

Bài giảng môn học Toán Rời Rạc

Nguyễn Anh Thi

Chương 7

Đại số Bool

Nội dung

cuu duong than cong. com

cuu duong than cong. com

Định nghĩa

Một **đại số Bool** là một tập hợp B cùng hai phép toán hai ngôi $\wedge, \vee$ thỏa:

- *Tính kết hợp: với mọi $x, y, z \in B$*

$$x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge z$$

$$x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee z$$

- *Tính giao hoán: với mọi $x, y \in B$*

$$x \vee y = y \vee x$$

$$x \wedge y = y \wedge x$$

- Tính phân bố: với mọi $x, y \in \mathcal{B}$

$$x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$$

$$x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$$

- Phần tử trung hòa: trong $\mathcal{B}$ có hai phần tử trung hòa 0, 1 đối với phép toán $\wedge, \vee$ sao cho với mọi $x \in \mathcal{B}$, ta có:

$$x \vee 0 = 0 \vee x = x$$

$$x \wedge 1 = 1 \wedge x = x$$

- Phần tử bù: với mỗi $x \in \mathcal{B}$, tồn tại $\bar{x} \in \mathcal{B}$ sao cho:

$$x \vee \bar{x} = 1$$

$$x \wedge \bar{x} = 0$$

Ví dụ

- i) $\mathcal{P}(E)$ là một đại số Bool với các phép tính $\cap, \cup$ của các tập hợp. Phần tử 0 là tập trống $\emptyset$, phần tử 1 là tập E , phần tử bù của $x \in \mathcal{P}(E)$ là $E \setminus x$.
- ii) Với mỗi $n \in \mathbb{N}$, n không có ước số là số chính phương (nghĩa là không có dạng p^k ($2 \leq k$) trong cách viết n thành tích những thừa số nguyên tố) thì $\mathcal{U}_n$ (tập hợp những ước số dương của n) cũng là một đại số Bool với

$$x \vee y = \text{BSCNN}(x, y)$$

$$x \wedge y = \text{USCLN}(x, y)$$

Lúc đó, $\mathcal{U}_n$ có phần tử 1 là số n , còn phần tử 0 là số nguyên 1. Phần tử bù của $x \in \mathcal{U}_n$ là n/x .

Định nghĩa

Tập hợp $B = \{0, 1\}$ với các phép toán:

$$x \wedge y = x.y$$

$$x \vee y = x + y - xy$$

là một đại số Bool, được gọi là **đại số Bool nhị phân**. Phần tử bù của x là $\bar{x} = 1 - x$.

Trên B , ta định nghĩa một quan hệ thứ tự rất tự nhiên:

$$0 \leq 0, 0 \leq 1, 1 \leq 1.$$

Định nghĩa

Biến Bool là biến chỉ nhận hai giá trị 0, 1.

Hàm Bool n biến là ánh xạ

$$f: \mathcal{B}^n \rightarrow \mathcal{B}$$

trong đó $\mathcal{B} = \{0, 1\}$. Như vậy hàm Bool n biến là hàm số có dạng $f = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, trong đó mỗi biến trong $x_1, x_2, \dots, x_n$ chỉ nhận hai giá trị 0, 1 và f nhận giá trị trong $\mathcal{B} = \{0, 1\}$.

Ký hiệu F_n để chỉ tập các hàm Bool n biến. Vì mỗi biến x_i chỉ nhận hai giá trị 0, 1 nên chỉ có 2^n trường hợp của bộ biến $(x_1, x_2, \dots, x_n)$. Do đó để mô tả f , ta có thể lập bảng gồm 2^n hàng ghi tất cả các giá trị của f tùy theo 2^n trường hợp của biến. Ta gọi đây là **bảng chân trị của f** .

Ví dụ

Xét kết quả f trong việc thông qua một quyết định dựa vào 3 phiếu bầu x, y, z . Mỗi phiếu chỉ lấy một trong hai giá trị 1 (tán thành) hoặc 0 (bác bỏ). Kết quả f là 1 (thông qua quyết định) nếu được đa số phiếu tán thành, là 0 (không thông qua quyết định) nếu đa số phiếu bác bỏ.

