CHƯƠNG 3
Dòng năng lượng trong phá hủy đàn hồi

Tóm tắt

- Một hướng tiếp cận khác thường được sử dụng để nghiên cứu sự phá hủy đó chính là khảo sát dòng năng lượng ra và vào vật thể có vết nứt.
- Trong hướng tiếp cận này, năng lượng cần cho sự phá hủy sẽ được xem xét và sự liên kết giữa dòng năng lượng và ứng suất tại đỉnh vết nứt sẽ được thiết lập.
- Sự liên kết này cũng là công cụ hữu hiệu cho việc xác định các hệ số tập trung ứng suất.
- Hướng tiếp cận năng lượng là như nhau cho cả trường hợp đàn hồi tuyến tính và phi tuyến.

Nội dung

- Lực và chuyển vị tổng quát hóa
- Năng lượng đàn hồi
- Tốc độ giải phóng năng lượng G
- Tích phân đóng vết nứt cho G
- Sự liên hệ giữa G và hệ số tập trung ứng suất
- Tích phân đường cong cho G (Tích phân J)
- Bài tập

Lực và chuyển vị tổng quát hóa

- Trong trường hợp tổng quát, các đại lượng như lực, chuyển vị và năng lượng trong vật thể có thể được viết như là tích phân thể tích và tích phân mặt.
- Để đơn giản hóa các ký hiệu và tập trung vào các ý tưởng cơ bản, chuyển vị và lực điểm tương đương sẽ được định nghĩa.
- Với hướng tiếp cận này, chúng ta không cần phải xem xét chi tiết lực và hình học bài toán.
- Có hai trường hợp sẽ được nghiên cứu: prescribed loading và prescribed displacement

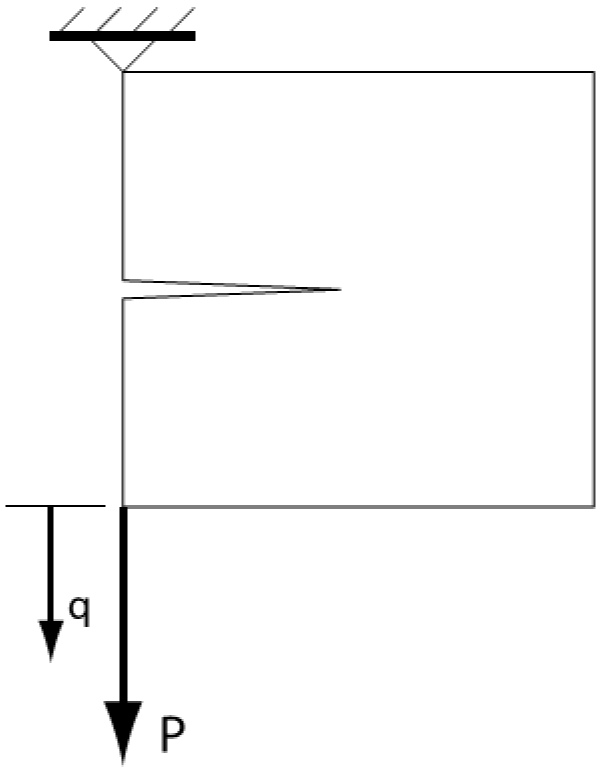
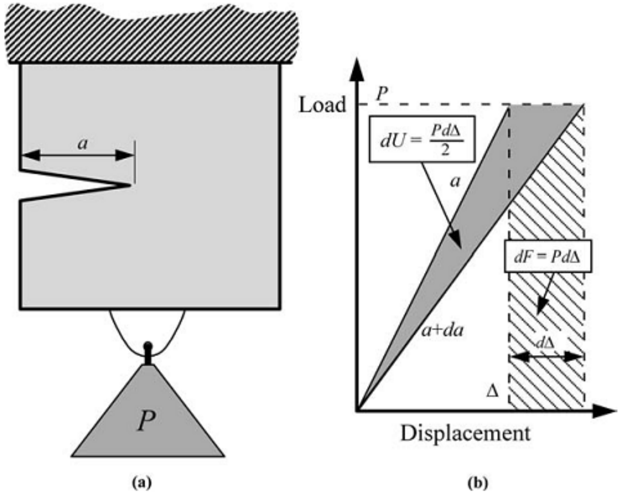


Fig. 3.1 Using the concept of generalized loads and displacements any loading may be represented as if it consisted of a single load, *P* with corresponding load point displacement, *q*

Lực và chuyển vị tổng quát hóa



- Prescribed Loads
  - Vật thể chịu tác dụng của các lực kéo và lực khối.
  - Vật thể có một hoặc nhiều vết nứt và tải luôn là hằng dù vết nứt đang phát triển
  - Các thành phần lực được cho:

$$\mathbf{t} = P\hat{\mathbf{t}}$$

$$\mathbf{b} = P\hat{\mathbf{b}}$$

P: đại lượng vô hướng được gọi là tải tổng quát hóa

  - Nếu chuyển vị thay đổi = δ**u** thì công sinh bởi lực cho bởi:

$$\delta U = \int_{\mathscr{S}} \mathbf{t}\cdot\delta\mathbf{u}\,dS + \int_{\mathscr{V}} \mathbf{b}\cdot\delta\mathbf{u}\,dV = \int_{\mathscr{S}} P\hat{\mathbf{t}}\cdot\delta\mathbf{u}\,dS + \int_{\mathscr{V}} P\hat{\mathbf{b}}\cdot\delta\mathbf{u}\,dV. \qquad (3.1)$$

Tải cố định

$$\delta U = P\delta\left\{\int_{\mathscr{S}} \hat{\mathbf{t}}\cdot\mathbf{u}\,dS + \int_{\mathscr{V}} \hat{\mathbf{b}}\cdot\mathbf{u}\,dV\right\}.$$

  - Chuyển vị tổng quát hóa

$$q \equiv \int_{\mathscr{S}} \hat{\mathbf{t}}\cdot\mathbf{u}\,dS + \int_{\mathscr{V}} \hat{\mathbf{b}}\cdot\mathbf{u}\,dV, \qquad (3.2)$$

Lực và chuyển vị tổng quát hóa

- Prescribed Loads
  - Chuyển vị tổng quát hóa

$$q \equiv \int_{\mathscr{S}} \hat{\mathbf{t}} \cdot \mathbf{u}\, dS + \int_{\mathscr{V}} \hat{\mathbf{b}} \cdot \mathbf{u}\, dV, \tag{3.2}$$

