Chương 0:

SỐ PHỨC

Lê Văn Luyện

lvluyen@yahoo.com

http://www.math.hcmus.edu.vn/∼lvluyen/09tt

Đại học Khoa Học Tự Nhiên Tp. Hồ Chí Minh

Chương 0. SỐ PHỨC

1. Dạng đại số của số phức
2. Dạng lượng giác của số phức
3. Căn của số phức
4. Định lý cơ bản của Đại số

1. Dạng lượng giác của số phức

Định nghĩa.

Ta ký hiệu i là số thỏa mãn điều kiện $i^2 = -1$. Khi đó $i \notin \mathbb{R}$ nên i được gọi là ***đơn vị ảo***.

Tập số phức được ký hiệu $\mathbb{C}$ và

$$\mathbb{C} = \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{R}\}.$$

Dạng đại số của số phức là: $z = a + bi$, trong đó

- a : được gọi là ***phần thực*** của số phức z, ký hiệu Re(z).
- b : được gọi là ***phần ảo*** của số phức z, ký hiệu là Im(z).

Ví dụ. Cho $z = 3 - 2i$. Khi đó $Re(z) = 3$ và $Im(z) = -2$.

Phép toán trên số phức

Ta định nghĩa phép toán cộng trừ, nhân, chia trên $\mathbb{C}$ một cách tự nhiên như trên $\mathbb{R}$ (chú ý $i^2 = -1$.)

Mệnh đề. *Cho* $z = a + ib; z' = c + id$. *Khi đó*

- $z = z' \Leftrightarrow a = c, b = d;$
- $z \pm z' = (a \pm c) + i(b \pm d);$
- $zz' = (ac - bd) + i(ad + bc);$
- *Nếu* $z' \neq 0$ *thì* $\dfrac{z}{z'} = \dfrac{(ac + bd) + i(bc - ad)}{c^2 + d^2}$.

Ví dụ.

1) $(2 + 5i)^3 = 2^3 + 3.2^2.5i + 3.2.5^2 i^2 + 5^3 i^3$
$= 8 + 60i - 150 - 125i = -142 - 65i.$

2) $\dfrac{7 + 5i}{3 - 4i} = \dfrac{(7 + 5i)(3 + 4i)}{(3 - 4i)(3 + 4i)} = \dfrac{1 + 43i}{25} = \dfrac{1}{25} + \dfrac{43}{25}i.$

Số phức liên hợp

Định nghĩa. Cho số phức $z = a + ib$. Ta gọi ***số phức liên hợp*** của z, ký hiệu là $\bar{z}$, là số phức $a - ib$.

Định lý. *Với mọi số phức $z, \bar{z}$, ta có*

i) $\bar{z} = 0 \Leftrightarrow z = 0;$

ii) $\bar{\bar{z}} = z;$

iii) $Re(z) = \dfrac{z + \bar{z}}{2}$ và $Im(z) = \dfrac{z - \bar{z}}{2i};$

iv) $\overline{z \pm z'} = \bar{z} \pm \bar{z}';$

v) $\overline{zz'} = \bar{z}\,\bar{z}';$

vi) $\overline{\left(\dfrac{z}{z'}\right)} = \dfrac{\bar{z}}{\bar{z}'}$ $(z' \neq 0)$.

Môđun của số phức

Nhận xét.

i) $z = \bar{z} \Leftrightarrow Im(z) = 0$, *nghĩa là* $z \in \mathbb{R}$.

ii) $z = -\bar{z} \Leftrightarrow Re(z) = 0$, *nghĩa là* $z = ib, b \in \mathbb{R}$. *Trong trường hợp* $z = ib$ *ta nói* z *là số* ***thuần ảo***.

Định nghĩa. Cho số phức $z = a + ib$. Ta gọi ***môđun*** của z, ký hiệu là $|z|$, là số thực không âm $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Ví dụ. Với $z = 3 - 4i$, ta có

$$|z| = \sqrt{3^2 + (-4)^2} = \sqrt{25} = 5.$$

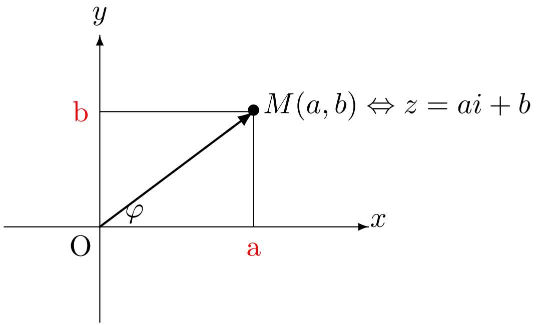
Ví dụ. Cho các số phức $z = 3 - 4i; z' = -6 + 8i$. Hãy tìm môđun của $z, z'; z + z'; z - z'; zz'; z/z'; z^4$ và z'^{-3}.

Giải.

- $|z| = \sqrt{3^2 + (-4)^2} = 5 \Rightarrow \left|z^4\right| = |z|^4 = 5^4 = 625;$
- $|z'| = \sqrt{(-6)^2 + 8^2} = 10 \Rightarrow \left|z'^{-3}\right| = |z'|^{-3} = 10^{-3} = 0,001;$
- $z + z' = -3 + 4i \Rightarrow |z + z'| = \sqrt{(-3)^2 + 4^2} = 5;$
- $z - z' = 9 - 12i \Rightarrow |z - z'| = \sqrt{9^2 + (-12)^2} = 15;$
- $|zz'| = |z|\,|z'| = 5.10 = 50;$
- $\left|\dfrac{z}{z'}\right| = \dfrac{|z|}{|z'|} = \dfrac{5}{10} = \dfrac{1}{2}.$

2. Dạng lượng giác của số phức

Cho số phức $z = a + bi$. Khi đó có thể xem z như là điểm $M(a, b)$ mặt phẳng tọa độ Oxy và ta gọi M là ***biểu diễn hình học của*** z.



Gọi φ là góc định hướng (Ox, OM) và r là độ dài đoạn OM. Khi đó

$$r = \sqrt{a^2 + b^2}, \quad a = r\cos\varphi, \quad b = r\sin\varphi.$$

Như vậy $z = a + bi = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$.

Dạng biểu số phức theo r và φ được gọi là ***dạng lượng giác*** của z. Trong đó

- r là môđun của z, $r = |z|$
- φ được gọi là ***đối số*** (hay ***argument***) của z, ký hiệu $\varphi = \arg(z)$.

Ví dụ.

- $1 = \cos 0 + i\sin 0; \quad i = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}$;
- $1 + i\sqrt{3} = 2(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}) = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right);$
- $-1 + i\sqrt{3} = 2(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}) = 2\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right);$
- $-1 - i\sqrt{3} = 2(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}) = 2\left(\cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3}\right).$

Mệnh đề. *Cho các số phức $z, z' \neq 0$ dưới dạng lượng giác*

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi), \quad z' = r'(\cos\varphi' + i\sin\varphi').$$

Khi đó

- $zz' = rr'[\cos(\varphi + \varphi') + i\sin(\varphi + \varphi')]$;
- $\dfrac{z}{z'} = \dfrac{r}{r'}[\cos(\varphi - \varphi') + i\sin(\varphi - \varphi')]$.

Ví dụ. Viết các số phức sau dưới dạng lượng giác:

$$z_1 = (1 - i)(\sqrt{3} - i); \quad z_2 = \frac{1 - i}{\sqrt{3} - i}.$$

Giải. Ta có

$$\begin{aligned}
1-i &= \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\sqrt{2}\left[\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right];\\
\sqrt{3}-i &= 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-i\frac{1}{2}\right)=2\left[\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right].
\end{aligned}$$

Suy ra

$$\begin{aligned}
z_1 &= (1-i)(\sqrt{3}-i)=2\sqrt{2}\left[\cos\left(-\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6}\right)\right]\\
&= 2\sqrt{2}\left[\cos\left(-\frac{5\pi}{12}\right)+i\sin\left(-\frac{5\pi}{12}\right)\right];\\
z_2 &= \frac{1-i}{\sqrt{3}-i}=\frac{\sqrt{2}}{2}\left[\cos\left(-\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{6}\right)\right]\\
&= \frac{\sqrt{2}}{2}\left[\cos\left(-\frac{\pi}{12}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{12}\right)\right].
\end{aligned}$$

Công thức Moivre

Định lý. *[công thức Moivre] Cho số phức $z \neq 0$ dưới dạng lượng giác: $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$. Khi đó với mọi số nguyên n ta có*

$$z^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi). \tag{4}$$

Ví dụ. Tính $(1-i)^{1945}$

Giải. Ta viết $1-i$ dưới dạng lượng giác

$$1 - i = \sqrt{2}\left[\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right].$$

Theo công thức Moivre ta có

$$(1-i)^{1945} = \left[\sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)\right]^{1945}$$

$$
\begin{aligned}
(1-i)^{1945} &= \left[\sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)\right]^{1945} \\
&= \sqrt{2}^{1945}\left[\cos\left(-\frac{1945\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{1945\pi}{4}\right)\right] \\
&= 2^{972}\sqrt{2}\left[\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right] \\
&= 2^{972}(1-i).
\end{aligned}
$$

Ví dụ. Tính $\cos 3x$ theo $\cos x$ và $\sin 3x$ theo $\sin x$.

Giải. Đặt $z = \cos x + i\sin x$. Theo công thức Moivre ta có

$$z^3 = \cos 3x + i\sin 3x.$$

Mặt khác

$$\begin{aligned} z^3 &= (\cos x + i\sin x)^3 \\ &= \cos^3 x + 3\cos^2 x(i\sin x) + 3\cos x(i\sin x)^2 + (i\sin x)^3 \\ &= (\cos^3 x - 3\cos x\sin^2 x) + i(3\cos^2 x\sin x - \sin^3 x). \end{aligned}$$

Suy ra

$$\begin{aligned} \cos 3x &= \cos^3 x - 3\cos x\sin^2 x = 4\cos^3 x - 3\cos x; \\ \sin 3x &= 3\cos^2 x\sin x - \sin^3 x = 3\sin x - 4\sin^3 x. \end{aligned}$$

3. Căn của số phức

Định nghĩa. *Căn bậc $n > 0$* của số phức u là số phức z thỏa $z^n = u$.

Định lý. *Mọi số phức $u \neq 0$ đều có đúng n căn bậc n định bởi*

$$z_k = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + k2\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi + k2\pi}{n}\right), \tag{1}$$

với $k \in \overline{0, n-1}$, trong đó $r = |z|$, $\varphi = \arg(z)$.

Ví dụ. Tìm căn bậc 5 của 1.

Giải. Ta viết 1 dưới dạng lượng giác

$$1 = \cos 0 + i\sin 0.$$

$$1 = \cos 0 + i \sin 0.$$

Theo công thức (1), ta có các căn bậc 5 của 1 là

$$z_k = \cos \frac{k2\pi}{5} + i \sin \frac{k2\pi}{5} \text{ với } k = 0, 1, 2, 3, 4.$$

Đó là các số phức:

$$\begin{aligned}
z_0 &= 1; \\
z_1 &= \cos \frac{2\pi}{5} + i \sin \frac{2\pi}{5}; \\
z_2 &= \cos \frac{4\pi}{5} + i \sin \frac{4\pi}{5}; \\
z_3 &= \cos \frac{6\pi}{5} + i \sin \frac{6\pi}{5}; \\
z_4 &= \cos \frac{8\pi}{5} + i \sin \frac{8\pi}{5}.
\end{aligned}$$

Ví dụ. Tìm căn bậc 3 của $1+i$.

Giải. Ta viết $1+i$ dưới dạng lượng giác

$$1+i=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right).$$

Theo công thức (1), các căn bậc 3 của $1+i$ là

$$z_k=\sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{\frac{\pi}{4}+k2\pi}{3}+i\sin\frac{\frac{\pi}{4}+k2\pi}{3}\right) \text{ với } k=0,\ 1,\ 2.$$

Vậy $1+i$ có 3 căn bậc 3 là

$$\begin{aligned}
z_0 &= \sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12}\right);\\
z_1 &= \sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{9\pi}{12}+i\sin\frac{9\pi}{12}\right);\\
z_2 &= \sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{17\pi}{12}+i\sin\frac{17\pi}{12}\right).
\end{aligned}$$

Căn bậc hai của số phức

Định lý. *Cho số phức $u = a + ib \neq 0$. Khi đó u có 2 căn bậc hai đối nhau $z = x + iy$, trong đó*

$$\begin{cases} x^2 &= \dfrac{a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}; \\ y^2 &= -\dfrac{a-\sqrt{a^2+b^2}}{2}. \end{cases}$$

Hơn nữa, tích số xy luôn luôn cùng dấu với b (nếu $b \neq 0$).

Ví dụ. Tìm căn bậc hai của số phức $z = 3 + 4i$.

Giải. Ta có $a = 3, b = 4$. Suy ra $\begin{cases} x^2 &= 4; \\ y^2 &= 1; \\ xy &> 0 \text{ (vì } b = 4 > 0). \end{cases}$

Vậy căn bậc hai của z là $z_1 = -2 - i; \quad z_2 = 2 + i$.

Phương trình bậc hai

Định lý. *Phương trình bậc hai* $az^2 + bz + c = 0$ *với* $a, b, c \in \mathbb{C}, a \neq 0$, *luôn luôn có các nghiệm định bởi*

$$z = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}, \quad \text{trong đó } \Delta = b^2 - 4ac,$$

với quy ước $\sqrt{\Delta}$ *là một trong hai căn bậc hai của số phức* Δ.

Ví dụ. Giải phương trình phức

$$2z^2 + (2i + 1)z + 8i + 11 = 0.$$

Giải. Ta có

$$\Delta = b^2 - 4ac = (2i + 1)^2 - 4.2(8i + 11) = -91 - 60i.$$

Gọi $z = x + iy$ là một căn bậc hai của $\Delta = -91 - 60i$. Khi đó

$$\begin{aligned} x^2 &= \frac{-91 + \sqrt{91^2 + 60^2}}{2} = 9; \\ y^2 &= -\frac{-91 - \sqrt{91^2 + 60^2}}{2} = 100. \\ xy &< 0 \text{ (cùng dấu với } -60). \end{aligned}$$

Vậy $z = \pm(3 - 10i)$ là các căn bậc hai của $\Delta = -91 - 60i$. Suy ra nghiệm phương trình đã cho là

$$\begin{aligned} z_1 &= \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(2i + 1) + (3 - 10i)}{2.2} = \frac{1}{2} - 3i; \\ z_2 &= \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(2i + 1) - (3 - 10i)}{2.2} = -1 + 2i. \end{aligned}$$

Ví dụ. Giải phương trình phức

$$144z^2 + 192z + 73 = 0.$$

Giải. Ta có

$$\Delta' = b'^2 - ac = 96^2 - 144.73 = -1296.$$

Vậy $\sqrt{\Delta'} = \sqrt{-1296} = \sqrt{(36i)^2} = \pm 36i$. Suy ra nghiệm phương trình đã cho là

$$z = \frac{-b' \pm \sqrt{\Delta'}}{a} = \frac{-96 \pm 36i}{144} = -\frac{2}{3} \pm \frac{1}{4}i.$$

Ví dụ. Giải phương trình

$$z^2 - 2\overline{z} + 1 = 0.$$

Giải. Đặt $z = x + iy$. Ta viết lại phương trình đã cho dưới dạng

$$(x^2 - y^2 + 2ixy) - 2(x - iy) + 1 = 0$$

$$(x^2 - y^2 + 2ixy) - 2(x - iy) + 1 = 0$$

hay

$$(x^2 - y^2 - 2x + 1) + 2i(x + 1)y = 0$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 - 2x + 1 = 0; & (1) \\ (x + 1)y = 0. & (2) \end{cases}$$

Từ (2) $\Rightarrow \left[\begin{array}{ccc} x & = & -1 \\ y & = & 0 \end{array} \right.$

- $x = -1$, (1) trở thành $4 - y^2 = 0 \Leftrightarrow y = \pm 2$.
- $y = 0$, (1) trở thành $x^2 - 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$.

Vậy phương trình đã có 3 nghiệm là

$$z_1 = -1 + 2i; \quad z_2 = -1 - 2i; \quad z_3 = 1.$$

4. Định lý cơ bản của Đại số

Bổ đề. *Cho $f(x) \in \mathbb{R}[x]$ là một đa thức bất kỳ với các hệ số thực. Giả sử $\alpha \in \mathbb{C}$ là một nghiệm nào đó của $f(x)$. Khi đó $\overline{\alpha}$ cũng là nghiệm của $f(x)$.*

Định lý. *[Định lý căn bản của Đại số]*
Mọi đa thức bậc lớn hơn hay bằng 1 với hệ số phức đều có nghiệm phức.

Định lý.
Nếu $f(x) \in \mathbb{R}[x]$ và bậc của $f(x)$ lớn hơn hay bằng 1 thì $f(x)$ có thể phân tích thành tích các đa thức trong $\mathbb{R}[x]$ có bậc tối đa là 2.

Ví dụ. Giải phương trình $z^4 + 4z^3 + 11z^2 + 14z + 10 = 0$. Biết phương trình này có 1 nghiệm là $z_1 = -1 + i$.

Giải. Nhận xét $z_1 = -1 + i$ là nghiệm của phương trình thì $z_2 = -1 - i$ cũng là nghiệm của phương trình.

Ta có

$$\begin{aligned} (z - z_1)(z - z_2) &= (z + 1 - i)(z + 1 + i) \\ &= z^2 + 2z + 2. \end{aligned}$$

Chia đa thức ta được

$$z^4 + 4z^3 + 11z^2 + 14z + 10 = \left(\mathrm{z}^2 + 2z + 2\right)\left(\mathrm{z}^2 + 2z + 5\right).$$

Phương trình $\mathrm{z}^2 + 2z + 5 = 0$ có hai nghiệm là $-1 \pm 2i$.

Vậy phương trình ban đầu có 4 nghiệm là

$$-1 + i; \quad -1 - i; \quad -1 - 2i; \quad -1 + 2i.$$

Bài giảng môn học Đại số A_1

Chương 1:

MA TRẬN VÀ HỆ PHƯƠNG TRÌNH TUYẾN TÍNH

Lê Văn Luyện

lvluyen@yahoo.com

http://www.math.hcmus.edu.vn/∼lvluyen/09tt

Đại học Khoa Học Tự Nhiên Tp. Hồ Chí Minh

Nội dung

Chương 1. MA TRẬN VÀ HỆ PHƯƠNG TRÌNH TUYẾN TÍNH

1. Ma trận
2. Các phép biến đổi sơ cấp trên dòng
3. Hệ phương trình tuyến tính
4. Ma trận khả nghịch
5. Phương trình ma trận

1. Ma trận

1.1. Định nghĩa và ký hiệu

Định nghĩa. Một *ma trận* cấp $m \times n$ trên $\mathbb{R}$ là một bảng chữ nhật gồm m dòng, n cột với mn hệ số trong $\mathbb{R}$ có dạng

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Viết tắt: $\mathrm{A = (a_{ij})_{m\times n}}$ hay $\mathrm{A = (a_{ij})}$, trong đó $a_{ij} \in \mathbb{R}$.

$\mathrm{a_{ij}}$ hay $\mathrm{A_{ij}}$ là phần tử ở vị trí dòng i cột j của A

$M_{m\times n}(\mathbb{R})$ là tập hợp tất cả những ma trận cấp $m \times n$ trên $\mathbb{R}$.

1.1. Định nghĩa và ký hiệu

Ví dụ.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \in M_{2\times 3}(\mathbb{R}); \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \in M_{3\times 2}(\mathbb{R}).$$

▷ Ma trận có các phần tử bằng 0 được gọi là ***ma trận không***, ký hiệu $0_{m\times n}$ (hay 0)

Ví dụ.

$$0_{3\times 4} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1.2. Ma trận vuông

Định nghĩa. Nếu $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ (số dòng bằng số cột) thì A được gọi là ***ma trận vuông***.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

$M_n(\mathbb{R})$: Tập hợp tất cả các ma trận vuông cấp n trên $\mathbb{R}$.

Ví dụ.

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 5 & 2 & 3 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R}); \quad 0_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

1.2. Ma trận vuông

Định nghĩa. Nếu $A = (a_{ij}) \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ thì đường chứa các phần tử $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}$ được gọi là ***đường chéo chính*** hay ***đường chéo*** của A.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Ví dụ.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ -2 & -3 & 3 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

• Nếu các phần tử nằm dưới đường chéo của A đều bằng 0 (nghĩa là $a_{ij} = 0, \forall i > j$) thì A được gọi là ma trận ***tam giác trên***.

• Nếu các phần tử nằm trên đường chéo của A đều bằng 0 (nghĩa là $a_{ij} = 0, \forall i < j$) thì A được gọi là ma trận ***tam giác dưới***.

• Nếu mọi phần tử nằm ngoài đường chéo bằng 0 thì A (nghĩa là $a_{ij} = 0, \forall i \neq j$) được gọi là ***ma trận đường chéo***, ký hiệu $\mathrm{diag}(\mathrm{a}_1, \mathrm{a}_2, \ldots, \mathrm{a}_\mathrm{n})$.

Ví dụ. $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -4 \end{pmatrix}.$

$$C = \mathrm{diag}(-1, 0, 5) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

Ma trận đơn vị

Ma trận vuông cấp n có các phần tử trên đường chéo bằng 1, các phần tử nằm ngoài đường chéo bằng 0 được gọi là ***ma trận đơn vị cấp n***, ký hiệu $\mathrm{I_n}$ (hoặc I.)

Ví dụ.

$$I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Nhận xét. *Ma trận A là ma trận đường chéo khi và chỉ khi vừa là ma trận tam giác vừa là ma trận tam giác dưới.*

1.3. Các phép toán trên ma trận

a) So sánh hai ma trận

Cho $A, B \in M_{m\times n}$. Khi đó, nếu $a_{ij} = b_{ij}, \forall i, j$ thì A và B được gọi là hai ma trận bằng nhau, ký hiệu $\mathrm{A} = \mathrm{B}$.

Ví dụ. Tìm x, y, z để $\begin{pmatrix} x+1 & 1 \\ 2x-1 & z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3y-4 & 1 \\ y-1 & 2z+2 \end{pmatrix}$.

