C_2.\lambda_2^n$.
 - Nếu phương trình đặc trưng có nghiệm kép thực λ_0 thì hệ thức đệ quy có nghiệm tổng quát là $x_n = (C_1 + nC_2).\lambda_0^n$.
 - Nếu phương trình đặc trưng có hai nghiệm phức liên hợp được viết dưới dạng $\lambda = r(\cos \varphi \pm i \sin \varphi)$ thì hệ thức đệ quy có nghiệm tổng quát là $x_n = r^n(A \cos n\varphi + B \sin n\varphi)$.

**Bài giảng môn
học Toán Rời
Rạc****Nguyễn Anh
Thị****Nội dung**Hệ thức đệ quy tuyến
tính với hệ số hằng**Nghiệm của hệ thức
đệ quy tuyến tính
thuần nhất**Nghiệm của hệ thức
đệ quy tuyến tính
không thuần nhất**Ví dụ**

$$\text{Giải hệ thức đệ quy } \begin{cases} x_n - 2x_{n-1} = 0 \\ x_0 = 5 \end{cases}$$

Ví dụ

Giải hệ thức đệ quy $\begin{cases} x_n - 2x_{n-1} = 0 \\ x_0 = 5 \end{cases}$

Nghiệm $x_n = 5 \cdot 2^n$.

Ví dụ

Tìm nghiệm của $\begin{cases} x_n = 5x_{n-1} - 6x_{n-2}; \\ x_0 = 4; \\ x_1 = 9. \end{cases}$

Ví dụ

Giải hệ thức đệ quy $\begin{cases} x_n - 2x_{n-1} = 0 \\ x_0 = 5 \end{cases}$

Nghiệm $x_n = 5.2^n$.

Ví dụ

Tìm nghiệm của $\begin{cases} x_n = 5x_{n-1} - 6x_{n-2}; \\ x_0 = 4; \\ x_1 = 9. \end{cases}$

Nghiệm $x_n = 3.2^n + 3^n$.

Bài giảng môn
học Toán Rời
RạcNguyễn Anh
Thị

Nội dung

Hệ thức đệ quy tuyến
tính với hệ số hằngNghịệm của hệ thức
đệ quy tuyến tính
thuần nhấtNghịệm của hệ thức
đệ quy tuyến tính
không thuần nhất

Ví dụ

$$\text{Tìm nghịệm của } \begin{cases} 4x_{n+1} - 12x_n + 9x_{n-1} = 0; \\ x_0 = 2; \\ x_1 = 9. \end{cases}$$

Ví dụ

Tìm nghiệm của
$$\begin{cases} 4x_{n+1} - 12x_n + 9x_{n-1} = 0; \\ x_0 = 2; \\ x_1 = 9. \end{cases}$$

Nghiệm $x_n = (2 + 4n) \left(\frac{3}{2}\right)^n$

Ví dụ

Tìm nghiệm của
$$\begin{cases} x_{n+2} - 2x_{n+1} + 4x_n = 0; \\ x_0 = 1; \\ x_1 = 4. \end{cases}$$

Ví dụ

$$\text{Tìm nghịệm của } \begin{cases} 4x_{n+1} - 12x_n + 9x_{n-1} = 0; \\ x_0 = 2; \\ x_1 = 9. \end{cases}$$

$$\text{Nghịệm } x_n = (2 + 4n) \left(\frac{3}{2}\right)^n$$

Ví dụ

$$\text{Tìm nghịệm của } \begin{cases} x_{n+2} - 2x_{n+1} + 4x_n = 0; \\ x_0 = 1; \\ x_1 = 4. \end{cases}$$

$$\text{Nghịệm } x_n = 2^n \left(\cos \frac{n\pi}{3} + \sqrt{3} \sin \frac{n\pi}{3} \right)$$

Nghiệm của hệ thức đệ quy tuyến tính **không** thuần nhất

Xét hệ thức đệ quy tuyến tính không thuần nhất

$$a_0x_n + a_1x_{n-1} + \cdots + a_kx_{n-k} = f_n \quad (1)$$

Hệ thức đệ quy tuyến tính thuần nhất tương ứng là

$$a_0x_n + a_1x_{n-1} + \cdots + a_kx_{n-k} = 0 \quad (2)$$

Phương trình đặc trưng của (2) là

$$a_0\lambda^k + a_1\lambda^{k-1} + \cdots + a_k = 0. \quad (*)$$

Khi đó **nghiệm tổng quát của (1) = nghiệm tổng quát của (2) +
 nghiệm riêng của (1)**