  - Công sinh ra = Lực x Số gia chuyển vị

$$\delta U = P \delta q. \tag{3.3}$$

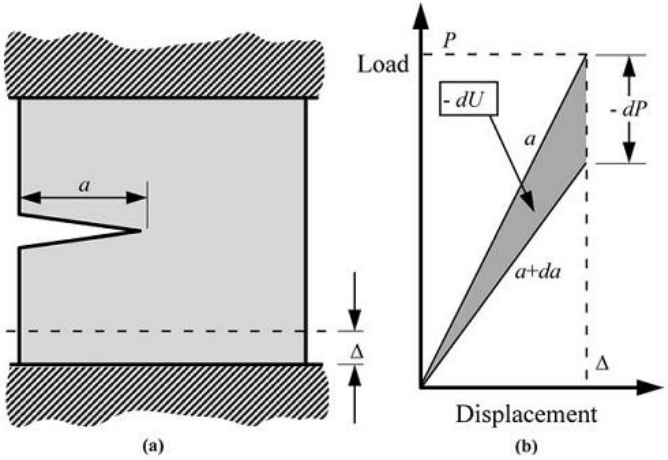
Lực và chuyển vị tổng quát hóa

- Prescribed Displacement

  - Trường chuyển vị $\mathbf{u} = q\hat{\mathbf{u}}$ q: Chuyển vị tổng quát hóa
  - Công sinh ra do một gia số chuyển vị $\delta\mathbf{u} = \delta q\hat{\mathbf{u}}$

$$\delta U = \int_{\mathcal{S}} \mathbf{t} \cdot \delta q \hat{\mathbf{u}} \, dS + \int_{\mathcal{V}} \mathbf{b} \cdot \delta q \hat{\mathbf{u}} \, dV,$$

$$\delta U = \delta q \left\{ \int_{\mathcal{S}} \mathbf{t} \cdot \hat{\mathbf{u}} \, dS + \int_{\mathcal{V}} \mathbf{b} \cdot \hat{\mathbf{u}} \, dV \right\}.$$



  - Lực tổng quát hóa, P được định nghĩa là:

$$P \equiv \int_{\mathcal{S}} \mathbf{t} \cdot \hat{\mathbf{u}} \, dS + \int_{\mathcal{V}} \mathbf{b} \cdot \hat{\mathbf{u}} \, dV, \qquad (3.4)$$

  - Công sinh ra = Lực x Số gia chuyển vị

$$\delta U = P \delta q$$

Năng lượng biến dạng đàn hồi

- Trong mục này, chúng ta sẽ khảo sát sự thay đổi năng lượng biến dạng trước khi vết nứt phát triển, cũng như mối liên hệ của nó với công do lực ngoài tác dụng.
  - Mật độ năng lượng biến dạng đàn hồi:

$$W = \int_0^{\gamma} \sigma_{ij} d\gamma_{ij}. \qquad (3.5)$$

  - Năng lượng biến dạng toàn phần khi đó là

$$\Omega = \int_{\mathcal{V}} W \, dV. \qquad (3.7)$$

  - Gia số mật độ năng lượng biến dạng do gia số của chuyển vị sinh ra gia số của biến dạng:

$$\delta W = \sigma_{ij} \delta \gamma_{ij}$$

  - Từ đây, suy ra được gia số của năng lượng biến dạng tổng cộng là:

$$\delta \Omega = \int_V \delta W \, dV$$

Năng lượng biến dạng đàn hồi

- Khi không có sự phát triển của vết nứt, công do gia số chuyển vị là:

$$\delta U = P\delta q = \int_{\mathscr{S}} \mathbf{t} \cdot \delta \mathbf{u} \, dS + \int_{\mathscr{V}} \mathbf{b} \cdot \delta \mathbf{u} \, dV.$$

- Thay lực mặt **t** bằng mối quan hệ của nó với ứng suất, ta được

$$\delta U = \int_{\mathscr{S}} \sigma_{ij} n_j \delta u_i \, dS + \int_{\mathscr{V}} b_i \delta u_i \, dV. \qquad (3.8)$$

- Áp dụng định lý Divergence cho thành phần đầu tiên, ta được:

$$\delta U = \int_{\mathscr{V}} \{\sigma_{ij,j} \, \delta u_i + \sigma_{ij} \delta u_{i,j} + b_i \delta u_i\} \, dV.$$

- Do phương trình cân bằng, nên thành phần đầu tiên và thứ 3 sẽ bằng 0, hơn nữa $\sigma_{ij}\delta u_{i,j} = \sigma_{ij}\delta\gamma_{ij} = \delta W$

$$\delta U = \int_{\mathscr{V}} \sigma_{ij} \delta \gamma_{ij} \, dV = \int_{\mathscr{V}} \delta W \, dV = \delta \Omega. \qquad (3.9)$$

- (3.9) cho thấy, **khi vết nứt không phát triển, số gia năng lượng biến dạng bằng số gia của công ngoại lực.**

Năng lượng biến dạng đàn hồi

- Trường hợp prescribed displacement, năng lượng tổng cộng sẽ hàm theo chuyển vị, q và cấu hình vết nứt, mà để đơn giản ta có thể đại diện bằng diện tích vết nứt s: $\Omega = \Omega(q, s)$
- Trường hợp vết nứt không phát triển, gia số năng lượng biến dạng:

$$\delta\Omega = \frac{\partial\Omega}{\partial q}\delta q. \tag{3.10}$$

$$\delta\Omega = \delta U = P\delta q \;\longrightarrow\; P = \frac{\partial\Omega}{\partial q}, \tag{3.11}$$

- (3.11) cho thấy, **lực tổng quát hóa là đạo hàm của năng lượng tổng theo chuyển vị tổng quát hóa.**

Tốc độ giải phóng năng lượng

- Khi vết bắt đầu phát triển, cần thiết phải có năng lượng để cung cấp cho đỉnh của vết nứt. Nguồn năng lượng này qua vật thể đàn hồi chảy đến đỉnh vết nứt và tiêu tán do biến dạng không hồi phục, nhiệt, âm và năng lượng bề mặt
  - Trong mục này, khái niệm tốc độ giải phóng năng lượng G sẽ được giới thiệu. G: năng lượng tiêu tán do phá hủy trên đơn vị diện tích mặt phá hủy mới, ds.
  - Hai trường hợp cụ thể (prescribed displacement và prescribed force) sẽ được bắt đầu trước khi đi đến một định nghĩa tổng quát về tốc độ giải phóng năng lượng.

Tốc độ giải phóng năng lượng

- Prescribed Displacement
  - Trong trường hợp này, Ω= Ω(q,s). Nếu vết nứt lan truyền dẫn đến sự gia tăng của bề mặt vết nứt 1 lượng δs, thì gia số của năng lượng biến dạng:

$$\delta\Omega = \frac{\partial\Omega}{\partial s}\delta s + \frac{\partial\Omega}{\partial q}\delta q. \qquad (3.12)$$

  - Khi vết nứt phát triển, trong trường hợp chuyển vị cố định: δq=0 thì

$$\delta\Omega = \frac{\partial\Omega}{\partial s}\delta s,$$

  - Có nghĩa là, dù không có công của lực trong suốt quá trình phát triển vết nứt, thì năng lượng biến dạng vẫn thay đổi theo tỉ lệ với số gia diện tích vết nứt. Năng lượng thay đổi trên 1 diện tích vết nứt được gọi là tốc độ giải phóng năng lượng G; đơn vị [F.L/L^2], được định nghĩa là:

$$G = -\left.\frac{\partial\Omega}{\partial s}\right|_q, \qquad (3.13)$$

$$\Longrightarrow \quad \delta\Omega = -G\delta s. \qquad (3.14)$$

Tốc độ giải phóng năng lượng

- Prescribed Displacement
  - Gia số của năng lượng biến dạng:

$$\delta\Omega = -G\delta s. \tag{3.14}$$

  - Ta sẽ chứng minh được rằng, G **luôn dương** và do đó, vật thể luôn bị mất năng lượng trong quá trình vết nứt phát triển. Tất cả năng lượng tiêu tán trong quá trình phá hủy sẽ chảy đến vết nứt từ năng lượng biến dạng chứa trong vật thể trước khi phá hủy.

