# CHƯƠNG 2
# Phân tích ứng suất đàn hồi tuyến tính của các vết nứt

# Nội dung

- Ôn tập lý thuyết đàn hồi tuyến tính
- Các dạng phá hủy
- Các trường của mode III
- Các trường của mode I và II
- Bài tập

# Lý thuyết đàn hồi tuyến tính

- Các phương trình cơ bản
  - Phương trình Cauchy

$$\gamma_{ij} = \frac{1}{2}\left(u_{i,j} + u_{j,i}\right)$$

  - Phương trình tương thích biến dạng
  - Phương trình cân bằng tĩnh học

$$\sigma_{ij,j} + \rho P_j = 0$$

  - Các điều kiện biên lực và chuyển vị:

$$\sigma_{ij} n_j = t_i^*$$

$$u_j = u_j^*$$

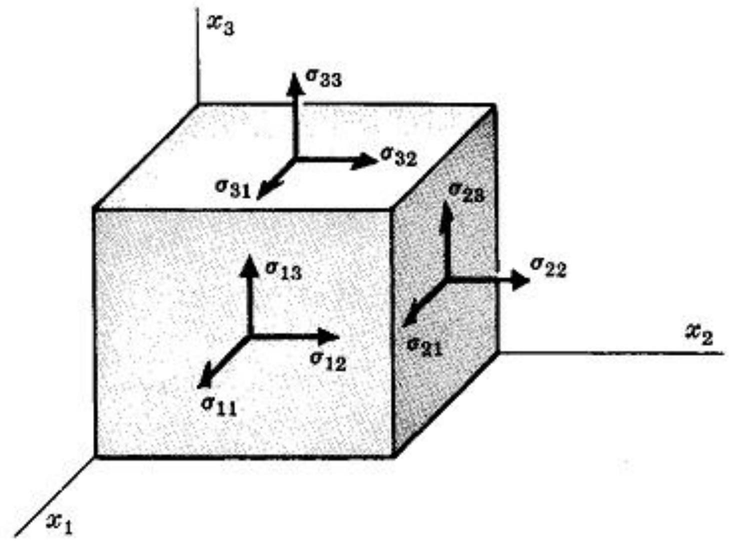
  - Định luật Hooke

$$\sigma_{ij} = \lambda \gamma_{\gamma\gamma} \delta_{ij} + 2\mu \gamma_{ij}$$

$$\Leftrightarrow \gamma_{ij} = \frac{1+\nu}{E}\left[\sigma_{ij} - \frac{3\nu}{1+\nu}\sigma\delta_{ij}\right]$$

- Tensor ứng suất

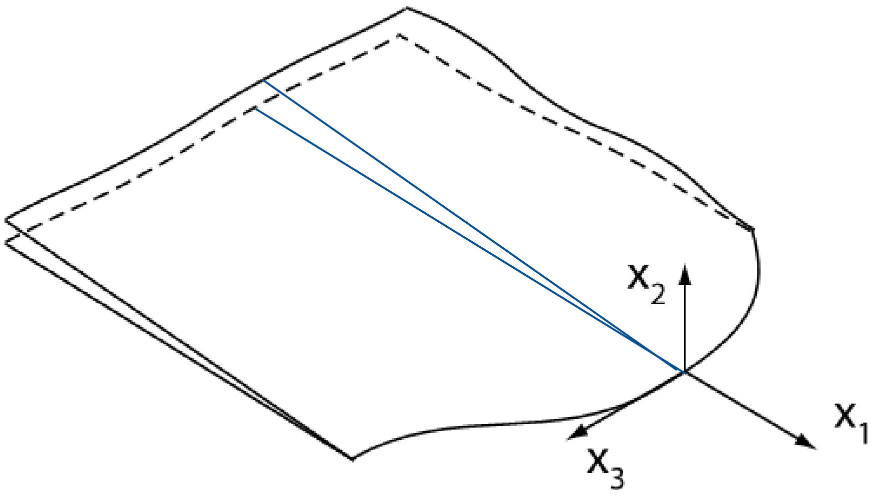
$$[\sigma_{ij}] = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix}$$



# Các mode phá hủy

- Mô hình hai chiều

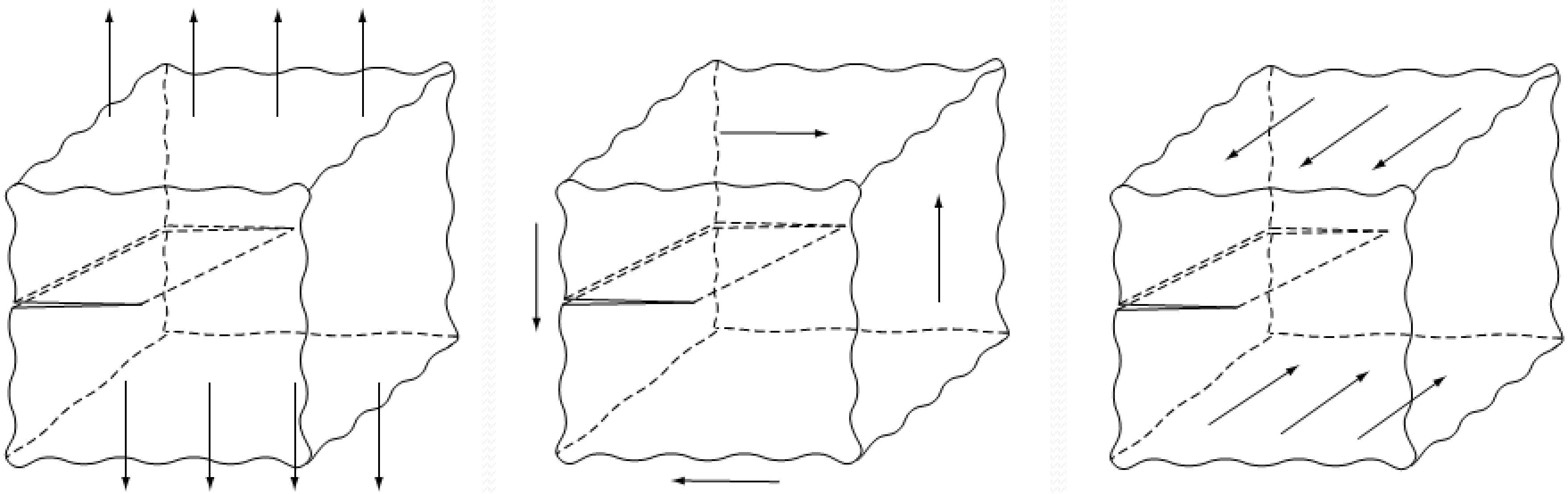
Vết nứt 3D → Vết nứt 2D



# Các mode phá hủy

- Ba mode phá hủy

Vết nứt 3D                                   Vết nứt 2D



Mode-I (tension)    Mode-II (in-plane shear)    Mode-III (anti-plane shear)