Giải. Ta có

$$\left\{\begin{array}{rcl} x+1 & = & 3y-4; \\ 2x-1 & = & y-1; \\ z & = & 2z+2. \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcr} x & = & 1; \\ y & = & 2; \\ z & = & -2. \end{array}\right.$$

1.3. Các phép toán trên ma trận

b) Chuyển vị ma trận

Cho $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$. Ta gọi ***ma trận chuyển vị*** của A, ký hiệu $A^\top$, là ma trận cấp $n \times m$, có được từ A bằng cách xếp các dòng của A thành các cột tương ứng, nghĩa là

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix} \text{ thì } A^\top = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \ldots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \ldots & a_{m2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{1n} & a_{2n} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Ví dụ.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 & 5 \\ 6 & -8 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & -3 & 6 \end{pmatrix} \Longrightarrow A^\top = \begin{pmatrix} 1 & 6 & 0 \\ -1 & -8 & 4 \\ 4 & 0 & -3 \\ 5 & 1 & 6 \end{pmatrix}.$$

- Nếu $A^\top = A$ thì ta nói A là *ma trận đối xứng*.
- Nếu $A^\top = -A$ thì nói A là *ma trận phản xứng*.

Ví dụ. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 4 & 5 \\ -2 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ là ma trận đối xứng.

$B = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & -3 \\ -1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$ là ma trận phản xứng.

Tính chất. *Cho* $A, B \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$. *Khi đó:*

i) $(A^\top)^\top = A$;

ii) $A^\top = B^\top \Leftrightarrow A = B$.

c) Nhân một số với ma trận

Cho ma trận $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R}), \alpha \in \mathbb{R}$. Ta định nghĩa αA là ma trận có từ A bằng cách nhân tất cả các hệ số của A với α, nghĩa là

$$(\alpha A)_{ij} = \alpha A_{ij}, \forall i, j.$$

Ma trận $(-1)A$ được ký kiệu là $-$A được gọi là *ma trận đối* của A.

Ví dụ. Nếu $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}$ thì

$$2A = \begin{pmatrix} 6 & 8 & 2 \\ 0 & 2 & -6 \end{pmatrix};.$$

$$-A = \begin{pmatrix} -3 & -4 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Tính chất. *Cho A là ma trận và* α, $\beta \in \mathbb{R}$, *ta có*

i) $(\alpha\beta)A = \alpha(\beta A)$;

ii) $(\alpha A)^\top = \alpha A^\top$;

iii) $0.A = 0$ *và* $1.A = A$.

d) Tổng hai ma trận

Cho $A, B \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$. Khi đó ***tổng*** của A và B, ký hiệu $\mathrm{A+B}$ là ma trận được xác định bởi:

$$(A+B)_{ij} = A_{ij} + B_{ij}.$$

Như vậy, để tính $A+B$ thì:

- A và B cùng cấp;
- Các vị trí tương ứng cộng lại.

Ký hiệu $\mathrm{A-B} := A + (-B)$ và gọi là ***hiệu*** của A và B.

Ví dụ.

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 \\ 7 & 8 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 3 & -4 \\ 8 & 10 & -6 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 \\ 7 & 8 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ -6 & -6 & 0 \end{pmatrix}.$$

Tính chất. *Với* $A, B, C \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ *và* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, *ta có*

i) $A + B = B + A$ *(tính giao hoán);*

ii) $(A + B) + C = A + (B + C)$ *(tính kết hợp);*

iii) $0_{m\times n} + A = A + 0_{m\times n} = A$;

iv) $A + (-A) = (-A) + A = 0_{m\times n}$;

v) $(A + B)^\top = A^\top + B^\top$;

vi) $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$;

vii) $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$;

viii) $(-\alpha)A = \alpha(-A) = -(\alpha A)$.

e) Tích hai ma trận

Cho hai ma trận $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R}), B \in M_{n\times p}(\mathbb{R})$. Khi đó, ***tích*** của A với B (ký hiệu AB) là ma trận thuộc $M_{m\times p}(\mathbb{R})$ được xác định bởi:

$$(AB)_{ij} = A_{i1}B_{1j} + A_{i2}B_{2j} + \ldots + A_{in}B_{nj}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{i1} & a_{i2} & \ldots & a_{in} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & \ldots & b_{1j} & \ldots & b_{1n} \\ b_{21} & \ldots & b_{2j} & \ldots & b_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ b_{n1} & \ldots & b_{nj} & \ldots & b_{nn} \end{pmatrix}$$

Như vậy, để tính AB thì:

- Số cột của A bằng số dòng của B;
- Phần tử thứ i, j của AB bằng dòng i của A nhân cột j của B.

Ví dụ. Với $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$,

ta có:

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 11 & 8 \end{pmatrix};$$

$$BA = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 5 & 5 \\ 5 & 5 & 0 \\ 0 & 5 & -5 \end{pmatrix};$$

$$BC = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 5 & -2 \\ 5 & -3 \end{pmatrix};$$

nhưng AC và CB không xác định.

Tính chất. *Với* $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$, $B, B_1, B_2 \in M_{n\times p}(\mathbb{R})$, $C \in M_{p\times q}(\mathbb{R})$, $D_1, D_2 \in M_{q\times n}(\mathbb{R})$, *ta có*

i) $I_m A = A$ *và* $AI_n = A$. *Đặc biệt, với* $A \in M_n(\mathbb{R})$, *ta có*

$$I_n A = AI_n = A.$$

ii) $0_{p\times m}A = 0_{p\times n}$ *và* $A0_{n\times q} = 0_{m\times q}$. *Đặc biệt, với* $A \in M_n(\mathbb{R})$, *ta có*

$$0_{n\times n}A = A0_{n\times n} = 0_{n\times n}.$$

iii) $(AB)^\top = B^\top A^\top$.

iv) $(AB)C = A(BC)$.

v) $A(B_1 + B_2) = AB_1 + AB_2$

$(D_1 + D_2)A = D_1A + D_2A$.

f) Lũy thừa ma trận

Cho $A \in M_n(\mathbb{R})$. Ta gọi ***lũy thừa*** bậc k của A là một ma trận thuộc $M_n(\mathbb{R})$, ký hiệu A^{k}, được xác định như sau:

$$A^0 = I_n; A^1 = A; A^2 = AA; \ldots; A^k = A^{k-1}A.$$

Như vậy $A^k = \underbrace{A \ldots A}_{k \text{ lần}}.$

Ví dụ. Cho $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Tính A^2, A^3, từ đó suy ra A^{200}.

Giải.

$$A^2 = AA = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$A^3 = A^2A = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 9 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Suy ra $A^{200} = \begin{pmatrix} 1 & 200 \times 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Ví dụ. Cho $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Tính A^{100}.

Ví dụ. Cho $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Tính A^n với $n > 1$.

Tính chất. *Cho $A \in M_n(\mathbb{R})$ và $k, l \in \mathbb{N}$. Khi đó:*

i) $I^k = I$;

ii) $A^{k+l} = A^k A^l$;

iii) $A^{kl} = (A^k)^l$

g) Đa thức ma trận Cho $A \in M_n(\mathbb{R})$ và

$$f(x) = \alpha_m x^m + \alpha_{m-1}x^{m-1} + \ldots + \alpha_1 x + \alpha_0$$

là một đa thức bậc m trên $\mathbb{R}$ ($\alpha_i \in \mathbb{R}$). Khi đó ta định nghĩa

$$f(A) = \alpha_m A^m + \alpha_{m-1}A^{m-1} + \ldots + \alpha_1 A + \alpha_0 I_n$$

và ta gọi f(A) là ***đa thức theo ma trận*** A.

Ví dụ. Cho $A = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ và $f(x) = 3x^2 - 2x + 2$. Tính $f(A)$.

Giải. Ta có $A^2 = \begin{pmatrix} 7 & -9 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$, $f(A) = 3A^2 - 2A + 2I_2$.

Suy ra

$$f(A) = 3\begin{pmatrix} 7 & -9 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 27 & -33 \\ -11 & 16 \end{pmatrix}$$

2. Các phép biến đổi sơ cấp trên dòng

2.1 Các phép biến đổi sơ cấp trên dòng

Định nghĩa. Cho $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$. Ta gọi ***phép biến đổi sơ cấp trên dòng***, viết tắt là phép ***BĐSCTD*** trên A, là một trong ba loại biến đổi sau:

Loại 1. Hoán vị hai dòng i và j $(i \neq j)$.
Ký hiệu : $\mathrm{d_i} \leftrightarrow \mathrm{d_j}$

Loại 2. Nhân dòng i cho một số $\alpha \neq 0$.
Ký hiệu: $\mathrm{d_i} := \alpha \mathrm{d_i}$

Loại 3. Cộng vào một dòng i với β lần dòng j $(j \neq i)$.
Ký hiệu: $\mathrm{d_i} := \mathrm{d_i} + \beta \mathrm{d_j}$

Với φ là một phép biến đổi sơ cấp, ký hiệu $\varphi(A)$ chỉ ma trận có từ A qua φ.

Ví dụ. $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{d_1 \leftrightarrow d_2} \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{d_2 := 2d_2} \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}.$

Ví dụ.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 2 \\ 3 & 6 & -1 & -3 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{d_1 \leftrightarrow d_3} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 4 \\ 3 & 6 & -1 & -3 \\ 1 & -2 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{d_2 := 2d_2} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 4 \\ 6 & 12 & -2 & -6 \\ 1 & -2 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{d_1 := d_1 + 2d_3} \begin{pmatrix} 4 & -3 & 9 & 8 \\ 6 & 12 & -2 & -6 \\ 1 & -2 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Tương đương dòng

Nhận xét.

1) $A \xrightarrow{d_i \leftrightarrow d_j} A' \Rightarrow A' \xrightarrow{d_i \leftrightarrow d_j} A;$

2) $A \xrightarrow{d_i := \alpha d_i} A' \Rightarrow A' \xrightarrow{d_i := \frac{1}{\alpha} d_i} A;$

3) $A \xrightarrow{d_i := d_i + \beta d_j} A' \Rightarrow A' \xrightarrow{d_i := d_i - \beta d_j} A.$

Định nghĩa. Cho $A, B \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$. Ta nói A ***tương đương dòng*** với B, ký hiệu $A \sim B$, nếu B có được từ A qua hữu hạn phép biến đổi sơ cấp trên dòng nào đó. Vậy,

$A \sim B \Leftrightarrow$ Tồn tại các phép BĐSCTD $\varphi_1, \ldots, \varphi_k$ sao cho

$$A \xrightarrow{\varphi_1} A_1 \xrightarrow{\varphi_2} \ldots \xrightarrow{\varphi_k} A_k = B.$$

Nhận xét. *Quan hệ tương đương dòng là một quan hệ tương đương trên* $M_{m\times n}(\mathbb{R})$, *nghĩa là* $\forall A, B, C \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$, *ta có:*

i) $A \sim A$ *(tính phản xạ).*

ii) $A \sim B \Rightarrow B \sim A$ *(tính đối xứng).*

iii) $A \sim B$ *và* $B \sim C \Rightarrow A \sim C$ *(tính bắc cầu).*

Ví dụ. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 3 \\ 1 & 2 & 5 & 1 \\ 2 & 3 & -2 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 & 1 \\ 5 & 8 & 1 & 3 \\ 3 & 6 & -6 & 9 \end{pmatrix} = B.$

Vì B có được từ A qua lần lượt các phép BĐSCTD sau: $d_1 \leftrightarrow d_3$, $d_2 := d_2 + 2d_1$, $d_3 := 3d_3$.

Hỏi. Làm cách nào kiểm tra hai ma trận tương đương dòng với nhau?

2.2 Ma trận bậc thang

Định nghĩa. Cho $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$. Phần tử khác không đầu tiên của một dòng kể từ bên trái được gọi là ***phần tử cơ sở*** của dòng đó.

Ví dụ. Cho ma trận $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Khi đó:

Dòng 1 có phần tử cơ sở là -1, dòng 2 có phần tử cơ sở là 3, dòng 3 không có phần tử cơ sở.

Định nghĩa. Một ma trận được gọi là ***ma trận bậc thang*** nếu nó thỏa 2 tính chất sau:

- Dòng không có phần tử cơ sở (nếu tồn tại) thì nằm dưới cùng;
- Phần tử cơ sở của dòng dưới nằm bên phải so với phần tử cơ sở của dòng trên.

Như vậy ma trận bậc thang sẽ có dạng

$$\begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & a_{1k_1} & \dots & \dots & a_{1k_2} & \dots & \dots & a_{1k_r} & \dots & a_{1n} \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & a_{2k_2} & \dots & \dots & a_{2k_r} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & a_{rk_r} & \dots & a_{rn} \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

Ví dụ. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$

A là trận bậc thang, B không là ma trận bậc thang.

ma trận bậc thang rút ngọn

Định nghĩa. Ma trận A được gọi là *ma trận bậc thang rút ngọn* nếu thỏa các điều kiện sau:

- A là ma trận bậc thang.
- Các phần tử cơ sở đều bằng 1.
- Trên các cột có chứa phần tử cơ sở, tất cả các hệ số khác đều bằng 0.

Ví dụ. $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -7 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 2 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$

C là ma trận bậc thang rút gọn.

D không là ma trận bậc thang rút gọn.

2.3 Hạng của ma trận

Dạng bậc thang

Định nghĩa. Nếu A tương đương dòng với một ma trận bậc thang B thì B được gọi là một ***dạng bậc thang*** của A.

Ví dụ. Cho

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -2 \\ -2 & -5 & 1 & -4 \\ 3 & 6 & 9 & -6 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -2 \\ 0 & -1 & 7 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Khi đó B là một dạng bậc thang của A vì B có được từ A thông qua các phép biến đổi: $d_2 := d_2 + 2d_1$, $d_3 = d_3 - 3d_1$.

Hỏi. Dạng bậc thang của một ma trận có duy nhất không?

Hạng của ma trận

Nhận xét. *Một ma trận A thì có nhiều dạng bậc thang, tuy nhiên các dạng bậc thang của A đều có chung số dòng khác 0. Ta gọi số dòng khác 0 của một dạng bậc thang của A là* ***hạng*** *của A, ký hiệu* r(A).

Mệnh đề. *Cho* $A, B \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$*. Khi đó:*

i) $0 \le r(A) \le m, n$;

ii) $r(A) = 0 \Leftrightarrow A = 0$;

iii) $r(A^\top) = r(A)$;

iv) *Nếu* $A \sim B$ *thì* $r(A) = r(B)$.

Định nghĩa. Nếu A tương đương dòng với một ma trận bậc thang rút gọn B thì B được gọi là *dạng bậc thang rút gọn của* A.

Nhận xét. *Dạng bậc thang rút gọn của một ma trận A là duy nhất và ký hiệu* $\mathrm{R_A}$.

Ví dụ. Cho $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -2 \\ -2 & -5 & 1 & -4 \\ 3 & 6 & 9 & -6 \end{pmatrix}$. Khi đó

$$R_A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 17 & -18 \\ 0 & 1 & -7 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

R_A có được từ A thông qua các phép biến đổi: $d_2 := d_2 + 2d_1$, $d_3 = d_3 - 3d_1, d_2 := -1d_2, d_1 := d_1 - 2d_2$.

Thuật toán Gauss

Tìm một dạng bậc thang của $A = (a)_{ij} \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$

Bước 1: $i := 1, j := 1$.

Bước 2: Nếu $i > m$ hoặc $j > n$ thì kết thúc.

Bước 3: Nếu $a_{ij} = 0$ thì sang Bước 4. Nếu $a_{ij} \neq 0$ thì thực hiện các phép BĐSCTD sau:

$$d_k := d_k - \frac{a_{kj}}{a_{ij}} d_i \quad \text{với} \quad k > i.$$

Sau đó $i := i + 1, j := j + 1$ và quay về Bước 2.

Bước 4: Nếu $a_{kj} = 0$ với mọi $k > i$ thì $j := j + 1$ và quay về Bước 2. Nếu $a_{kj} \neq 0$ với một $k > i$ nào đó thì chọn một k như vậy và thực hiện phép BĐSCTD: $d_i \leftrightarrow d_k$ và quay về Bước 3.

Ví dụ. Tìm một ma trận dạng bậc thang R của ma trận

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 7 & -1 & -2 & -2 \\ 2 & 14 & 2 & 7 & 0 \\ 6 & 42 & 3 & 13 & -3 \end{pmatrix}.$$

Từ đó xác định hạng của A.

Giải.

$$A \xrightarrow[d_4:=d_4-6d_1]{\substack{d_2:=d_2-d_1 \\ d_3:=d_3-2d_1}} \begin{pmatrix} 1 & 7 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -5 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & -5 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{d_4:=d_4-\frac{3}{2}d_2} \begin{pmatrix} 1 & 7 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -5 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{5}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{d_4:=d_4-\frac{3}{2}d_2} \begin{pmatrix} 1 & 7 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -5 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{5}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{d_4:=d_4-\frac{5}{2}d_3} \begin{pmatrix} 1 & 7 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -5 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = R.$$

Ta có $A \sim R$ và R có dạng bậc thang với 3 dòng khác 0 nên A có hạng là $r(A) = 3$.

Lưu ý. Trong quá trình đưa ma trận về dạng bậc thang, ta có thể dùng các phép BĐSCTD phù hợp để tránh việc tính toán các số lẻ.

Ví dụ.

Tìm hạng của ma trận sau:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 3 \\ 2 & 4 & 6 & 9 \\ 2 & 6 & 7 & 6 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & 9 \\ -2 & 0 & -1 & -3 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & -1 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & -3 & 7 & 4 \\ -1 & 1 & 2 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

Ví dụ. Tìm tất cả giá trị m để $r(A) = 3$ với

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 2 & m & m+1 \end{pmatrix}$$

Ví dụ. Tìm tất cả giá trị m để $r(B) = 2$ với

$$B = \begin{pmatrix} 1 & m & m \\ m & 1 & m \\ m & m & 1 \end{pmatrix}$$

Thuật toán Gauss-Jordan

Tìm một dạng bậc thang rút gọn của $A = (a)_{ij} \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$

Chỉ khác Thuật toán Gauss ở Bước 3, ta cần thực hiện các phép biến đổi sau:

$$\begin{aligned} d_k &:= d_k - \frac{a_{kj}}{a_{ij}} d_i \ \text{ với } k \neq i; \\ d_i &:= \frac{1}{a_{ij}} d_i. \end{aligned}$$

Ví dụ. Tìm ma trận dạng bậc thang rút gọn của ma trận

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 7 & -1 & -2 & -2 \\ 2 & 14 & 2 & 7 & 0 \\ 6 & 42 & 3 & 13 & -3 \end{pmatrix}.$$

Giải.

$$\begin{pmatrix} 1 & 7 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 7 & -1 & -2 & -2 \\ 2 & 14 & 2 & 7 & 0 \\ 6 & 42 & 3 & 13 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow[d_4:=d_4-6d_1]{\substack{d_2:=d_2-d_1 \\ d_3:=d_3-2d_1}} \begin{pmatrix} 1 & 7 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -5 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & -5 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[d_2:=-\frac{1}{2}d_2]{\substack{d_1:=d_1+\frac{1}{2}d_2 \\ d_4:=d_4-\frac{3}{2}d_2}} \begin{pmatrix} 1 & 7 & 0 & \frac{1}{2} & -1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{5}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{5}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[d_4:=d_4-\frac{5}{2}d_3]{\substack{d_1:=d_1-\frac{1}{2}d_3 \\ d_2:=d_2-\frac{5}{2}d_3}} \begin{pmatrix} 1 & 7 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = R_A.$$

Ta thấy R_A là ma trận dạng bậc thang rút gọn của A.

Ví dụ.

Tìm dạng ma trận bậc thang rút gọn của các ma trận sau:

a) $\begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \end{pmatrix}$;

b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 2 & 3 & 1 & 6 \\ 3 & 1 & 2 & 6 \end{pmatrix}$;

c) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 5 & -1 \\ 1 & 1 & -2 & 3 \\ 3 & -1 & 8 & 1 \\ 1 & 3 & -9 & 7 \end{pmatrix}$;

d) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & -1 \\ 2 & 5 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 6 & 13 \\ -2 & -6 & 8 & 10 \end{pmatrix}$.

3. Hệ phương trình tuyến tính

3.1 Định nghĩa hệ phương trình tuyến tính

Mở đầu

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcrcr} 2x_1 & - & 2x_2 & + & x_3 & - & x_4 & + & x_5 & = & 1; \\ x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & + & x_4 & - & 2x_5 & = & 1; \\ 4x_1 & - & 10x_2 & + & 5x_3 & - & 5x_4 & + & 7x_5 & = & 1; \\ 2x_1 & - & 14x_2 & + & 7x_3 & - & 7x_4 & + & 11x_5 & = & -1. \end{array}\right.$$

3.1 Định nghĩa hệ phương trình tuyến tính

Định nghĩa. Một ***hệ phương trình tuyến tính*** trên $\mathbb{R}$ gồm m phương trình, n ẩn số là một hệ có dạng

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & +\cdots+ & a_{1n}x_n & = & b_1; \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & +\cdots+ & a_{2n}x_n & = & b_2; \\ \multicolumn{7}{c}{\dotfill} \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & +\cdots+ & a_{mn}x_n & = & b_m, \end{array}\right. \qquad (*)$$

trong đó

- $a_{ij} \in \mathbb{R}$: các hệ số;
- $b_i \in \mathbb{R}$: các hệ số tự do;
- $x_1, x_2, \ldots, x_n$: các ẩn số nhận giá trị trong $\mathbb{R}$.

Nếu (*) có các hệ số tự do =0 thì ta nói (*) là ***hệ phương trình thuần nhất*** trên $\mathbb{R}$.

Đặt

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

Ta gọi A là ma trận hệ số, X là cột các ẩn, B là cột các hệ số tự do của hệ $(*)$. Khi đó hệ $(*)$ được viết dưới dạng $AX = B$. Đặt

$$\tilde{A} = (A|B) = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

$\tilde{A}$ được gọi là ***ma trận mở rộng*** (hay ma trận bổ sung) của hệ $(*)$.

3.2 Nghiệm hệ phương trình tuyến tính

Định nghĩa. Ta nói $u = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ là ***nghiệm*** của hệ phương trình $(*)$ nếu ta thay thế $x_1 := \alpha_1, x_2 := \alpha_2, \ldots x_n := \alpha_n$ thì tất cả các phương trình trong $(*)$ đều thỏa.

Định nghĩa. Hai hệ phương trình được gọi là ***tương đương*** nhau nếu chúng có cùng tập nghiệm.