Tốc độ giải phóng năng lượng

- Prescribed Loads

  - Trong trường hợp này, $\delta q \neq 0$ khi vết nứt phát triển, do đó lực ngoài sẽ không tác dụng lên vật thể khi vết nứt phát triển. Chuyển vị $q=q(P,s)$ và năng lượng biến dạng $\Omega=\Omega(q(P,s),s)$.
  - Số gia năng lượng biến dạng khi vết nứt phát triển là

$$\delta\Omega = \frac{\partial\Omega}{\partial q}\frac{\partial q}{\partial P}\delta P + \frac{\partial\Omega}{\partial q}\frac{\partial q}{\partial s}\delta s + \left.\frac{\partial\Omega}{\partial s}\right|_q \delta s. \qquad (3.15)$$

  - Vì lực cố định, $\delta P=0$. Thay

$$\frac{\partial\Omega}{\partial q} = P \qquad \frac{\partial q}{\partial s}\delta s = \delta q$$

$$\frac{\partial\Omega}{\partial s}\Big|_q = -G$$

  - Số gia năng lượng trở thành

$$\delta\Omega = P\delta q - G\delta s, \qquad (3.16)$$

Sự thay đổi của năng lượng bằng với năng lượng đầu vào trừ đi năng lượng hao tán bởi vết nứt.

Tốc độ giải phóng năng lượng

- Prescribed Loads

  - Số gia năng lượng có thể viết khác:

$$\delta\Omega = \delta(Pq) - \delta P q - G\delta s.$$

$$\delta(\Omega - Pq) = -G\delta s,$$

$\delta P = 0$

  - Nhu vậy, đối với tải cố định

$$G = -\frac{\partial}{\partial s}(\Omega - Pq).$$

Tốc độ giải phóng năng lượng

- General Loading
  - Sử dụng định nghĩa lực và chuyển vị tổng quát hóa cho trường hợp Prescribed loading

$$G = -\frac{\partial}{\partial s}\left[\Omega - P\left\{\int_{\mathscr{S}} \hat{\mathbf{t}}\cdot\mathbf{u}\,dS + \int_{\mathscr{V}} \hat{\mathbf{b}}\cdot\mathbf{u}\,dV\right\}\right],$$
$$= -\frac{\partial}{\partial s}\left[\Omega - \left\{\int_{\mathscr{S}_t} \mathbf{t}\cdot\mathbf{u}\,dS + \int_{\mathscr{V}} \mathbf{b}\cdot\mathbf{u}\,dV\right\}\right].$$

  - Trường hợp Prescribed displacement

$$G = -\frac{\partial \Omega}{\partial s} = -\frac{\partial}{\partial s}\left[\Omega - \left\{\int_{\mathscr{S}_t} \mathbf{t}\cdot\mathbf{u}\,dS + \int_{\mathscr{V}} \mathbf{b}\cdot\mathbf{u}\,dV\right\}\right].$$

Các tích phân bằng không trong trường hợp prescribed displacement

  - Thế năng được định nghĩa như sau:

$$\Pi = \Omega - \left\{\int_{\mathscr{S}_t} \mathbf{t}\cdot\mathbf{u}\,dS + \int_{\mathscr{V}} \mathbf{b}\cdot\mathbf{u}\,dV\right\}, \qquad (3.18)$$

  - Tốc độ giải phóng năng lượng: $G \equiv -\frac{\partial \Pi}{\partial s},$ (3.19)

Tốc độ giải phóng năng lượng

- General Loading
  - Tốc độ giải phóng năng lượng: sự thay đổi thế năng trên đơn vị diện tích vết nứt. Đây là định nghĩa cơ bản của G.
  - Với tải bất kỳ khác hoặc với các điều kiện biên hỗn hợp thì sẽ rơi vào giữa hai trường hợp cực trị của prescribed loading và prescribed displacment.

Tốc độ giải phóng năng lượng – Các giải thích

- Phương pháp đa mẫu cho vật liệu phi tuyến
  - Giả sử có thể thực hiện nhiều thí nghiệm trên vật thể đàn hồi có vết nứt.
  - Trong thí nghiệm tải P và chuyển vị điểm đặt tải q được đo và ghi lại.
  - Vì vật liệu là đàn hồi nên tồn tại mối liên hệ giữa P và q.
  - Trong trường hợp prescribed displacement, Ω= Ω(q,s)

$$G = -\frac{\partial \Omega}{\partial s}, \quad P = \frac{\partial \Omega}{\partial q}. \quad \Longrightarrow \quad -\frac{\partial G}{\partial q} = \frac{\partial P}{\partial s}. \quad \Longrightarrow \quad G = -\int_0^q \frac{\partial P}{\partial s} dq. \qquad (3.20)$$

Tốc độ giải phóng năng lượng – Các giải thích

- Phương pháp đa mẫu cho vật liệu phi tuyến

  - Xét phần năng lượng bù Pq-Ω

$$Pq - \Omega = \int_{o}^{P} q(P', s)dP',$$

Vì vậy

$$d(Pq - \Omega) = qdP,$$

Hay

$$q = -\frac{\partial}{\partial P}(\Omega - Pq). \qquad (3.21)$$

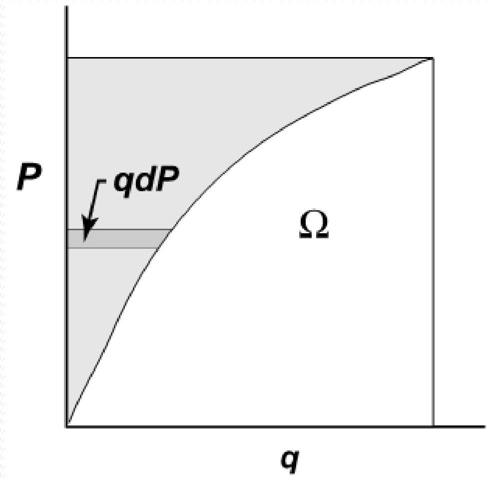


Fig. 3.2 Strain energy, Ω and complementary energy (*shaded area*)

  - Trong trường hợp prescribed load, Ω= Ω(P,s)