# Các trường của mode III

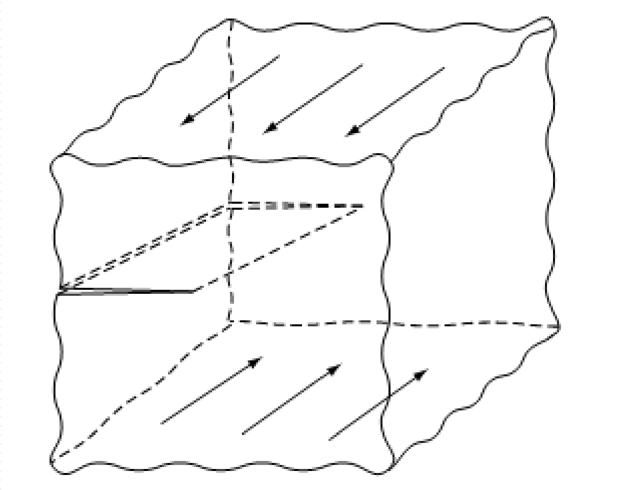
- Trường chuyển vị

$$\mathbf{u} = w(x_1, x_2)\mathbf{e}_3$$

- Trường ứng suất

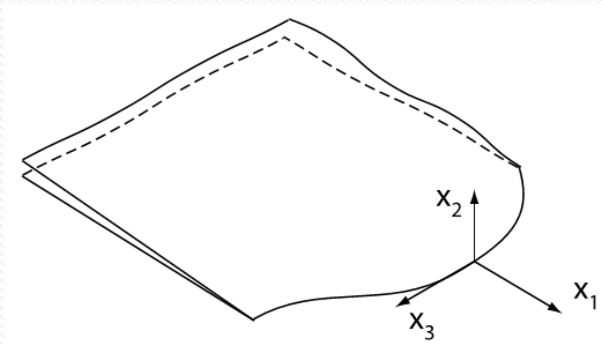
$$\sigma_{3\alpha} = \mu\gamma_{3\alpha} = \mu w_{,\alpha}(x_1, x_2) \qquad w_{,\alpha} = \frac{\partial w}{\partial \alpha}$$

$$\alpha = 1, 2$$



- Phương trình cân bằng (đàn hồi tuyến tính)

$$\sigma_{\alpha\beta,\beta} = 0 \Longrightarrow \nabla^2 w = 0$$




- Điều kiện biên:
  - Điều kiện lực:

$$\mu \nabla w \cdot \mathbf{n} = \sigma_{3\alpha} n_\alpha = m w_{,\alpha} n_\alpha = t_3^*(x_1, x_2)$$

  - Điều kiện chuyển vị:

$$w(x_1, x_2) = w^*(x_1, x_2)$$

- Asymptotic field near crack tip
- Full stress field

# Asymptotic Mode III Field

- Phương trình cân bằng (tọa độ cực)

$$\nabla^2 w = w_{,rr} + \frac{1}{r} w_{,r} + \frac{1}{r^2} w_{,\theta\theta} = 0 \qquad (*)$$

- Điều kiện biên: traction free

$$w_{,\theta}\left(r, \theta = \pm\pi\right) = 0$$

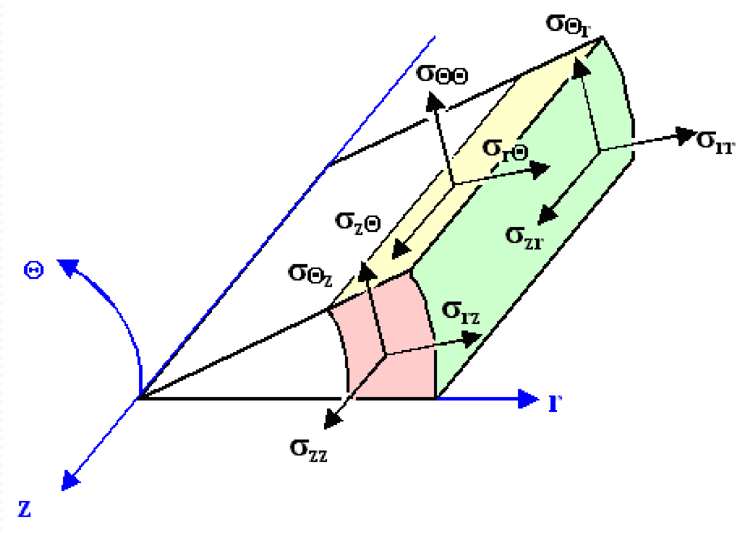
- Giải (*) bằng phương pháp tách biến

$$w\left(r,\theta\right) = R(r)T(\theta)$$

$$\begin{cases} T(\theta) = A\cos\lambda\theta + B\sin\lambda\theta. \\ R(r) = r^{\pm\lambda}. \end{cases}$$

$$w_{,\theta}\left(r, \theta = \pm\pi\right) = 0$$


Vết nứt cắt nửa-vô hạn trong vật thể vô hạn.



# Asymptotic Mode III Field

- Phương trình cân bằng (tọa độ cực)

$$\nabla^2 w = w_{,rr} + \frac{1}{r} w_{,r} + \frac{1}{r^2} w_{,\theta\theta} = 0 \qquad (*)$$

$$\begin{cases} T(\theta) = A\cos\lambda\theta + B\sin\lambda\theta. \\ R(r) = r^{\pm\lambda}. \end{cases}$$

Mà

$$w_{,\theta}(r, \theta = \pm\pi) = 0 \Rightarrow R(r)T'(\pm\pi) = 0 \Rightarrow \begin{aligned} &\lambda(-A\sin\lambda\pi + B\cos\lambda\pi) = 0, \\ &\lambda(A\sin\lambda\pi + B\cos\lambda\pi) = 0. \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \begin{aligned} &\lambda = 0, \lambda = \pm\, 1/2, \pm 3/2, \ldots, \\ &\lambda = 0, \lambda = \pm 1, \pm 2, \ldots. \end{aligned}$$

Chuyển vị của cố thể: $\lambda = 0 \Rightarrow A = A_0, B = 0$

$$\lambda = \pm 1/2, \pm 3/2, \ldots, \quad \Rightarrow A = 0$$
$$\lambda = \pm 1, \pm 2, \quad \Rightarrow B = 0$$

# Asymptotic Mode III Field

- Phương trình cân bằng (tọa độ cực)

$$\nabla^2 w = w_{,rr} + \frac{1}{r} w_{,r} + \frac{1}{r^2} w_{,\theta\theta} = 0 \qquad (*)$$

$$w_{,\theta}\left(r, \theta = \pm\pi\right) = 0$$

➢ Trường chuyển vị

$$w(r,\theta) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} A_n r^n \cos n\theta + B_n r^{n+\frac{1}{2}} \sin(n+1/2)\theta.$$

➢ Trường ứng suất

$$\sigma_{3r} = \mu \frac{\partial w}{\partial r}, \qquad \sigma_{3\theta} = \frac{\mu}{r}\frac{\partial w}{\partial \theta},$$ $\Rightarrow$ Trường ứng suất suy biến

Loại bỏ các lũy thừa âm của trường chuyển vị và chỉ giữ 4 số hạng đầu tiên.

$$w(r,\theta) = A_0 + B_0 r^{1/2} \sin\frac{\theta}{2} + A_1 r \cos\theta + B_2 r^{3/2} \sin\frac{3\theta}{2} + \cdots.$$

# Asymptotic Mode III Field

- Phương trình cân bằng (tọa độ cực)

$$\nabla^2 w = w_{,rr} + \frac{1}{r} w_{,r} + \frac{1}{r^2} w_{,\theta\theta} = 0 \qquad (*)$$

$$w_{,\theta}\left(r, \theta = \pm\pi\right) = 0$$

➢ Trường chuyển vị

$$w(r,\theta) = A_0 + B_0 r^{1/2} \sin\frac{\theta}{2} + A_1 r\cos\theta + B_2 r^{3/2} \sin\frac{3\theta}{2} + \cdots .$$

➢ Trường ứng suất

$$\sigma_{3r} = B_0\mu\frac{1}{2}r^{-1/2}\sin\frac{\theta}{2} + A_1\mu\cos\theta + B_2\mu\frac{3}{2}r^{1/2}\sin\frac{3\theta}{2} + \cdots ,$$

$$\sigma_{3\theta} = B_0\mu\frac{1}{2}r^{-1/2}\cos\frac{\theta}{2} - A_1\mu\sin\theta + B_2\mu\frac{3}{2}r^{1/2}\cos\frac{3\theta}{2} + \cdots .$$