Khi đó hàm Bool theo ba biến x, y, z có bảng chân trị sau:

x	y	z	f
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

Các phép toán trên hàm Bool

Các phép toán trên F_n được định nghĩa như sau:

Phép cộng Bool $\vee$ Với $f, g \in F_n$ ta định nghĩa tổng Bool của f và g :

$$f \vee g = f + g - fg$$

$$\forall x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in B^n,$$

$$(f \vee g)(x) = f(x) + g(x) - f(x)g(x)$$

Dễ thấy, $f \vee g \in F_n$ và $(f \vee g)(x) = \max\{f(x), g(x)\}$

Các phép toán trên hàm Bool

Phép nhân Bool $\wedge$:

Với $f, g \in F_n$ ta định nghĩa tích Bool của f và g

$$f \wedge g = fg$$

$$\forall x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in B^n, (f \wedge g)(x) = f(x)g(x)$$

Dễ thấy, $f \wedge g \in F_n$ và $(f \wedge g)(x) = \min\{f(x), g(x)\}$.

Phép lấy bù Với $f \in F_n$ ta định nghĩa hàm bù của f như sau:

$$\bar{f} = 1 - f$$

Dạng nổi rời chính tắc của hàm Bool

Xét tập hợp các hàm Bool của n biến F_n , theo n biến $x_1, x_2, \dots, x_n$

- Mỗi hàm Bool x_i hay $\bar{x}_i$ được gọi là **từ đơn**.
- **Đơn thức** là tích khác không của một số hữu hạn các từ đơn.
- **Từ tối thiểu** là tích khác không của đúng n từ đơn.
- **Công thức đa thức** là công thức biểu diễn hàm Bool thành tổng của các đơn thức.
- **Dạng nổi rời chính tắc** là công thức biểu diễn hàm Bool thành tổng các từ tối thiểu.

Ví dụ

$x, \bar{x}, y, \bar{y}, z, \bar{z}, t, \bar{t}$ là các từ đơn.

$x\bar{y}z\bar{t}, \bar{x}y\bar{t}$ là các đơn thức.

$x\bar{y}z\bar{t}$ là từ tối thiểu.

$$f = xy\bar{z} \vee \bar{y}z.$$

Công thức đa thức tối thiểu Đơn giản hơn

Cho hai công thức đa thức của một hàm Bool:

$$f = m_1 \vee m_2 \vee \cdots \vee m_k (F)$$

$$f = M_1 \vee M_2 \vee \cdots \vee M_l (G)$$

Ta nói rằng công thức F **đơn giản hơn** công thức G nếu tồn tại một đơn ánh $h : \{1, 2, \dots, k\} \rightarrow \{1, 2, \dots, l\}$ sao cho với mọi $i \in \{1, 2, \dots, k\}$ thì số từ đơn của m_i không nhiều hơn số từ đơn của $M_{h(i)}$.

Công thức đa thức tối thiểu

Định nghĩa

Nếu F đơn giản hơn G và G đơn giản hơn F thì ta nói F và G đơn giản như nhau.

Định nghĩa

Công thức F của hàm Bool f được gọi là **tối thiểu** nếu với bất kỳ công thức G của f mà đơn giản hơn F thì F và G đơn giản như nhau.

Phương pháp biểu đồ Karnaugh

Phương pháp biểu đồ Karnaugh cho phép chúng ta nhanh chóng tìm được các công thức đa thức tối thiểu của những hàm Bool 3, 4 biến.

Trường hợp 3 biến: f là hàm Bool theo 3 biến x, y, z . Khi đó bảng chân trị của f gồm 8 hàng. Thay cho bảng chân trị của f ta vẽ một bảng chữ nhật gồm 8 ô, tương ứng với 8 hàng của bảng chân trị:

101	111	011	001
100	110	010	000

Cách biểu diễn cụ thể như sau: hai cột đầu dành cho x , hai cột sau dành cho $\bar{x}$, hai cột giữa cho y , cột đầu và cột cuối cho $\bar{y}$, dòng đầu dành cho z , dòng cuối dành cho $\bar{z}$.

Khi một ô nằm trong dãy được đánh dấu bởi x thì tại đó $x = 1$, bởi $\bar{x}$ thì tại đó $x = 0$, tương tự cho y, z .

Các ô tại đó f bằng 1 sẽ được đánh dấu (tô đậm hay gạch chéo). Tập các ô được đánh dấu được gọi là biểu đồ Karnaugh của f , ký hiệu là $\text{kar}(f)$.