Nhận xét. *Khi giải một hệ phương trình tuyến tính, các phép biến đổi sau đây cho ta các hệ tương đương:*

- *Hoán đổi hai phương trình cho nhau.*
- *Nhân hai vế của một phương trình cho một số khác 0.*
- *Cộng vào một phương trình một bội của phương trình khác.*

Định lý. *Nếu hai hệ phương trình tuyến tính có ma trận mở rộng tương đương dòng với nhau thì hai hệ phương trình đó tương đương nhau.*

Ví dụ. Giải phương trình

$$\begin{cases} x - y - 2z = -3; \\ 2x - y + z = 1; \\ x + y + z = 4. \end{cases} \tag{1}$$

Giải. $\tilde{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -2 & -3 \\ 2 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \end{array}\right) \xrightarrow[d_3:=d_3-d_1]{d_2:=d_2-2d_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 5 & 7 \\ 0 & 2 & 3 & 7 \end{array}\right)$

$\xrightarrow[d_3:=d_3-2d_2]{d_1:=d_1+d_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 5 & 7 \\ 0 & 0 & -7 & -7 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{d_1:=d_1-3d_3 \\ d_2:=d_2-5d_3}]{d_3:=\frac{-1}{7}d_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$

Ta có $\tilde{A} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$. Suy ra

$$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} x + 0y + 0z = 1; \\ 0x + y + 0z = 2; \\ 0x + 0y + z = 1. \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1; \\ y = 2; \\ z = 1. \end{cases}$$

Ví dụ. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x + y - 2z = 4; \\ 2x + 3y + 3z = 3; \\ 5x + 7y + 4z = 10. \end{cases} \qquad (2)$$

Giải. Ma trận hóa hệ phương trình tuyến tính, ta có

$$\tilde{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 4 \\ 2 & 3 & 3 & 3 \\ 5 & 7 & 4 & 10 \end{array}\right)$$

$$\tilde{A} \xrightarrow[d_3:=d_3-5d_1]{d_2:=d_2-2d_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & 7 & -5 \\ 0 & 2 & 14 & -10 \end{array}\right) \xrightarrow[d_3:=d_3-2d_2]{d_1:=d_1-d_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -9 & 9 \\ 0 & 1 & 7 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Như vậy,

$$(2) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{ccccccc} x & & & - & 9z & = & 9 \\ & & y & + & 7z & = & -5 \end{array} \right.$$

Như vậy nghiệm của (2) là

$$\left\{ \begin{array}{lcl} x & = & 9+9t; \\ y & = & -5-7t; \\ z & = & t. \end{array} \right.$$

Ví dụ. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x + y - 2z = 4; \\ 2x + 3y + 3z = 3; \\ 5x + 7y + 4z = 5. \end{cases} \tag{3}$$

Giải. Ma trận hóa hệ phương trình tuyến tính, ta có

$$\tilde{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 4 \\ 2 & 3 & 3 & 3 \\ 5 & 7 & 4 & 5 \end{array}\right)$$

$$\tilde{A} \xrightarrow[d_3:=d_3-5d_1]{d_2:=d_2-2d_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & 7 & -5 \\ 0 & 2 & 14 & -15 \end{array}\right) \xrightarrow[d_3:=d_3-2d_2]{d_1:=d_1-d_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -9 & 9 \\ 0 & 1 & 7 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & -5 \end{array}\right)$$

Hệ (3) vô nghiệm vì $0x + 0y + 0z = -5$.

Tiếp tục Gauss-Jordan

Nhận xét. *Hệ phương trình tuyến tính thuần nhất*

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & +\cdots+ & a_{1n}x_n & = & 0; \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & +\cdots+ & a_{2n}x_n & = & 0; \\ \multicolumn{7}{c}{\dotfill} \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & +\cdots+ & a_{mn}x_n & = & 0, \end{array}\right.$$

luôn có một nghiệm $u = (0, 0, \ldots, 0)$*. Nghiệm này được gọi là* ***nghiệm tầm thường****.*

Định lý. *Số nghiệm của phương trình tuyến tính chỉ có 3 trường hợp sau:*

- *Vô nghiệm;*
- *Duy nhất một nghiệm;*
- *Vô số nghiệm.*

3.3 Giải hệ phương trình tuyến tính

Có 2 phương pháp

- Gauss
- Gauss - Jordan

Phương pháp Gauss

Bước 1. Lập ma trận mở rộng $\tilde{A} = (A|B)$.

Bước 2. Đưa ma trận $\tilde{A}$ về dạng bậc thang R.

Bước 3. Tùy theo trường hợp dạng bậc thang R ma ta kết luận nghiệm như sau:

- Trường hợp 1. Xuất hiện một dòng

$$(0\ 0\ 0\ 0 \ldots 0\ 0| \neq 0).$$

Kết luận hệ phương trình vô nghiệm.

- Trường hợp 2. Ma trận R có dạng

$$\left(\begin{array}{cccc|c} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} & \alpha_1 \\ 0 & c_{22} & \dots & c_{2n} & \alpha_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & c_{nn} & \alpha_n \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Khi đó hệ phương trình có nghiệm duy nhất. Việc tính nghiệm được thực hiện từ dưới lên trên.

- Trường hợp 3. Khác 2 trường hợp trên. Khi đó hệ có vô số nghiệm, và:

- Ẩn tương ứng với các cột không có phần tử cơ sở sẽ là ẩn tự do (lấy giá trị tùy ý).
- Ẩn tương ứng với cột có phần tử cơ sở sẽ được tính từ dưới lên trên và theo các ẩn tự do.

Ví dụ. Giải hệ phương trình sau:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 7; \\ x_2 + 2x_1 + 2x_3 + 3x_4 = 6; \\ 3x_1 + 2x_2 + 2x_4 + x_3 = 7; \\ 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 = 18, \end{cases}$$

Giải. Ta có

$$\tilde{A} = (A|B) = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 7 \\ 2 & 1 & 2 & 3 & 6 \\ 3 & 2 & 1 & 2 & 7 \\ 4 & 3 & 2 & 1 & 18 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[d_4:=d_4-4d_1]{\substack{d_2:=d_2-2d_1 \\ d_3:=d_3-3d_1}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 7 \\ 0 & -3 & -4 & -5 & -8 \\ 0 & -4 & -8 & -10 & -14 \\ 0 & -5 & -10 & -15 & -10 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[d_4:=d_4-4d_1]{\substack{d_2:=d_2-2d_1\\ d_3:=d_3-3d_1}} \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 2 & 3 & 4 & 7 \\ 0 & -3 & -4 & -5 & -8 \\ 0 & -4 & -8 & -10 & -14 \\ 0 & -5 & -10 & -15 & -10 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{d_2:=d_2-d_3} \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 2 & 3 & 4 & 7 \\ 0 & 1 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & -4 & -8 & -10 & -14 \\ 0 & -5 & -10 & -15 & -10 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[d_4:=d_4+5d_2]{d_3:=d_3+4d_2} \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 2 & 3 & 4 & 7 \\ 0 & 1 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 8 & 10 & 10 \\ 0 & 0 & 10 & 10 & 20 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 7 \\ 0 & 1 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 8 & 10 & 10 \\ 0 & 0 & 10 & 10 & 20 \end{array}\right) \xrightarrow[d_3:=\frac{1}{10}d_3]{d_3\leftrightarrow d_4} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 7 \\ 0 & 1 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 8 & 10 & 10 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{d_4:=d_4-8d_3} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 7 \\ 0 & 1 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -6 \end{array}\right)$$

Vậy hệ đã cho tương đương với hệ sau:

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & + & 4x_4 & = & 7; \\ & & x_2 & + & 4x_3 & + & 5x_4 & = & 6; \\ & & & & x_3 & + & x_4 & = & 2; \\ & & & & & & 2x_4 & = & -6 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcr} x_1 & = & 2; \\ x_2 & = & 1; \\ x_3 & = & 5; \\ x_4 & = & -3. \end{array}\right.$$

Ví dụ. Giải hệ phương trình sau:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 5x_4 = 1; \\ x_1 + 3x_2 - 13x_3 + 22x_4 = -1; \\ 3x_1 + 5x_2 + x_3 - 2x_4 = 5; \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 - 7x_4 = 4, \end{cases}$$

Giải. Ta có

$$\tilde{A} = (A|B) = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -3 & 5 & 1 \\ 1 & 3 & -13 & 22 & -1 \\ 3 & 5 & 1 & -2 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & -7 & 4 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[d_4:=d_4-2d_1]{\substack{d_2:=d_2-d_1 \\ d_3:=d_3-3d_1}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -3 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & -10 & 17 & -2 \\ 0 & -1 & 10 & -17 & 2 \\ 0 & -1 & 10 & -17 & 2 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -3 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & -10 & 17 & -2 \\ 0 & -1 & 10 & -17 & 2 \\ 0 & -1 & 10 & -17 & 2 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[d_4:=d_4+d_2]{d_3:=d_3+d_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -3 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & -10 & 17 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Vậy hệ đã cho tương đương với hệ sau:

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & + & 2x_2 & - & 3x_3 & + & 5x_4 & = & 1; \\ & & x_2 & - & 10x_3 & + & 17x_4 & = & -2. \end{array}\right.$$

Chọn $x_3 = \alpha, x_4 = \beta$, ta tính được

$$\left\{\begin{array}{rcrcr} x_2 & = & -2 + 10x_3 - 17x_4 & = & -2 + 10\alpha - 17\beta; \\ x_1 & = & 1 - 2x_2 + 3x_3 - 5x_4 & = & 5 - 17\alpha + 29\beta. \end{array}\right.$$

Vậy hệ đã cho có vô số nghiệm với hai ẩn tự do

Ví dụ. Giải hệ phương trình sau:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 = 2; \\ 3x_1 + 3x_2 - 5x_3 + x_4 = -3; \\ -2x_1 + x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 5; \\ 3x_1 + 3x_3 - 10x_4 = 8. \end{cases}$$

Giải. Ta có

$$\tilde{A} = (A|B) = \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & -2 & 3 & -4 & 2 \\ 3 & 3 & -5 & 1 & -3 \\ -2 & 1 & 2 & -3 & 5 \\ 3 & 0 & 3 & -10 & 8 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[d_4:=d_4-3d_1]{\substack{d_2:=d_2-3d_1 \\ d_3:=d_3+2d_1}} \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & -2 & 3 & -4 & 2 \\ 0 & 9 & -14 & 13 & -9 \\ 0 & -3 & 8 & -11 & 9 \\ 0 & 6 & -6 & 2 & 2 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & -2 & 3 & -4 & 2 \\ 0 & 9 & -14 & 13 & -9 \\ 0 & -3 & 8 & -11 & 9 \\ 0 & 6 & -6 & 2 & 2 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{d_2 \leftrightarrow d_3} \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & -2 & 3 & -4 & 2 \\ 0 & -3 & 8 & -11 & 9 \\ 0 & 9 & -14 & 13 & -9 \\ 0 & 6 & -6 & 2 & 2 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[d_4:=d_4+2d_2]{d_3:=d_3+3d_2} \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & -2 & 3 & -4 & 2 \\ 0 & -3 & 8 & -11 & 9 \\ 0 & 0 & 10 & -20 & 18 \\ 0 & 0 & 10 & -20 & 20 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{d_4:=d_4-d_3} \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & -2 & 3 & -4 & 2 \\ 0 & -3 & 8 & -11 & 9 \\ 0 & 0 & 10 & -20 & 18 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right).$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 3 & -4 & 2 \\ 0 & -3 & 8 & -11 & 9 \\ 0 & 0 & 10 & -20 & 18 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right)$$

Vậy hệ đã cho tương đương với hệ sau:

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & - & 2x_2 & + & 3x_3 & - & 4x_4 & = & 2; \\ & - & 3x_2 & + & 8x_3 & - & 11x_4 & = & 9; \\ & & & & 10x_3 & - & 20x_4 & = & 18; \\ & & & & & & 0 & = & 2. \end{array}\right.$$

Hệ này vô nghiệm. Do đó hệ đã cho cũng vô nghiệm.

Phương pháp Gauss - Jordan

Bước 1. Lập ma trận mở rộng $\tilde{A} = (A|B)$.

Bước 2. Đưa ma trận $\tilde{A}$ về dạng bậc thang rút gọn R_A.

Bước 3. Tùy theo trường hợp dạng bậc thang rút gọn R_A mà ta kết luận nghiệm như sau:

- Trường hợp 1. Xuất hiện một dòng $(0\ 0\ 0\ 0 \ldots 0\ 0| \neq 0)$. Kết luận hệ phương trình vô nghiệm.

- Trường hợp 2. Ma trận R_A có dạng

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & \ldots & 0 & \alpha_1 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 & \alpha_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & \alpha_n \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Khi đó hệ phương trình có nghiệm duy nhất là

$$x_1 = \alpha_1, \ x_2 = \alpha_2, \dots, x_n = \alpha_n.$$

- Trường hợp 3. Khác 2 trường hợp trên. Khi đó hệ có vô số nghiệm, và:

- Ẩn tương ứng với các cột không có phần tử cơ sở 1 sẽ là ẩn tự do (lấy giá trị tùy ý).
- Ẩn tương ứng với cột có phần tử cơ sở 1 sẽ được tính theo các ẩn tự do.

Số ẩn tự do được gọi là ***bậc tự do*** của hệ phương trình.

▸ Xem lại ví dụ đầu tiên

3.4 Định lý Kronecker- Capelli

Định lý. *Nếu* $\tilde{A} = (A|B)$ *là ma trận mở rông của hệ gồm* n *ẩn dạng* $AX = B$ *thì* $r(\tilde{A}) = r(A)$ *hoặc* $r(\tilde{A}) = r(A) + 1$.
Hơn nữa,

- *nếu* $r(\tilde{A}) = r(A) + 1$ *thì hệ vô nghiệm;*
- *nếu* $r(\tilde{A}) = r(A) = n$ *thì hệ có nghiệm duy nhất;*
- $r(\tilde{A}) = r(A) < n$ *thì hệ có vô số nghiệm với bậc tự do là* $n - r(A)$.

Ví dụ. Giải và biện luận hệ phương trình tuyến tính sau theo tham số m

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcl} 3x_1 & + & 5x_2 & + & 3x_3 & - & 4x_4 & = & 1; \\ 2x_1 & + & 3x_2 & + & x_3 & + & x_4 & = & 0; \\ 5x_1 & + & 9x_2 & + & 6x_3 & - & 15x_4 & = & 2; \\ 13x_1 & + & 22x_2 & + & 13x_3 & - & 22x_4 & = & 2m, \end{array}\right.$$

$$\tilde{A} = (A|B) = \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 5 & 3 & -4 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 1 & 0 \\ 5 & 9 & 6 & -15 & 2 \\ 13 & 22 & 13 & -22 & 2m \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{d_1:=d_1-d_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 2 & -5 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 1 & 0 \\ 5 & 9 & 6 & -15 & 2 \\ 13 & 22 & 13 & -22 & 2m \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[d_4:=d_4-13d_1]{\substack{d_2:=d_2-2d_1 \\ d_3:=d_3-5d_1}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 2 & -5 & 1 \\ 0 & -1 & -3 & 11 & -2 \\ 0 & -1 & -4 & 10 & -3 \\ 0 & -4 & -13 & 43 & 2m-13 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[d_4:=d_4-4d_2]{d_3:=d_3-d_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 2 & -5 & 1 \\ 0 & -1 & -3 & 11 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 2m-5 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[d_4:=d_4-4d_2]{d_3:=d_3-d_2} \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 2 & 2 & -5 & 1 \\ 0 & -1 & -3 & 11 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 2m-5 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{d_4:=d_4-d_3} \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 2 & 2 & -5 & 1 \\ 0 & -1 & -3 & 11 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2m-4 \end{array}\right)$$

Biện luận:

1) $2m-4 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq 2$: Khi đó hệ (1) vô nghiệm nên hệ đã cho cũng vô nghiệm.

2) $m = 2$: Hệ (1) tương đương với hệ sau:

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & + & 2x_2 & + & 2x_3 & - & 5x_4 & = & 1; \\ & - & x_2 & - & 3x_3 & + & 11x_4 & = & -2; \\ & & & - & x_3 & - & x_4 & = & -1. \end{array}\right.$$

Chọn $x_4 = \alpha$ ta tính được

$$\begin{cases} x_3 = 1 - x_4 = 1 - \alpha; \\ x_2 = 2 - 3x_3 + 11x_4 = -1 + 14\alpha; \\ x_1 = 1 - 2x_2 - 2x_3 + 5x_4 = 1 - 21\alpha. \end{cases}$$

Vậy khi $m = 2$, hệ đã cho có vô số nghiệm với một ẩn tự do

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) = (1 - 21\alpha, -1 + 14\alpha, 1 - \alpha, \alpha)$$

với $\alpha \in \mathbb{R}$ tùy ý.

Ví dụ. Giải và biện luận hệ phương trình tuyến tính sau theo tham số m

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = 1; \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 4x_4 = 2; \\ x_1 - x_2 + 4x_3 - x_4 = m; \\ 4x_1 + 3x_2 - x_3 + mx_4 = m^2 - 6m + 4, \end{cases}$$

$$\tilde{A} = (A|B) = \left(\begin{array}{rrrr|l} 1 & 1 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -3 & 4 & 2 \\ 1 & -1 & 4 & -1 & m \\ 4 & 3 & -1 & m & m^2 - 6m + 4 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[d_4:=d_4-4d_1]{\substack{d_2:=d_2-d_1 \\ d_3:=d_3-d_1}} \left(\begin{array}{rrrr|l} 1 & 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & 5 & -3 & m-1 \\ 0 & -1 & 3 & m-8 & m^2 - 6m \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[d_4:=d_4+d_2]{d_3:=d_3+2d_2} \left(\begin{array}{rrrr|l} 1 & 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & m+1 \\ 0 & 0 & 1 & m-6 & m^2 - 6m + 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{d_4:=d_4-d_3} \left(\begin{array}{rrrr|l} 1 & 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & m+1 \\ 0 & 0 & 0 & m-7 & m^2 - 7m \end{array}\right).$$

$$\left(\begin{array}{cccc|l} 1 & 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & m+1 \\ 0 & 0 & 0 & m-7 & m^2-7m \end{array}\right)$$

Biện luận:

1) $m-7 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq 7$: Khi đó hệ (1) cho ta

$$\begin{cases} x_4 &= m; \\ x_3 &= m+1-x_4 = 1; \\ x_2 &= 1+2x_3-2x_4 = 3-2m; \\ x_1 &= 1-x_2+x_3-2x_4 = -1. \end{cases}$$

Suy ra khi m $\neq 7$ hệ đã cho có duy nhất một nghiệm là

$$(x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4) = (-1,\ 3-2m,\ 1,\ m).$$

2) $m = 7$: Hệ (1) tương đương với hệ sau:

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} x_1 & + & x_2 & - & x_3 & + & 2x_4 & = & 1; \\ & & x_2 & - & 2x_3 & + & 2x_4 & = & 1; \\ & & & & x_3 & + & x_4 & = & 8. \end{array}\right. \qquad (2)$$

Chọn $x_4 = \alpha$ ta tính được

$$\left\{\begin{array}{l} x_3 = 8 - x_4 = 8 - \alpha; \\ x_2 = 1 + 2x_3 - 2x_4 = 17 - 4\alpha; \\ x_1 = 1 - x_2 + x_3 - 2x_4 = -8 + \alpha. \end{array}\right.$$

Vậy khi $m = 7$ hệ đã cho có vô số nghiệm với một ẩn tự do

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) = (-8 + \alpha, 17 - 4\alpha, 8 - \alpha\ ,\ \alpha)$$

với $\alpha \in \mathbb{R}$ tùy ý.

4. Ma trận khả nghịch

4.1 Định nghĩa

Mở đầu

Xét trên tập số thực $\mathbb{R}$. Cho $x \in \mathbb{R}$, hỏi tồn tại hay không y sao cho

$$xy = 1.$$

Hỏi. Trên tập hợp ma trận thì sao?

Định nghĩa. Cho $A \in M_n(\mathbb{R})$. Ta nói A ***khả nghịch*** nếu tồn tại ma trận B sao cho $AB = BA = I_n$. Nếu B thỏa diều kiện trên được gọi là ***ma trận nghịch đảo*** của A.

Nhận xét. *Ma trận nghịch dảo của một ma trận khả nghịch là duy nhất. Ta ký hiệu ma trận nghịch đảo của A là* A^{-1}.

Ví dụ. Cho $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. Khi đó $A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$.

Mệnh đề. *Cho $A \in M_n(\mathbb{R})$. Giả sử A khả nghịch và có nghịch đảo là A^{-1}. Khi đó*

i) A^{-1} *khả nghịch và* $(A^{-1})^{-1} = A$.

ii) $A^\top$ *khả nghịch và* $(A^\top)^{-1} = (A^{-1})^\top$.

iii) $\forall \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, αA *khả nghịch và* $(\alpha A)^{-1} = \dfrac{1}{\alpha} A^{-1}$.

Mệnh đề. *Cho $A, B \in M_n(\mathbb{R})$. Nếu A và B khả nghịch thì AB khả nghịch, hơn nữa*

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}.$$

4.2 Nhận diện và tìm ma trận khả nghịch

Định lý. *Cho $A \in M_n(\mathbb{R})$. Khi đó các khẳng định sau tương đương:*

i) *A khả nghịch.*

ii) $r(A) = n$.

iii) $A \sim I_n$.

iv) *Tồn tại các phép BĐSCTD $\varphi_1, \ldots, \varphi_k$ biến ma trận A thành ma trận đơn vị I_n:*

$$A \xrightarrow{\varphi_1} A_1 \longrightarrow \ldots \xrightarrow{\varphi_k} A_k = I_n.$$

Hơn nữa, khi đó qua chính các phép BĐSCTD $\varphi_1, \ldots, \varphi_k$, ma trận đơn vị I_n sẽ biến thành ma trận nghịch đảo A^{-1}:

$$I_n \xrightarrow{\varphi_1} B_1 \longrightarrow \ldots \xrightarrow{\varphi_k} B_k = A^{-1}.$$

Phương pháp tìm ma trận nghịch đảo

Lập $(A|I_n)$ và dùng các phép BĐSCTD biến A về dạng ma trận bậc thang rút gọn:

$$(A\,|I_n\,) \xrightarrow{\varphi_1} (\,A_1|\,B_1) \longrightarrow \ldots \xrightarrow{\varphi_p} (\,A_p|\,B_p) \longrightarrow \ldots.$$

Trong quá trình biến đổi có thể xảy ra hai trường hợp:

- Trường hợp 1: Tồn tại p sao cho trong dãy biến đổi trên, ma trận A_p có ít nhất một dòng hay một cột bằng 0. Khi đó A không khả nghịch.
- Trường hợp 2: Mọi ma trận A_i trong dãy biến đổi trên đều không có dòng hay cột bằng 0. Khi đó ma trận cuối cùng của dãy trên có dạng $(I_n|B)$. Ta có A khả nghịch và $A^{-1} = B$.

