

Bài giảng môn học Toán rời rạc

Nguyễn Anh Thị

Trường Đại học Khoa học Tự nhiên, Tp Hồ Chí Minh

2017

SỐ NGUYÊN

Biểu diễn số nguyên

Định lý

Cho b là số nguyên lớn hơn 1. Khi đó mọi số nguyên dương n đều được biểu diễn duy nhất dưới dạng

$$n = a_k b^k + a_{k-1} b^{k-1} + \dots + a_1 b + a_0$$

trong đó k là số nguyên không âm và a_i là số nguyên thỏa $0 \leq a_i < b$. Dạng biểu diễn này được gọi là **dạng biểu diễn theo cơ số b của n** , và được ký hiệu $n = (a_k a_{k-1} \dots a_1 a_0)_b$. Ta có một số dạng biểu diễn thường gặp: nhị phân ($b = 2$), bát phân ($b = 8$), thập phân ($b = 10$), thập lục phân ($b = 16$),...

Ví dụ

Tìm dạng thập phân của số nguyên có dạng nhị phân là 1011111?

Hướng dẫn.

$$1011111 = 1.2^6 + 0.2^5 + 1.2^4 + 1.2^3 + 1.2^2 + 1.2^1 + 1.2^0 = 95.$$

Ví dụ

Tìm dạng thập phân của số nguyên có dạng bát phân là 7016?

Hướng dẫn. 3598

Chú ý

Đối với hệ thập lục phân, chữ A đến F dùng thay thế cho 10 đến 15.

Ví dụ

Tìm dạng thập phân của số nguyên có dạng thập lục phân là 2AE0B?

Hướng dẫn.

$$2AE0B = 2.16^4 + 10.16^3 + 14.16^2 + 0.16 + 11 = 175627.$$

Tìm dạng biểu diễn theo cơ số b của n

- Chia n cho b ta được

$$n = q_0b + a_0.$$

- Khi đó số dư a_0 chính là ký tự cuối cùng trong dạng biểu diễn. Ta tiếp tục chia q_0 cho b , ta được $q_0 = q_1b + a_1$.
- Tiếp tục thực hiện quá trình này cho đến khi phần thương bằng 0, $q_{k-1} = 0.b + a_k$.
- Khi đó $(a_k a_{k-1} \dots a_1 a_0)_b$ là dạng biểu diễn theo cơ số b của n .

Ví dụ

- Tìm dạng biểu diễn bát phân của 12345?*

Tìm dạng biểu diễn theo cơ số b của n

- Chia n cho b ta được

$$n = q_0b + a_0.$$

- Khi đó số dư a_0 chính là ký tự cuối cùng trong dạng biểu diễn. Ta tiếp tục chia q_0 cho b , ta được $q_0 = q_1b + a_1$.
- Tiếp tục thực hiện quá trình này cho đến khi phần thương bằng 0, $q_{k-1} = 0.b + a_k$.
- Khi đó $(a_k a_{k-1} \dots a_1 a_0)_b$ là dạng biểu diễn theo cơ số b của n .

Ví dụ

- Tìm dạng biểu diễn bát phân của 12345? $(30071)_8$*
- Tìm dạng biểu diễn thập lục phân của 177130?*

Tìm dạng biểu diễn theo cơ số b của n

- Chia n cho b ta được

$$n = q_0b + a_0.$$

- Khi đó số dư a_0 chính là ký tự cuối cùng trong dạng biểu diễn. Ta tiếp tục chia q_0 cho b , ta được $q_0 = q_1b + a_1$.
- Tiếp tục thực hiện quá trình này cho đến khi phần thương bằng 0, $q_{k-1} = 0.b + a_k$.
- Khi đó $(a_k a_{k-1} \dots a_1 a_0)_b$ là dạng biểu diễn theo cơ số b của n .

Ví dụ

- Tìm dạng biểu diễn bát phân của 12345? $(30071)_8$
- Tìm dạng biểu diễn thập lục phân của 177130? $(2B3EA)_{16}$

Đồng dư

Định nghĩa

Cho n là số nguyên dương. Hai số nguyên a và b được gọi là **đồng dư** với nhau theo modulo n , nếu a và b chia n có cùng số dư. Ký hiệu $a \equiv b \pmod{n}$.

Tính chất

- i. Với mọi số nguyên a , ta có $a \equiv a \pmod{n}$;
- ii. Nếu $a \equiv b \pmod{n}$ thì $b \equiv a \pmod{n}$;
- iii. Nếu $a \equiv b \pmod{n}$ và $b \equiv c \pmod{n}$, thì $a \equiv c \pmod{n}$.