Trường hợp 4 biến: f là hàm Bool theo 4 biến x, y, z, t . Khi đó bảng chân trị của f gồm 16 hàng. Thay cho bảng chân trị của f ta vẽ một bảng chữ nhật gồm 16 ô, tương ứng với 16 hàng của bảng chân trị:

1010	1110	0110	0010
1011	1111	0111	0011
1001	1101	0101	0001
1000	1100	0100	0000

Khi một ô nằm trong dãy được đánh dấu bởi x thì tại đó $x = 1$, bởi $\bar{x}$ thì tại đó $x = 0$, tương tự cho x, y, z . Các ô tại đó f bằng 1 sẽ được đánh dấu (tô đậm hoặc gạch chéo). Tập các ô được đánh dấu được gọi là biểu đồ Karnaugh của f , ký hiệu là $kar(f)$.

Trong cả hai trường hợp, hai ô được gọi là **kề nhau** (theo nghĩa rộng), nếu chúng là hai ô **liền nhau** hoặc chúng là **ô đầu, ô cuối** của cùng một hàng (cột) nào đó.

Nhận xét rằng do cách đánh dấu như trên, hai ô kề nhau chỉ lệch nhau ở một biến duy nhất.

Định lý

Cho f, g là các hàm Bool theo n biến $x_1, x_2, \dots, x_n$. Khi đó:

- a) $kar(fg) = kar(f) \cup kar(g)$
- b) $kar(f \vee g) = kar(f) \cap kar(g)$
- c) $kar(f)$ gồm đúng một ô khi và chỉ khi f là một từ tối tiểu.

Định nghĩa

*Biểu đồ Karnaugh của một đơn thức được gọi là **tế bào**. Khi đơn thức m có dạng tích của p từ đơn ($1 \leq p \leq n$) thì tế bào tương ứng sẽ là một hình chữ nhật (trong bảng mã mở rộng) gồm có 2^{n-p} ô.*

Nếu T là một tế bào thì T là biểu đồ Karnaugh của một đơn thức duy nhất m . Cách xác định m như sau: lần lượt chiếu T lên các cạnh, nếu toàn bộ hình chiếu nằm trọn trong một từ đơn thì từ đơn đó mới xuất hiện trong m .

Ví dụ

Biểu đồ Karnaugh của đơn thức $x\bar{y}z\bar{t}$ là

Ví dụ

Biểu đồ Karnaugh của đơn thức $\bar{y}z\bar{t}$ là

Ví dụ

Biểu đồ Karnaugh của đơn thức $\bar{y}\bar{t}$ là

Ví dụ

Tế bào sau là biểu đồ Karnaugh của đơn thức nào?

Là biểu đồ Karnaugh của đơn thức $y\bar{z}$.

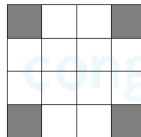
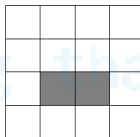
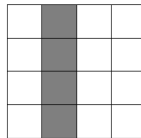
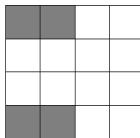
Định nghĩa

Cho hàm Bool f . Ta nói T là một tế bào lớn của $\text{kar}(f)$ nếu T thỏa hai tính chất sau:

- T là một tế bào và $T \subseteq \text{kar}(f)$.
- Không tồn tại tế bào T' nào thỏa $T' \neq T$ và $T \subseteq T' \subseteq \text{kar}(f)$.

Xét hàm Bool f theo 4 biến x, y, z, t có biểu đồ Karnaugh như sau:

Các tế bào lớn kar(f)



Định nghĩa

Một *họ phủ tối thiểu* của $kar(f)$ là một họ $\mathcal{L}$ các tế bào lớn của $kar(f)$ có hợp là biểu đồ Karnaugh của f sao cho khi rút bớt một tế bào lớn ra khỏi $\mathcal{L}$ thì hợp của họ còn lại không phủ kín biểu đồ Karnaugh của f nữa.

Thuật toán tìm các họ phủ tối tiểu bằng biểu đồ Karnaugh

Bước 1: Tìm tất cả các tế bào lớn của biểu đồ Karnaugh của f . Ghi số của các tế bào lớn vào từng ô thuộc $Kar(f)$ trong bảng mã, gọi là bảng "tổng hợp".