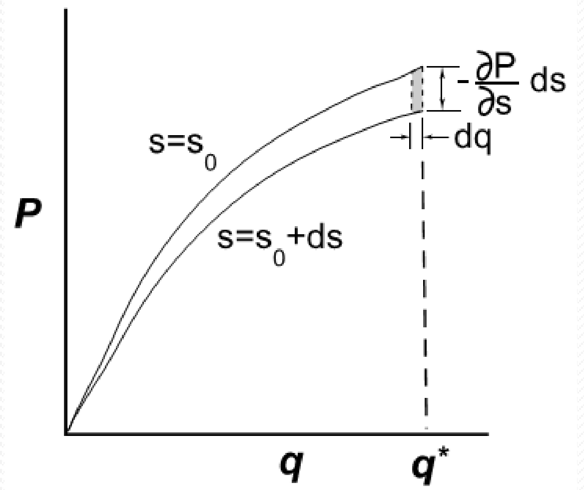
$$G = -\frac{\partial}{\partial s}(\Omega - Pq). \Longrightarrow \frac{\partial G}{\partial P} = \frac{\partial q}{\partial s}. \Longrightarrow G = \int_{0}^{P} \frac{\partial q}{\partial s} dP. \qquad (3.22)$$

Tốc độ giải phóng năng lượng – Các giải thích

- Phương pháp đa mẫu cho vật liệu phi tuyến
  - Giải thích các tích phân trong (3.20) và (3.22)

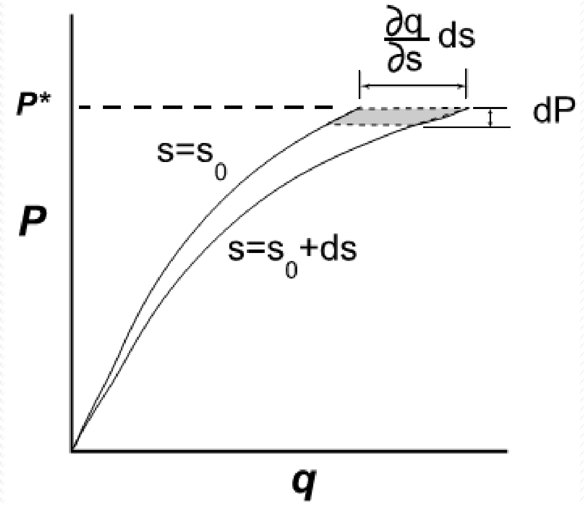
$$G = -\int_0^q \frac{\partial P}{\partial s} dq. \qquad (3.20)$$

  - Để giải thích G trong công thức (3.20), ta thử xem xét và so sánh quá trình đặt tải trước khi vết nứt phát triển và cất tải sau khi vết nứt phát triển.



$$(3.20) \qquad Gds = -ds \int_0^q \frac{\partial P}{\partial s} dq = \text{area between curves.}$$

$$(3.22) \qquad G\,ds = ds \int_0^P \frac{\partial q}{\partial s} dP = \text{area between curves.}$$



Tốc độ giải phóng năng lượng – Các giải thích

- Phương pháp đa mẫu cho vật liệu phi tuyến
  - Cả hai kết quả cùng giải thích được rằng, sự sai khác giữa công sinh ra và năng lượng hồi phục trong quá trình cất tải bằng với tốc độ giải phòng năng lượng G nhân với gia số của diện tích vết nứt ds.
  - Theo phương pháp này, người ta có thể xây dựng G=G(P,s) hay G=G(q,s) bằng cách thực hiện một chuỗi các thí nghiệm trên một bộ các mẫu giống nhau chỉ khác chiều dài vết nứt. Các đạo hàm $\frac{\partial P}{\partial s}$ và $\frac{\partial q}{\partial s}$ có thể được xác định bằng sự sai khác giữa dữ liệu của P và q theo chiều dài vết nứt. Đây được gọi là phương pháp đa mẫu để xác định G

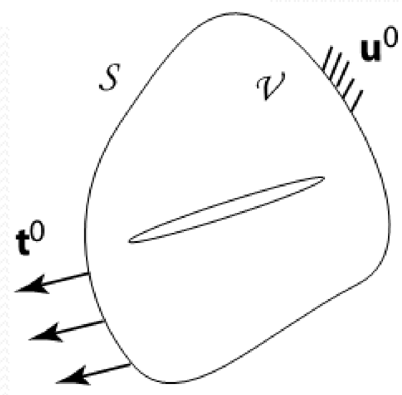
Tốc độ giải phóng năng lượng – Các giải thích

- Phương pháp độ mềm (Compliance Method) cho vật liệu đàn hồi tuyến tính
- Ứng dụng của phương pháp độ mềm

Tích phân đóng vết nứt cho G

- Theo nguyên lý công ảo: *Đối với vật thể đàn hồi, tại mọi thời điểm, tổng công lực ngoài, lực trong và lực quán tính trên chuyển dịch ảo bất kì bằng 0.*

$$\underbrace{\int_{\mathscr{S}} \sigma_{ij} n_j \delta u_i \, dS + \int_{\mathscr{V}} b_i \delta u_i \, dV}_{\text{Công}} = \underbrace{\int_{\mathscr{V}} \sigma_{ij} \delta \gamma_{ij} \, dV}_{\text{Năng lượng biến dạng}} = \int_{\mathscr{V}} \delta W \, dV. \qquad (3.28)$$

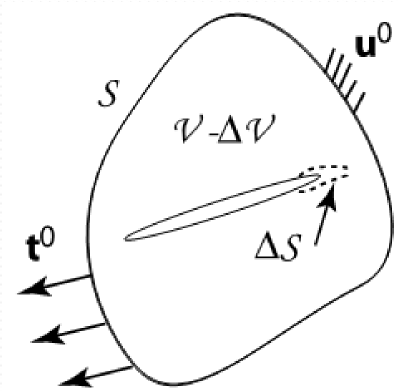


Xét vật thể có lỗ hổng chịu tải với lực mặt và chuyển vị điều khiển (prescribed) lần lượt là $\mathbf{t}=\mathbf{t}^0$ trên biên $\mathscr{S}_t$ và $\mathbf{u}=\mathbf{u}^0$ trên $\mathscr{S}_u$

Nghiệm của bài toán giá trị biên tương ứng là $\{\sigma^0, \gamma^0, \mathbf{u}^0\}$ trên thể tích $\mathscr{V}$.