Quy ước độ lớn của sự suy biến đỉnh vết nứt = hệ số tập trung (cường độ) ứng suất

$$K_{III} \equiv \lim_{r\to 0} \sigma_{3\theta}(r,0)\sqrt{2\pi r}. \quad \Longrightarrow \quad B_0 = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{K_{III}}{\mu}$$

# Asymptotic Mode III Field

- Phương trình cân bằng (tọa độ cực)

$$\nabla^2 w = w_{,rr} + \frac{1}{r} w_{,r} + \frac{1}{r^2} w_{,\theta\theta} = 0 \qquad (*)$$

$$w_{,\theta}\left(r, \theta = \pm\pi\right) = 0$$

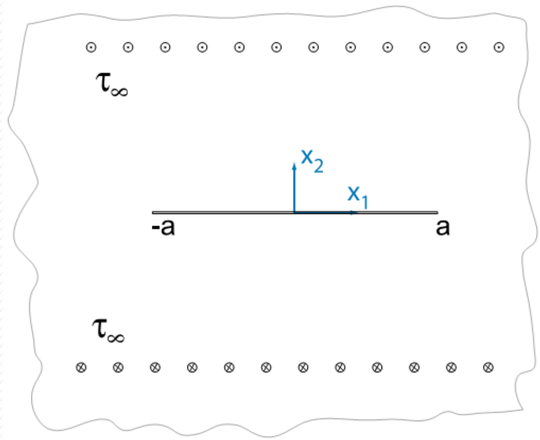
➢ Trường chuyển vị

$$w(r,\theta) = A_0 + \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{K_{III}}{\mu} r^{1/2} \sin\frac{\theta}{2} + A_1 r\cos\theta + B_2 r^{3/2} \sin\frac{3\theta}{2} + \cdots$$

➢ Trường ứng suất

$$\begin{pmatrix} \sigma_{3r} \\ \sigma_{3\theta} \end{pmatrix} = \frac{K_{III}}{\sqrt{2\pi r}} \begin{pmatrix} \sin\frac{\theta}{2} \\ \cos\frac{\theta}{2} \end{pmatrix} + A_1\mu \begin{pmatrix} \cos\theta \\ -\sin\theta \end{pmatrix} + \frac{3B_2\mu r^{1/2}}{2} \begin{pmatrix} \sin\frac{3\theta}{2} \\ \cos\frac{3\theta}{2} \end{pmatrix}.$$

# Full field for Finite Crack in an Infinite Body




$$\sigma_{31} = 0$$

$$\sigma_{32} = \tau_\infty$$

## ❖ Công thức biến phức

- Ký hiệu

$$\tau_\alpha = \sigma_{3\alpha}$$

$$\gamma_\alpha = 2\gamma_{3\alpha}$$

- Hàm ứng suất $\chi$

$$\tau_1 = -\chi_{,2}$$

$$\tau_2 = \chi_{,1}$$

- Phương trình tương thích

$$\nabla^2 \chi = 0$$

- Hàm phức

- Điều kiện biên lực:

$$\tau n = \tau_2 n_1 - \tau_1 n_2 + i(\tau_1 n_1 + \tau_2 n_2)$$

Với $n=n_1+in_2$

$$\mathrm{Im}[\tau(z)n(z)] = t^*(z)$$

$h(z) = \chi + i\mu w$ $\chi, \mu w$: thỏa phương trình Cauchy-Riemann và là hàm điều hòa nên h là hàm giải tích

$$\Rightarrow h'(z) = \chi_{,1} + i\mu w_{,1}$$

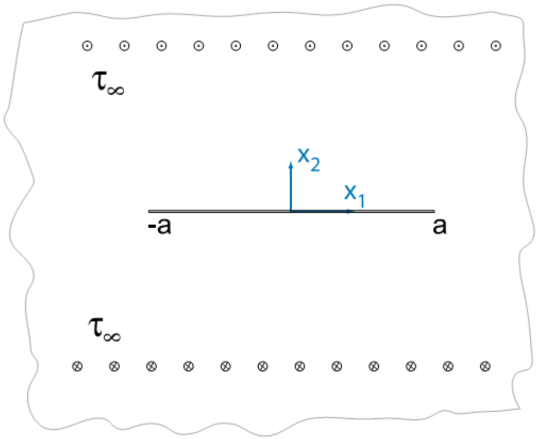
$$\Leftrightarrow h'(z) = \tau_2 + i\tau_1 \equiv \tau \quad \text{và} \quad \mathrm{Im}\left[h(z)\right] = \mu w$$

# Full field for Finite Crack in an Infinite Body

❖ Lời giải

- Ký hiệu

$$\tau_\alpha = \sigma_{3\alpha} \Leftrightarrow \begin{cases} \tau_1 = 0 \\ \tau_2 = \tau_\infty \end{cases} \Leftrightarrow \tau = \tau_2 + i0$$




$\sigma_{31} = 0$

$\sigma_{32} = \tau_\infty$

- Điều kiện biên: traction free

$$\mathrm{Re}[\tau] = \tau_2 = 0; -a \le x_1 \le a, x_2 = 0$$

- Lời giải theo [2]

$$h(z) = A(z^2 - a^2)^{1/2} \quad \text{Hàm giải tích???}$$

[2] J.W. Brown, R.V. Churchill,Complex Variables and Applications(McGraw-Hill, New York, 2004)

# Full field for Finite Crack in an Infinite Body

- Lời giải $h(z) = A(z^2 - a^2)^{1/2}$
  - Kiểm tra điều kiện biên:

$$\tau = h'(z) = \frac{Az}{(z^2 - a^2)^{1/2}} \to A;\ z \to \infty \implies A = \tau_\infty$$

Ta có:

$$z - a = r_1 e^{i\theta_1}$$
$$z + a = r_2 e^{i\theta_2} \implies z^2 - a^2 = r_1 r_2 e^{i(\theta_1+\theta_2)}$$

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$$
$$z = re^{i\varphi}$$

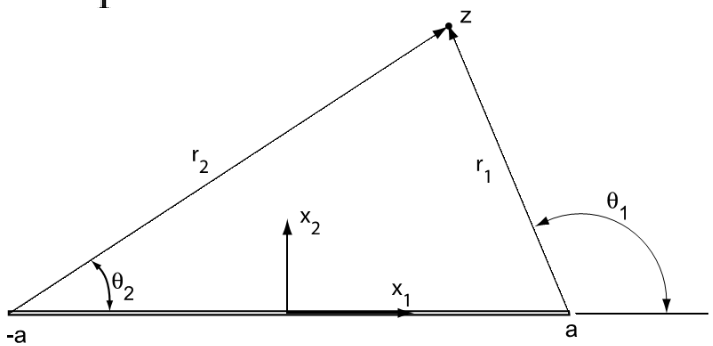
Xét mặt trên: $x_2 = 0^+,\ -a \le x_1 \le a,\ \theta_1 = \pi$ and $\theta_2 = 0,$

$$\implies z^2 - a^2 = r_1 r_2 e^{i(\pi+0)} = -r_1 r_2 = -a^2 + x_1^2$$

$$\implies \tau = h'(z) = \frac{\tau_\infty x_1}{(-r_1 r_2)^{1/2}} = \frac{-i\tau_\infty x_1}{(a^2 - x_1^2)^{1/2}}$$

$$\implies \mathrm{Re}[\tau] = 0$$

Tương tự cho mặt bên dưới.