Lưu ý. Nếu bài toán chỉ yêu cầu kiểm tra ma trận A có khả nghịch hay không, ta chỉ cần tính hạng của ma trận (dùng Gauss).

Ví dụ. Xét tính khả nghịch của A và tìm A^{-1} (nếu có)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 5 & 4 & 7 \\ 3 & 7 & 8 & 12 \\ 4 & 8 & 14 & 19 \end{pmatrix}$$

Giải.

$$(A|I_4) = \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 4 & 7 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 7 & 8 & 12 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 8 & 14 & 19 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[d_4:=d_4-4d_1]{\substack{d_2:=d_2-2d_1 \\ d_3:=d_3-3d_1}} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & -4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & -4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[d_3:=d_3-d_2]{d_1:=d_1-2d_2} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 7 & 6 & 5 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & -4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[d_4:=d_4-2d_3]{\substack{d_1:=d_1-7d_3 \\ d_2:=d_2+2d_3}} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 12 & 5 & -7 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -4 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 2 & -2 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[d_3:=d_3-d_4]{\substack{d_1:=d_1+d_4 \\ d_2:=d_2-d_4}} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 10 & 7 & -9 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -2 & -3 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -3 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 2 & -2 & 1 \end{array}\right) = (I_4|A^{-1}).$$

Như vậy, A khả nghịch và

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 10 & 7 & -9 & 1 \\ -2 & -3 & 4 & -1 \\ 1 & -3 & 3 & -1 \\ -2 & 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ví dụ. Xét tính khả nghịch của A và tìm A^{-1} (nếu có)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 2 & 1 \\ 4 & -1 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

Giải.

$$(A|I_4) = \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & -1 & 0 & -3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[d_4:=d_4-4d_1]{\substack{d_2:=d_2-2d_1\\ d_3:=d_3-3d_1}} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -5 & -8 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & -7 & -11 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -9 & -12 & -19 & -4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[d_4:=d_4-3d_2]{d_3:=d_3-2d_2} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -5 & -8 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 5 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 5 & 2 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{d_4:=d_4-d_3} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -5 & -8 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 5 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

Ta có $r(A) < 4$. Suy ra A không khả nghịch.

5. Phương trình ma trận

Định lý. *Cho các ma trận* $A, A' \in M_n(\mathbb{R})$ *khả nghịch và* $B \in M_{n\times p}(\mathbb{R})$, $C \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$, $D \in M_n(\mathbb{R})$. *Khi đó*

i) $AX = B \Leftrightarrow X = A^{-1}B;$

ii) $XA = C \Leftrightarrow X = CA^{-1};$

iii) $AXA' = D \Leftrightarrow X = A^{-1}DA'^{-1}.$

Ví dụ. Giải phương trình $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$.

Giải. Phương trình có dạng $AX = B$. Ta có A khả nghịch, nên

$$X = A^{-1}B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & 1 \\ 16 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ví dụ. Giải phương trình $X\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$.

Giải. Phương trình có dạng $XA = B$. Ta có A khả nghịch, nên

$$X = BA^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -19 & 11 \\ -21 & 13 \end{pmatrix}.$$

Ví dụ. Tìm ma trận X thỏa

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} X \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Giải. Phương trình có dạng $AXB = C$. Ta có A, B khả nghịch, nên

$$X = A^{-1}CB^{-1}$$

$$X = A^{-1}CB^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 1 \\ 2 & -1. \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & -5 \\ 3 & 5 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 17 & -13 \\ -11 & 9 \\ 5 & -4 \end{pmatrix}.$$

Ví dụ. Tìm ma trận X thỏa $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -2 & -3 & 1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Giải. Đặt $X = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \\ x_5 & x_6 \end{pmatrix}$. Ta có

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -2 & -3 & 1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} x_1 + 2x_3 - x_5 & x_2 + 2x_4 - x_6 \\ -2x_1 - 3x_3 + x_5 & -2x_2 - 3x_4 + x_6 \end{pmatrix}.$$

Suy ra hệ phương trình $\begin{cases} x_1 + 2x_3 - x_5 &= 1; \\ x_2 + 2x_4 - x_6 &= -2; \\ -2x_1 - 3x_3 + x_5 &= -1 \\ -2x_2 - 3x_4 + x_6 &= 1. \end{cases}$

$$\begin{aligned} \tilde{A} &= \left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & 2 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & -1 & -2 \\ -2 & 0 & -3 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 0 & -3 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \\ &\sim \left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & -3 \end{array}\right) \end{aligned}$$

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & -3 \end{array}\right)$$

Suy ra

$$\left\{\begin{array}{lcl} x_1 & = & -1-t; \\ x_2 & = & 4-s; \\ x_3 & = & 1+t; \\ x_4 & = & -3+s; \\ x_5 & = & t; \\ x_6 & = & s. \end{array}\right. \qquad t, s \in \mathbb{R}$$

Vậy $X = \begin{pmatrix} -1-t & 4-s \\ 1+t & -3+s \\ t & s \end{pmatrix}$ với t, s tự do.

Bài giảng môn học Đại số A_1

Chương 2:

ĐỊNH THỨC

Lê Văn Luyện

lvluyen@yahoo.com

http://www.math.hcmus.edu.vn/∼lvluyen/09tt

Đại học Khoa Học Tự Nhiên Tp. Hồ Chí Minh

Nội dung

Chương 2. ĐỊNH THỨC

1. Định nghĩa và các tính chất
2. Định thức và ma trận khả nghịch
3. Quy tắc Cramer

1. Định nghĩa và các tính chất

Định nghĩa. Cho $A = (a_{ij})_{n\times n} \in M_n(\mathbb{R})$. ***Định thức*** của A, được ký hiệu là detA hay |A|, là một số thực được xác định bằng quy nạp theo n như sau:

- Nếu $n = 1$, nghĩa là $A = (a)$, thì $|A| = a$.
- Nếu $n = 2$, nghĩa là $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, thì $|A| = ad - bc$.
- Nếu $n > 2$, nghĩa là $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$, thì

$$|A| \overset{\text{dòng 1}}{=\!=\!=} a_{11}\big|A(1|1)\big| - a_{12}\big|A(1|2)\big| + \dots + a_{1n}(-1)^{1+n}\big|A(1|n)\big|.$$

trong đó $A(i|j)$ là ma trận có được từ A bằng cách xóa đi dòng i và cột j của A.

Ví dụ. Cho $A = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$. Khi đó $|A| = 4.5 - (-2).3 = 26$.

Ví dụ. Tính định thức của ma trận

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Giải.

$$\begin{aligned} |A| &= 1(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} + 2(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} + (-3)(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} \\ &= 12 - 16 + 15 = 11. \end{aligned}$$

Quy tắc Sarrus

Theo định nghĩa định thức, khi $n = 3$, ta có

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

$$\begin{aligned} |A| &= a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \\ &= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\ &\qquad - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}. \end{aligned}$$

Từ đây ta suy ra công thức Sarrus dựa vào sơ đồ sau:

$$\begin{array}{ccccc} \text{cột1} & \text{cột2} & \text{cột3} & \text{cột1} & \text{cột2} \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{array}\right).$$

$$- \quad - \quad - \quad + \quad + \quad +$$

$$\begin{array}{ccccc} \text{cột1} & \text{cột2} & \text{cột3} & \text{cột1} & \text{cột2} \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{array}\right).$$

$$- \qquad - \qquad - \quad + \qquad + \qquad +$$

$$\begin{aligned} |A| = {} & a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\ & -(a_{13}a_{22}a_{31} + a_{11}a_{23}a_{32} + a_{12}a_{21}a_{33}). \end{aligned}$$

(Tổng ba đường chéo đỏ - tổng ba đường chéo xanh)

Ví dụ.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 5 \end{vmatrix} = 1.2.5 + 2.1.3 + 3.4.1 - 3.2.3 - 1.1.1 - 2.4.5 = -31.$$

S

1.3 Khai triển định thức theo dòng và cột

Định nghĩa. Cho $A = (a_{ij})_{n\times n} \in M_n(\mathbb{R})$. Với mỗi i, j, ta gọi

$$\mathrm{c_{ij}} = (-1)^{i+j}\det A(i|j)$$

là ***phần bù đại số*** của hệ số a_{ij}, trong đó $A(i|j)$ là ma trận vuông cấp $(n-1)$ có được từ A bằng cách xoá dòng i, cột j.

Ví dụ. Cho $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 0 \end{pmatrix}$. Khi đó

$$c_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} = -4; \quad c_{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = 3.$$

Định lý. *Cho* $A = (a_{ij})_{n\times n} \in M_n(\mathbb{R})$*. Với mỗi* i, j*, gọi* c_{ij} *là phần bù đại số của hệ số* a_{ij}*. Ta có*

- *Công thức khai triển* $|A|$ *theo dòng* i*:* $|A| = \sum\limits_{k=1}^{n} a_{ik}c_{ik}$.
- *Công thức khai triển* $|A|$ *theo cột* j*:* $|A| = \sum\limits_{k=1}^{n} a_{kj}c_{kj}$.

Ví dụ. Tính định thức của $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 3 \\ 5 & 2 & 2 \\ 4 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Lưu ý. Trong việc tính toán tính định thức ta nên chọn dòng hay cột có nhiều số 0.

Mệnh đề. *Cho* $A \in M_n(\mathbb{R})$. *Khi đó:*

i) $|A^\top| = |A|$.

ii) *Nếu ma trận vuông A có một dòng hay một cột bằng 0 thì* $|A| = 0$.

iii) *Nếu A là một ma trận tam giác thì* $|A|$ *bằng tích các phần tử trên đường chéo của A, nghĩa là*

$$|A| = a_{11}.a_{22}\ldots a_{nn}.$$

Định lý. *Nếu* $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ *thì* $|AB| = |A||B|$.

Ví dụ.

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & -3 & 6 & 7 \\ 0 & 0 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-3) \cdot 5 \cdot 4 = -120.$$

1.4 Định thức và các phép biến đổi sơ cấp

Định lý. *Cho* $A, A' \in M_n(\mathbb{R})$. *Khi đó*

i) *Nếu* $A \xrightarrow[i \neq j]{d_i \leftrightarrow d_j} A'$ *thì* $|A'| = -|A|$;

ii) *Nếu* $A \xrightarrow{d_i := \alpha d_i} A'$ *thì* $|A'| = \alpha |A|$;

iii) *Nếu* $A \xrightarrow[i \neq j]{d_i := d_i + \beta d_j} A'$ *thì* $|A'| = |A|$.

Ví dụ. Tính định thức của $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 7 \\ 2 & 6 & -8 \\ 5 & -12 & 4 \end{pmatrix}$

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 7 \\ 2 & 6 & -8 \\ 5 & -12 & 4 \end{vmatrix} \xlongequal{\text{dòng } 2} 2\begin{vmatrix} 1 & 3 & 7 \\ 1 & 3 & -4 \\ 5 & -12 & 4 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{\text{cột } 2} 2.3\begin{vmatrix} 1 & 1 & 7 \\ 1 & 1 & -4 \\ 5 & -4 & 4 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{d_2:=d_2-d_1} 6\begin{vmatrix} 1 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & -11 \\ 5 & -4 & 4 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{\text{dòng } 2} 6(-11)(-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 5 & -4 \end{vmatrix} = -594.$$

Lưu ý. Vì $|A^\top| = |A|$ nên trong quá trình tính định thức ta có thể sử dụng các phép biến đổi sơ cấp trên cột.

Ví dụ.

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & -4 & 5 \\ 3 & -5 & 2 & 4 \\ 5 & 4 & 3 & -2 \\ -4 & 2 & 5 & 3 \end{vmatrix} \xlongequal[\substack{d_1:=d_1-2d_2 \\ d_3:=d_3-5d_2}]{\substack{d_2:=d_2-d_1 \\ d_4:=d_4+2d_1}} \begin{vmatrix} 0 & 19 & -16 & 7 \\ 1 & -8 & 6 & -1 \\ 0 & 44 & -27 & 3 \\ 0 & 8 & -3 & 13 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{\text{cột } 1} 1.(-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 19 & -16 & 7 \\ 44 & -27 & 3 \\ 8 & -3 & 13 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[d_1:=d_1-7d_3]{\substack{d_3:=d_3-4d_2 \\ d_2:=d_2-3d_3}} - \begin{vmatrix} 1195 & -751 & 0 \\ 548 & -342 & 0 \\ -168 & 105 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{\text{cột } 1} - \begin{vmatrix} 1195 & -751 \\ 548 & -342 \end{vmatrix} = -2858.$$

Ví dụ.

$$\begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \end{vmatrix} \xlongequal[d_3:=60d_3]{\substack{d_1:=6d_1 \\ d_2:=12d_2}} \frac{1}{6}.\frac{1}{12}.\frac{1}{60} \begin{vmatrix} 6 & 3 & 2 \\ 6 & 4 & 3 \\ 20 & 15 & 12 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[c_3:=c_3-2c_2]{\substack{c_1:=c_1-2c_2 \\ c_2:=c_2-c_3}} \frac{1}{4320} \begin{vmatrix} {\color{cyan}0} & {\color{red}1} & {\color{cyan}0} \\ -2 & 1 & 1 \\ -10 & 3 & 6 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{\text{dòng 1}} -\frac{1}{4320} \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ -10 & 6 \end{vmatrix} = \frac{1}{2160}.$$

Nhận xét. *Trong quá trình tính định thức, phép BĐSC loại 3 được khuyến khích dùng bởi nó không thay đổi giá trị định thức.*

Ví dụ. Tính định thức của ma trận sau

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 5 & 0 \\ 3 & 2 & 6 & -2 \\ -2 & 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & -2 & 0 \\ -3 & 1 & 4 & -2 \\ 4 & 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Kết quả $|A| = -19, \quad |B| = -30.$

Ví dụ. Tính định thức của ma trận sau

$$C = \begin{pmatrix} 13 & 18 & 6 & -1 & 7 \\ 4 & 7 & 3 & 4 & 1 \\ 7 & 9 & 3 & -1 & 4 \\ 6 & 9 & 3 & -2 & 3 \\ 6 & 3 & 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}; \quad D = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & -3 & 5 & 1 & 8 \\ -4 & -7 & 2 & -2 & 4 \\ 3 & -5 & 4 & 3 & 5 \\ 8 & 6 & -4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Giải. $|C| = 24; \quad |D| = -174.$

2. Định thức và ma trận khả nghịch

Định nghĩa.

Cho $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$. Đặt $C = (c_{ij})$ với $c_{ij} = (-1)^{i+j}|A(i,j)|$ là phần bù đại số của a_{ij}. Ta gọi ma trận chuyển vị $C^\top$ của C là ***ma trận phụ hợp*** của A, ký hiệu là adj(A).

Ví dụ. Cho $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 3 & 4 & -2 \end{pmatrix}$.

Khi đó $C = \begin{pmatrix} -6 & 10 & 11 \\ 10 & -7 & 1 \\ 7 & -2 & -8 \end{pmatrix}$. Suy ra $\operatorname{adj}(A) = \begin{pmatrix} -6 & 10 & 7 \\ 10 & -7 & -2 \\ 11 & 1 & -8 \end{pmatrix}$.

Nhận diện ma trận khả nghịch

Định lý. *Ma trận vuông A khả nghịch khi và chỉ khi $|A| \neq 0$.Hơn nữa, nếu A khả nghịch thì*

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\operatorname{adj}(A).$$

Ví dụ. Tìm ma trận nghịch đảo của $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 0 \end{pmatrix}$.

Giải. Ta có $|A| = -2 \neq 0$. Suy ra A khả nghịch.

$$c_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} = -4; \quad c_{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = 3;$$

$$c_{13} = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -1; \quad c_{21} = (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} = 4$$

$c_{22} = -3; c_{23} = -1; c_{31} = -2; c_{32} = 1; c_{33} = 1.$

Suy ra

$$C = \begin{pmatrix} -4 & 3 & -1 \\ 4 & -3 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ và } \operatorname{adj}(A) = \begin{pmatrix} -4 & 4 & -2 \\ 3 & -3 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ta có

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\operatorname{adj}(A) = \frac{1}{-2}\begin{pmatrix} -4 & 4 & -2 \\ 3 & -3 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Hệ quả. *Ma trận* $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ *khả nghịch khi và chỉ khi* $ad - bc \neq 0$. *Khi đó*

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

Ví dụ. Cho $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$. Suy ra $A^{-1} = \frac{1}{-2}\begin{pmatrix} 5 & -4 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$.

Ví dụ. Tìm ma trận nghịch đảo bằng phương pháp định thức của

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \\ 3 & 5 & 2 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{-2}\begin{pmatrix} 11 & 1 & -5 \\ -7 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Ví dụ. Tìm tất cả các giá trị của m để ma trận sau khả nghịch

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 5 & 3 \\ 5 & 0 & 7 & m \\ -1 & 2 & 3 & -3 \end{pmatrix}.$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & m \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 5 & 7 & 5 \end{pmatrix}.$$

Ví dụ. Cho $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 3 & 5 \end{pmatrix}$. Tính:$|A^{-1}|$; $|5A^{-1}|$; $|adj(A)|$.

Ví dụ. Cho $A, B \in M_3(\mathbb{R})$ và $|A| = 3, |B| = -2$. Tính $|(4AB)^{-1}|$ và $|adj(AB)|$.

3. Quy tắc Cramer

Định lý. *Cho hệ phương trình tuyến tính $AX = B$ $(*)$ gồm n ẩn và n phương trình. Đặt*

$$\Delta = \det A; \qquad \Delta_j = \det(A_j), \quad j \in \overline{1,n},$$

trong đó A_j là ma trận có từ A bằng cách thay cột j bằng cột B. Khi đó:

i) *Nếu $\Delta \neq 0$ thì $(*)$ có một nghiệm duy nhất là:*

$$x_j = \frac{\Delta_j}{\Delta}, j \in \overline{1,n}.$$

ii) *Nếu $\Delta = 0$ và $\Delta_j \neq 0$ với một j nào đó thì (1) vô nghiệm.*

iii) *Nếu $\Delta = 0$ và $\Delta_j = 0 \forall j \in \overline{1,n}$ thì hệ vô nghiệm hoặc vô số nghiệm.*

Ví dụ. Giải phương trình

$$\begin{cases} x - y - 2z = -3; \\ 2x - y + z = 1; \\ x + y + z = 4. \end{cases} \qquad (1)$$

Giải. Ta có

$$\Delta = |A| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -7; \quad \Delta_1 = |A_1| = \begin{vmatrix} -3 & -1 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 4 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -7;$$

$$\Delta_2 = |A_2| = \begin{vmatrix} 1 & -3 & -2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \end{vmatrix} = -14; \quad \Delta_3 = |A_3| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -3 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{vmatrix} = -7.$$

Vì $\Delta \neq 0$ nên hệ có nghiệm duy nhất

$$x = \frac{\Delta_1}{\Delta} = 1; y = \frac{\Delta_2}{\Delta} = 2; z = \frac{\Delta_3}{\Delta} = 1.$$

Ví dụ. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x + y - 2z = 4; \\ 2x + 3y + 3z = 3; \\ 5x + 7y + 4z = 5. \end{cases} \tag{2}$$

Giải. Ta có

$$\Delta = |A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 2 & 3 & 3 \\ 5 & 7 & 4 \end{vmatrix} = 0; \quad \Delta_1 = |A_1| = \begin{vmatrix} 4 & 1 & -2 \\ 3 & 3 & 3 \\ 5 & 7 & 4 \end{vmatrix} = -45;$$

Suy ra hệ phương trình vô nghiệm.

Ví dụ. Giải hệ phương trình

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & - & 2z & = & 4; \\ 2x & + & 3y & + & 3z & = & 3; \\ 5x & + & 7y & + & 4z & = & 10. \end{array}\right. \tag{3}$$

Giải. Ta có

$$\Delta = |A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 2 & 3 & 3 \\ 5 & 7 & 4 \end{vmatrix} = 0; \quad \Delta_1 = |A_1| = \begin{vmatrix} 4 & 1 & -2 \\ 3 & 3 & 3 \\ 10 & 7 & 4 \end{vmatrix} = 0;$$

$$\Delta_2 = |A_2| = \begin{vmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 2 & 3 & 3 \\ 5 & 10 & 4 \end{vmatrix} = 0; \quad \Delta_3 = |A_3| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 2 & 3 & 3 \\ 5 & 7 & 10 \end{vmatrix} = 0.$$

Vì $\Delta = \Delta_1 = \Delta_2 = \Delta_3 = 0$ nên không kết luận được nghiệm của hệ. Do đó ta phải dùng Gauss hoặc Gauss-Jordan để giải.

Biện luận hệ phương trình bằng Cramer

Ví dụ. Giải và biện luận phương trình

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 0; \\ -2x_1 + (m-2)x_2 + (m-5)x_3 = 2; \\ mx_1 + x_2 + (m+1)x_3 = -2. \end{cases}$$

Giải. Ta có

$$\Delta = |A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -2 & m-2 & m-5 \\ m & 1 & m+1 \end{vmatrix} = m^2 - 4m + 3 = (m-1)(m-3);$$

$$\Delta_1 = |A_1| = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & m-2 & m-5 \\ -2 & 1 & m+1 \end{vmatrix} = -4m + 12;$$

$$\Delta_2 = |A_2| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -2 & 2 & m-5 \\ m & -2 & m+1 \end{vmatrix} = 0;$$

$$\Delta_3 = |A_3| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -2 & m-2 & 2 \\ m & 1 & -2 \end{vmatrix} = 2m-6 = 2(m-3).$$

Biện luận:

▷ Nếu $\Delta \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 1 \\ m \neq 3 \end{cases}$ .Khi đó hệ có nghiệm duy nhất là

$$(x_1, x_2, x_3) = \left(\frac{-4}{m-1}, 0, \frac{2}{m-1}\right).$$

▷ Nếu $\Delta = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 1 \\ m = 3 \end{array}\right.$

- Với $m = 1$, ta có $\Delta_1 = 8 \neq 0$ nên hệ vô nghiệm.

- Với $m = 3$, ta có $\Delta_1 = \Delta_2 = \Delta_3 = 0$. Khi đó hệ phương trình là:

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & -2 & 2 \\ 3 & 1 & 4 & -2 \end{array}\right)$$

Nghiệm của hệ là $(x_1, x_2, x_3) = (3t - 2, t, 1 - \dfrac{5}{2}t)$ với t tự do.

Ví dụ. Giải và biện luận hệ phương trình sau theo tham số $m \in \mathbb{R}$:

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} (m-7)x & + & 12y & - & 6z & = & m; \\ -10x & + & (m+19)y & - & 10z & = & 2m; \\ -12x & + & 24y & + & (m-13)z & = & 0. \end{array}\right. \qquad (1)$$

Giải. $$\Delta = \begin{vmatrix} m-7 & 12 & -6 \\ -10 & m+19 & -10 \\ -12 & 24 & m-13 \end{vmatrix} = (m-1)^2(m+1)$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} m & 12 & -6 \\ 2m & m+19 & -10 \\ 0 & 24 & m-13 \end{vmatrix} = m(m-1)(m-17)$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} m-7 & m & -6 \\ -10 & 2m & -10 \\ -12 & 0 & m-13 \end{vmatrix} = 2m(m-1)(m-14)$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} m-7 & 12 & m \\ -10 & m+19 & 2m \\ -12 & 24 & 0 \end{vmatrix} = 36m(m-1)$$

Biện luận:

▷ Nếu $\Delta \neq 0 \Leftrightarrow m \neq -1$ và $m \neq 1$. Khi đó hệ có nghiệm duy nhất là

$$\begin{cases} x = \dfrac{\Delta_1}{\Delta} = \dfrac{m(m^2-18m+17)}{(m-1)(m^2-1)} = \dfrac{m(m-17)}{m^2-1}; \\ y = \dfrac{\Delta_2}{\Delta} = \dfrac{m(m^2-15m+14)}{(m-1)(m^2-1)} = \dfrac{m(m-14)}{m^2-1}; \\ z = \dfrac{\Delta_3}{\Delta} = \dfrac{-36m(m-1)}{(m-1)(m^2-1)} = \dfrac{-36m}{m^2-1}. \end{cases}$$

▷ Nếu $\Delta = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = -1 \\ m = 1 \end{array}\right.$

- Với $m = -1$, ta có $\Delta_1 = -36 \neq 0$ nên hệ (1) vô nghiệm.
- Với $m = 1$, ta có $\Delta_1 = \Delta_2 = \Delta_3 = 0$. Hệ (1) trở thành

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} -6x & + & 12y & - & 6z & = & 1; \\ -10x & + & 20y & - & 10z & = & 2; \\ -12x & + & 24y & - & 12z & = & 0 \end{array}\right.$$

Hệ vô nghiệm.

Bài giảng môn học Đại số A_1

Chương 3:

KHÔNG GIAN VECTƠ

Lê Văn Luyện

lvluyen@yahoo.com

http://www.math.hcmus.edu.vn/∼lvluyen/09tt

Đại học Khoa Học Tự Nhiên Tp. Hồ Chí Minh

Nội dung

Chương 3. KHÔNG GIAN VECTƠ

1. Không gian vectơ
2. Tổ hợp tuyến tính
3. Cơ sở và số chiều của không gian vectơ
4. Không gian vectơ con
5. Không gian nghiệm của hệ phương trình tuyến tính
6. Tọa độ và ma trận chuyển cơ sở

1. Không gian vectơ

Định nghĩa. Cho V là một tập hợp với phép toán $+$. V được gọi là ***không gian vectơ*** trên $\mathbb{R}$ nếu mọi $u, v, w \in V$ và α, $\beta \in \mathbb{R}$ ta có 8 tính chất sau:

(1) $u+v = v+u$;

(2) $(u+v)+w = u+(v+w)$;

(3) tồn tại $0 \in V$: $u+0 = 0+u = u$;

(4) tồn tại $\mathrm{u}' \in V$: $\mathrm{u}'+u = u+\mathrm{u}' = 0$;

(5) $(\alpha\beta)u = \alpha(\beta u)$;

(6) $(\alpha + \beta)u = \alpha u + \beta u$;

(7) $\alpha(u+v) = \alpha u+\alpha v$;

(8) $1.u = u$.

Khi đó ta gọi:

- mỗi phần tử $u \in V$ là một ***vectơ***.
- mỗi số $\alpha \in \mathbb{R}$ là một ***vô hướng***.
- vectơ 0 là ***vectơ không***.
- vectơ u' là ***vectơ đối*** của u.

Ví dụ. Xét $V = \mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \mid x_i \in \mathbb{R} \forall, i \in \overline{1, n}\}$.

Với $u = (a_1, a_2, \ldots, a_n),\ v = (b_1, b_2, \ldots, b_n) \in \mathbb{R}^n$ và $\alpha \in R$, ta định nghĩa phép cộng $+$ và nhân $.$ vô hướng như sau:

- $u + v = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \ldots, a_n + b_n)$;
- $\alpha u = (\alpha a_1, \alpha a_2, \ldots, \alpha a_n)$.

Khi đó $\mathbb{R}^n$ là không gian vectơ trên $\mathbb{R}$. Trong đó:

▷ Vectơ không là $0 = (0, 0, \ldots, 0)$;

▷ Vectơ đối của u là $-\mathrm{u} = (-a_1, -a_2, \ldots, -a_n)$.

Ví dụ. Tập hợp $M_{m\times n}(\mathbb{R})$ với phép cộng ma trận và nhân ma trận với một số thực thông thường là một không gian vectơ trên $\mathbb{R}$. Trong đó:

- Vectơ không là ma trận không
- Vectơ đối của A là $-A$.

Ví dụ. Tập hợp

$$\mathbb{R}[x] = \{p(x) = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0 \,|\, n \in \mathbb{N}, a_i \in \mathbb{R}, i \in \overline{1, n}\}$$

gồm các đa thức theo x với các hệ số trong $\mathbb{R}$ là một không gian vectơ trên $\mathbb{R}$ với phép cộng vectơ là phép cộng đa thức thông thường và phép nhân vô hướng với vectơ là phép nhân thông thường một số với đa thức.

Ví dụ. Tập hợp $\mathbb{R}_n[x]$ gồm các đa thức bậc nhỏ hơn hoặc bằng n theo x với các hệ số trong $\mathbb{R}$ là một không gian vectơ trên $\mathbb{R}$.

Ví dụ. Cho $V = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 0\}$.
Khi đó V là không gian vectơ trên $\mathbb{R}$.

Ví dụ. Cho $W = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 + x_2 - 2x_3 = 1\}$.
Khi đó W không là không gian vectơ, vì

$$u = (1, 2, 1) \in W, v = (2, 3, 2) \in W,$$

nhưng $u + v = (3, 5, 3) \notin W$

Mệnh đề. *Cho V là một không gian vectơ trên $\mathbb{R}$. Khi đó với mọi $u \in V$ và $\alpha \in \mathbb{R}$, ta có*

i) $\alpha u = 0 \Leftrightarrow (\alpha = 0 \;\; hay \;\; u = 0)$;

ii) $(-1)u = -u$.

2. Tổ hợp tuyến tính

2.1 Tổ hợp tuyến tính

Định nghĩa. Cho $u_1, u_2, \ldots, u_m \in V$. Một ***tổ hợp tuyến tính*** của $u_1, u_2, \ldots, u_m$ là một vectơ có dạng

$$u = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \ldots + \alpha_m u_m \qquad \text{với } \alpha_i \in \mathbb{R}$$

Khi đó, đẳng thức trên được gọi là ***dạng biểu diễn*** của u theo các vectơ $u_1, u_2, \ldots, u_m$.

Ví dụ.

- Vectơ $u = (4, 4, 2)$ là tổ hợp tuyến tính của các vectơ $u_1 = (1, -1, 2), u_2 = (2, 3, -1), u_3 = (0, 1, -2)$, vì
$$u = u_1 + 2u_2 - u_3.$$
- Vectơ 0 luôn luôn là một tổ hợp tuyến tính của $u_1, u_2, ..., u_m$ vì
$$0 = 0u_1 + 0u_2 + \ldots + 0u_m.$$

Hỏi. Làm cách nào để biết u là tổ hợp tuyến tính của $u_1, u_2, ..., u_m$?

Ta có u là tổ hợp tuyến tính của $u_1, u_2, ..., u_m$ khi phương trình

$$u = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \ldots + \alpha_m u_m \quad (*)$$

có nghiệm $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_m \in \mathbb{R}$.

Xét trường hợp không gian $\mathbb{R}^n$. Giả sử

$$\begin{array}{lcl} u & = & (b_1, b_2, \ldots, b_n) \\ u_1 & = & (u_{11}, u_{21} \ldots, u_{n1}); \\ u_2 & = & (u_{12}, u_{22} \ldots, u_{n2}); \\ \ldots & \ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ u_m & = & (u_{1m}, u_{2m} \ldots, u_{nm}). \end{array}$$

Khi đó $(*) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{lcl} u_{11}\alpha_1 + u_{12}\alpha_2 + \ldots + u_{1m}\alpha_m & = & b_1; \\ u_{21}\alpha_1 + u_{22}\alpha_2 + \ldots + u_{2m}\alpha_m & = & b_2; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & & \\ u_{n1}\alpha_1 + u_{n2}\alpha_2 + \ldots + u_{nm}\alpha_m & = & b_n. \end{array} \right. \quad (**)$

Ma trận hóa (**) ta được $\left(\begin{array}{cccc|c} u_{11} & u_{12} & \dots & u_{1m} & b_1 \\ u_{21} & u_{22} & \dots & u_{2m} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ u_{n1} & u_{n2} & \dots & u_{nm} & b_n \end{array}\right)$

Tức là

$$(u_1^\top \; u_2^\top \; \dots \; u_m^\top \mid u^\top)$$

Như vậy, để kiểm tra u là tổ hợp tuyến tính của $u_1, u_2, ..., u_m$ trong $\mathbb{R}^n$ ta làm như sau:

- Lập ma trận hóa $(u_1^\top \; u_2^\top \; \dots \; u_m^\top \mid u^\top)$ (1)
- ▷ Nếu (1) vô nghiệm, kết luận u không phải là tổ hợp tuyến tính của $u_1, u_2, ..., u_m$.

  ▷ Nếu (1) có nghiệm $\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_m$ thì u là tổ hợp tuyến tính và có dạng biểu diễn theo là $u_1, u_2, ..., u_m$:

$$u = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \dots + \alpha_m u_m$$

Ví dụ. Xét xem $u = (-3, 1, 4)$ có là tổ hợp tuyến tính của các vectơ $u_1 = (1, 2, 1), u_2 = (-1, -1, 1), u_3 = (-2, 1, 1)$ hay không?

Giải. $(u_1^\top \ u_2^\top \ u_3^\top \mid u^\top) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -2 & -3 \\ 2 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \end{array}\right)$

$$\xrightarrow[d_3:=d_3-d_1]{d_2:=d_2-2d_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 5 & 7 \\ 0 & 2 & 3 & 7 \end{array}\right) \xrightarrow[d_3:=d_3-2d_2]{d_1:=d_1+d_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 5 & 7 \\ 0 & 0 & -7 & -7 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\substack{d_1:=d_1-3d_3 \\ d_2:=d_2-5d_3}]{d_3:=\frac{-1}{7}d_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right).$$

Hệ phương trình có nghiệm duy nhất $(\alpha_1; \alpha_2; \alpha_3) = (1; 2; 1)$.

Vậy u là tổ hợp tuyến tính của u_1, u_2, u_3.

Dạng biểu diễn của u là $u = u_1 + 2u_2 + u_3$.

Ví dụ. Xét xem $u = (4,3,5)$ có là tổ hợp tuyến tính của các vectơ $u_1 = (1,2,5), u_2 = (1,3,7), u_3 = (-2,3,4)$ hay không?

Giải. $(u_1^\top \ u_2^\top \ u_3^\top \mid u^\top) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 4 \\ 2 & 3 & 3 & 3 \\ 5 & 7 & 4 & 5 \end{array}\right)$

$$\xrightarrow[d_3:=d_3-5d_1]{d_2:=d_2-2d_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & 7 & -5 \\ 0 & 2 & 14 & -15 \end{array}\right) \xrightarrow[d_3:=d_3-2d_2]{d_1:=d_1-d_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -9 & 9 \\ 0 & 1 & 7 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & -5 \end{array}\right)$$

Hệ vô nghiệm vì $0x + 0y + 0z = -5$. Vậy u không là tổ hợp tuyến tính của u_1, u_2, u_3.

Ví dụ. Xét xem $u = (4, 3, 10)$ có là tổ hợp tuyến tính của các vectơ $u_1 = (1, 2, 5), u_2 = (1, 3, 7), u_3 = (-2, 3, 4)$ hay không?

Giải. $(u_1^\top \ u_2^\top \ u_3^\top \mid u^\top) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 4 \\ 2 & 3 & 3 & 3 \\ 5 & 7 & 4 & 10 \end{array}\right)$

$$\xrightarrow[d_3:=d_3-5d_1]{d_2:=d_2-2d_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & 7 & -5 \\ 0 & 2 & 14 & -10 \end{array}\right) \xrightarrow[d_3:=d_3-2d_2]{d_1:=d_1-d_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -9 & 9 \\ 0 & 1 & 7 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Nghiệm của hệ là $(\alpha_1; \alpha_2; \alpha_3) = (9 + 9t, -5 - 7t, t)$

Vậy u là tổ hợp tuyến tính của u_1, u_2, u_3.

Dạng biểu diễn của u là $u = (9 + 9t)u_1 + (-5 - 7t)u_2 + tu_3$.

Ví dụ. Trong không gian $\mathbb{R}^4$ cho các vectơ $u_1 = (1,1,1,1)$; $u_2 = (2,3,-1,0)$; $u_3 = (-1,-1,1,1)$. Tìm điều kiện để vectơ $u = (a,b,c,d)$ là một tổ hợp tuyến tính của u_1, u_2, u_3.

Giải.

$$(u_1^\top \ u_2^\top \ u_3^\top \mid u^\top) = \left(\begin{array}{rrr|l} 1 & 2 & -1 & a \\ 1 & 3 & -1 & b \\ 1 & -1 & 1 & c \\ 1 & 0 & 1 & d \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{rrr|l} 1 & 2 & -1 & a \\ 0 & 1 & 0 & b-a \\ 0 & -3 & 2 & c-a \\ 0 & -2 & 2 & d-a \end{array}\right)$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{rrr|c} 0 & 2 & -1 & a \\ 0 & 1 & 0 & -a+b \\ 0 & 0 & 2 & -4a+3b+c \\ 0 & 0 & 2 & -3a+2b+d \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{rrr|c} 0 & 2 & -1 & a \\ 0 & 1 & 0 & -a+b \\ 0 & 0 & 2 & -4a+3b+c \\ 0 & 0 & 0 & a-b-c+d \end{array}\right).$$

Để u là một tổ hợp tuyến tính của u_1, u_2, u_3 thì hệ có nghiệm, tức là

$$a + d = b + c.$$

2.2 Độc lập và phụ thuộc tuyến tính

Định nghĩa. Cho $u_1, u_2, \ldots, u_m \in V$. Xét phương trình

$$\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \ldots + \alpha_m u_m = 0. \tag{$*$}$$

- Nếu $(*)$ chỉ có nghiệm tầm thường $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_m = 0$ thì ta nói $u_1, u_2, \ldots, u_m$ (hay $\{u_1, u_2, \ldots, u_m\}$) ***độc lập tuyến tính***.
- Nếu ngoài nghiệm tầm thường, $(*)$ còn có nghiệm khác thì ta nói $u_1, u_2, \ldots, u_m$ (hay $\{u_1, u_2, \ldots, u_m\}$) ***phụ thuộc tuyến tính***.

Nói cách khác,

- ▷ Nếu phương trình $(*)$ có nghiệm duy nhất thì $u_1, u_2, \ldots, u_m$ độc lập tuyến tính.
- ▷ Nếu phương trình $(*)$ có vô số nghiệm thì $u_1, u_2, \ldots, u_m$ phụ thuộc tuyến tính.

Ví dụ. Trong không gian $\mathbb{R}^3$ cho các vectơ $u_1 = (1, 2, -3)$; $u_2 = (2, 5, -1)$; $u_3 = (1, 1, -9)$. Hỏi u_1, u_2, u_3 độc lập hay phụ thuộc tuyến tính?

Giải. Xét phương trình

$$\begin{aligned} & \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \alpha_3 u_3 = 0 \\ \Leftrightarrow\ & \alpha_1(1, 2, -3) + \alpha_2(2, 5, -1) + \alpha_3(1, 1, -9) = (0, 0, 0) \\ \Leftrightarrow\ & \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} \alpha_1 & + & 2\alpha_2 & + & \alpha_3 & = & 0; \\ 2\alpha_1 & + & 5\alpha_2 & + & \alpha_3 & = & 0; \\ -3\alpha_1 & - & \alpha_2 & - & 9\alpha_3 & = & 0. \end{array} \right. \end{aligned}$$

Ma trận hóa hệ phương trình, $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 1 \\ -3 & -1 & -8 \end{pmatrix}$.

Ta có $r(A) = 3$ nên hệ có nghiệm duy nhất. Suy ra u_1, u_2, u_3 độc lập tuyến tính.

Ví dụ. Trong không gian $\mathbb{R}^3$ cho các vectơ $u_1 = (1,1,1)$; $u_2 = (2,1,3)$; $u_3 = (1,2,0)$. Hỏi u_1, u_2, u_3 độc lập hay phụ thuộc tuyến tính?

Giải. Xét phương trình

$$\begin{aligned} & \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \alpha_3 u_3 = 0 \\ \Leftrightarrow\ & (\alpha + 2\alpha_2 + \alpha_3, \alpha + \alpha_2 + 2\alpha_3, \alpha + 3\alpha_2) = (0,0,0) \\ \Leftrightarrow\ & \left\{ \begin{array}{ccccccc} \alpha_1 & + & 2\alpha_2 & + & \alpha_3 & = & 0 \\ \alpha_1 & + & \alpha_2 & + & 2\alpha_3 & = & 0 \\ \alpha_1 & + & 3\alpha_2 & & & = & 0 \end{array} \right. \end{aligned}$$

Ma trận hóa hệ phương trình, $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$.

Ta có $r(A) = 2$ nên hệ vô số nghiệm. Suy ra u_1, u_2, u_3 phụ thuộc tuyến tính.

Nhận xét. *Họ vectơ $u_1, u_2, \ldots, u_m$ phụ thuộc tuyến tính khi và chỉ khi tồn tại vectơ u_i là tổ hợp tuyến tính của các vectơ còn lại. Thật vậy,*

- *Nếu $u_1, u_2, \ldots, u_m$ phụ thuộc tuyến tính thì có α_1, α_2, ..., $\alpha_m \in \mathbb{R}$ không đồng thời bằng 0 sao cho $\sum\limits_{j=1}^{m} \alpha_j u_j = 0$. Giả sử $\alpha_i \neq 0$, khi đó*
$$u_i = -\frac{1}{\alpha_i} \sum_{j \neq i} \alpha_j u_j.$$
- *Nếu có u_i sao cho $u_i = \sum\limits_{j \neq i} \beta_j u_j$ thì $\sum\limits_{j=1}^{m} \beta_j u_j = 0$, trong đó $\beta_i = -1 \neq 0$, điều này chứng tỏ $u_1, u_2, \ldots, u_m$ phụ thuộc tuyến tính.*

Mệnh đề. *Cho V là không gian vectơ trên $\mathbb{R}$ và $S = \{u_1, u_2, \ldots, u_m\}$ là tập hợp các vectơ thuộc V. Khi đó*

- *Nếu S phụ thuộc tuyến tính thì mọi tập chứa S đều phụ thuộc tuyến tính.*
- *Nếu S độc lập tuyến tính thì mọi tập con của S đều độc lập tuyên tính.*

Hệ quả. *Cho $u_1, u_2, \ldots, u_m$ là m vectơ trong $\mathbb{R}^n$. Gọi A là ma trận có được bằng cách xếp $u_1, u_2, \ldots, u_m$ thành các dòng. Khi đó $u_1, u_2, \ldots, u_m$ độc lập tuyến tính khi và chỉ khi A có hạng là $r(A) = m$.*

Từ Hệ quả trên ta sẽ xây dựng thuật toán kiểm tra tính độc lập tuyến tính của các vectơ trong $\mathbb{R}^n$

Thuật toán kiểm tra tính độc lập tuyến tính của các vectơ trong $\mathbb{R}^n$

Bước 1: Lập ma trận A bằng cách xếp $u_1, u_2, \ldots, u_m$ thành các dòng.

Bước 2: Xác định hạng $r(A)$ của A.

- Nếu $r(A) = m$ thì $u_1, u_2, \ldots, u_m$ độc lập tuyến tính.
- Nếu $r(A) < m$ thì $u_1, u_2, \ldots, u_m$ phụ thuộc tuyến tính.

Trường hợp $m = n$, ta có A là ma trận vuông. Khi đó có thể thay Bước 2 bằng Bước 2' sau đây:

Bước 2': Tính định thức $\det A$.

- Nếu $\det A \neq 0$ thì $u_1, u_2, \ldots, u_m$ độc lập tuyến tính.
- Nếu $\det A = 0$ thì $u_1, u_2, \ldots, u_m$ phụ thuộc tuyến tính.

Ví dụ. Trong không gian $\mathbb{R}^5$ cho các vectơ $u_1 = (1, 2, -3, 5, 1)$; $u_2 = (1, 3, -13, 22, -1)$; $u_3 = (3, 5, 1, -2, 5)$. Hãy xét xem u_1, u_2, u_3 độc lập tuyến tính hay phụ thuộc tuyến tính.

Giải.

$$\text{Lập} \quad A = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 5 & 1 \\ 1 & 3 & -13 & 22 & -1 \\ 3 & 5 & 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[d_3 := d_3 - 3d_1]{d_2 := d_2 - d_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & -10 & 17 & -2 \\ 0 & -1 & 10 & -17 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{d_3 := d_3 + d_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & -10 & 17 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ta có $r(A) = 2 < 3$. Suy ra u_1, u_2, u_3 phụ thuộc tuyến tính.