Bước 2: Tìm từ trái sang phải, từ trên xuống dưới những ô chỉ có duy nhất một tế bào lớn phủ nó, ta chọn tế bào lớn duy nhất đó vào danh sách L .

Thuật toán tìm các họ phủ tối tiểu bằng biểu đồ Karnaugh

Bước 3: Nếu hợp các tế bào lớn trong danh sách L đã phủ Karnaugh của f thì ta sang bước 4. Nếu không,

- Ta chọn một ô trong $kar(f)$ chưa được họ L phủ, chọn một tế bào lớn phủ ô đó vào danh sách L .
- Kiểm tra xem có thể bỏ bớt tế bào lớn nào ra khỏi danh sách L mà không ảnh hưởng đến phần hợp của các tế bào lớn trong L hay không.
- Trở lại đầu bước 3.

Bước 4: L là một họ phủ tối tiểu của $Kar(f)$.

Tạo công thức đa thức tối thiểu

Mỗi họ phủ tối thiểu cho ta một công thức đa thức rút gọn khá tốt biểu diễn f . Ta so sánh những công thức đó. Những công thức đơn giản nhất sẽ là những công thức đa thức tối thiểu của f .

Ví dụ

Cho hàm Bool f có biểu đồ Karnaugh sau:

Bước 1: Ta xác định tất cả các tế bào lớn của f bằng cách đánh số những ô thuộc cùng một tế bào lớn.

2,3,4, 5,6	3,5		4,6
2,3,4	3		4
2		7	
1,2,6,5	1,5	1,7	1,6

Bước 2: ô (2, 2) chỉ bị phủ bởi T_3 .

ô (2, 4) chỉ bị phủ bởi T_4 .

ô (3, 1) chỉ bị phủ bởi T_2 .

ô (3, 3) chỉ bị phủ bởi T_7 .

Nên ta phải chọn T_2, T_3, T_4, T_7 vào danh sách L .

Vậy lúc này $L = \{T_2, T_3, T_4, T_7\}$.

Bước 3: Hợp những tế bào lớn trong L :

2,3,4, 5,6	3,5		4,6
2,3,4	3		4
2		7	
1,2,6,5	1,5	1,7	1,6

Chỉ còn lại hai ô $(4, 2)$, $(4, 4)$ lần lượt được phủ bởi T_1, T_5 và T_1, T_6 .

- Chọn thêm $T1$ vào L , ta được danh sách $L1 = \{T2, T3, T4, T7, T1\}$, phủ đủ $\text{Kar}(f)$.
- Không chọn $T1$, ta chọn $T5$ vào danh sách L thành $L2 = \{T2, T3, T4, T7, T5\}$, lúc này chỉ còn ô $(4, 4)$. (Nếu chọn $T1$ vào $L2$, ta có thể bỏ bớt $T5$). Ta phải chọn thêm $T6$ mới phủ được $\text{Kar}(f)$. Lúc này, $L2 = \{T2, T3, T4, T7, T5, T6\}$.

Cả hai danh sách đều không thể rút gọn được nữa, nên cả hai đều là họ phủ tối tiểu của $\text{Kar}(f)$.

Từ hai họ phủ tối tiểu $L1, L2$ ở trên, ta thu được hai công thức đa thức thu gọn sau:

$$f = x\bar{y} \vee xz \vee \bar{y}z \vee \bar{x}yz \vee \bar{z}t \quad (1)$$

$$f = x\bar{y} \vee xz \vee \bar{y}z \vee \bar{x}yz \vee x\bar{t} \vee \bar{y}\bar{t} \quad (2)$$

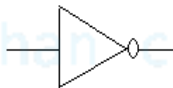
Ta thấy công thức (1) đơn giản hơn công thức (2), nên công thức (1) là công thức đa thức tối tiểu của f .

Mạng các cổng

Các cổng

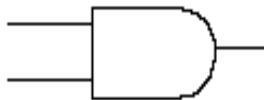
NOT

Ký hiệu cổng:



AND

Ký hiệu cổng:



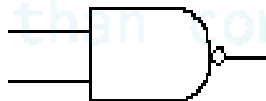
OR

Ký hiệu cổng:



NAND

Ký hiệu cổng:



NOR

Ký hiệu cổng:

