Nội suy Newton:

Mở đầu

Công thức nội suy Newton viết dưới dạng truy hồi như sau:

- Đa thức bậc nhất:

$$P_1(x) = a_0 + a_1(x - x_0) \qquad (1)$$

- Đa thức bậc hai:

$$P_2(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1) = P_1(x) + a_2(x - x_0)(x - x_1) \qquad (2)$$

Với biểu thức trê n, chúng ta thấy, để viết đa thức nội syu Newton bậc hai, chỉ cần lấy đa thức nội suy Newton bậc một cộng thêm số hạng bậc hai $a_2(x - x_0)(x - x_1)$; đây là dạng truy hồi của công thức nội suy Newton.

- Đa thức bậc ba: Tương tự như trên đa thức nội suy Newton bậc ba là đa thức nội suy Newton bận hai công thêm số hạng bậc 3:

$$P_3(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1) + a_3(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) =$$

$$= P_2(x) + a_2(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) \qquad (3)$$

:

:

- Đa thức bậc N: Một các tổng quát, đa thức nội suy Newton bậc N được viết:

$$P_N(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1) + a_3(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)$$

$$+ a_4(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) + \ldots$$

$$+ a_N(x - x_0) \ldots (x - x_{N-1})$$

$$= P_{N-1}(x) + a_N(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) \ldots (x - x_{N-1}) \qquad (4)$$

Công thức (4) gọi là đa thức Newton với N tâm điểm $x_0, x_1, \ldots, x_{N-1}$, các điểm này còn gọi là các điểm nút.

Thí dụ: cho x = [1 3 4 4,5] và và các hệ số a_i chứa trong ma trận a = [5 -2 0.5 -0.1 0.003]. Viết các đa thức $P_k(x)$ với k =1, 2, 3,4, ứng với mỗi đa thức tinh giá trị $P_k(2,5)$

Giải:

Dùng các công thức từ (1) đến (4), chúng ta có:

$P_1(x) = 5 - 2(x - 1)$ ➔ $P_1(2,5) = 5 - 2(2,5 - 1) = 2$.

$P_2(x) = 5 - 2(x - 1) + 0,5(x - 1)(x - 3)$ ➔ $P_2(2,5) = P_1(2,5) + 0,5(2,5 - 1)(2,5 - 3) = 1,625$.

$P_3(x) = 5 - 2(x - 1) + 0{,}5(x - 1)(x - 3) - 0{,}1(x - 1)(x - 3)(x - 4)$ ➔

$P_3(2{,}5) = P_2(2{,}5) - 0{,}1(2{,}5 - 1)(2{,}5 - 3)(2{,}5 - 4) = 1{,}5125.$

$P_4(x) = 5 - 2(x - 1) + 0{,}5(x - 1)(x - 3) - 0{,}1(x - 1)(x - 3)(x - 4) + 0{,}003(x - 1)(x - 3)(x - 4)(x - 4{,}5)$ ➔

$P_4(2{,}5) = P_3(2{,}5) + 0{,}003(2{,}5 - 1)(2{,}5 - 3)(2{,}5 - 4)(2{,}5 - 4{,}5) = 1{,}5058.$

Tính giá trị của đa thức Newton bằng phép nhân lồng vào nhau

Vì đa thức nội suy Newton viết dưới dạng truy hồi, nên khi tính giá trị của đa thức có thể sử dụng phép nhân lồng vào nhau (nested multiplication) rất tiện lợi. Thí dụ, với đa thức $P_3(x)$ viết dưới dạng các phép nhân lồng vào nhau như sau:

$$P_3(x) = [\,[\,a_3(x - x_2) + a_2]\,(x - x_1) + a_1]\,(x - x_0) + a_0 \quad (5)$$

Để tính giá trị $P_3(\zeta)$, người ta tính từng nhóm sau đây ($\zeta = 2{,}5$):

$S_3 = a_3 = -0{,}1$

$S_2 = S_3(\zeta - x_2) + a_2 = -0{,}1(2{,}5 - 4) + 0{,}5 = 0{,}65$

$S_1 = S_2(\zeta - x_1) + a_1 = 0{,}65(2{,}5 - 3) - 2 = -2{,}325$

$S_0 = S_1(\zeta - x_0) + a_0 = -2{,}235(2{,}5 - 1) + 5 = 1{,}5125$

Vậy $P_3(2{,}5) = 1{,}5125$

Các tính này ít bị nhầm khi tính tay và rất tiện lợi khi lập trình để tính giá trị của đa thức Newton.

Tính đa thức Newton bằng tỉ số sai phân

Để dễ theo dỏi, chúng ta viết lại đa thức Newton bậc N (biểu thức (4)) dưới đây:

$$\begin{aligned} P_N(x) = {} & a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1) + a_3(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) \\ & + a_4(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) + \ldots \\ & + a_N(x - x_0)\ldots(x - x_{N-1}) \qquad (6) \end{aligned}$$

Đây là đa thức nội suy nên: $P_N(x_i) = f_i$. Do đó, để tìm các hệ số a_i (i= 0, 1, 2, . . . , N-1) chúng ta lần lượt tính giá trị của $P_N(x)$ tại $x = x_i$ (i= 0, 1, 2, . . . , N-1).