Ví dụ. Trong không gian $\mathbb{R}^3$ cho các vectơ

$u_1 = (2m+1, -m, m+1);$
$u_2 = (m-2, m-1, m-2);$
$u_3 = (2m-1, m-1, 2m-1).$

Tìm điều kiện để u_1, u_2, u_3 độc lập tuyến tính.

Giải. Lập $A = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2m+1 & -m & m+1 \\ m-2 & m-1 & m-2 \\ 2m-1 & m-1 & 2m-1 \end{pmatrix}$ Ta có

$$|A| = \begin{vmatrix} 2m+1 & -m & m+1 \\ m-2 & m-1 & m-2 \\ 2m-1 & m-1 & 2m-1 \end{vmatrix} \xlongequal{c_1:=c_1-c_3} \begin{vmatrix} m & -m & m+1 \\ 0 & m-1 & m-2 \\ 0 & m-1 & 2m-1 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{\text{cột } 1} m \begin{vmatrix} m-1 & m-2 \\ m-1 & 2m-1 \end{vmatrix} = m(m-1)(m+1).$$

Do đó u_1, u_2, u_3 độc lập tuyến tính khi và chỉ khi

$$|A| \neq 0 \Leftrightarrow m(m-1)(m+1) \neq 0 \Leftrightarrow m \neq 0 \text{ và } m \neq \pm 1.$$

3. Cơ sở và số chiều của không gian vectơ

3.1 Tập sinh

Định nghĩa. Cho V là không gian vectơ và $S \subset V$. S được gọi là ***tập sinh*** của V nếu mọi vectơ u của V đều là tổ hợp tuyến tính của S. Khi đó, ta nói S sinh ra V hoặc V được sinh bởi S, ký hiệu $\mathrm{V} = \langle \mathrm{S} \rangle$.

Ví dụ. Trong không gian $\mathbb{R}^3$, cho

$$S = \{u_1 = (1,1,1); u_2 = (1,2,1); u_3 = (2,3,1)\}.$$

Hỏi S có là tập sinh của $\mathbb{R}^3$ không?

Giải. Với $u = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, kiểm tra xem u có là tổ hợp tuyến tính của u_1, u_2, u_3 không?

Ta lập hệ phương trình

$$(u_1^\top \; u_2^\top \; u_3^\top \mid u^\top) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & x \\ 1 & 2 & 3 & y \\ 1 & 1 & 1 & z \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|l} 1 & 1 & 2 & x \\ 0 & 1 & 1 & -x+y \\ 0 & 0 & -1 & -x+z \end{array}\right).$$

Hệ có nghiệm. Suy ra u là tổ hợp tuyến tính của u_1, u_2, u_3. Vậy S là tập sinh của $\mathbb{R}^3$.

Ví dụ. Trong không gian $\mathbb{R}^3$, cho

$$S = \{u_1 = (1,1,-1); u_2 = (2,3,1); u_3 = (3,4,0)\}.$$

Hỏi S có là tập sinh của $\mathbb{R}^3$ không?

Giải. Với $u = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, ta lập hệ phương trình

$$(u_1^\top\ u_2^\top\ u_3^\top \mid u^\top) = \left(\begin{array}{rrr|l} 1 & 2 & 3 & x \\ 1 & 3 & 4 & y \\ -1 & 1 & 0 & z \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{rrr|l} 1 & 2 & 3 & x \\ 0 & 1 & 1 & -x+y \\ 0 & 0 & 0 & 4x-3y+z \end{array}\right).$$

Với $u_0 = (1,1,1)$ thì hệ trên vô nghiệm.

Vậy u_0 không là tổ hợp tuyến tính của u_1, u_2, u_3. Suy ra S không là tập sinh của $\mathbb{R}^3$.

Ví dụ. Trong không gian $\mathbb{R}_2[x]$, cho

$$S = \{f_1 = x^2 + x + 1; f_2 = 2x^2 + 3x + 1; f_3 = x^2 + 2x + 1\}.$$

Hỏi S có là tập sinh của $\mathbb{R}_2[x]$ không?

Giải. Với $f = ax^2 + bx + c \in \mathbb{R}_2[x]$, kiểm tra xem f có là tổ hợp tuyến tính của f_1, f_2, f_3 không?

Xét phương trình $\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2 + \alpha_3 f_3 = f$.

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ccccccc} \alpha_1 & + & 2\alpha_2 & + & \alpha_3 & = & a; \\ \alpha_1 & + & 3\alpha_2 & + & 2\alpha_3 & = & b; \\ \alpha_1 & + & \alpha_2 & + & \alpha_3 & = & c. \end{array}\right.$$

Ma trận hóa, $\tilde{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & a \\ 1 & 3 & 2 & b \\ 1 & 1 & 1 & c \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|r} 1 & 2 & 1 & a \\ 0 & 1 & 1 & -a+b \\ 0 & 0 & 1 & -2a+b+c \end{array}\right)$

Hệ có nghiệm. Vậy f là tổ hợp tuyến tính của f_1, f_2, f_3. Suy ra S là tập sinh của $\mathbb{R}_2[x]$.

3.2 Cơ sở và số chiều

Định nghĩa. Cho V là không gian vectơ và $\mathcal{B}$ là con của V. $\mathcal{B}$ được gọi là một ***cơ sở*** của V nếu $\mathcal{B}$ là một tập sinh và $\mathcal{B}$ độc lập tuyến tính.

Ví dụ. Trong không gian $\mathbb{R}^3$, cho

$$\mathcal{B} = \{u_1 = (1,1,1); u_2 = (1,2,1); u_3 = (2,3,1)\}.$$

Kiểm tra $\mathcal{B}$ là cơ sở của $\mathbb{R}^3$.

Giải. $\mathcal{B}$ là tập sinh của $\mathbb{R}^3$. (theo ví dụ trên)

Kiểm tra $\mathcal{B}$ độc lập tuyến tính.

Lập ma trận $A = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$

Ta có $r(A) = 3$ (hoặc $|A| = -1$). Suy ra $\mathcal{B}$ độc lập tuyến tính. Vậy $\mathcal{B}$ là cơ sở của $\mathbb{R}^3$.

Ví dụ. Trong không gian $\mathbb{R}^3$, cho

$$S = \{u_1 = (1, 1, -2); u_2 = (2, 3, 3); u_3 = (5, 7, 4)\}.$$

Hỏi S có là cơ sở của $\mathbb{R}^3$ không?

Ví dụ. Trong không gian $\mathbb{R}^3$, cho

$$S = \{u_1 = (1, 1, -1); u_2 = (2, 1, 0); u_3 = (1, 1, 0); u_4 = (1, -4, 1)\}.$$

Hỏi S có là cơ sở của $\mathbb{R}^3$ không?

Ví dụ. Trong không gian $\mathbb{R}_2[x]$, cho

$$S = \{f_1 = x^2 + x + 1; f_2 = 2x^2 + x + 1; f_3 = x^2 + 2x + 2\}$$

Hỏi S có là cơ sở của $R_2[x]$ không?

Số chiều

Bổ đề. *Giả sử V sinh bởi m vectơ,* $V = \langle u_1, u_2, \ldots, u_m \rangle$. *Khi đó mọi tập hợp con độc lập tuyến tính của V có không quá m phần tử.*

Hệ quả. *Giả sử V có một cơ sở* $\mathcal{B}$ *gồm n vectơ. Khi đó mọi cơ sở khác của V hữu hạn và có đúng n vectơ.*

Định nghĩa. Cho V là không gian vectơ, ***số chiều*** của V, ký hiệu là dimV, là số vectơ của tập cơ sở. Trong trường hợp vô hạn chiều, ta ký $\dim V = \infty$.

Ví dụ. Trong không gian $\mathbb{R}^3$, cho

$$\mathcal{B} = \{u_1 = (1,1,1); u_2 = (1,2,1); u_3 = (2,3,1)\}.$$

Khi đó $\mathcal{B}$ là cơ sở của $\mathbb{R}^3$. Do đó $\dim\mathbb{R}^3 = 3$.

Ví dụ. Trong không gian $\mathbb{R}^n$, xét $\mathcal{B}_0 = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$, trong đó

$$\begin{array}{lcl} e_1 & = & (1, 0, 0, \ldots, 0), \\ e_2 & = & (0, 1, 0, \ldots, 0), \\ \multicolumn{3}{c}{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots} \\ e_n & = & (0, 0, \ldots, 0, 1). \end{array}$$

Với $u = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. Ta có

$$u = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \cdots + x_n e_n.$$

Do đó $\mathcal{B}_0$ là tập sinh của $\mathbb{R}^n$. Mặt khác $\mathcal{B}_0$ độc lập tuyến tính nên $\mathcal{B}_0$ là cơ sở của $\mathbb{R}^n$. $\mathcal{B}_0$ được gọi là ***cơ sở chính tắc*** của $\mathbb{R}^n$. Như vậy

$$dim \mathbb{R}^n = n$$

.

Ví dụ. Không gian vectơ $M_{m\times n}(\mathbb{R})$ có cơ sở

$$\mathcal{B}_0 = \{E_{ij}\,|\,, i\in\overline{1.m}, j\in\overline{1,n}\},$$

trong đó E_{ij} là ma trận loại $m\times n$ chỉ có một hệ số khác 0 duy nhất là hệ số 1 ở dòng i cột j. Do đó $M_{m\times n}(\mathbb{R})$ hữu hạn chiều và

$$\dim M_{m\times n}(\mathbb{R}) = mn.$$

Ví dụ. Không gian $\mathbb{R}_n[x]$ gồm các đa thức theo x bậc không quá n với hệ số trong $\mathbb{R}$, là không gian vectơ hữu hạn chiều trên $\mathbb{R}$ có $\dim\mathbb{R}_n[x] = n+1$ với cơ sở $\mathcal{B}_0 = \{1, x, \ldots, x^n\}$.

Ví dụ. Không gian $\mathbb{R}[x]$ gồm tất các đa thức theo x với hệ số trong $\mathbb{R}$, là không gian vectơ vô hạn chiều trên $\mathbb{R}$ với cơ sở $\mathcal{B}_0 = \{1, x, x^2, \ldots\}$.

Hệ quả. *Cho V là không gian vectơ có $\dim V = n$. Khi đó*

i) *Mọi tập con của V chứa nhiều hơn n vectơ thì phụ thuộc tuyến tính.*

ii) *Mọi tập con của V chứa ít hơn n vectơ không sinh ra V.*

Bổ đề. *Cho S là một tập con độc lập tuyến tính của V và $u \in V$ là một vectơ sao cho u không là tổ hợp tuyến tính của S. Khi đó tập hợp $S_1 = S \cup \{u\}$ độc lập tuyến tính.*

Định lý.
Cho V là một không gian vectơ hữu hạn chiều với $\dim V = n$. Khi đó

i) *Mọi tập con độc lập tuyến tính gồm n vectơ của V đều là cơ sở của V.*

ii) *Mọi tập sinh của V gồm n vectơ đều là cơ sở của V.*

Nhận diện cơ sở của không gian V có $\dim V = n$

Vì $\dim V = n$ nên mọi cơ sở của V phải gồm n vectơ. Hơn nữa, nếu $S \subset V$ và số phần tử của S bằng n thì

$$\begin{aligned} S \text{ là cơ sở của } V \quad &\Leftrightarrow S \text{ độc lập tuyến tính.} \\ &\Leftrightarrow S \text{ là tập sinh của } V. \end{aligned}$$

Ví dụ. Kiểm tra tập hợp nào sau đây là cơ sở của không gian vectơ của $\mathbb{R}^3$?

a) $B_1 = \{u_1 = (1,2,3), u_2 = (2,3,4)\}$.

b) $B_2 = \{u_1 = (2,1,3), u_2 = (2,1,4), u_3 = (2,3,1), u_4 = (3,4,5)\}$.

c) $B_3 = \{u_1 = (1,-2,1), u_2 = (1,3,2), u_3 = (-2,1,-2)\}$

d) $B_4 = \{u_1 = (2,-1,0), u_2 = (1,2,3), u_3 = (5,0,3)\}$

Giải.

a) b) B_1, B_2 không phải là cơ sở của $\mathbb{R}^3$ vì số vectơ không bằng 3.

c) $B_3 = \{u_1 = (1, -2, 1), u_2 = (1, 3, 2), u_3 = (-2, 1, -2)\}$

Lập $A = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ -2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$.

Ta có $\det A = 3$. Suy ra B_3 độc lập tuyến tính. Mặt khác số vectơ của B_3 bằng $3 = \dim \mathbb{R}^3$ nên B_3 là cơ sở của $\mathbb{R}^3$

d) $B_4 = \{u_1 = (2, -1, 0), u_2 = (1, 2, 3), u_3 = (5, 0, 3)\}$

Lập $A = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \\ 5 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

Ta có $\det A = 0$. Suy ra B_4 không độc lập tuyến tính. Vì vậy B_4 không là cơ sở của $\mathbb{R}^3$

Ví dụ. Trong không gian $\mathbb{R}_2[x]$, cho

$$S = \{f_1 = x^2 + x + 1; f_2 = 2x^2 + 3x + 1; f_3 = x^2 + 2x + 1\}.$$

Hỏi S có là cơ sở của $\mathbb{R}_2[x]$ không?

Giải. Vì $\dim R_2[x] = 3$ và số phần tử của S bằng 3 nên S là cơ sở của $\mathbb{R}_2[x]$ khi S độc lập tuyến tính hoặc S là tập sinh.

Cách 1. Kiểm tra S độc lập tuyến tính.

Xét phương trình $\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2 + \alpha_3 f_3 = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3 = 0 \\ \alpha_1 + 3\alpha_2 + 2\alpha_3 = 0 \\ \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0 \end{cases}$$

Ma trận hóa, $\tilde{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$

Hệ có nghiệm duy nhất $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$. Vậy S độc lập tuyến tính. Suy ra S là cơ sở của $\mathbb{R}_2[x]$.

Cách 2. Kiểm tra S là tập sinh. ▸ Xem lại ví dụ

Ví dụ. Trong không gian $\mathbb{R}^3$, cho

$$S = \{u_1 = (1, m-2, -2), u_2 = (m-1, 3, 3), u_3 = (m, m+2, 2)\}.$$

Tìm điều kiệm m để S là cơ sở của $\mathbb{R}^3$.

Giải. Do số phần tử của S bằng 3 nên S là cơ sở của $\mathbb{R}^3$ khi S độc lập tuyến tính.

Lập $A = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & m-2 & -2 \\ m-1 & 3 & 3 \\ m & m+2 & 2 \end{pmatrix}$. Ta có $\det A = m - m^2$.

Suy ra, S độc lập tuyến tính khi $\det A \neq 0$. Như vậy, để S là cơ sở của $\mathbb{R}^3$ thì $m \neq 0$ và $m \neq 1$.

4. Không gian vectơ con

4.1 Định nghĩa

Định nghĩa. Cho W là một tập con khác $\emptyset$ của V. Ta nói W là một ***không gian vectơ con*** (gọi tắt, ***không gian con***) của V, ký hiệu $\mathrm{W} \leq \mathrm{V}$, nếu W với phép toán $(+, .)$ được hạn chế từ V cũng là một không gian vectơ trên $\mathbb{R}$.

Ví dụ. $W = \{0\}$ và V là các vectơ con của V. Ta gọi đây là các ***không gian con tầm thường*** của V.

Định lý. *Cho W là một tập con khác $\emptyset$ của V. Khi đó các mệnh đề sau tương đương:*

i) $W \leq V$.

ii) *Với mọi $u, v \in W$; $\alpha \in \mathbb{R}$, ta có $u + v \in W$ và $\alpha u \in W$.*

iii) *Với mọi $u, v \in W$; $\alpha \in \mathbb{R}$, ta có $\alpha u + v \in W$.*

Ví dụ. Cho $W = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x_1 + x_2 - x_3 = 0\}$. Hỏi W có là không gian con của $\mathbb{R}^3$ không?

Giải.

Ta có $W \subset \mathbb{R}^3$.

$0 = (0,0,0) \in W$ (vì $2.0 + 0 - 0 = 0$). Suy ra $W \neq \emptyset$.

Với mọi $u = (x_1, x_2, x_3) \in W$, nghĩa là $2x_1 + x_2 - x_3 = 0$,

$v = (y_1, y_2, y_3) \in W$ nghĩa là $2y_1 + y_2 - y_3 = 0$

và $\alpha \in \mathbb{R}$. Ta có

- $u + v = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3)$. Ta có
$$2(x_1 + y_1) + (x_2 + y_2) - (x_3 + y_3) = (2x_1 + x_2 - x_3) + (2y_1 + y_2 - y_3) = 0 + 0 = 0.$$
Suy ra $u + v \in W$. (1)

- $\alpha u = (\alpha x_1, \alpha x_2, \alpha x_3)$. Ta có
$$2\alpha x_1 + \alpha x_2 - \alpha x_3 = \alpha(2x_1 + x_2 - x_3) = \alpha 0 = 0.$$
Suy ra $\alpha u \in W$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra $W \leq \mathbb{R}^3$.

Nhận xét. *Cho V là không gian vectơ và $W \subset V$. Khi đó:*

- *Nếu W là không gian con của V thì $0 \in W$.*
- *Nếu $0 \notin W$ thì W không là không gian con của V.*

.

Ví dụ. Cho $W = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid 3x_1 + 2x_2 - 4x_3 = 1\}$. Hỏi W có là không gian con của $\mathbb{R}^3$ không?

Giải. Ta có $0 = (0, 0, 0) \notin W$ (vì $3.0 + 2.0 - 4.0 = 0 \neq 1$). Suy ra W không là không gian con của $\mathbb{R}^3$.

Ví dụ. Cho $W = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 = 2x_2x_3\}$. Hỏi W có là không gian con của $\mathbb{R}^3$ không?

Giải. Với $u = (2, 1, 1)$ và $v = (4, 2, 1)$. Ta có $u, v \in W$.

$u + v = (6, 3, 2) \notin W$ (vì $6 \neq 2.3.2$). Suy ra W không là không gian con của $\mathbb{R}^3$.

Định lý. *Nếu W_1, W_2 là không gian con của V thì $W_1 \cap W_2$ cũng là một không gian con của V.*

Chứng minh.

- $W_1 \cap W_2 \subset V$ (vì $W_1 \subset V$, $W_2 \subset V$)
- $0 \in W_1 \cap W_2$ (vì $0 \in W_1, 0 \in W_2$)
- Với mọi $u, v \in W_1 \cap W_2$; $\alpha \in \mathbb{R}$.

  Vì $u, v \in W_1$ nên $\alpha u + v \in W_1$ (vì $W_1 \leq V$).

  Vì $u, v \in W_1$ nên $\alpha u + v \in W_2$ (vì $W_2 \leq V$).

  Suy ra $\alpha u + v \in W_1 \cap W_2$.

Vậy $W_1 \cap W_2 \leq V$.

Định lý. *Nếu W_1, W_2 là không gian con của V, ta định nghĩa*

$$W_1 + W_2 = \{w_1 + w_2 \mid w_1 \in W_1, w_2 \in W_2\}.$$

Khi đó $W_1 + W_2$ cũng là một không gian con của V.

Chứng minh.

- $W_1 + W_2 \subset V$ (vì $W_1 \subset V$, $W_2 \subset V$)
- $0 = 0 + 0 \in W_1 + W_2$ (vì $0 \in W_1, 0 \in W_2$)
- Với mọi $u = u_1 + u_2, v = v_1 + v_2 \in W_1 + W_2$; $\alpha \in \mathbb{R}$.

  Vì $u_1, v_1 \in W_1$ nên $\alpha u_1 + v_1 \in W_1$ (vì $W_1 \leq V$).

  Vì $u_2, v_2 \in W_1$ nên $\alpha u_2 + v_2 \in W_2$ (vì $W_2 \leq V$).

  Ta có
  $\alpha u + v = \alpha(u_1 + u_2) + (v_1 + v_2) = (\alpha u_1 + v_1) + (\alpha u_2 + v_2) \in W_1 + W_2$.
  Vậy $\alpha u + v \in W_1 + W_2$.

Vậy $W_1 + W_2 \leq V$.

4.2 Không gian con sinh bởi tập hợp

Định lý. *Cho V là không gian vectơ trên $\mathbb{R}$ và S là tập con khác rỗng của V. Ta đặt W là tập hợp tất cả các tổ tuyến tính của S. Khi đó:*

i) $W \leq V$.

ii) *W là không gian nhỏ nhất trong tất cả các không gian con của V mà chứa S.*

Không gian W được gọi là không gian con sinh bởi S, ký hiệu $\mathrm{W} = \langle \mathrm{S} \rangle$. *Cụ thể, nếu $S = \{u_1, u_2, \ldots, u_m\}$ thì*

$$W = \langle S \rangle = \{\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \cdots + \alpha_m u_m \mid \alpha_i \in \mathbb{R}\}$$

Ví dụ. Trong không gian $\mathbb{R}^2$, ta xét $S = \{u = (1, 2)\}$. Khi đó

$$W = \langle S \rangle = \{a(1, 2) \mid a \in \mathbb{R}\} = \{(a, 2a) \mid a \in \mathbb{R}\}.$$

Ví dụ. Trong không gian $\mathbb{R}^3$, ta xét

$$S = \{u_1 = (1,2,1), u_2 = (-1,2,0)\}.$$

Khi đó

$$\langle S\rangle = \{tu_1 + su_2 \mid t, s \in \mathbb{R}\} = \{(t-s, 2t+2s, t) \mid t, s \in R\}$$

Nhận xét. *Vì không gian sinh bởi S là không gian nhỏ nhất chứa S nên ta quy ước $\langle\emptyset\rangle = \{0\}$.*

Ví dụ. Trong không gian $\mathbb{R}^3$, cho

$$W = \{(a+2b, a-b, -a+2b) \mid a, b \in \mathbb{R}\}$$

a) Chứng minh W là không gian con của $\mathbb{R}^3$.

b) Tìm một tập sinh của W.