Giả sử rằng, cũng với điều kiện biên như trên, thể tích lỗ hổng giảm $\Delta\mathscr{V}$ và diện tích bề mặt tăng $\Delta\mathscr{S}$.

$$\mathscr{V} - \Delta\mathscr{V}$$
$$\mathscr{S} + \Delta\mathscr{S}$$



Nghiệm bài toán tương ứng (thể tích $\mathscr{V}$-$\Delta\mathscr{V}$)

$$\{\sigma^0 + \Delta\sigma,\ \gamma^0 + \Delta\gamma, \mathbf{u}^0 + \Delta\mathbf{u}\}$$

Tích phân đóng vết nứt cho G

- Sự thay đổi của thế năng trước và sau biến dạng:

$$-\Delta\Pi = \int_{\mathscr{V}} W(\gamma^0)\,dV - \int_{\mathscr{S}_t} t_i^0 u_i^0\,dS - \int_{\mathscr{V}-\Delta\mathscr{V}} W(\gamma^0+\Delta\gamma)\,dV + \int_{\mathscr{S}_t+\Delta\mathscr{S}} (t_i^0+\Delta t_i)(u_i^0+\Delta u_i)\,dS. \quad (3.29)$$

Do điều kiện biên không đổi:

$$\Delta t_i^0 = 0 \text{ on } \mathscr{S}_t,\ \Delta u_i = 0 \text{ on } \mathscr{S}_u,\ t_i^0 + \Delta t_i = 0 \text{ on } \Delta\mathscr{S},$$

Nên:

$$\int_{\mathscr{S}_t+\Delta\mathscr{S}} (t_i^0+\Delta t_i)(u_i^0+\Delta u_i)\,dS = \int_{\mathscr{S}_t} t_i^0 (u_i^0+\Delta u_i)\,dS \quad (3.30)$$

Áp dụng nguyên lý công ảo

$$\int_{\mathscr{S}_t} t_i^0 \Delta u_i\,dS = \int_{\mathscr{S}+\Delta\mathscr{S}} (t_i^0+\Delta t_i)\Delta u_i\,dS = \int_{\mathscr{V}-\Delta V} (\sigma_{ij}^0+\Delta\sigma_{ij})\Delta\gamma_{ij}. \quad (3.31)$$

Tích phân đóng vết nứt cho G

- Sự thay đổi của thế năng trước và sau biến dạng:

$$-\Delta\Pi = \int_{\mathscr{V}} W(\gamma^0)\,dV - \int_{\mathscr{S}_t} t_i^0 u_i^0\,dS - \int_{\mathscr{V}-\Delta\mathscr{V}} W(\gamma^0+\Delta\gamma)\,dV + \int_{\mathscr{S}_t+\Delta\mathscr{S}} (t_i^0+\Delta t_i)(u_i^0+\Delta u_i)\,dS. \quad (3.29)$$

$$\int_{\mathscr{S}_t} t_i^0 \Delta u_i\,dS = \int_{\mathscr{S}+\Delta\mathscr{S}} (t_i^0+\Delta t_i)\Delta u_i\,dS = \int_{\mathscr{V}-\Delta V} (\sigma_{ij}^0+\Delta\sigma_{ij})\Delta\gamma_{ij}. \quad (3.31)$$

$$-\Delta\Pi = \int_{\Delta\mathscr{V}} W(\gamma^0)\,dV + \int_{\mathscr{V}-\Delta\mathscr{V}} \left\{(\sigma_{ij}^0+\Delta\sigma_{ij})\Delta\gamma_{ij} - \left[W(\gamma^0+\Delta\gamma) - W(\gamma^0)\right]\right\} dV. \quad (3.32)$$

Để đơn giản hóa (3.32), cần tính 2 biểu thức trong tích phân thức hai của vế phải

Tích phân đóng vết nứt cho G

- Biểu thức 2:

Hàm mật độ năng lượng $W(\gamma^0) = \int_0^{\gamma^0} \sigma_{ij}(\gamma) d\gamma_{ij}$ và $\sigma_{ij} d\gamma_{ij} = \sigma_{ij} du_{i,j}$

$$\int_{\mathcal{V}-\Delta\mathcal{V}} [W(\gamma^0 + \Delta\gamma) - W(\gamma^0)] \, dV$$

$$= \int_{\mathcal{V}-\Delta\mathcal{V}} \left\{ \int_0^{\gamma^0+\Delta\gamma} \sigma_{ij} d\gamma_{ij} - \int_0^{\gamma^0} \sigma_{ij} d\gamma_{ij} \right\} dV$$

$$= \int_{\mathcal{V}-\Delta\mathcal{V}} \int_{\gamma^0}^{\gamma^0+\Delta\gamma} \sigma_{ij} d\gamma_{ij} \, dV$$

$$= \int_{\mathcal{V}-\Delta\mathcal{V}} \int_{u_{i,j}^0}^{u_{i,j}^0+\Delta u_{i,j}} \sigma_{ij} du_{i,j} \, dV$$

$$= \int_{\mathcal{V}-\Delta\mathcal{V}} \int_{u_{i,j}^0}^{u_{i,j}^0+\Delta u_{i,j}} (\sigma_{ij} du_i)_{,j} \, dV \quad (\text{using } \sigma_{ij,j} = 0).$$

Tích phân đóng vết nứt cho G

- Biểu thức 2:

$$\int_{\mathscr{V}-\Delta\mathscr{V}} [W(\gamma^0+\Delta\gamma) - W(\gamma^0)]\, dV$$
$$= \int_{\mathscr{V}-\Delta\mathscr{V}} \int_{u_{i,j}^0}^{u_{i,j}^0+\Delta u_{i,j}} (\sigma_{ij} du_i)_{,j}\, dV \quad (\text{using } \sigma_{ij,j} = 0).$$

Áp dụng định lý Divergence

$$\int_{\mathscr{V}-\Delta\mathscr{V}} [W(\gamma^0+\Delta\gamma) - W(\gamma^0)]\, dV = \int_{\mathscr{S}+\Delta\mathscr{S}} \int_{u_i^0}^{u_i^0+\Delta u_i} \sigma_{ij}\, du_i n_j\, dS$$
$$= \int_{\mathscr{S}+\Delta\mathscr{S}} \int_{u_i^0}^{u_i^0+\Delta u_i} t_i\, du_i\, dS. \qquad (3.33)$$

Tích phân đóng vết nứt cho G

- Biểu thức 1:

$$\int_{\mathscr{V}-\Delta\mathscr{V}} (\sigma_{ij}^0 + \Delta\sigma_{ij})\Delta\gamma_{ij}\, dV = \int_{\mathscr{V}-\Delta\mathscr{V}} \left((\sigma_{ij}^0 + \Delta\sigma_{ij})\Delta u_i\right)_{,j}\, dV$$

$$= \int_{\mathscr{S}+\Delta\mathscr{S}} (t_i^0 + \Delta t_i)\Delta u_i\, dS. \qquad (3.34)$$

$$\begin{cases} \displaystyle\int_{\mathscr{V}-\Delta\mathscr{V}} \left[W(\gamma^0 + \Delta\gamma) - W(\gamma^0)\right] dV = \int_{\mathscr{S}+\Delta\mathscr{S}} \int_{u_i^0}^{u_i^0+\Delta u_i} t_i\, du_i\, dS. & (3.33) \\ \displaystyle\int_{\mathscr{V}-\Delta\mathscr{V}} (\sigma_{ij}^0 + \Delta\sigma_{ij})\Delta\gamma_{ij}\, dV = \int_{\mathscr{S}+\Delta\mathscr{S}} (t_i^0 + \Delta t_i)\Delta u_i\, dS. & (3.34) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad -\Delta\Pi = \int_{\Delta\mathscr{V}} W(\gamma^0)\, dV + \int_{\mathscr{S}+\Delta\mathscr{S}} \left\{ (t_i^0 + \Delta t_i)\Delta u_i - \int_{u_i^0}^{u_i^0+\Delta u_i} t_i\, du_i \right\} dS. \qquad (3.35)$$