[2] J.W. Brown, R.V. Churchill,Complex Variables and Applications(McGraw-Hill, New York, 2004)

# Full field for Finite Crack in an Infinite Body

- Lời giải $h(z) = A(z^2 - a^2)^{1/2}$
  - Tóm lại:

$$w = \frac{1}{\mu}\operatorname{Im}\left[h(z)\right] = \operatorname{Im}\frac{\tau_\infty}{\mu}(z^2 - a^2)^{1/2}$$

$$\tau = h'(z) = \tau_2 + i\tau_1 = \frac{\tau_\infty z}{(z^2 - a^2)^{1/2}}$$

  - Gần đỉnh vết nứt: z → a

$$\tau \approx \frac{\tau_\infty z}{\sqrt{(z-a)}\sqrt{2a}} \xrightarrow[z - a = r_1 e^{i\theta_1}]{} \tau = \tau_2 + i\tau_1 = \frac{\tau_\infty\sqrt{a}}{\sqrt{2}\sqrt{r_1}}e^{-i\theta/2} = \frac{\tau_\infty\sqrt{a}}{\sqrt{2r_1}}(\cos\theta/2 - i\sin\theta/2)$$

khi $r_1 \to 0$

So sánh với trường ứng suất tiệm cận???

  - Hệ số tập trung ứng suất:

$$K_{III} = \frac{\tau_\infty\sqrt{a}}{\sqrt{2r_1}}\sqrt{2\pi r_1} = \tau_\infty\sqrt{\pi a}.$$

# Các trường của mode I và mode II

❖ Bài toán biến dạng phẳng

- Giả thiết:

  $u_3 = 0$

  $u_\alpha = u_\alpha(x_1, x_2)$

  Lực chỉ tác dụng trong mặt phẳng $x_1$, $x_2$.

  Chiều $x_3$ lớn hơn nhiều so với 2 chiều còn lại

- Các phương trình cơ bản

$$\gamma_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}(u_{\alpha,\beta} + u_{\beta,\alpha}),$$

$$\gamma_{\alpha\beta} = \frac{1+\nu}{E}(\sigma_{\alpha\beta} - \nu\sigma_{\gamma\gamma}\delta_{\alpha\beta}),$$

$$\sigma_{\alpha\beta,\beta} = 0,$$

$$\sigma_{33} = \nu\sigma_{\gamma\gamma}.$$

# Các trường của mode I và mode II

❖ Bài toán ứng suất phẳng

- Giả thiết:

  $\sigma_{33} = 0$

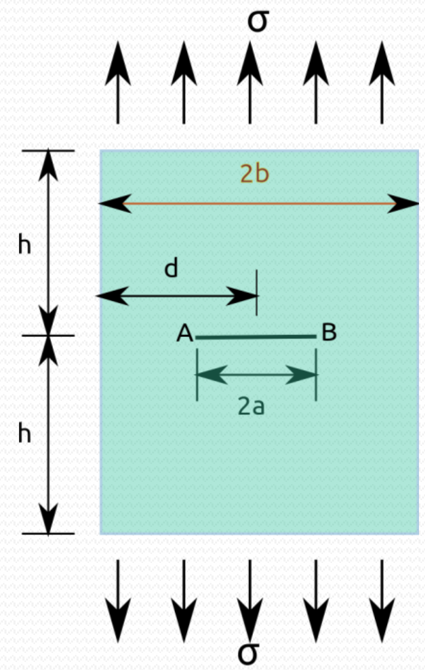
  $u_\alpha = u_\alpha(x_1, x_2)$

  Chiều $x_3$ bé hơn nhiều so với 2 chiều còn lại.

- Các phương trình cơ bản

$$\gamma_{33} = -\frac{\nu}{E}\sigma_{\gamma\gamma} = -\frac{\nu}{1-\nu}\gamma_{\gamma\gamma},$$

$$\gamma_{\alpha\beta} = \frac{1+\nu}{E}\left(\sigma_{\alpha\beta} - \frac{\nu}{1+\nu}\sigma_{\gamma\gamma}\delta_{\alpha\beta}\right).$$



# Các trường của mode I và mode II

❖ Hàm ứng suất

- Hệ tọa độ Cartesian

$$\sigma_{11} = \Phi_{,22}\,,$$
$$\sigma_{22} = \Phi_{,11}\,,$$
$$\sigma_{12} = -\Phi_{,12}\,.$$

- Hệ tọa độ cực

$$\sigma_{\theta\theta} = \Phi_{,rr}\,,$$
$$\sigma_{rr} = \frac{1}{r}\Phi_{,r} + \frac{1}{r^2}\Phi_{,\theta\theta}\,,$$
$$\sigma_{r\theta} = -\left(\frac{1}{r}\Phi_{,\theta}\right)_{,r}\,.$$

- Phương trình lưỡng điều hòa

$$\nabla^4\Phi = 0.$$

Hệ tọa độ cực

$$\nabla^4\Phi = \nabla^2(\nabla^2\Phi)$$

$$\nabla^2\Phi = \Phi_{,rr} + \frac{1}{r}\Phi_{,r} + \frac{1}{r^2}\Phi_{,\theta\theta}$$

# Asymptotic Mode I Field

❖ Trường ứng suất


- Traction free

$$\begin{cases} \mathbf{t} = 0 \\ \sigma_{\theta\theta} = \sigma_{r\theta} = 0 \end{cases} \quad \theta = \pm\pi$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \Phi_{,rr} = 0 \\ (\frac{1}{r}\Phi_{,\theta})_{,r} = 0 \end{cases} \quad \theta = \pm\pi$$

- Nghiệm theo Williams [3]

$$\Phi(r,\theta) = r^{\lambda+2}[A\cos\lambda\theta + B\cos(\lambda+2)\theta] + r^{\lambda+2}[C\sin\lambda\theta + D\sin(\lambda+2)\theta].$$

Mode I

Mode II

Mode I

$$\Rightarrow \Phi_{,rr}|_{\pi} = (\lambda+2)(\lambda+1)r^{\lambda}\left[A\cos\lambda\pi + B\cos(\lambda+2)\pi\right] = 0.$$

M. Williams, J. Appl. Mech.24, 109 (1957)

# Asymptotic Mode I Field

❖ Trường ứng suất

- Mode I


$$\Phi(r,\theta) = r^{\lambda+2}\left[A\cos\lambda\theta + B\cos(\lambda+2)\theta\right]$$

➢ $\Phi,_{rr}|_{\pi} = (\lambda+2)(\lambda+1)r^{\lambda}\left[A\cos\lambda\pi + B\cos(\lambda+2)\pi\right] = 0.$

$\Longrightarrow$ $(\lambda+2)(\lambda+1)(A+B)\cos\lambda\pi = 0.$

➢ $\left(\frac{1}{r}\Phi,_{\theta}\right),_r\bigg|_{\pi} = (\lambda+1)r^{\lambda}\left[-A\lambda\sin\lambda\pi - B(\lambda+2)\sin(\lambda\pi+2\pi)\right] = 0.$

$\Longrightarrow$ $\sin\lambda\pi[A\lambda + B(\lambda+2)] = 0$

- Chú ý: $\lambda > -1$

$\cos\lambda\pi = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda = -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \ldots \qquad B = -\lambda A/(\lambda+2)$

$\sin\lambda\pi = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda = 0, 1, 2, \ldots, \qquad B = -A.$

# Asymptotic Mode I Field

- Trường ứng suất
  - Mode I


$$\Phi(r,\theta) = r^{\lambda+2}\left[A\cos\lambda\theta + B\cos(\lambda+2)\theta\right]$$