Tính chất

Cho $a \equiv b \pmod{n}$ và $c \equiv d \pmod{n}$. Khi đó

$$a + c \equiv b + d \pmod{n} \text{ và } ac \equiv bd \pmod{n}.$$

Ví dụ

Tìm số nguyên a sao cho

- a. $a \equiv 43 \pmod{23}$ và $-22 \leq a \leq 0$
- b. $a \equiv 17 \pmod{23}$ và $-14 \leq a \leq 14$
- c. $a \equiv -11 \pmod{23}$ và $90 \leq a \leq 110$

Ví dụ

Cho a và b là hai số nguyên và $a \equiv 4 \pmod{13}$ và $b \equiv 9 \pmod{13}$. Tìm số nguyên c với $0 \leq c \leq 12$ sao cho

- a. $c \equiv 9a \pmod{13}$
- b. $c \equiv 11b \pmod{13}$
- c. $c \equiv a + b \pmod{13}$

Phép chia Euclide trên $\mathbb{Z}$, ước số chung lớn nhất, bội số chung nhỏ nhất

Định nghĩa

- a. Số nguyên $U > 0$ được gọi là **ước số chung lớn nhất** (ký hiệu USCLN) của hai số nguyên a, b khi và chỉ khi U là một ước chung của a, b (nghĩa là $U|a$, $U|b$) và nếu số nguyên V là một ước chung của a, b thì $V|U$.
- b. Số nguyên $B > 0$ được gọi là **bội số chung nhỏ nhất** (ký hiệu BSCNN) của hai số nguyên a, b khi và chỉ khi B là một bội chung của a, b (nghĩa là $a|B$ và $b|B$) và nếu số nguyên A là một bội chung của a, b thì $B|A$.

Ví dụ

USCLN của 15 và 25 là 5, BSCNN của chúng là 75.

Định lý

Ước số chung lớn nhất (tương ứng bội số chung nhỏ nhất) của a, b là duy nhất, ký hiệu $(a; b)$, (tương ứng $[a; b]$).

Thuật toán tìm USCLN d của a, b :

- Nếu b là ước của a , thì $d = b$;
- Nếu không, ta lần lượt thực hiện các phép chia:

$$a = q_1b + r_1 \quad , 0 \leq r_1 < b$$

$$b = q_2r_1 + r_2 \quad , 0 \leq r_2 < r_1$$

$$r_1 = q_3r_2 + r_3 \quad , 0 \leq r_3 < r_2$$

...

Do $b > r_1 > r_2 > \dots \geq 0$, phép chia như trên sẽ ngưng sau một số hữu hạn bước. Gọi r_{n+1} là số dư đầu tiên bằng 0. Ta có $r_{n-2} = q_nr_{n-1} + r_n$, $0 \leq r_n < r_{n-1}$,
 $r_{n-1} = q_{n+1}r_n + 0$.

Khi đó r_n là USCLN của a và b .

Định lý

Giả sử d là USCLN của a và b . Khi đó tồn tại $m, n \in \mathbb{Z}$ sao cho:

$$d = ma + nb$$

Định nghĩa

Hai số nguyên dương a, b được gọi là **nguyên tố cùng nhau** khi và chỉ khi $(a, b) = 1$.

Hệ quả

Cho $a, b > 0$. Ta có $(a, b) = 1 \Leftrightarrow \exists m, n \in \mathbb{Z} : ma + nb = 1$.

Định lý

Giả sử $a, b \in \mathbb{Z}^+, d = (a, b)$. Khi đó, BSCNN của a, b là $\frac{ab}{d}$.

Định lý (Định lý căn bản của số học)

Mọi số nguyên dương đều được phân tích thành tích hữu hạn những thừa số nguyên tố. Hơn nữa, cách phân tích này là duy nhất, sai khác một phép hoán vị các thừa số nguyên tố.

Ví dụ

$$48 = 2^4.3; 60 = 2^2.3.5.$$

Nhận xét

Nếu $x = p_1^{t_1} p_2^{t_2} \dots p_n^{t_n}$, $y = p_1^{u_1} p_2^{u_2} \dots p_n^{u_n}$ thì $x|y$ khi và chỉ khi $t_i \leq u_i$, $i = 1 \dots n$.

Định lý

Cho hai số tự nhiên a, b với $a = p_1^{r_1} p_2^{r_2} \dots p_n^{r_n}$ và $b = p_1^{s_1} p_2^{s_2} \dots p_n^{s_n}$, $r_i, s_i \geq 0, i = 1, \dots, n$. Ta có

$$(a, b) = p_1^{t_1} p_2^{t_2} \dots p_n^{t_n} \text{ với } t_i = \min\{r_i, s_i\}, i = 1, \dots, n;$$

$$[a, b] = p_1^{u_1} p_2^{u_2} \dots p_n^{u_n} \text{ với } u_i = \max\{r_i, s_i\}, i = 1, \dots, n.$$