

Bài giảng môn học Toán Rời Rạc

Nguyễn Anh Thi

Chương 6

Quan hệ

Nội dung

1 Quan hệ hai ngôi

2 Quan hệ tương đương.

3 Quan hệ thứ tự.

Quan hệ hai ngôi

Định nghĩa

Một **quan hệ hai ngôi** R trên tập $A \neq \emptyset$ là một tập con khác rỗng của tập tích $A \times A$.

Khi $(x; y) \in R$, ta ghi xRy , nếu không, ta ghi $x\bar{R}y$.

Ví dụ

- $A = \{1; 2; 3\}$,
 $R = \{(1; 1); (1; 2); (2; 1); (2; 2); (2; 3); (3; 3)\}$.
Ta có $1R2, 2R1, 2R3$, và $3\bar{R}2$
- Quan hệ " $=$ " trên một tập hợp A bất kỳ:

$$(aRb) \Leftrightarrow a = b$$

Quan hệ hai ngôi

Ví dụ

- Quan hệ " $\leq$ " trên $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}$ hay $\mathbb{R}$:

$$(aRb) \Leftrightarrow a \leq b$$

- Gọi L là tập hợp các đường thẳng trong mặt phẳng. Quan hệ song song được định nghĩa bởi:

$$(dRd') \Leftrightarrow d // d'$$

- Quan hệ đồng dư modulo n :

$$(aRb) \Leftrightarrow a \equiv b \pmod{n}$$

Tính chất

- a. *Phản xạ (phản hồi):* $\forall a \in A, aRa$.
- b. *Đối xứng:* $\forall a, b \in A, aRb \Rightarrow bRa$.
- c. *Phản đối xứng (phản xứng):* $\forall a, b \in A, aRb$ và bRa suy ra $a = b$.
- d. *Bắc cầu (truyền):* $\forall a, b, c \in A, aRb$ và bRc suy ra aRc .

Ví dụ

- Quan hệ " $=$ " trên một tập hợp bất kỳ, quan hệ " $\leq$ " trên $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$, quan hệ đồng dư trên $\mathbb{Z}$ là phản xạ.
- Các quan hệ " $=, \equiv, /$ " là các quan hệ đối xứng.
- Các quan hệ " $=, \equiv, /, \leq$ " là các quan hệ bắc cầu.

Quan hệ tương đương

Định nghĩa

Quan hệ hai ngôi R trên tập A được gọi là một **quan hệ tương đương** khi và chỉ khi R có các tính chất phản xạ, đối xứng, bắc cầu.

Ví dụ

Các quan hệ " $=$ ", " $\equiv$ ", " $//$ " là các quan hệ tương đương.

Định nghĩa

Cho R là một quan hệ tương đương trên A . **Lớp tương đương** của phần tử $x \in A$ là tập con $\bar{x} = \{t \in A | tRx\}$.

Tính chất

- $\forall x \in A, \bar{x} \neq \emptyset$;
- $z \in \bar{x} \Rightarrow \bar{z} = \bar{x}$;
- $\forall x, y \in A, \bar{x} \cap \bar{y} = \emptyset$ hoặc $\bar{x} = \bar{y}$ (nghĩa là: $\bar{x} \neq \bar{y}$ thì $\bar{x} \cap \bar{y} = \emptyset$).

Định nghĩa

Cho R là một quan hệ tương đương trên A . tập hợp các lớp tương đương (khác nhau) của A được gọi là **tập thương** của A trên R , ký hiệu A/R . Như vậy, phần tử của A/R là một tập con của A .

Quan hệ đồng dư

Định nghĩa

Cho trước $n \in \mathbb{N}$, ta định nghĩa quan hệ đồng dư modulo n (ký hiệu $\cong \pmod{n}$) trên tập $\mathbb{Z}$, như sau:

$$x \cong y \pmod{n} \Leftrightarrow n \mid (x - y)$$

Định nghĩa

Trên $\mathbb{Z}_n$ ta định nghĩa một cách tự nhiên các phép toán $+$ và $\cdot$ như sau:

$$\bar{x} + \bar{y} = \overline{x + y}$$

$$\bar{x} \cdot \bar{y} = \overline{x \cdot y}, \forall \bar{x}, \bar{y} \in \mathbb{Z}_n$$

Quan hệ thứ tự

Định nghĩa

Một quan hệ S trên tập $A \neq \emptyset$ được gọi là một **quan hệ thứ tự** khi và chỉ khi S có các tính chất phản xạ, phản xứng, bắc cầu. Khi đó A được gọi là một **tập được sắp (có thứ tự bộ phận)**. Nếu $\forall x, y \in A$, luôn luôn có xSy hoặc ySx thì tập được sắp (A, S) được gọi là **tập thứ tự toàn phần**.