Chọn 3 số hạng đầu tiên của chuỗi

$$\Phi(r,\theta) = r^{3/2}A_{-1/2}\left[\cos\frac{\theta}{2} + \frac{1}{3}\cos\frac{3\theta}{2}\right] + r^2 A_0[1-\cos 2\theta]$$
$$+ r^{5/2}A_{1/2}\left[\cos\frac{\theta}{2} - \frac{1}{5}\cos\frac{5\theta}{2}\right] + \text{H.O.T.}$$

$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{3}{4}A_{-1/2}r^{-1/2}\left[\cos\frac{\theta}{2} + \frac{1}{3}\cos\frac{3\theta}{2}\right] + 2A_0[1-\cos 2\theta]$$
$$+ \frac{1}{4}A_{1/2}r^{1/2}\left[15\cos\frac{\theta}{2} - 3\cos\frac{5\theta}{2}\right] + \text{H.O.T.}$$

# Asymptotic Mode I Field

- Trường ứng suất
  - Mode I


$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{3}{4}A_{-1/2}r^{-1/2}\left[\cos\frac{\theta}{2} + \frac{1}{3}\cos\frac{3\theta}{2}\right] + 2A_0[1 - \cos 2\theta]$$
$$+ \frac{1}{4}A_{1/2}r^{1/2}\left[15\cos\frac{\theta}{2} - 3\cos\frac{5\theta}{2}\right] + \text{H.O.T.}$$

- Hệ số tập trung ứng suất:

$$K_I \equiv \lim_{r\to 0}\sigma_{\theta\theta}|_{\theta=0}\sqrt{2\pi r} = A_{-1/2}\sqrt{2\pi}.$$

$$\Phi(r,\theta) = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi}}r^{3/2}\left[\cos\frac{\theta}{2} + \frac{1}{3}\cos\frac{3\theta}{2}\right] + 2A_0r^2[1 - \cos 2\theta]$$
$$+ r^{5/2}A_{1/2}\left[\cos\frac{\theta}{2} - \frac{1}{5}\cos\frac{5\theta}{2}\right] + \text{H.O.T.}$$

# Asymptotic Mode I Field

- Trường ứng suất
  - Mode I


$$K_I \equiv \lim_{r\to 0} \sigma_{\theta\theta}|_{\theta=0}\sqrt{2\pi r} = A_{-1/2}\sqrt{2\pi}.$$

$$\Phi(r,\theta) = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi}} r^{3/2}\left[\cos\frac{\theta}{2} + \frac{1}{3}\cos\frac{3\theta}{2}\right] + 2A_0 r^2[1-\cos 2\theta]$$
$$+ r^{5/2} A_{1/2}\left[\cos\frac{\theta}{2} - \frac{1}{5}\cos\frac{5\theta}{2}\right] + \text{H.O.T.}$$

$$\begin{pmatrix}\sigma_{rr}\\ \sigma_{\theta\theta}\\ \sigma_{r\theta}\end{pmatrix} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}}\frac{1}{4}\begin{pmatrix}-\cos\frac{3\theta}{2} + 5\cos\frac{\theta}{2}\\ \cos\frac{3\theta}{2} + 3\cos\frac{\theta}{2}\\ \sin\frac{\theta}{2} + \sin\frac{3\theta}{2}\end{pmatrix} + 4A_0\begin{pmatrix}\cos^2\theta\\ \sin^2\theta\\ -\sin\theta\cos\theta\end{pmatrix}$$
$$+ \frac{3A_{1/2} r^{1/2}}{4}\begin{pmatrix}3\cos\frac{\theta}{2} + \cos\frac{5\theta}{2}\\ 5\cos\frac{\theta}{2} - \cos\frac{5\theta}{2}\\ \sin\frac{\theta}{2} - \sin\frac{5\theta}{2}\end{pmatrix} + \text{H.O.T.}$$

# Asymptotic Mode I Field

- Trường chuyển vị
  - Lời giải Coker và Filon [5]


$$2\mu u_r = -\Phi_{,r} + (1-\overline{\nu}) r \Psi_{,\theta} \,,$$

$$2\mu u_\theta = -\frac{1}{r}\Phi_{,\theta} + (1-\overline{\nu}) r^2 \Psi_{,r}$$

$$\mu = \frac{E}{2(1+\nu)} : \text{shear modulus}$$

$$\begin{cases} \bar{\nu} = \nu & \text{plane strain} \\ \bar{\nu} = \nu/(1+\nu) & \text{plane stress} \end{cases}$$

$$\nabla^2 \Phi = (r\Psi_{,\theta})_{,r} \,,$$

Ta có:

$$\Phi(r,\theta) = r^{\lambda+2}[A\cos\lambda\theta + B\cos(\lambda+2)\theta],$$

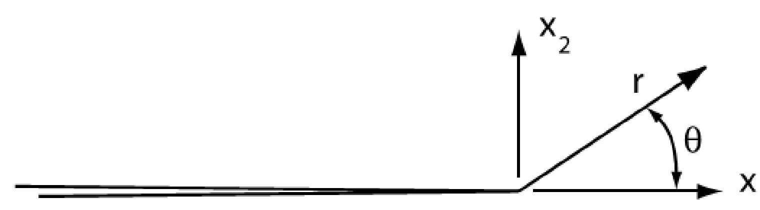
$$\Psi(r,\theta) = r^m[a_1 \cos m\theta + a_2 \sin m\theta].$$

$$\nabla^2 \Phi = (r\Psi_{,\theta})_{,r} \,, \Longrightarrow \Psi = r^\lambda \frac{4A}{\lambda}\sin\lambda\theta.$$

E.G. Coker, L.N.G. Filon, A Treatise on Photoelasticity (Cambridge University Press, Cambridge, 1931)

# Asymptotic Mode I Field

- ❖ Trường chuyển vị
  - Lời giải Coker và Filon [5]




$$\Phi(r,\theta) = r^{\lambda+2}[A\cos\lambda\theta + B\cos(\lambda+2)\theta],$$

$$\Psi = r^{\lambda}\frac{4A}{\lambda}\sin\lambda\theta.$$

Lấy hệ số đầu tiên:

$$\Phi = A_{-1/2}r^{3/2}\left[\cos\frac{\theta}{2} + \frac{1}{3}\cos\frac{3\theta}{2}\right],$$

$$\Psi = 8A_{-1/2}r^{-1/2}\sin\frac{\theta}{2}.$$

Trường chuyển vị mode I:

$$\begin{pmatrix} u_r \\ u_\theta \end{pmatrix} = K_I\frac{(1+\nu)}{E}\sqrt{\frac{r}{2\pi}}\begin{pmatrix} (\frac{5}{2}-4\overline{\nu})\cos\frac{\theta}{3} - \frac{1}{2}\cos\frac{3\theta}{2} \\ -(\frac{7}{2}-4\overline{\nu})\sin\frac{\theta}{2} + \frac{1}{2}\sin\frac{3\theta}{2} \end{pmatrix}$$

Chuyển vị mở vết nứt: $u_2(r,\pm\pi) = -u_\theta(r,\pm\pi)$

$$u_2(r,\pm\pi) = -u_\theta(r,\pm\pi) = \pm\frac{4K_I}{E'}\sqrt{\frac{r}{2\pi}}$$

$E' = E$ for plane stress

$E' = \frac{E}{1-\nu^2}$ for plane strain.