Nội dung

Hệ thức đệ quy tuyến
tính với hệ số hằngNghịệm của hệ thức
đệ quy tuyến tính
thuần nhấtNghịệm của hệ thức
đệ quy tuyến tính
không thuần nhất

Để tìm một nghịệm riêng của (1), ta xem xét hai dạng đặc biệt của vế phải f_n như sau:

- Dạng 1, $f_n = \beta^n P_r(n)$, trong đó $P_r(n)$ là một đa thức bậc r theo n , β là một hằng số.
- Dạng 2, $f_n = f_{n_1} + f_{n_2} + \cdots + f_{n_s}$, trong đó các $f_{n_1}, f_{n_2}, \dots, f_{n_s}$ thuộc dạng 1.

Dạng 1

Dạng 1, $f_n = \beta^n P_r(n)$, có ba trường hợp xảy ra:

- TH1: Nếu β không là nghiệm của phương trình đặc trưng (*) thì (1) có một nghiệm riêng dạng

$$x_n = \beta^n Q_r(n).$$

- TH2: Nếu β là nghiệm đơn của phương trình đặc trưng (*) thì (1) có một nghiệm riêng dạng

$$x_n = n\beta^n Q_r(n).$$

- TH3: Nếu β là nghiệm kép của phương trình đặc trưng (*) thì (1) có một nghiệm riêng dạng

$$x_n = n^2 \beta^n Q_r(n)$$

Chú ý

$Q_r(n) = A_r n^r + A_{r-1} n^{r-1} + \dots + A_0$ là đa thức có cùng bậc r với $P_r(n)$, trong đó $A_r, A_{r-1}, \dots, A_0$ là $r+1$ hệ số cần xác định. Để xác định các hệ số trên ta cần thế $x_n, x_{n-1}, \dots, x_{n-k}$ vào (1) và cho n nhận $r+1$ giá trị nguyên nào đó hoặc đồng nhất các hệ số tương ứng ở hai vế để được một hệ phương trình. Các hệ số trên là nghiệm của phương trình này.

Dạng 2

Dạng 2, $f_n = f_{n_1} + f_{n_2} + \dots + f_{n_s}$ Bằng cách như trên ta tìm được nghịệm riêng $x_{n_i} (1 \leq i \leq s)$
của hệ thức đệ quy

$$a_0 x_n + a_1 x_{n-1} + \dots + a_k x_{n-k} = f_{n_i}$$

Khi đó

$$x_n = x_{n_1} + x_{n_2} + \dots + x_{n_s}$$

là một nghịệm riêng của (1).

Ví dụ

Cho hệ thức đệ quy

$$x_n - 5x_{n-1} + 6x_{n-2} = f_n \quad (1)$$

Khi đó hệ thức đệ quy tuyến tính thuần nhất tương ứng là

$$x_n - 5x_{n-1} + 6x_{n-2} = 0 \quad (2)$$

Phương trình đặc trưng của (2) là

$$\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0 \quad (*)$$

có hai nghiệm thực là $\lambda_1 = 2$ và $\lambda_2 = 3$

Nội dung

Hệ thức đệ quy tuyến
 tính với hệ số hằng

Nghiệm của hệ thức
 đệ quy tuyến tính
 thuần nhất

Nghiệm của hệ thức
 đệ quy tuyến tính
 không thuần nhất

- Nếu $f_n = 2n + 1$ thì (1) có nghiệm riêng dạng $x_n^{(P)} = An + B$
- Nếu $f_n = 5^n(3n^2 + 2n + 1)$ thì $x_n^{(P)} = 5^n(An^2 + Bn + C)$
- Nếu $f_n = 5^n$, thì $x_n^{(P)} = 5^n A$
- Nếu $f_n = 3^n$, thì $x_n^{(P)} = n3^n A$
- Nếu $f_n = 2^n(3n + 1)$, thì $x_n^{(P)} = n2^n(An + B)$

Ví dụ

Cho hệ thức đệ quy $x_n - 6x_{n-1} + 9x_{n-2} = f_n$ (1). Ta có hệ thức đệ quy tuyến tính thuần nhất là

$$x_n - 6x_{n-1} + 9x_{n-2} = 0 \quad (2)$$

Phương trình đặc trưng của (2) là

$$\lambda^2 - 6\lambda + 9 = 0. \quad (*)$$

Phương trình (*) có nghiệm kép là $\lambda_0 = 3$.