Ví dụ

Các quan hệ $\geq, \leq$ (theo nghĩa thông thường) là những quan hệ thứ tự (toàn phần) trên $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$.

Định nghĩa

Cho (A, S) là một tập được sắp, $\emptyset \neq B \subseteq A$

- Phần tử $M \in B$ là **phần tử lớn nhất** của B khi và chỉ khi $\forall x \in B, xSM$.
- Phần tử $m \in B$ là **phần tử nhỏ nhất** của B khi và chỉ khi $\forall x \in B, mSx$.
- Phần tử $a \in B$ là **phần tử tối tiểu** của B khi và chỉ khi không có $x \in B, x \neq a$ và xSa . (Hay nói cách khác, $\forall x \in B, xSa \Rightarrow x = a$).
- Phần tử $b \in B$ là **phần tử tối đại** của B khi và chỉ khi không có $x \in B, x \neq b$ và bSx . (Hay nói cách khác, $\forall x \in B, bSx \Rightarrow x = b$).

Định lý

Phần tử lớn nhất, phần tử nhỏ nhất của một tập được sắp (nếu có) là duy nhất.

Nhận xét

Trong một tập được sắp, phần tử lớn nhất (nếu có) sẽ là phần tử tối đại duy nhất, phần tử nhỏ nhất (nếu có) sẽ là phần tử tối tiểu duy nhất.

Định lý

(A, S) là tập được sắp hữu hạn thì

- Mọi phần tử $a \in A$ đều bị chặn trên bởi một phần tử tối đại, bị chặn dưới bởi một phần tử tối tiểu.*
- A có phần tử tối đại, phần tử tối tiểu.*

Định nghĩa

Cho (A, S) là một tập được sắp, khi xSy ta bảo x **bị trội bởi** y , y **trội** x . Khi xSy và không tồn tại z sao cho xSz và zSy , ta nói y là **trội trực tiếp** của x .

Định nghĩa

Ta biểu diễn một tập thứ tự (A, S) hữu hạn bởi một giản đồ, gồm những điểm liên kết với những phần tử của A và những cung có hướng nối x với y khi y là trội trực tiếp của x ; giản đồ trên được gọi là **biểu đồ Hasse**.

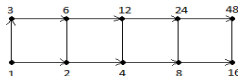
Ví dụ

Với $B = \{2, 3, 4, 6, 8, 12, 15\}$ với quan hệ thứ tự chia hết, ta có biểu đồ Hasse của B như sau:



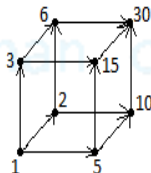
Ví dụ

Biểu đồ Hasse của $(U_{48}, |)$.



Ví dụ

Biểu đồ Hasse của $(U_{30}, |)$ có dạng lập phương.



Nhận xét

Tập thứ tự (A, S) là tập được sắp thứ tự toàn phần khi và chỉ khi biểu đồ Hasse của nó có dạng dây xích.

Topo hóa một quan hệ thứ tự bán phần

Định nghĩa

Cho (A, S) là một tập thứ tự bán phần. **Topo hóa T** của S là một quan hệ thứ tự **toàn phần** trên A sao cho $x, y \in A, xSy \Rightarrow xTy$ (nghĩa là không có $x \neq y$ sao cho xTy mà ySx).

Giải thuật tìm topo hóa T của S khi A là tập hữu hạn, $|A| = n$

Ta thực hiện theo các bước sau:

- i. Chọn x_1 là một phần tử tối tiểu của A .
- ii. Chọn x_2 là một phần tử tối tiểu của $A \setminus \{x_1\}$
- iii. Sau khi chọn được $x_1, x_2, \dots, x_k$, ta chọn x_{k+1} là một phần tử tối tiểu của $A \setminus \{x_1, x_2, \dots, x_k\}$

Khi đã có dãy $x_1, x_2, \dots, x_n$, ta đặt $x_i T x_j$ khi và chỉ khi $i \leq j$

Chú ý

Vì có thể có nhiều cách chọn lựa trong mỗi bước, nên sẽ có nhiều topo hóa khác nhau cho cùng một tập thứ tự.

Ví dụ

Topo hóa tập được sắp $A = (U_{30}, |)$.