# Asymptotic Mode II Field

- Hệ số cường độ ứng suất

$$K_{II} \equiv \lim_{r \to 0} \sigma_{r\theta}|_{\theta=0}\sqrt{2\pi r}.$$

- Trường ứng suất

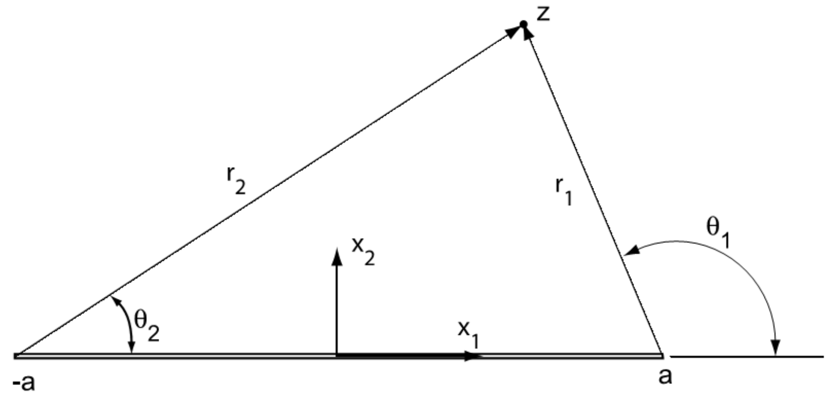
$$\begin{pmatrix} \sigma_{rr} \\ \sigma_{\theta\theta} \\ \sigma_{r\theta} \end{pmatrix} = \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \frac{1}{4} \begin{pmatrix} -5\sin\frac{\theta}{2} + 3\sin\frac{3\theta}{2} \\ -3\sin\frac{\theta}{2} - 3\sin\frac{3\theta}{2} \\ \cos\frac{\theta}{2} + 3\cos\frac{3\theta}{2} \end{pmatrix}$$

- Trường chuyển vị

$$\begin{pmatrix} u_r \\ u_\theta \end{pmatrix} = K_{II} \frac{(1+\nu)}{E} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \begin{pmatrix} (-\frac{5}{2} + 4\overline{\nu})\sin\frac{\theta}{2} + \frac{3}{2}\sin\frac{3\theta}{2} \\ -(\frac{7}{2} - 4\overline{\nu})\cos\frac{\theta}{2} + \frac{3}{2}\cos\frac{3\theta}{2} \end{pmatrix}$$

# Phương pháp hàm biến phức

- Xác định đầy đủ trường ứng suất, chuyển vị và hệ số tập trung ứng suất của vết nứt hữu hạn (mode I và II) trong tấm vô hạn chịu tải trọng bất kỳ.




- Các phương trình:

$$\nabla^4 \Phi = 0,$$

➢ Lời giải Hellan [6]

$$2\Phi = \mathrm{Re}\left[\bar{z}\phi(z) + \psi(z)\right],$$

$\phi, \psi$ Hàm giải tích theo $z=x_1+ix_2$

Ứng suất

$$\sigma_{11} = \mathrm{Re}\left[\phi' - \frac{1}{2}\bar{z}\phi'' - \frac{1}{2}\psi''\right],$$

$$\sigma_{22} = \mathrm{Re}\left[\phi' + \frac{1}{2}\bar{z}\phi'' + \frac{1}{2}\psi''\right],$$

$$\sigma_{12} = \frac{1}{2}\mathrm{Im}\left[\bar{z}\phi'' + \psi''\right].$$

Chuyển vị

$$4\mu u_1 = \mathrm{Re}\left[\kappa\phi - \bar{z}\phi' - \psi'\right],$$

$$4\mu u_2 = \mathrm{Im}\left[\kappa\phi + \bar{z}\phi' + \psi'\right],$$

$\kappa = 3 - 4\nu$ for plane strain

$\kappa = (3-\nu)/(1+\nu)$ for plane stress.

K. Hellan,Introduction to Fracture Mechanics(McGraw-Hill, New York, 1984)

# Phương pháp hàm biến phức

- Để đơn giản trong việc giải bài toán, ta sử dụng lời giải của Westergaard [7]
- Mode I: $\sigma_{12}(x_1,0)=0$

$$\Rightarrow \psi''=-z\phi'' \Rightarrow \psi'=-z\phi'+\phi+C$$

$$\sigma_{11}=\operatorname{Re}\phi'-x_2\operatorname{Im}\phi'',\qquad \sigma_{22}=\operatorname{Re}\phi'+x_2\operatorname{Im}\phi'',\qquad \sigma_{12}=-x_2\operatorname{Re}\phi''.$$

$$2\mu u_1=\frac{\kappa-1}{2}\operatorname{Re}\phi-x_2\operatorname{Im}\phi',\qquad 2\mu u_2=\frac{\kappa+1}{2}\operatorname{Im}\phi-x_2\operatorname{Re}\phi'.$$

- Mode II: $\sigma_{22}(x_1,0)=0$

$$\Rightarrow \psi''=-2\phi'-z\phi'' \Rightarrow \psi'=-\phi-z\phi'+C$$

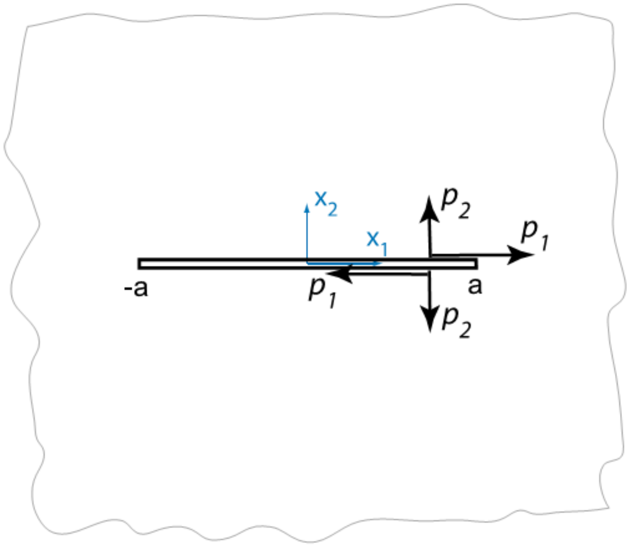
$$\sigma_{11}=2\operatorname{Re}\phi'-x_2\operatorname{Im}\phi'',\qquad \sigma_{22}=x_2\operatorname{Im}\phi'',\qquad \sigma_{12}=-\operatorname{Im}\phi'-x_2\operatorname{Re}\phi''.$$

$$2\mu u_1=\frac{\kappa+1}{2}\operatorname{Re}\phi-x_2\operatorname{Im}\phi',\qquad 2\mu u_2=\frac{\kappa-1}{2}\operatorname{Im}\phi-x_2\operatorname{Re}\phi'.$$

H.M. Westergaard, J. Appl. Mech.61, A49 (1939)

# Phương pháp hàm biến phức

## ❖ Nghiệm tổng quát




- Tải trọng kéo $\mathbf{t} = p_1(x_1)\mathbf{e_1} + p_2(x_2)\mathbf{e}_2$
- Lời giải Sedov [8]

Mode I

$$\phi' = \frac{1}{\pi\sqrt{z^2 - a^2}} \int_{-a}^{a} p_2(t) \frac{\sqrt{a^2 - t^2}}{z - t}\, dt.$$