Giải. a) Ta có $0 \in W$ vì $0 = (0,0,0) = (0+2.0, 0-0, -0+2.0)$

Với $u, v \in W$ và $\alpha \in \mathbb{R}$,

$u = (a_1 + 2b_1, a_1 - b_1, -a_1 + 2b_1)$ với $a_1, b_1 \in \mathbb{R}$

$v = (a_2 + 2b_2, a_2 - b_2, -a_2 + 2b_2)$ với $a_2, b_2 \in \mathbb{R}$. Khi đó:

- $u + v = (\ (a_1 + a_2) + 2(b_1 + b_2), (a_1 + a_2) - (b_1 + b_2)$
  $, -(a_1 + a_2) + 2(b_1 + b_2)\ ) \in W$ (vì $a_1 + a_2, b_1 + b_2 \in \mathbb{R}$).
- $\alpha u = (\alpha a_1 + 2\alpha b_1, \alpha a_1 - \alpha b_1, -\alpha a_1 + 2\alpha b_1) \in W$
  (vì $\alpha a_1, \alpha b_1 \in \mathbb{R}$).

Vậy $u + v, \alpha u \in W$. Suy ra $W \leq \mathbb{R}^3$.

b) Ta có $W = \{(a + 2b, a - b, -a + 2b) \mid a, b \in \mathbb{R}\}$

$$= \{a(1, 1, -1) + b(2, -1, 2) \mid a, b \in \mathbb{R}\}$$

Vì mọi vectơ thuộc W đều là tổ hợp tuyến tính của $u_1 = (1, 1, -1), u_2 = (2, -1, 2)$ nên $S = \{u_1, u_2\}$ là tập sinh của W.

Định lý. *Cho V là không gian vectơ và S_1, S_2 là tập con của V. Khi đó, nếu mọi vectơ của S_1 đều là tổ hợp tuyến tính của S_2 và ngược lại thì $\langle S_1 \rangle = \langle S_2 \rangle$*

Chứng minh. Vì mọi vectơ của S_1 đều là tổ hợp tuyến tính của S_2 nên $S_1 \subset \langle S_2 \rangle$. Mặt khác $\langle S_1 \rangle$ là không gian nhỏ nhất chứa S_1 nên $\langle S_1 \rangle \subset \langle S_2 \rangle$. Lý luận tương tự ta có $\langle S_2 \rangle \subset \langle S_1 \rangle$.

Ví dụ. Trong không gian $\mathbb{R}^3$ cho

$$S_1 = \{u_1 = (1, -1, 4), u_2 = (2, 1, 3)\},$$
$$S_2 = \{u_3 = (-1, -2, 1), u_4 = (5, 1, 10)\}.$$

Chứng minh $\langle S_1 \rangle = \langle S_2 \rangle$.

Định lý. **[về cơ sở không toàn vẹn]** *Cho V là một không gian vectơ hữu hạn chiều và S là một tập con độc lập tuyến tính của V. Khi đó, nếu S không là cơ sở của V thì có thể thêm vào S một số vectơ để được một cơ sở của V.*

Ví dụ. Trong không gian $\mathbb{R}^4$, cho

$$S = \{u_1 = (1, 0, 2, 1\}, u_2 = (1, 0, 4, 4)\}.$$

Chứng tỏ S độc lập tuyến tính và thêm vào S một số vectơ để S trở thành cơ sở của $\mathbb{R}^4$.

Giải. Lập $A = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 4 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

Ta có $r(A) = 2$ bằng số vectơ của S. Suy ra S độc lập tuyến tính.

Dựa vào A ta có thể thêm vào S hai vectơ

$$u_3 = (0, 1, 0, 0), u_4 = (0, 0, 0, 1).$$

Rõ ràng $S = \{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ đltt. Suy ra S là cơ sở của $\mathbb{R}^4$.

Định lý. *Cho V là một không gian vectơ hữu hạn chiều sinh bởi S. Khi đó tồn tại một cơ sở $\mathcal{B}$ của V sao cho $\mathcal{B} \subseteq S$. Nói cách khác, nếu S không phải là một cơ sở của V thì ta có thể loại bỏ ra khỏi S một số vectơ để được một cơ sở của V.*

Ví dụ. Trong không gian $\mathbb{R}^3$, cho W sinh bởi

$$S = \{u_1 = (1,1,1), u_2 = (2,1,3), u_3 = (1,2,0)\}.$$

Tìm một tập con của S để là cơ sở của W.

Giải. Xét phương trình

$$\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \alpha_3 u_3 = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad (\alpha + 2\alpha_2 + \alpha_3, \alpha + \alpha_2 + 2\alpha_3, \alpha + 3\alpha_2) = (0,0,0)$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ccccccc} \alpha_1 & + & 2\alpha_2 & + & \alpha_3 & = & 0 \\ \alpha_1 & + & \alpha_2 & + & 2\alpha_3 & = & 0 \\ \alpha_1 & + & 3\alpha_2 & & & = & 0 \end{array}\right.$$

Ma trận hóa hệ phương trình,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Suy ra hệ có nghiệm là $\alpha_1 = -3t, \alpha_2 = t, \alpha_3 = t$. Vậy

$$-3tu_1 + tu_2 + tu_3 = 0.$$

Cho $t = 1$, ta có $-3u_1 + u_2 + u_3 = 0$ nên

$$u_2 = 3u_1 - u_3.$$

Suy ra u_2 là tổ hợp tuyến tính của u_1, u_3. Do đó $\{u_1, u_3\}$ là tập sinh của W, hơn nữa nó độc lập tuyến tính nên nó là cơ sở của W.

4.3 Không gian dòng của ma trận

Định nghĩa. Cho ma trận $A = (a_{ij}) \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Đặt

$$\begin{array}{lcl} u_1 & = & (a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n}); \\ u_2 & = & (a_{21}, a_{22}, \dots, a_{2n}); \\ \dots & \dots & \dots \\ u_m & = & (a_{m1}, a_{m2}, \dots, a_{mn}) \end{array}$$

và

$$W_A = \langle u_1, u_2, \dots, u_m \rangle.$$

Ta gọi $u_1, u_2, \dots, u_m$ là các ***vectơ dòng*** của A, và W_A là ***không gian dòng*** của A.

Bổ đề. *Nếu A và B là hai ma trận tương đương dòng thì $W_A = W_B$, nghĩa là hai ma trận tương đương dòng có cùng không gian dòng.*

Định lý. *Giả sử $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$. Khi đó,* $\dim W_A = r(A)$ *và tập hợp các vectơ khác không trong dạng ma trận bậc thang của A là cơ sở của W_A.*

Ví dụ. Tìm số chiều và một cơ sở của không gian dòng của ma trận

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 5 & 1 & 4 \\ 5 & 11 & -2 & 8 \\ 9 & 20 & -3 & 14 \end{pmatrix}.$$

Giải. $$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 5 & 1 & 4 \\ 5 & 11 & -2 & 8 \\ 9 & 20 & -3 & 14 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Suy ra $\dim W_A = r(A) = 3$ và một cơ sở của W_A là

$$\{u_1 = (1, 2, -1, 1); u_2 = (0, 1, 3, 2); u_3 = (0, 0, 0, 1)\}.$$

Thuật toán tìm số chiều và cơ sở của một không gian con của $\mathbb{R}^n$ khi biết một tập sinh

Giả sử $W = \langle u_1, u_2, \ldots, u_m\rangle \leq \mathbb{R}^n$ ($u_1, u_2, \ldots, u_m$ không nhất thiết độc lập tuyến tính). Để tìm số chiều và một cơ sở của W ta tiến hành như sau:

Bước 1. Lập ma trận A bằng cách xếp $u_1, u_2, \ldots, u_m$ thành các dòng.

Bước 2. Dùng các phép BĐSCTD đưa A về dạng bậc thang R.

Bước 3. Số chiều của W bằng số dòng khác 0 của R (do đó bằng $r(A)$) và các vectơ dòng khác 0 của R tạo thành một cơ sở của W.

Ví dụ. Cho W sinh bởi $S = \{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ trong đó $u_1 = (1, 2, 1, 1)$; $u_2 = (3, 6, 5, 7)$; $u_3 = (4, 8, 6, 8)$; $u_4 = (8, 16, 12, 20)$. Tìm một cơ sở của không gian W.

Giải. Lập

$$A = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & 6 & 5 & 7 \\ 4 & 8 & 6 & 8 \\ 8 & 16 & 12 & 20 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Do đó W có $\dim W = 3$ và có một cơ sở

$$\{v_1 = (1, 2, 1, 1); v_2 = (0, 0, 1, 2); v_3 = (0, 0, 0, 1)\}.$$

Nhận xét. Vì $\dim W = 3$, hơn nữa, có thể kiểm chứng u_1, u_2, u_4 độc lập tuyến tính nên ta cũng có $\{u_1, u_2, u_3\}$ là một cơ sở của W.

Ví dụ. Tìm một cơ sở cho không gian con của $\mathbb{R}^4$ sinh bởi các vectơ u_1, u_2, u_3, trong đó $u_1 = (1, -2, -1, 3)$; $u_2 = (2, -4, -3, 0)$; $u_3 = (3, -6, -4, 4)$.

Giải. Lập

$$A = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & 3 \\ 2 & -4 & -3 & 0 \\ 3 & -6 & -4 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Do đó có $\dim W = 3$ và có một cơ sở

$$\{v_1 = (1, -2, -1, 3); v_2 = (0, 0, -1, -6); v_3 = (0, 0, 0, 1)\}.$$

Nhận xét. Trong ví dụ trên, vì $r(A) = 3$ nên u_1, u_2, u_3 độc lập tuyến tính, và do đó $\{u_1, u_2, u_3\}$ cũng là một cơ sở của W.

4.4 Không gian tổng

Định lý. *Cho V là không gian vectơ trên $\mathbb{R}$ và W_1, W_2 là không gian con của V. Khi đó:*

i) $W_1 + W_2$ *là không gian con của* V.

ii) *Nếu* $W_1 = \langle S_1 \rangle$ *và* $W_2 = \langle S_2 \rangle$ *thì*

$$W_1 + W_2 = \langle S_1 \cup S_2 \rangle.$$

Ví dụ. Trong không gian $\mathbb{R}^4$ cho các vectơ $u_1 = (1,2,1,1)$; $u_2 = (3,6,5,7)$; $u_3 = (4,8,6,8)$; $u_4 = (8,16,12,16)$; $u_5 = (1,3,3,3)$; $u_6 = (2,5,5,6)$; $u_7 = (3,8,8,9)$; $u_8 = (6,16,16,18)$.

Đặt $W_1 = \langle u_1, u_2, u_3, u_4 \rangle$ và $W_2 = \langle u_5, u_6, u_7, u_8 \rangle$. Tìm một cơ sở và xác định số chiều của mỗi không gian W_1, W_2 và $W_1 + W_2$.

Giải.

- Tìm cơ sở của W_1

$$\text{Lập } A_1 = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & 6 & 5 & 7 \\ 4 & 8 & 6 & 8 \\ 8 & 16 & 12 & 16 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Do đó W_1 có số chiều là 2 và một cơ sở là

$$\{v_1 = (1,2,1,1); v_2 = (0,0,1,2)\}.$$

- Tìm cơ sở của W_2

$$\text{Lập } A_2 = \begin{pmatrix} u_5 \\ u_6 \\ u_7 \\ u_8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & 3 \\ 2 & 5 & 5 & 6 \\ 3 & 8 & 8 & 9 \\ 6 & 16 & 16 & 18 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Do đó W_2 có số chiều là 2 và một cơ sở là

$$\{v_3 = (1,3,3,3); v_4 = (0,1,1,0)\}$$

- Tìm cơ sở của $W_1 + W_2$

Ta có $W_1 + W_2$ sinh bởi các vectơ

$$v_1 = (1, 2, 1, 1); v_2 = (0, 0, 1, 2); v_3 = (1, 3, 3, 3); v_4 = (0, 1, 1, 0).$$

$$\text{Lập } A = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Suy ra $W_1 + W_2$ có số chiều là 3 và một cơ sở là

$$\{w_1 = (1, 2, 1, 1); w_2 = (0, 1, 1, 0); w_3 = (0, 0, 1, 2)\}.$$

5. Không gian nghiệm của hệ phương trình tuyến tính

5.1 Mở đầu

Ví dụ. Cho W là tập tất cả các nghiệm (x_1, x_2, x_3, x_4) của hệ phương trình tuyến tính thuần nhất:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 5x_4 = 0; \\ x_1 + 3x_2 - 13x_3 + 22x_4 = 0; \\ 3x_1 + 5x_2 + x_3 - 2x_4 = 0; \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 - 7x_4 = 0. \end{cases}$$

Ma trận hóa hệ phương trình, ta có

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 5 \\ 1 & 3 & -13 & 22 \\ 3 & 5 & 1 & -2 \\ 2 & 3 & 4 & -7 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 17 & -29 \\ 0 & 1 & -10 & 17 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Vậy hệ có nghiệm là

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) = (-17t + 29s, 10t - 17s, t, s) \text{ với } t, s \in \mathbb{R}$$

Do đó

$$\begin{aligned} W &= \{\, (-17t + 29s, 10t - 17s, t, s) \,|\, t, s \in \mathbb{R}\} \\ &= \{\, (-17t, 10t, t, 0) + (29s, -17s, 0, s) \,|\, t, s \in \mathbb{R}\} \\ &= \{\, t(-17, 10, 1, 0) + s(29, -17, 0, 1) \,|\, t, s \in \mathbb{R}\} \end{aligned}$$

Đặt $u_1 = (-17, 10, 1, 0), u_2 = (29, -17, 0, 1)$. Theo biểu thức trên, với $u \in W$ thì u là tổ hợp tuyến tính của u_1, u_2. Suy ra

$$W = \langle u_1, u_2 \rangle.$$

Hơn nữa $\{u_1, u_2\}$ độc lập tuyến tính, nên $\{u_1, u_2\}$ là cơ sở của W. Suy ra $\dim W = 2$.

Nhận xét. Vectơ u_1 và u_2 có được bằng cách cho lần lượt $t = 1, s = 0$ và $t = 0, s = 1$. Ta gọi nghiệm u_1, u_2 được gọi là ***nghiệm cơ bản*** của hệ.

Định lý. *Gọi W là tập hợp nghiệm $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ của hệ phương trình tuyến tính thuần nhất*

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = 0; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = 0. \end{cases}$$

Khi đó, W là không gian con của $\mathbb{R}^n$ và số chiều của W bằng số ẩn tự do của hệ.

Như vậy $W = \{u \in R^n \mid Au^\top = 0\}$ với A là ma trận cho trước và $u = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$

5.2 Tìm cơ sở của không gian nghiệm

Thuật toán

Bước 1. Giải hệ phương trình, tìm nghiệm tổng quát.

Bước 2. Lần lượt cho bộ ẩn tự do các giá trị $(1, 0, \ldots, 0), \ldots, (0, 0, \ldots, 1)$ ta được các nghiệm cơ bản $u_1, u_2, \ldots, u_m$.

Bước 3. Khi đó không gian nghiệm có cơ sở là $\{u_1, u_2, \ldots, u_m\}$.

Ví dụ. Tìm cơ sở và số chiều của không gian nghiệm sau

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcl} x_1 & + & 2x_2 & - & 3x_3 & + & 5x_4 & = & 0; \\ x_1 & + & 3x_2 & - & 13x_3 & + & 22x_4 & = & 0; \\ 3x_1 & + & 5x_2 & + & x_3 & - & 2x_4 & = & 0; \\ 2x_1 & + & 3x_2 & + & 4x_3 & - & 7x_4 & = & 0, \end{array}\right.$$

Giải. Ma trận hóa hệ phương trình, ta có

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 5 \\ 1 & 3 & -13 & 22 \\ 3 & 5 & 1 & -2 \\ 2 & 3 & 4 & -7 \end{pmatrix} \xrightarrow[d_4:=d_4-2d_1]{\substack{d_2:=d_2-d_1 \\ d_3:=d_3-3d_1}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 5 \\ 0 & 1 & -10 & 17 \\ 0 & -1 & 10 & -17 \\ 0 & -1 & 10 & -17 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[d_4:=d_4+d_2]{\substack{d_1:=d_1-2d_2 \\ d_3:=d_3+d_2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 17 & -29 \\ 0 & 1 & -10 & 17 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Suy ra nghiệm của hệ là

$$u = (x_1, x_2, x_3, x_4) = (-17t + 29s, 10t - 17s, t, s) \text{ với } t, s \in \mathbb{R}.$$

Các nghiệm cơ bản của hệ là

$$u_1 = (-17, 10, 1, 0), u_2 = (29, -17, 0, 1).$$

Do đó, nếu W là không gian nghiệm thì $\mathcal{B} = \{u_1, u_2\}$ cơ sở của W và $\dim W = 2$.

5.3 Không gian giao

Cho V là không gian vectơ và W_1, W_2 là không gian con của V. Khi đó $W_1 \cap W_2$ là không gian con của V. Hơn nữa nếu $W_1 = \langle S_1 \rangle, W_2 = \langle S_2 \rangle$ thì $u \in W_1 \cap W_2$ khi và chỉ khi u là tổ hợp tuyến tính của S_1 và u là tổ hợp tuyến tính của S_2.

Ví dụ. Trong không gian $\mathbb{R}^4$ cho các vectơ $u_1 = (1, 2, 1, 1)$, $u_2 = (1, 2, 2, 3)$, $u_3 = (2, 4, 3, 4)$, $u_4 = (1, 3, 3, 3)$, $u_5 = (0, 1, 1, 0)$. Đặt $W_1 = \langle u_1, u_2, u_3 \rangle$, $W_2 = \langle u_4, u_5 \rangle$. Tìm cơ sở của không gian $W_1 \cap W_2$.

Giải. Gọi $u = (x, y, z, t) \in W_1 \cap W_2$

• Vì $u \in W_1$ nên u là tổ hợp tuyến tính của u_1, u_2, u_3.

$$\left(u_1^\top \ \ u_2^\top \ \ u_3^\top \,|\, u^\top \right) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & x \\ 2 & 2 & 4 & y \\ 1 & 2 & 3 & z \\ 1 & 3 & 4 & t \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|l} 1 & 1 & 2 & x \\ 0 & 1 & 1 & x - z \\ 0 & 0 & 0 & -2x + y \\ 0 & 0 & 0 & x - 2z + t \end{array}\right)$$

Suy ra để $u \in W_1$ thì $-2x + y = 0$ và $x - 2z + t = 0$ (1)

- Vì $u \in W_2$ nên u là tổ hợp tuyến tính của u_4, u_5.

$$\left(\begin{array}{cc|c} u_4^\top & u_5^\top & u^\top \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & x \\ 3 & 1 & y \\ 3 & 1 & z \\ 3 & 0 & t \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|l} 1 & 0 & x \\ 0 & 1 & -3x+y \\ 0 & 0 & -y+z \\ 0 & 0 & -3x+t \end{array}\right)$$

Suy ra để $u \in W_2$ thì $-y+z=0$ và $-3x+t=0 \qquad (2)$

Từ (1) và (2) ta có

$$\begin{cases} -2x + y = 0 \\ x - 2z + t = 0 \\ -y + z = 0 \\ -3x + t = 0 \end{cases}$$

Ma trận hóa $\tilde{A} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{d_2:=d_2-d_1 \\ d_4:=d_4-3d_1}]{d_1:=d_1-d_4} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -2 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\substack{d_3:=d_3-d_2 \\ d_4:=d_4-3d_2}]{\substack{d_2:=-d_2 \\ d_1:=d_1-d_2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & -6 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{d_2:=d_2-2d_3 \\ d_4:=d_4+6d_3}]{\substack{d_3:=\frac{1}{3}d_3 \\ d_1:=d_1+2d_3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1/3 \\ 0 & 1 & 0 & -2/3 \\ 0 & 0 & 1 & -2/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Suy ra nghiệm của hệ là

$$u = (x, y, z, t) = (\frac{1}{3}a, \frac{2}{3}a, \frac{2}{3}a, a) \text{ với } a \in \mathbb{R}.$$

Nghiệm cơ bản của hệ là $u_1 = (\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}, 1)$.

Suy ra $W_1 \cap W_2$ có cơ sở là $\{u_1 = (\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}, 1)\}$.

Định lý. *Cho W_1, W_2 là hai không gian con hữu hạn chiều của V. Khi đó*

$$\dim(W_1 + W_2) = \dim W_1 + \dim W_2 - \dim(W_1 \cap W_2).$$

6. Tọa độ và ma trận chuyển cơ sở

6.1 Tọa độ

Định nghĩa. Cho V là không gian vectơ và $\mathcal{B} = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ là một cơ sở của V. Khi đó $\mathcal{B}$ được gọi là ***cơ sở được sắp*** của V nếu thứ tự các vectơ trong $\mathcal{B}$ được cố định. Ta thường dùng ký hiệu

$$(\mathrm{u}_1, \mathrm{u}_2, \ldots, \mathrm{u}_\mathrm{n})$$

để chỉ cơ sở được sắp theo thứ tự $u_1, u_2, \ldots, u_n$.

Định lý. *Cho $\mathcal{B} = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ là cơ sở của V. Khi đó mọi vectơ $u \in V$ đều được biểu diễn một cách duy nhất dưới dạng*

$$u = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \cdots + \alpha_n u_n.$$

Chứng minh.

• **Sự tồn tại.** Vì $\mathcal{B}$ là cơ sở của V nên $\mathcal{B}$ là tập sinh. Với $u \in V$ thì u là tổ hợp tuyến tính của $\mathcal{B}$. Suy ra, tồn tại $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n \in \mathbb{R}$ để

$$u = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \cdots + \alpha_n u_n.$$

• Sự duy nhất.

Giả sử u có một dạng biểu diễn khác

$$u = \beta_1 u_1 + \beta_2 u_2 + \cdots + \beta_n u_n.$$

Nghĩa là:

$$u = \alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_n u_n = \beta_1 u_1 + \beta_2 u_2 + \cdots + \beta_n u_n.$$

Khi đó

$$(\alpha_1 - \beta_1)u_1 + (\alpha_2 - \beta_2)u_2 + \cdots + (\alpha_n - \beta_n)u_n = 0.$$

Do $\mathcal{B}$ là cơ sở nên $\mathcal{B}$ độc lập tuyến tính, ta có

$$\alpha_1 - \beta_1 = \alpha_2 - \beta_2 = \cdots = \alpha_n - \beta_n = 0$$

hay

$$\alpha_1 = \beta_1, \alpha_2 = \beta_2, \ldots, \alpha_n = \beta_n.$$

Điều này chứng tỏ u có một dạng biểu diễn duy nhất.