- Khi $x = x_0$: $P_N(x_0) = a_0$
  mà $P_N(x_0) = f(x_0)$; suy ra :
  $$a_0 = f(x_0) \qquad (7)$$
- Khi $x = x_1$: $P_N(x_1) = a_0 + a_1(x_1 - x_0)$
  mà $P_N(x_0) = f(x_1)$; suy ra : $f(x_0) + a_1(x_1 - x_0) = f(x_1)$

hay: $$a_1 = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} \qquad (8)$$

Tương tự như trên:

$$a_2 = \frac{f(x_2) - a_0 - a_1(x_2 - x_0)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)}$$

$$hay:$$

$$a_2 = \frac{\left[\dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{(x_2 - x_1)} - \dfrac{f(x_1) - f(x_0)}{(x_1 - x_0)}\right]}{(x_2 - x_0)}$$

(9)

Cùng cách tính này người ta tìm được các giá trị a_3; a_4; . . ., a_N. Vế phải của (8) được gọi là tỉ số sai phân bậc 1 và vế phải của (9) được gọi là tỉ số sai phân bậc 2.

Một cách tổng quát, người ta định nghĩa tỉ số sai phân của một hàm số f(x) như sau:

$$f[x_k] = f(x_k)$$

- Tỉ số sai phân bậc 1: $$f[x_{k-1}, x_k] = \frac{f[x_k] - f[x_{k-1}]}{x_k - x_{k-1}}$$
- Tỉ số sai phân bậc 2: $$f[x_{k-2}, x_{k-1}, x_k] = \frac{f[x_{k-1}, x_k] - f[x_{k-2}, x_{k-1}]}{x_k - x_{k-2}} \qquad (10)$$
- Tỉ số sai phân bậc 3:

$$f[x_{k-3}, x_{k-2}, x_{k-1}, x_k] = \frac{f[x_{k-2}, x_{k-1}, x_k] - f[x_{k-3}, x_{k-2}, x_{k-1}]}{x_k - x_{k-3}}$$

Công thức truy hồi cho tỉ số sai phân bậc j được viết:

$$f[x_{k-j}, x_{k-j+1}, \ldots, x_k] = \frac{f[x_{k-j+1}, \ldots, x_k] - f[x_{k-j}, \ldots, x_{k-1}]}{x_k - x_{k-j}} \qquad (11)$$

Để tính công thức (11) được dễ dàng, thường người xếp $f[x_k]$ vào cột một, rồi lần lượt tính tỉ số sai phân bậc 1 (xếp vào cột 2), tính tỉ số sai phân bậc 2 (xếp vào cột 3), tính tỉ số sai phân bậc 3 (xếp vào cột 4), ...

Với: $d_{k,1} = f_k$

$d_{k,j} = (d_{k,j-1} - d_{k-1,j-1}) / (x_k - x_{k-j+1})$

và xếp vào một bảng như bảng 1

Bảng 1: Bảng tỉ số sai phân của hàm $y = f(x)$

x_k	$f[x_k]$	$f[\ ,\ ]$	$f[\ ,\ ,\ ]$	$f[\ ,\ ,\ ,\ ]$	$f[\ ,\ ,\ ,\ ,\ ]$
x_0	$f[x_0]$				
x_1	$f[x_1]$	$f[x_0, x_1]$			
x_2	$f[x_2]$	$f[x_1, x_2]$	$f[x_0, x_1, x_2]$		
x_3	$f[x_3]$	$f[x_2, x_3]$	$f[x_1, x_2, x_3]$	$f[x_0, x_1, x_2, x_3]$	
x_4	$f[x_4]$	$f[x_3, x_4]$	$f[x_2, x_3, x_4]$	$f[x_1, x_2, x_3, x_4]$	$f[x_0, x_1, x_2, x_3, x_4]$

Hệ số a_k của đa thức Newton $P_N(x)$ chính là:

$a_k = f[x_0, x_1, \ldots, x_k]$

Vậy: Nếu $f(x)$ là một hàm số có các giá trị là $f(x_0), f(x_1), \ldots, f(x_N)$ tại N+1 điểm riêng biệt $x_0, x_1, \ldots, x_N$ trên $[a, b]$ thì $f(x)$ có thể biểu diễn bằng một đa thức nội suy Newton $P_N(x)$ ($P_N(x_k) = f(x_k)$) cho bởi:

$$P_N(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1) + a_3(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)$$
$$+ a_4(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) + \ldots + a_N(x - x_0)\ldots(x - x_{N-1}) \quad (12)$$

trong đó, $a_k = f[x_0, x_1, \ldots, x_k]$ với $k = 0, 1, 2, \ldots, N$

$P_N(x)$ có sai số là:

$$E_N(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_N)\, f^{(N+1)}(\zeta)}{(N+1)!} \quad (13)$$

với $\zeta \in (a, b)$

Lưu ý: Sai số của công thức nội suy Newton có dạng như sai số của công thức nội suy Lagrange; tuy nhiên, thường thì không có biểu thức giải tích của $f(x)$ nên không thể tính được đạo hàm của $f^{(N+1)}(x)$, nên người ta thay $f^{(N+1)}(x)/(N+1)!$ bằng tỉ số sai phân bậc $(N + 1)$. Vậy sai số của đa thức nội suy Newton bậc N chính là số hạng a_{N+1}:

$$E_N(x) = (x - x_0)(x - x_1) \ldots (x - x_N)\, a_{N+1} \quad (14)$$

Thí dụ:

a/Lập bảng tỉ số sai phân của hàm $f(x) = \cos(x)$ cho 4 điểm $(k, \cos(k))$ với $k = 0, 1, 2, 3$.