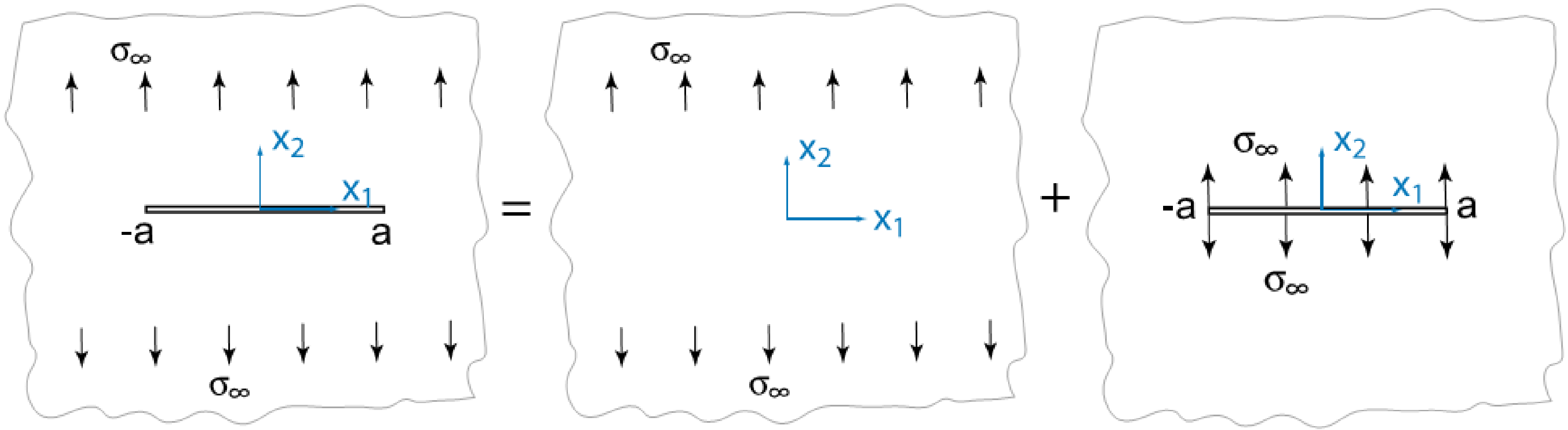
Mode II

$$\phi' = \frac{-i}{\pi\sqrt{z^2 - a^2}} \int_{-a}^{a} p_1(t) \frac{\sqrt{a^2 - t^2}}{z - t}\, dt.$$

L.I. Sedov,A Course in Continuum Mechanics, vol. 4 (Wolters-Noordhoff, Groningen, 1972)

# Phương pháp hàm biến phức

- Vết nứt mode I trong tấm vô hạn




$$\phi' = \frac{1}{\pi\sqrt{z^2-a^2}}\int_{-a}^{a} p_2(t)\frac{\sqrt{a^2-t^2}}{z-t}\,dt. \qquad p_2 = \sigma_\infty$$

$$\Longrightarrow \phi' = \frac{\sigma_\infty}{\pi\sqrt{z^2-a^2}}\int_{-a}^{a}\frac{\sqrt{a^2-t^2}}{z-t}\,dt. \Longrightarrow \phi' = \frac{\sigma_\infty z}{\sqrt{z^2-a^2}} - \sigma_\infty,$$

$$\Longrightarrow \phi = \sigma_\infty\sqrt{z^2-a^2} - \sigma_\infty z + \text{const.}$$

L.I. Sedov,A Course in Continuum Mechanics, vol. 4 (Wolters-Noordhoff, Groningen, 1972)

# Phương pháp hàm biến phức

❖ Vết nứt mode I trong tấm vô hạn

- Lời giải Wastergaard

$$\sigma_1 = \operatorname{Re}\phi' - x_2 \operatorname{Im}\phi''$$

$$\sigma_{22} = \operatorname{Re}\phi' + x_2 \operatorname{Im}\phi'' + \sigma_\infty$$

$$\sigma_{12} = -x_2 \operatorname{Re}\phi''$$

$$\phi' = \frac{\sigma_\infty z}{\sqrt{z^2 - a^2}} - \sigma_\infty,$$

$$\sigma_{11} = \sigma_\infty \left[ \operatorname{Re}\left( \frac{z}{\sqrt{z^2 - a^2}} \right) - x_2 \operatorname{Im}\left( \frac{1}{\sqrt{z^2 - a^2}} - \frac{z^2}{(z^2 - a^2)^{3/2}} \right) \right] - \sigma_\infty,$$

$$\sigma_{22} = \sigma_\infty \left[ \operatorname{Re}\left( \frac{z}{\sqrt{z^2 - a^2}} \right) + x_2 \operatorname{Im}\left( \frac{1}{\sqrt{z^2 - a^2}} - \frac{z^2}{(z^2 - a^2)^{3/2}} \right) \right], \quad ($$

$$\sigma_{12} = -\sigma_\infty x_2 \operatorname{Re}\left( \frac{1}{\sqrt{z^2 - a^2}} - \frac{z^2}{(z^2 - a^2)^{3/2}} \right).$$

# Phương pháp hàm biến phức

❖ Vết nứt mode I trong tấm vô hạn

- Trên bề mặt vết nứt: $z=x_1$

$$\sigma_{11}(x_1,0) = \mathrm{Re}\left(\frac{\sigma_\infty x_1}{\sqrt{x_1^2-a^2}}\right) - \sigma_\infty, \Longrightarrow \sigma_{11} = -\sigma_\infty \Leftrightarrow \text{Compression}$$

$$\sigma_{22}(x_1,0) = \mathrm{Re}\left(\frac{\sigma_\infty x_1}{\sqrt{x_1^2-a^2}}\right), \Longrightarrow \sigma_{22} = 0 \Leftrightarrow \text{Traction free}$$