Tích phân đóng vết nứt cho G

Số hạng thứ 2 tiếp tục được rút gọn như sau:

$$\int_{\mathscr{S}+\Delta\mathscr{S}} \left\{ (t_i^0 + \Delta t_i)\Delta u_i - \int_{u_i^0}^{u_i^0+\Delta u_i} t_i du_i \right\} dS.$$

Chú ý:

$$\mathscr{S} + \Delta\mathscr{S} = \mathscr{S}_t \bigcup \mathscr{S}_u \bigcup \Delta\mathscr{S}$$

$$\Delta t_i = 0 \text{ on } \mathscr{S}_t,\ \Delta u_i = 0 \text{ on } \mathscr{S}_u, t_i^0 + \Delta t_i = 0 \text{ on } \Delta\mathscr{S}$$

$$\Longrightarrow \int_{\mathscr{S}+\Delta\mathscr{S}} (t_i^0 + \Delta t_i)\Delta u_i \, dS = \int_{\mathscr{S}_t} t_i^0 \Delta u_i \, dS$$

Tương tự:

$$\int_{\mathscr{S}+\Delta\mathscr{S}} \int_{u_i^0}^{u_i^0+\Delta u_i} t_i du_i \, dS = \int_{\mathscr{S}_t} \int_{u_i^0}^{u_i^0+\Delta u_i} t_i du_i \, dS + \int_{\Delta\mathscr{S}} \int_{u_i^0}^{u_i^0+\Delta u_i} t_i du_i \, dS.$$

Trên $\mathscr{S}_t,\ t_i = t_i^0 \Longrightarrow \int_{\mathscr{S}_t} \int_{u_i^0}^{u_i^0+\Delta u_i} t_i du_i \, dS = \int_{\mathscr{S}_t} t_i^0 \Delta u_i \, dS$

(3.35) $\Longrightarrow$ $$-\Delta\Pi = -\int_{\Delta\mathscr{S}} \int_{u_i^0}^{u_i^0+\Delta u_i} t_i du_i \, dS + \int_{\Delta\mathscr{V}} W(\gamma^0) \, dV. \qquad (3.36)$$

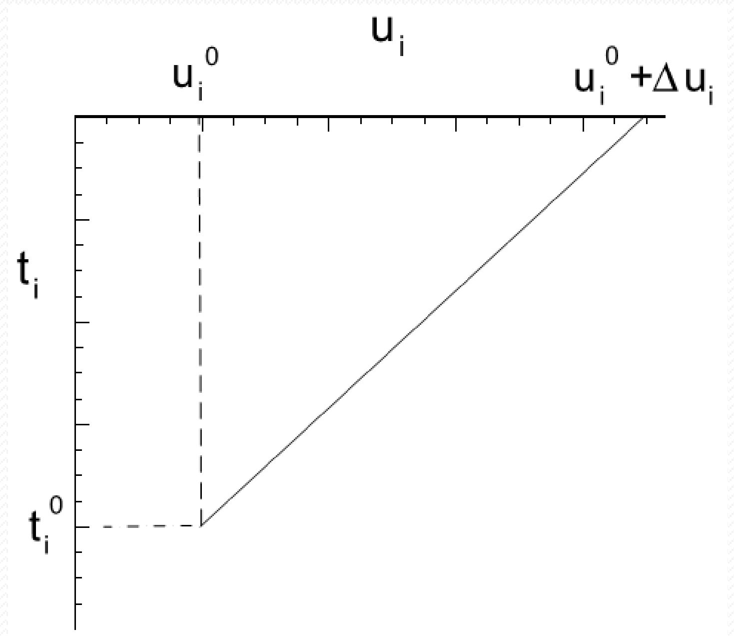
Tích phân đóng vết nứt cho G

$$-\Delta\Pi = -\int_{\Delta\mathscr{S}}\int_{u_i^0}^{u_i^0+\Delta u_i} t_i du_i\, dS + \int_{\Delta\mathscr{V}} W(\gamma^0)\, dV. \qquad (3.36)$$

- Phương trình (3.36): **sự thay đổi thế năng = công sinh ra để tạo mặt** $\Delta\mathscr{S}$ + **năng lượng biến dạng của vật liệu bị mất** $\Delta\mathscr{V}$.

  Thay vì lỗ hổng, chúng ta có 1 vết nứt và cho phép vết nứt phát triển, tạo ra mặt mới $\Delta\mathscr{S}$ thì thể tích mất đi sẽ là không và sự thay đổi thế năng sẽ là

$$-\Delta\Pi = -\int_{\Delta\mathscr{S}}\int_{u_i^0}^{u_i^0+\Delta u_i} t_i du_i\, dS.$$



- Đối với vật liệu đàn hồi tuyến tính:

$$\int_{u_i^0}^{u_i^0+\Delta u_i} t_i du_i = \tfrac{1}{2} t_i^0 \Delta u_i$$

$$\Longrightarrow \quad -\Delta\Pi = -\int_{\Delta\mathscr{S}} \frac{1}{2} t_i^0 \Delta u_i\, dS.$$

Tích phân đóng vết nứt cho G

- Thay lỗ hổng bằng vết nứt và gọi Δs là một nửa của toàn bộ diện tích mặt vết nứt mới được tạo $\Delta \mathscr{S}$. Kí hiệu, Δs^+ và Δs^- lần lượt là các mặt trên và mặt dưới của vết nứt, $\Delta \mathscr{S} = \Delta s^+ + \Delta s^-$.

  Tốc độ giải phóng năng lượng:

$$G = -\frac{\partial \Pi}{\partial s} = \lim_{\Delta s \to 0} -\frac{1}{\Delta s}\left(\int_{\Delta s^+} \frac{1}{2} t_i^0 \Delta u_i \, dS + \int_{\Delta s^-} \frac{1}{2} t_i^0 \Delta u_i \, dS\right).$$

  Các thành phần lực mặt tương ứng với Δs^+ và Δs^- là t_i^+ và t_i^-, bằng và đối nhau $t_i^+ = -t_i^-$. Cho $\Delta s = \Delta s^+$, ta có

$$G = -\frac{\partial \Pi}{\partial s} = \lim_{\Delta s \to 0} -\frac{1}{\Delta s} \int_{\Delta s} \frac{1}{2} t_i^0 (\Delta u_i^+ - \Delta u_i^-) \, dS, \qquad (3.37)$$

- (3.37) gọi là tích phân đóng vết nứt do Irwin [2] đưa ra đầu tiên. Kết quả trên đúng cho vật liệu đàn hồi có hướng phát triển vết nứt bất kỳ.

  $\Delta u_i^+ - \Delta u_i^-$ Chuyển vị mở vết nứt (trượt cho mode II và III).
- Xem xét 1 vết nứt kéo, khi đó lực mặt trên mặt Δs^+ luôn âm và chuyển vị mở vết nứt lại luôn dương, vì vậy **G luôn dương**.