b/ Lập đa thức nội suy Newton bậc 2

c/ Dùng đa thức vừa tìm giá trị $f(1,2)$.

Giải:

$x = 0$: $f[0] = 1$

$x = 1$: $f[1] = 0,5403$

x = 2 : f[2] = - 0,4161

x = 3 : f[3] = - 0,9900

Tính tỉ số sai phân bậc 1:

f [0 , 1] = (f[1] – f[0]) / (1 – 0) = - 0,4597

f [1 , 2] = (f[2] – f[1]) / (2 – 1) = - 0,9564

f [2 , 3] = (f[3] – f[2]) / (3 – 2) = - 0,5738

Tính tỉ số sai phân bậc 2:

f [0 , 1 , 2] = (f[1, 2] – f[0, 1]) / (2 – 0) = [- 0,9564 – (-0,4597)]/ 2 = - 0,2484

f [1 , 2 , 3] = (f[2, 3] – f[1, 2]) / (3 – 1) = [- 0,5738 – (- 0,9564)]/2 = 0,1913

Tính tỉ số sai phân bậc 3:

f [0 , 1 , 2 , 3] = (f[1, 2 , 3] – f[0, 1 , 2]) / (3 – 0) = [0,1913 – (- 0,2484)]/3 = 0,1466

Sắp xếp vào bảng như sau:

x_k	f [x_k]	f[,]	f[, ,]	f[, , ,]
0	1			
1	0,5403	**- 0,4597**		
2	- 0,4161	- 0,9564	**- 0,2484**	
3	- 0,9900	- 0,5738	0,1913	**0,1466**

Theo công thức Newton bậc 2:

$P_2(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1)$

Với:

$a_0 = f[0] = 1$

$a_1 = f[0, 1] = -0,4597$

$a_2 = f[0, 1, 2] = -0,2484$

Nhận xét: *Các hệ số của đa thức nội suy Newton nằm trên đường chéo từ trên xuống của bảng tỉ số sai phân (số in đậm)*

Vậy

$P_2(x) = 1 - 0,4597(x - 0) - 0,2484\,(x - 0)(x - 1)$

Vì chúng ta viết đa thức bậc hai, nên giá trị của tỉ số sai phân bậc ba dùng để tính sai số:

$a_3 = f[0, 1, 2, 3] = 0,1466$

$E_2(x) = 0,1466\,(x - 0)(x - 1)(x - 2)$

Tính f(1,2)

$f(1,2) \approx P_2(1,2) = 0.3887$ (dùng phép nhân lồng vào nhau)

$\cos(1,2) = 0.3624$

Sai số:

$E_2(1,2) = |\,0,1466\,(1,2 - 0)(1,2 - 1)(1,2 - 2)| = 0,028$

Bài thực tập 4: CÔNG THỨC NỘI SUY

(Thực hành Phương pháp tính)

MỤC ĐÍCH: Mục đích của bài này nhằm *tính công thức nội suy Lagrange và ccông thức nội suy Newton*

THỰC HÀNH:

Cho bảng giá trị vận tốc theo thời gian như sau:

t (s)	$v(t)$ (m/s)
0	0
10	227.04
15	362.78
20	517.35
22.5	602.97
30	901.67

Viết chương trình tìm vận tốc ở t=16s, 21s và 25s

<u>*Bài 1:*</u>

Dùng đa thức nội suy Newton

<u>*Bài 2:*</u>

Dùng đa thức nội suy Lagrange

<u>*Bài 3:*</u>

Cho hàm số

$f(x) = 1 / (1 + 25x^2)$ (hàm số Runge)

a) cho x= -1: 2/3:1, tính giá trị y của hàm số; với giá trị (x,y) vừa có, dùng lệnh polyfit tìm hàm bậc 3 rồi dùng hàm nội suy này tính giá trị yy ứng với xx = linspace(-1,1). Vẽ trên cùng 1 đồ thị (x,y) và (xx,yy), nhận xét sự khác biệt giữa hai đồ thị

b) cho x= -1: 2/10:1, tính giá trị y của hàm số; với giá trị (x,y) vừa có, dùng lệnh polyfit tìm hàm bậc 10 rồi dùng hàm nội suy này tính giá trị yy ứng với xx = linspace(-1,1). Vẽ trên cùng 1 đồ thị (x,y) và (xx,yy), nhận xét sự khác biệt giữa hai đồ thị

c) Từ hai đồ thị a và b, nhận xét gì về bậc của hàm nội suy?