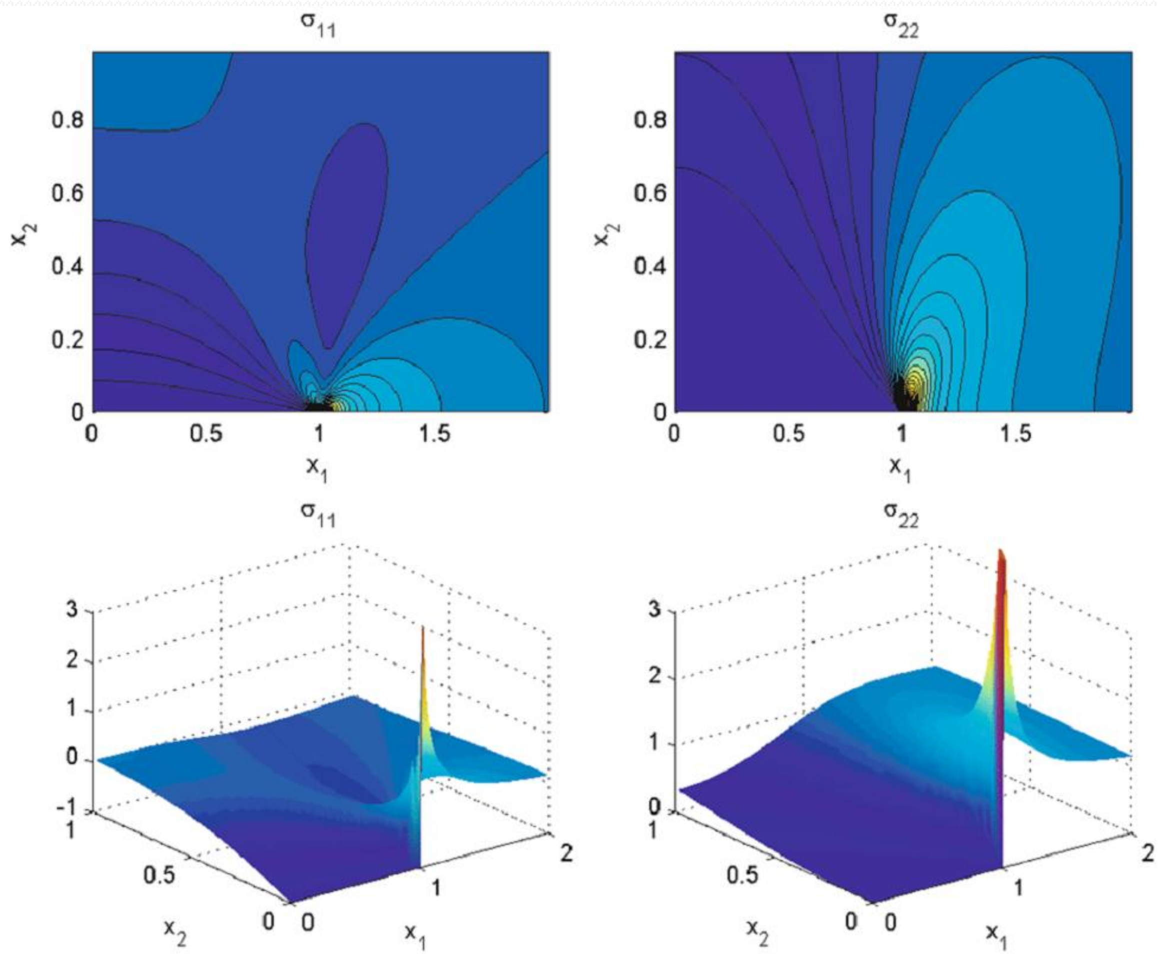
$$\sigma_{12}(x_1,0) = 0.$$

Chú ý: trên đường nứt $-a \le x_1 \le a$

$$\Rightarrow \mathrm{Re}\left(\frac{\sigma_\infty x_1}{\sqrt{x_1^2-a^2}}\right) = 0,$$

# Phương pháp hàm biến phức

❖ Vết nứt mode I trong tấm vô hạn




$0 \le x_1/a \le 2,\ 0 \le x_2/a \le 1$

# Phương pháp hàm biến phức

## ❖ Vết nứt mode I trong tấm vô hạn

- Xác định hệ số $K_I$:

Cho $r = x_1 - a, x_1 = r + a; r \to 0$

$$\sigma_{22}(r,0) = \frac{\sigma_\infty a}{\sqrt{r}\sqrt{2a}} = \frac{\sigma_\infty \sqrt{a}}{\sqrt{2r}}.$$

➢ Hệ số tập trung ứng suất

$$K_I = \lim_{r \to 0} \sigma_{22}(r,0)\sqrt{2\pi r}$$

$$\longrightarrow \quad K_I = \sigma_\infty \sqrt{\pi a}.$$

➢ Chuyển vị mở vết nứt

$$u_2^+(x_1,0) - u_2^-(x_1,0) = \sigma_\infty \frac{\kappa+1}{4\mu}\sqrt{a^2 - x_1^2}.$$

# Phương pháp hàm biến phức

- Các hệ số cường độ ứng suất của vết nứt chịu tải bất kì
  - Trạng thái ứng suất tại gần đỉnh vết nứt: $z \to a, z+a \approx 2a, z-t \approx a-t$

Hàm ứng suất: $$\phi' = \frac{1}{\pi\sqrt{z^2-a^2}} \int_{-a}^{a} p_2(t) \frac{\sqrt{a^2-t^2}}{z-t} dt.$$

$$\Longrightarrow \quad \phi' = \frac{1}{\pi} \frac{1}{\sqrt{z-a}} \frac{1}{\sqrt{2a}} \int_{-a}^{a} p_2(t) \sqrt{\frac{a+t}{a-t}} dt.$$

Ứng suất: $\sigma_{22} = \operatorname{Re}\phi' + x_2 \operatorname{Im}\phi'' + \sigma_\infty$

Ứng suất phía trên đỉnh vết nứt: $z = x_1, x_1 \geq a$

$$\sigma_{22}(x_1, 0) = \frac{1}{\pi\sqrt{2a}} \frac{1}{\sqrt{x_1-a}} \int_{-a}^{a} p_2(t) \sqrt{\frac{a+t}{a-t}} dt + \sigma_\infty.$$

➢ Hệ số tập trung ứng suất

$$K_I = \lim_{r\to 0} \sigma_{22}(r, 0)\sqrt{2\pi r} \quad \xrightarrow[z = x_1 - a]{} \quad K_I = \frac{1}{\sqrt{\pi a}} \int_{-a}^{a} p_2(t) \sqrt{\frac{a+t}{a-t}} dt.$$

# Phương pháp hàm biến phức

- Trường tiệm cận của mode I
  - Trạng thái ứng suất tại gần đỉnh vết nứt: $z \to a, z+a \approx 2a, z-t \approx a-t$

Hàm ứng suất: $$\phi' = \frac{1}{\pi}\frac{1}{\sqrt{z-a}}\frac{1}{\sqrt{2a}}\int_{-a}^{a} p_2(t)\sqrt{\frac{a+t}{a-t}}\,dt.$$

Hệ số tập trung ứng suất

$$K_I = \frac{1}{\sqrt{\pi a}}\int_{-a}^{a} p_2(t)\sqrt{\frac{a+t}{a-t}}\,dt.$$

$$\rightarrow \quad \phi' = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{\sqrt{z-a}}, \qquad \phi'' = -\frac{K_I}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{2(z-a)^{3/2}}.$$

$$\xrightarrow{z-a=re^{i\theta}} \quad \phi' = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{\sqrt{r}}e^{-i\theta/2}, \qquad \phi'' = -\frac{K_I}{2\sqrt{2\pi}}\frac{1}{r^{3/2}}e^{-3i\theta/2}.$$

Chú ý: $\phi' = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{\sqrt{z-a}}, \quad \rightarrow \quad \phi = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi}}2\sqrt{z-a} = K_I\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sqrt{r}e^{i\theta/2}.$

# Phương pháp hàm biến phức

- Trường tiệm cận của mode I
  - Trạng thái ứng suất tại gần đỉnh vết nứt: $z \to a, z + a \approx 2a, z - t \approx a - t$

Ứng suất

$$\sigma_{22} = \operatorname{Re}\phi' + x_2 \operatorname{Im}\phi'' + \sigma_\infty$$

$x_2 = r\sin\theta$ $\Rightarrow$

$$\sigma_{22} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi}}\left(\frac{1}{\sqrt{r}}\cos\frac{\theta}{2} + r\ \sin\theta\frac{1}{2}\frac{1}{r^{3/2}}\sin\frac{3\theta}{2}\right).$$

$\Rightarrow$

$$\sigma_{22} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}}\cos\frac{\theta}{2}\left(1 + \sin\frac{\theta}{2}\sin\frac{3\theta}{2}\right).$$

Tương tự:

$$\sigma_{11} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}}\cos\frac{\theta}{2}\left(1 - \sin\frac{\theta}{2}\sin\frac{3\theta}{2}\right)$$

$$\sigma_{12} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}}\cos\frac{\theta}{2}\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{3\theta}{2}.$$

# Phương pháp hàm biến phức

- Trường tiệm cận của mode I
  - Chuyển vị:

$$2\mu u_1 = \frac{\kappa - 1}{2}\operatorname{Re}\phi - x_2 \operatorname{Im}\phi',$$

$$2\mu u_2 = \frac{\kappa + 1}{2}\operatorname{Im}\phi - x_2 \operatorname{Re}\phi'.$$

$$\phi = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi}} 2\sqrt{z-a} = K_I \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sqrt{r} e^{i\theta/2}.$$

$$\phi' = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\sqrt{z-a}},$$

$$u_1 = \frac{K_I}{2\mu}\sqrt{\frac{r}{2\pi}} \cos\frac{\theta}{2}(\kappa - \cos\theta).$$

$$u_2 = \frac{K_I}{2\mu}\sqrt{\frac{r}{2\pi}} \sin\frac{\theta}{2}(\kappa - \cos\theta).$$