- Nếu $f_n = 3^n$ thì (1) có nghiệm riêng dạng $x_n^{(P)} = n^2 3^n A$.
- Nếu $f_n = 3^n(2n + 1)$ thì $x_n^{(P)} = n^2 3^n (An + B)$.
- Nếu $f_n = 4^n(2n + 1)$ thì $x_n^{(P)} = 4^n (An + B)$.

Một số ví dụ

Ví dụ (Bài toán Tháp Hà Hội)

Cho $n \geq 1$, có ba cọc I , II , và III . Tại cọc I đang có n cái đĩa tròn có bán kính khác nhau (ta đặt đĩa theo nguyên tắc là đĩa nhỏ ở phía trên đĩa lớn). Chuyển n cái đĩa ở cọc I sang cọc III , có thể qua trung gian cọc II , mỗi lần chuyển được 1 chiếc đĩa. Gọi x_n là số lần chuyển đĩa, tìm x_n ?

Hướng dẫn. Với $n = 1$, ta có $x_1 = 1$.

Với $n \geq 1$, đầu tiên ta chuyển $n - 1$ đĩa bên trên sang cọc II (lấy cọc III làm trung gian), giữ nguyên đĩa thứ n cuối cùng ở cọc I . Ta thấy số lần chuyển $n - 1$ đĩa đó là x_{n-1} . Sau đó ta chuyển đĩa thứ n từ cọc I sang cọc III . Cuối cùng chuyển $n - 1$ đĩa từ cọc II qua cọc III (lấy cọc I làm trung gian). Số lần chuyển $n - 1$ đĩa đó là x_{n-1} .

**Bài giảng môn
học Toán Rời
Rạc****Nguyễn Anh
Thị****Nội dung**Hệ thức đệ quy tuyến
tính với hệ số hằngNghịệm của hệ thức
đệ quy tuyến tính
thuần nhấtNghịệm của hệ thức
đệ quy tuyến tính
không thuần nhất

Vậy số lần chuyển n đĩa từ cọc I sang III là

$$x_n = 2x_{n-1} + 1$$

Ta có

$$\begin{cases} x_1 &= 1 \\ x_n &= 2x_{n-1} + 1 \text{ với } n > 1. \end{cases}$$

SV giải hệ thức đệ quy trên.

Ví dụ

Một cầu thang có n bậc. Mỗi bước đi gồm 1 hay 2 bậc. Gọi x_n là số cách đi hết cầu thang. Tìm x_n ?

Hướng dẫn.

- Với $n = 1$, ta có $x_1 = 1$.
- Với $n = 2$, ta có $x_2 = 2$.
- Với $n > 2$, ta xét hai trường hợp:
 - TH1: bước đầu tiên gồm 1 bậc. Khi đó, cầu thang còn $n - 1$ bậc nên số cách đi hết cầu thang là x_{n-1} .
 - TH2: bước đầu tiên gồm 2 bậc. Khi đó, cầu thang còn $n - 2$ bậc nên số cách đi hết cầu thang là x_{n-2} .

Theo nguyên lý cộng, số cách đi hết cầu thang là $x_{n-1} + x_{n-2}$. Do đó $x_n = x_{n-1} + x_{n-2}$.

Như vậy,

$$\begin{cases} x_1 = 1, x_2 = 2; \\ x_n = x_{n-1} + x_{n-2} \text{ với } n > 2. \end{cases}$$

SV giải hệ thức trên.