[2] G. Irwin, J. Appl. Mech.24, 361 (1957)

Tích phân đường cong (Tích phân J)

- Bài toán 2 chiều
  - Một tiếp cận khác cho tích phân đóng vết nứt là lấy tích phân trên một đường cong bao quanh đỉnh vết nứt.

    Tích phân này thể hiện dòng năng lượng đi đến đỉnh vết nứt và tương đương với tích phân đóng vết nứt.

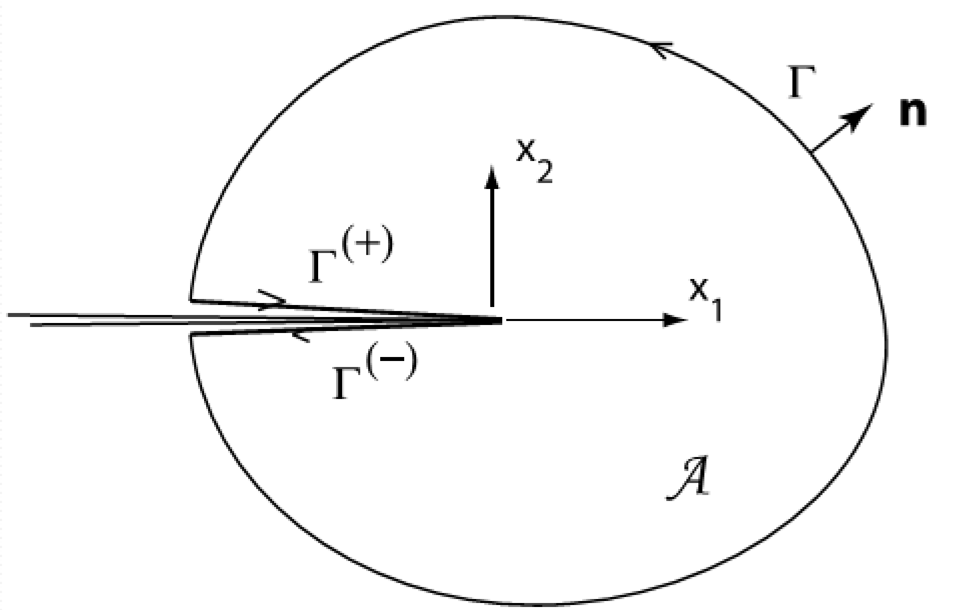


Fig. 3.7 To calculate the energy release rate in terms of the J integral take $\mathcal{A}$ to be any fixed region surrounding the crack tip

Tích phân đường cong (Tích phân J)

- Bài toán 2 chiều
  - Xét 1 vết nứt 2 chiều phát triển theo hướng x_1. Từ (3.32), khi $\Delta\mathscr{V} \rightarrow 0$ và tích phân thể tích trở thành tích phân diện tích: $\int_{\mathscr{V}}(\cdot)dV \rightarrow \int_{\mathscr{A}}(\cdot)\,dA$

    Sự gia tăng của $\Delta\mathscr{S}$ trên mặt vết nứt sẽ tương ứng với sự gia tăng chiều dài vết nứt Δa. Do đó

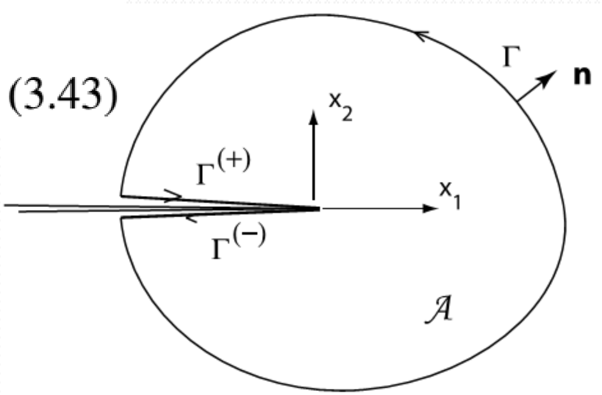
$$-\Delta\Pi = \int_{\Delta\mathscr{V}} W(\gamma^0)\,dV$$

$$+\int_{\mathscr{V}-\Delta\mathscr{V}}\left\{(\sigma_{ij}^0+\Delta\sigma_{ij})\Delta\gamma_{ij} - \left[W(\gamma^0+\Delta\gamma) - W(\gamma^0)\right]\right\}dV. \quad (3.32)$$

$$G = -\frac{\partial\Pi}{\partial a} = \lim_{\Delta a\to 0}\frac{1}{\Delta a}\int_{\mathscr{A}}\left\{(\sigma_{ij}^0+\Delta\sigma_{ij})\Delta\gamma_{ij}\right.$$

$$\left.-\left[W(\gamma^0+\Delta\gamma) - W(\gamma^0)\right]\right\}dA. \quad (3.43)$$

$\mathscr{A}$ là miền bất kỳ bao quanh đỉnh vết nứt có biên: $\Gamma + \Gamma^{(+)} + \Gamma^{(-)}$



Tích phân đường cong (Tích phân J)

- Bài toán 2 chiều

Khi Δa→0. Từ (3.34) với lưu ý $t_i^0 + \Delta t_i = 0$ trên mặt vết nứt mới.

$$\int_{\mathscr{V}-\Delta\mathscr{V}} (\sigma_{ij}^0 + \Delta\sigma_{ij})\Delta\gamma_{ij}\,dV = \int_{\mathscr{V}-\Delta\mathscr{V}} \big((\sigma_{ij}^0 + \Delta\sigma_{ij})\Delta u_i\big)_{,j}\,dV$$

$$= \int_{\mathscr{S}+\Delta\mathscr{S}} (t_i^0 + \Delta t_i)\Delta u_i\,dS. \qquad (3.34)$$

$$\lim_{\Delta a\to 0}\frac{1}{\Delta a}\int_{\mathscr{A}} (\sigma_{ij}^0 + \Delta\sigma_{ij})\Delta\gamma_{ij}\,dA = \lim_{\Delta a\to 0}\frac{1}{\Delta a}\int_{\Gamma} (t_i^0 + \Delta t_i)\Delta u_i\,d\Gamma. \qquad (3.44)$$

Xét một hệ tọa độ cố định (x_1,x_2) và các tọa độ (x'_1,x'_2) dịch chuyển với đỉnh vết nứt, $x'_1=x_1-a$ và $x'_2=x_2$.

Một trường f bất kì là trường theo đỉnh vết nứt f=f (x'_1,x'_2,a) hay f=f (x_1-a,x,a). Đạo hàm toàn phần của f theo sự phát triển của vết nứt là

$$\frac{Df}{Da} = \frac{\partial f}{\partial x'_1}\frac{\partial x'_1}{\partial a} + \frac{\partial f}{\partial a} = -\frac{\partial f}{\partial x_1} + \frac{\partial f}{\partial a}.$$

Tích phân đường cong (Tích phân J)

- Bài toán 2 chiều

$$\lim_{\Delta a \to 0} \frac{1}{\Delta a} \int_{\mathscr{A}} (\sigma_{ij}^0 + \Delta\sigma_{ij}) \Delta\gamma_{ij} \, dA = \lim_{\Delta a \to 0} \frac{1}{\Delta a} \int_{\Gamma} (t_i^0 + \Delta t_i) \Delta u_i \, d\Gamma. \qquad (3.44)$$

$$\Longrightarrow \quad \lim_{\Delta a \to 0} \frac{1}{\Delta a} \int_{\Gamma} (t_i^0 + \Delta t_i) \Delta u_i \, d\Gamma = \int_{\Gamma} t_i^0 \frac{D u_i}{D a} \, d\Gamma + \int_{\Gamma} \lim_{\Delta a \to 0} \Delta t_i \frac{\Delta u_i}{\Delta a} \, d\Gamma.$$

Tích phân thứ hai có bậc theo Δa, do đó sẽ bằng 0 khi Δa→0,

$$\lim_{\Delta a \to 0} \frac{1}{\Delta a} \int_{\Gamma} (t_i^0 + \Delta t_i) \Delta u_i \, d\Gamma = \int_{\Gamma} t_i^0 \left(-\frac{\partial u_i}{\partial x_1} + \frac{\partial u_i}{\partial a} \right) d\Gamma. \qquad (3.45)$$

Rút gọn số hạng thứ 2 của (3.43)

$$G = -\frac{\partial \Pi}{\partial a} = \lim_{\Delta a \to 0} \frac{1}{\Delta a} \int_{\mathscr{A}} \{ (\sigma_{ij}^0 + \Delta\sigma_{ij}) \Delta\gamma_{ij} - [W(\gamma^0 - \Delta\gamma) - W(\gamma^0)] \} \, dA. \qquad (3.43)$$

$$\Longrightarrow \quad \lim_{\Delta a \to 0} \frac{1}{\Delta a} \int_{\mathscr{A}} [W(\gamma^0 + \Delta\gamma) - W(\gamma^0)] \, dA = \int_{\mathscr{A}} \frac{DW}{Da} \, dA.$$

Tích phân đường cong (Tích phân J)

- Bài toán 2 chiều

$$\lim_{\Delta a \to 0} \frac{1}{\Delta a} \int_{\mathscr{A}} \left[W(\gamma^0 + \Delta\gamma) - W(\gamma^0) \right] dA = \int_{\mathscr{A}} \frac{DW}{Da} dA.$$

$$\int_{\mathscr{A}} \frac{DW}{Da} dA = \int_{\mathscr{R}} \left(\frac{\partial W}{\partial a} - \frac{\partial W}{\partial x_1} \right) dA = \int_{\mathscr{A}} \left(\frac{\partial W}{\partial \gamma_{ij}} \frac{\partial \gamma_{ij}}{\partial a} - \frac{\partial W}{\partial x_1} \right) dA$$

$$\Rightarrow \quad = \int_{\mathscr{A}} \left(\sigma_{ij} \frac{\partial u_{i,j}}{\partial a} - \frac{\partial W}{\partial x_1} \right) dA = \oint_{\Gamma + \Gamma^{(+)} + \Gamma^{(-)}} \left(t_i \frac{\partial u_i}{\partial a} - W n_1 \right) d\Gamma,$$

Chú ý: - Trường ứng suất có thể tìm thông qua mối liên hệ

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial W}{\partial \gamma_{ij}}. \qquad (3.6)$$

- Đẳng thức cuối tìm được bằng định lý Divergence

- $n_1 = 0,\ t_i = 0,$ on $\Gamma^{(+)}, \Gamma^{(-)}$

$$\Rightarrow \quad \lim_{\Delta a \to 0} \frac{1}{\Delta a} \int_{\mathscr{A}} \left[W(\gamma^0 + \Delta\gamma) - W(\gamma^0) \right] dA = \int_{\Gamma} \left(t_i \frac{\partial u_i}{\partial a} - W n_1 \right) d\Gamma. \qquad (3.46)$$

Tích phân đường cong (Tích phân J)

- Bài toán 2 chiều

Thay các phương trình (3.44)-(3.46) vào (3.43) và tính giới hạn Δa→0

$$G = -\frac{\partial \Pi}{\partial a} = \lim_{\Delta a \to 0} \frac{1}{\Delta a} \int_{\mathscr{A}} \Big\{ (\sigma_{ij}^0 + \Delta\sigma_{ij}) \Delta\gamma_{ij} - \big[W(\gamma^0 - \Delta\gamma) - W(\gamma^0) \big] \Big\} \, dA. \quad (3.43)$$

$$\lim_{\Delta a \to 0} \frac{1}{\Delta a} \int_{\mathscr{A}} (\sigma_{ij}^0 + \Delta\sigma_{ij}) \Delta\gamma_{ij} \, dA = \lim_{\Delta a \to 0} \frac{1}{\Delta a} \int_{\Gamma} (t_i^0 + \Delta t_i) \Delta u_i \, d\Gamma. \quad (3.44)$$

$$\lim_{\Delta a \to 0} \frac{1}{\Delta a} \int_{\Gamma} (t_i^0 + \Delta t_i) \Delta u_i \, d\Gamma = \int_{\Gamma} t_i^0 \left(-\frac{\partial u_i}{\partial x_1} + \frac{\partial u_i}{\partial a} \right) d\Gamma. \quad (3.45)$$

$$\lim_{\Delta a \to 0} \frac{1}{\Delta a} \int_{\mathscr{A}} \big[W(\gamma^0 + \Delta\gamma) - W(\gamma^0) \big] \, dA = \int_{\Gamma} \left(t_i \frac{\partial u_i}{\partial a} - W n_1 \right) d\Gamma. \quad (3.46)$$

$$\Longrightarrow \quad G = \int_{\Gamma} \left(W n_1 - t_i \frac{\partial u_i}{\partial x_1} \right) d\Gamma = J. \quad (3.47)$$

Tích phân đường cong (Tích phân J)

- Các tính chất của J

➢ (3.47) được gọi là tích phân J. J được sử dụng trong nhiều trường hợp để tính dòng năng lượng chảy đến đỉnh vết nứt, để ước lượng độ mở vết nứt cũng như được sử dụng như 1 phần của tiêu chuẩn phá hủy cho vật liệu dai (ductile material).

➢ J không phụ thuộc vào đường đi (bài tập 4)

➢ Giá trị của J không phụ thuộc vào hướng phát triển vết nứt tiếp theo, tuy nhiên, J chỉ bằng G khi vết nứt phát triển theo 1 hướng (hướng x) trong vật liệu đàn hồi.

➢ J cũng có chung mối quan hệ với hệ số K như G cho vết nứt phát triển 1 hướng

$$J = \frac{K_I^2}{E'} + \frac{K_{II}^2}{E'} + \frac{K_{III}^2}{2\mu}. \qquad (3.48)$$

➢ J có thể được mở rộng cho trường hợp 3 chiều. Khi đó, tích phân đường cong kín sẽ được thay bằng tích phân trên mặt cong kín (mục 3.7.2).

Một ví dụ ứng dụng tích phân J