Bài giảng môn
học Toán Rời
RạcNguyễn Anh
Thị

Nội dung

Hệ thức đệ quy tuyến
tính với hệ số hằngNghiệm của hệ thức
đệ quy tuyến tính
thuần nhấtNghiệm của hệ thức
đệ quy tuyến tính
không thuần nhất

Ví dụ

Giải hệ thức đệ quy
$$\begin{cases} x_n - 5x_{n-1} + 6x_{n-2} = 2n + 1; \\ x_0 = 1; x_1 = 3. \end{cases}$$

Ví dụ

$$\text{Giải hệ thức đệ quy } \begin{cases} x_n - 5x_{n-1} + 6x_{n-2} = 2n + 1; \\ x_0 = 1; x_1 = 3. \end{cases}$$

$$\text{Đáp án. } x_n = -7 \cdot 2^n + 4 \cdot 3^n + n + 4.$$

Ví dụ

$$\text{Giải hệ thức đệ quy } 2x_n - 3x_{n-1} + x_{n-2} = 4n + 1.$$

Ví dụ

Giải hệ thức đệ quy
$$\begin{cases} x_n - 5x_{n-1} + 6x_{n-2} = 2n + 1; \\ x_0 = 1; x_1 = 3. \end{cases}$$

Đáp án. $x_n = -7.2^n + 4.3^n + n + 4.$

Ví dụ

Giải hệ thức đệ quy $2x_n - 3x_{n-1} + x_{n-2} = 4n + 1.$

Đáp án. $x_n = C_1 + C_2 \left(\frac{1}{2}\right)^n + n(2n - 1).$

Hệ thức đệ quy tuyến
tính với hệ số hằng

Nghiệm của hệ thức
đệ quy tuyến tính
thuần nhất

Nghiệm của hệ thức
đệ quy tuyến tính
không thuần nhất

Ví dụ

$$\text{Giải hệ thức đệ quy } \begin{cases} x_{n+1} - 6x_n + 9x_{n-1} = (18n + 12)3^n; \\ x_0 = 2; x_1 = 0. \end{cases}$$

Ví dụ

$$\text{Giải hệ thức đệ quy } \begin{cases} x_{n+1} - 6x_n + 9x_{n-1} = (18n + 12)3^n; \\ x_0 = 2; x_1 = 0. \end{cases}$$

$$\text{Đáp án. } x_n = 3^n(n^3 + 2n^2 - 5n + 2).$$

Ví dụ

$$\text{Giải hệ thức đệ quy}$$

$$x_n - 4x_{n-1} + 3x_{n-2} = 20 + (2 - n)2^{n-2} + 3.4^n$$

Ví dụ

Giải hệ thức đệ quy $\begin{cases} x_{n+1} - 6x_n + 9x_{n-1} = (18n + 12)3^n; \\ x_0 = 2; x_1 = 0. \end{cases}$

Đáp án. $x_n = 3^n(n^3 + 2n^2 - 5n + 2).$

Ví dụ

Giải hệ thức đệ quy

$$x_n - 4x_{n-1} + 3x_{n-2} = 20 + (2 - n)2^{n-2} + 3 \cdot 4^n$$

Đáp án. $x_n = C_1 + C_2 \cdot 3^n - 10n + n2^n + 4^{n+2}.$

Ví dụ

Cho $x_0 = 1$ và $x_1 = 2$. Tìm nghiệm của hệ thức đệ quy

$$x_{n+1} - 3x_n + 2x_{n-1} = n, \text{ với } n \geq 1.$$

Ví dụ

Giải hệ thức đệ quy $\begin{cases} x_{n+1} - 6x_n + 9x_{n-1} = (18n + 12)3^n; \\ x_0 = 2; x_1 = 0. \end{cases}$

Đáp án. $x_n = 3^n(n^3 + 2n^2 - 5n + 2).$

Ví dụ

Giải hệ thức đệ quy

$$x_n - 4x_{n-1} + 3x_{n-2} = 20 + (2 - n)2^{n-2} + 3 \cdot 4^n$$

Đáp án. $x_n = C_1 + C_2 \cdot 3^n - 10n + n2^n + 4^{n+2}.$

Ví dụ

Cho $x_0 = 1$ và $x_1 = 2$. Tìm nghiệm của hệ thức đệ quy

$$x_{n+1} - 3x_n + 2x_{n-1} = n, \text{ với } n \geq 1.$$

Đáp án. $x_n = 3 \cdot 2^n - \frac{1}{2}n^2 - \frac{3}{2}n - 2.$