Tọa độ

Như vậy, nếu $\mathcal{B} = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ là cơ sở của V và $u \in V$ thì u sẽ có dạng biểu diễn duy nhất là:

$$u = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \cdots + \alpha_n u_n.$$

Ta đặt

$$[u]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}.$$

Khi đó $[\mathrm{u}]_{\mathcal{B}}$ được gọi là ***tọa độ*** của u theo cơ sở $\mathcal{B}$.

Ví dụ. Trong không gian $\mathbb{R}^3$, ta có cơ sở chính tắc

$$\mathcal{B}_0 = \{e_1 = (1,0,0), e_2 = (0,1,0), e_3 = (0,0,1)\}.$$

Với $u = (x_1, x_2, x_3)$ ta có: $u = x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3$.

Suy ra $[u]_{\mathcal{B}_0} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = u^\top.$

Nhận xét. *Đối với cơ sở chính tắc* $\mathcal{B}_0 = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ *của không gian* $\mathbb{R}^n$ *và* $u = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ *ta có*

$$[u]_{\mathcal{B}_0} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = u^\top.$$

Ví dụ. Không gian $R_2[x]$ có cơ sở chính tắc là

$$\mathcal{B}_0 = \{x^2, x, 1\}.$$

Với $f = ax^2 + bx + c$, ta có $[f]_{\mathcal{B}_0} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}.$

Phương pháp tìm $[u]_B$

Cho V là không gian vectơ có cơ sở là $\mathcal{B} = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ và $u \in V$. Để tìm $[u]_B$ ta đi giải phương trình

$$u = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \cdots + \alpha_n u_n \quad (*)$$

với ẩn $\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_n \in \mathbb{R}$. Do $\mathcal{B}$ là cơ sở nên phương trình $(*)$ có nghiệm duy nhất

$$(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = (c_1, c_2, \dots, c_n).$$

Khi đó $[u]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}.$

Lưu ý. Khi $V = \mathbb{R}^n$, để giải phương trình $(*)$ ta lập hệ

$$(u_1^\top \ u_2^\top \ \dots \ u_n^\top \mid u^\top)$$

Ví dụ. Trong không gian $\mathbb{R}^3$, cho các vectơ

$$u_1 = (1,2,1), u_2 = (1,3,1), u_3 = (2,5,3).$$

a) Chứng minh $\mathcal{B} = (u_1, u_2, u_3)$ là một cơ sở của $\mathbb{R}^3$.

b) Tìm tọa độ của vectơ $u = (a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ theo cơ sở $\mathcal{B}$.

Giải.

a) Lập $A = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & 3 \end{pmatrix}$. Ta có |A|=1, suy ra u_1, u_2, u_3 độc lập tuyến tính. Vậy $\mathcal{B}$ là cơ sở của $\mathbb{R}^3$.

b) Với $u = (a,b,c)$, để tìm $[u]_{\mathcal{B}}$ ta lập hệ phương trình

$$(u_1^\top \; u_2^\top \; u_3^\top \mid u^\top) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & a \\ 2 & 3 & 5 & b \\ 1 & 1 & 3 & c \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 4a-b-c \\ 0 & 1 & 0 & -a+b-c \\ 0 & 0 & 1 & -a+c \end{array}\right)$$

Vậy $[u]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 4a-b-c \\ -a+b-c \\ -a+c \end{pmatrix}$.

Ví dụ. Trong không gian $R_2[x]$ cho

$$f_1 = x^2 + x + 1, f_2 = 2x^2 + 3x + 1, f_3 = x^2 + 2x + 1.$$

a) Chứng minh $\mathcal{B} = (f_1, f_2, f_3)$ là một cơ sở của $\mathbb{R}_2[x]$.

b) Tìm tọa độ của vectơ $f = x^2 + 3x + 3$ theo cơ sở $\mathcal{B}$.

c) Cho $[g]_B = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}$, tìm g?

Giải.

a) Kiểm tra $\mathcal{B}$ là cơ sở (tự làm)

b) Với $f = x^2 + 3x + 3$, để tìm $[f]_B$ ta đi giải phương trình

$$f = \alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2 + \alpha_3 f_3$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3 = 1; \\ \alpha_1 + 3\alpha_2 + 2\alpha_3 = 3; \\ \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 3. \end{cases}$$

Ma trận hóa, $\tilde{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right)$

Vậy $[f]_B = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$.

c) Ta có $[g]_B = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}$, suy ra $g = 2f_1 + 3f_2 - 4f_3$

$$\begin{aligned} g &= 2(x^2 + x + 1) + 3(2x^2 + 3x + 1) - 4(x^2 + 2x + 1) \\ &= 4x^2 + 3x + 1. \end{aligned}$$

Mệnh đề. *Cho $\mathcal{B}$ là cơ sở của V. Khi đó, với mọi $u, v \in V, \alpha \in \mathbb{R}$ ta có:*

- $[u + v]_{\mathcal{B}} = [u]_{\mathcal{B}} + [v]_{\mathcal{B}}$.
- $[\alpha u]_{\mathcal{B}} = \alpha [u]_{\mathcal{B}}$.

6.2 Ma trận chuyển cơ sở

Định nghĩa. Cho V là một không gian vectơ và

$$\mathcal{B}_1 = (u_1, u_2, \ldots, u_n), \mathcal{B}_2 = (v_1, v_2, \ldots, v_n).$$

là hai cơ sở của V. Đặt

$$P = ([v_1]_{B_1}\ [v_2]_{B_1} \ldots [v_n]_{B_1}).$$

Khi đó P được gọi là ***ma trận chuyển cơ sở*** từ cơ sở $\mathcal{B}_1$ sang cơ sở $\mathcal{B}_2$ và được ký hiệu $(\mathcal{B}_1 \to \mathcal{B}_2)$.

Ví dụ. Trong không gian $\mathbb{R}^3$, cho

$$\mathcal{B} = (u_1 = (1, -2, 3), u_2 = (2, 3, -1), u_3 = (3, 1, 3))$$

là cơ sở của $\mathbb{R}^3$. Gọi $\mathcal{B}_0$ là cở sở chính tắc của $\mathbb{R}^3$. Khi đó

$$(\mathcal{B}_0 \to B) = ([u_1]_{\mathcal{B}_0}\ [u_2]_{\mathcal{B}_0}\ [u_3]_{\mathcal{B}_0}) = (u_1^\top\ u_2^\top\ u_3^\top) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

Nhận xét. *Nếu $\mathcal{B} = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ là một cơ sở của $\mathbb{R}^n$ và $\mathcal{B}_0$ là cơ sở chính tắc của $\mathbb{R}^n$ thì*

$$(\mathcal{B}_0 \to B) = (u_1^\top \ u_2^\top \ldots \ u_n^\top)$$

Phương pháp tìm $(\mathcal{B}_1 \to \mathcal{B}_2)$

Giả sử $\mathcal{B}_1 = (u_1, u_2, \ldots u_n)$ và $\mathcal{B}_2 = (v_1, v_2, \ldots v_n)$ là hai cơ sở của V. Ta thực hiện như sau:

- Cho u là vectơ bất kỳ của V, xác định $[u]_{\mathcal{B}_1}$.
- Lần lượt thay thế u bằng $v_1, v_2, \ldots v_n$ ta xác định được

  $$[v_1]_{\mathcal{B}_1}, [v_2]_{\mathcal{B}_1}, \ldots, [v_n]_{\mathcal{B}_1}.$$

  Khi đó

  $$(\mathcal{B}_1 \to \mathcal{B}_2) = ([v_1]_{\mathcal{B}_1} \ [v_2]_{\mathcal{B}_1} \ldots [v_n]_{\mathcal{B}_1})$$

Đặc biệt, khi $V = \mathbb{R}^n$, để xác định $(\mathcal{B}_1 \to \mathcal{B}_2)$ ta có thể làm như sau:

- Thành lập ma trận mở rộng $(u_1^\top \ u_2^\top \ \ldots \ u_n^\top \mid v_1^\top \ v_2^\top \ \ldots \ v_n^\top)$
- Dùng các phép biến đổi sơ cấp trên dòng đưa ma trận trên về dạng $(I_n|P)$.
- Khi đó $(\mathcal{B}_1 \to \mathcal{B}_2) = P$.

Ví dụ. Trong không gian $\mathbb{R}^3$, cho hai cơ sở

$$\mathcal{B}_1 = (u_1 = (1,1,1), u_2 = (1,2,1), u_3 = (2,3,1))$$

và

$$\mathcal{B}_2 = (v_1 = (1,-3,2), v_2 = (-1,-2,4), v_3 = (3,3,-2)).$$

Tìm ma trận chuyển cơ sở từ $\mathcal{B}_1$ sang $\mathcal{B}_2$.

Giải. Cho $u = (a,b,c) \in \mathbb{R}^3$, xác định $[u]_{\mathcal{B}_1}$. Ta lập

$$(u_1^\top \ u_2^\top \ u_3^\top | u^\top) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & a \\ 1 & 2 & 3 & b \\ 1 & 1 & 1 & c \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & a-b+c \\ 0 & 1 & 0 & -2a+b+c \\ 0 & 0 & 1 & a-c \end{array}\right)$$

Như vậy $[u]_{\mathcal{B}_1} = \begin{pmatrix} a-b+c \\ -2a+b+c \\ a-c \end{pmatrix}$.

Thay lần lượt u bởi v_1, v_2, v_3 ta được

$$[v_1]_{\mathcal{B}_1} = \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix}, [v_2]_{\mathcal{B}_1} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ -5 \end{pmatrix}, [v_3]_{\mathcal{B}_1} = \begin{pmatrix} -2 \\ -5 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Vậy $(\mathcal{B}_1 \to \mathcal{B}_2) = \begin{pmatrix} 6 & 5 & -2 \\ -3 & 4 & -5 \\ -1 & -5 & 5 \end{pmatrix}$.

Cách khác

Lập ma trận mở rộng

$$(u_1^\top\ u_2^\top\ u_3^\top \mid v_1^\top\ v_2^\top\ v_3^\top) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & -3 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 4 & -2 \end{array}\right) \to$$

$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 6 & 5 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 4 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -5 & 5 \end{array}\right)$. Suy ra $(\mathcal{B}_1 \to \mathcal{B}_2) = \begin{pmatrix} 6 & 5 & -2 \\ -3 & 4 & -5 \\ -1 & -5 & 5 \end{pmatrix}$.

Định lý. *Cho V là một không gian vectơ hữu hạn chiều và $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2, \mathcal{B}_3$ là ba cơ sở của V. Khi đó*

i) $(\mathcal{B}_1 \to \mathcal{B}_1) = I_n$.

ii) $\forall u \in V, [u]_{\mathcal{B}_1} = (\mathcal{B}_1 \to \mathcal{B}_2)[u]_{\mathcal{B}_2}$.

iii) $(\mathcal{B}_2 \to \mathcal{B}_1) = (\mathcal{B}_1 \to \mathcal{B}_2)^{-1}$.

iv) $(\mathcal{B}_1 \to \mathcal{B}_3) = (\mathcal{B}_1 \to \mathcal{B}_2)(\mathcal{B}_2 \to \mathcal{B}_3)$.

Hệ quả. *Cho $\mathcal{B}_1 = (u_1, u_2, \ldots, u_n); \mathcal{B}_2 = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ là hai cơ sở của không gian $\mathbb{R}^n$. Gọi $\mathcal{B}_0$ là cơ sở chính tắc của $\mathbb{R}^n$. Ta có*

i) $(\mathcal{B}_0 \to \mathcal{B}_1) = (u_1^\top \; u_2^\top \ldots u_n^\top)$.

ii) $(\mathcal{B}_1 \to \mathcal{B}_0) = (\mathcal{B}_0 \to \mathcal{B}_1)^{-1}$.

iii) $\forall u \in V, [u]_{\mathcal{B}_1} = (\mathcal{B}_0 \to \mathcal{B}_1)^{-1}[u]_{\mathcal{B}_0}$.

iv) $(\mathcal{B}_1 \to \mathcal{B}_2) = (\mathcal{B}_0 \to \mathcal{B}_1)^{-1}(\mathcal{B}_0 \to \mathcal{B}_2)$.

Ví dụ. Cho W là không gian con của $\mathbb{R}^4$ sinh bởi các vectơ:

$$u_1 = (1, 2, 2, 1), u_2 = (0, 2, 0, 1), u_3 = (-2, 3, -4, 1).$$

a) Chứng minh $\mathcal{B} = (u_1, u_2, u_3)$ là một cơ sở của W.

b) Cho $u = (a, b, c, d)$, tìm điều kiện để $u \in W$. Khi đó tìm $[u]_{\mathcal{B}}$.

c) Cho $v_1 = (1, 0, 2, 0); v_2 = (0, 2, 0, 1); v_3 = (0, 0, 0, 1)$. Chứng minh $\mathcal{B}' = (v_1, v_2, v_3)$ cũng là một cơ sở của W. Tìm ma trận chuyển cơ sở từ $\mathcal{B}$ sang $\mathcal{B}'$.

Giải.

a) Chứng minh $\mathcal{B} = (u_1, u_2, u_3)$ là một cơ sở của W.

Lập $A = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ -2 & 3 & -4 & 1 \end{pmatrix}$. Ta có $r(A) = 3$, suy ra $\mathcal{B}$ độc lập tuyến tính. Vì $W = \langle \mathcal{B} \rangle$ nên $\mathcal{B}$ là cơ sở của W.

$b)$ Cho $u = (a, b, c, d)$, tìm điều kiện để $u \in W$. Khi đó tìm $[u]_{\mathcal{B}}$.

Ta có $u \in W$ khi u là tổ hợp tuyến tính của $\mathcal{B}$.

Lập hệ phương trình

$$u_1^\top \; u_2^\top \; u_3^\top | u^\top) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & a \\ 2 & 2 & 3 & b \\ 2 & 0 & -4 & c \\ 1 & 1 & 1 & d \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|l} 1 & 0 & 0 & a+2b-4d \\ 0 & 1 & 0 & -a-3b+7d \\ 0 & 0 & 1 & b-2d \\ 0 & 0 & 0 & -2a+c \end{array}\right)$$

Dựa vào hệ phương trình, để $u \in W$ thì $-2a + c = 0$. Suy ra

$$[u]_B = \begin{pmatrix} a+2b-4d \\ -a-3b+7d \\ b-2d \end{pmatrix}$$

$c)$ Cho $v_1 = (1,0,2,0); v_2 = (0,2,0,1); v_3 = (0,0,0,1)$. Chứng minh $\mathcal{B}' = (v_1, v_2, v_3)$ cũng là một cơ sở của W. Tìm ma trận chuyển cơ sở từ $\mathcal{B}$ sang $\mathcal{B}'$.

Ta thấy các vectơ v_1, v_2, v_3 đều thỏa điều kiện $-2a + c = 0$ nên theo câu a), các vectơ này thuộc W.

Mặt khác, dễ thấy rằng $\mathcal{B}' = (v_1, v_2, v_3)$ độc lập tuyến tính nên $\mathcal{B}'$ cũng là cơ sở của W (do $\dim W = |\mathcal{B}| = 3 = |\mathcal{B}'|$). Dùng kết quả ở câu b) ta có

$$[v_1]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, [v_2]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, [v_2]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} -4 \\ 7 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Suy ra $(\mathcal{B} \to \mathcal{B}') = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 \\ -1 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$.

Ví dụ. Trong không gian $\mathbb{R}^3$, cho

$$S = (u_1 = (1, 1, 3), u_2 = (1, -2, 1), u_3 = (1, -1, 2))$$
$$T = (v_1 = (1, -2, 2), v_2 = (1, -2, 1), v_3 = (1, -1, 2))$$

a) Chứng tỏ S và T là cơ sở của $\mathbb{R}^3$.

b) Tìm ma trận chuyển cơ sở từ S sang T (kí hiệu $(S \to T)$).

c) Cho $u \in \mathbb{R}^3$ thỏa $[u]_T = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix}$. Tính $[u]_S$.

Chứng tỏ S và T là cơ sở của $\mathbb{R}^3$

Ta có $\dim\mathbb{R}^3 = 3 =$ số vec tơ của S. Do đó, S là cơ sở của $\mathbb{R}^3$ khi S độc lập tuyến tính. Lập $A = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$. Ta có $r(A) = 3$, suy ra S độc lập tuyến tính. Vậy S là cơ sở của $\mathbb{R}^3$.

b) Tìm ma trận chuyển cơ sở từ S sang T (kí hiệu $(S \to T)$)

Lập ma trận mở rộng

$$(u_1^\top\ u_2^\top\ u_3^\top \mid v_1^\top\ v_2^\top\ v_3^\top) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -1 & -2 & -2 & -1 \\ 3 & 1 & 2 & 2 & 1 & 2 \end{array}\right) \to$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right).\text{ Suy ra } (S \to T) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

c) Cho $u \in \mathbb{R}^3$ thỏa $[u]_T = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix}$. Tính $[u]_S$.

Ta có $[u]_S = (S \to T)[u]_T = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -5 \\ -4 \end{pmatrix}$.

Bài giảng môn học Đại số A_1

Chương 4:

ÁNH XẠ TUYẾN TÍNH

Lê Văn Luyện

lvluyen@yahoo.com

http://www.math.hcmus.edu.vn/∼lvluyen/09tt

Đại học Khoa Học Tự Nhiên Tp. Hồ Chí Minh

Nội dung

Chương 4. ÁNH XẠ TUYẾN TÍNH

1. **Định nghĩa**
2. **Nhân và ảnh của ánh xạ tuyến tính**
3. **Ma trận biểu diễn ánh xạ tuyến tính**

1. Định nghĩa

1.1 Ánh xạ

Định nghĩa. Cho X và Y là hai tập hợp khác rỗng. ***Ánh xạ*** giữa hai tập X và Y là một qui tắc sao cho mỗi x thuộc X tồn tại duy nhất một y thuộc Y để $y = f(x)$.
Ta viết

$$\begin{aligned} f:\ X &\longrightarrow Y \\ x &\longmapsto y = f(x) \end{aligned}$$

Nghĩa là $\forall x \in X, \exists! y \in Y, y = f(x)$.

Ví dụ.

- $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ xác định bởi $f(x) = x^2 + 2x - 1$ là ánh xạ.
- $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ xác định bởi $g(x, y, z) = (2x + y, x - 3y + z)$ là ánh xạ.
- $h : \mathbb{Q} \to \mathbb{Z}$ xác định bởi $h(\frac{m}{n}) = m$ không là ánh xạ.

Định nghĩa. Hai ánh xạ f và g từ X vào Y được gọi là ***bằng nhau*** nếu $\forall x \in X, f(x) = g(x)$.

Ví dụ. Xét ánh xạ $f(x) = (x-1)(x+1)$ và $g(x) = x^2 - 1$ từ $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Ta có $f = g$.

Định nghĩa. Cho hai ánh xạ $f : X \to Y$ và $g : Y' \to Z$ trong đó $Y \subset Y'$. ***Ánh xạ tích*** h của f và g là ánh xạ từ X vào Z xác định bởi:

$$\begin{aligned} h :\ X &\longrightarrow Z \\ x &\longmapsto h(x) = g(f(x)) \end{aligned}$$

Ta viết: $h = g_o f$.

Ví dụ. Cho $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ xác định bởi $f(x) = 2x + 1$ và $g(x) = x^2 + 2$. Khi đó

$$f_o g(x) = f(g(x)) = f(x^2 + 2) = 2(x^2 + 2) + 1 = 2x^2 + 5.$$

$$g_o f(x) = g(f(x) = g(2x + 1) = (2x + 1)^2 + 2 = 4x^2 + 4x + 3.$$

Ảnh và ảnh ngược của ánh xạ

Định nghĩa. Cho $f : X \to Y$ là ánh xạ, $A \subset X, B \subset Y$. Khi đó:

- $\mathrm{f(A)} = \{f(x) | x \in A\} = \{y \in Y \mid \exists x \in A, y = f(x)\}$ được gọi là ***ảnh*** của A.
- $\mathrm{f}^{-1}\mathrm{(B)} = \{x \in X \mid f(x) \in B\}$ được gọi là ***ảnh ngược*** của B.
- $f(X)$ được gọi là ***ảnh của ánh xạ*** f, ký hiệu Imf.

Ví dụ. Cho $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ được xác định $f(x) = x^2 + 1$. Khi đó:

$$f([1,3]) = [2,10] \qquad f([-2,-1]) = [2,5]$$
$$f([-1,3]) = [1,10] \qquad f((1,5)) = (2,26)$$
$$f^{-1}(1) = \{0\} \qquad f^{-1}(2) = \{-1,1\}$$
$$f^{-1}(-5) = \emptyset \qquad f^{-1}([2,5]) = [-2,-1] \cup [1,2]$$

Phân loại ánh xạ

a) **Đơn ánh.** Ta nói $f : X \to Y$ là một ***đơn ánh*** nếu hai phần tử khác nhau bất kỳ của X đều có ảnh khác nhau.

Nghĩa là: $\forall x_1, x_2 \in X, x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2).$

Ví dụ.

- $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ được xác định $f(x) = x^2 + 1$ (là đơn ánh)
- $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ được xác định $g(x) = x^2 + 1$ (không đơn ánh)

b) **Toàn ánh.** Ta nói $f : X \to Y$ là một ***toàn ánh*** nếu $f(X) = Y$.

Nghĩa là: $\forall y \in Y, \exists x \in X, f(x) = y.$

Ví dụ.

- $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ được xác định $f(x) = x^3 + 1$ (là toàn ánh)
- $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ được xác định $g(x) = x^2 + 1$ (không toàn ánh)

c) **Song ánh.** Ta nói $f : X \to Y$ là một ***song ánh*** nếu f là đơn ánh và toàn ánh.

Ví dụ.

- $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ được xác định $f(x) = 2x + 1$ (là song ánh)
- $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ được xác định $g(x) = x^2 + 1$ (không song ánh)

Ánh xạ ngược

Xét $f : X \to Y$ là một song ánh. Khi đó, với mọi $y \in Y$, tồn tại duy nhất một phần tử $x \in X$ thỏa $f(x) = y$. Do đó tương ứng $y \longmapsto x$ là một ánh xạ từ Y vào X. Ta gọi đây là ánh xạ ngược của f và ký hiệu $f^{\breve{}1}$. Như vậy:

$$\begin{aligned} f^{-1} : Y &\longrightarrow X \\ y &\longmapsto f^{-1}(y) = x \text{ sao cho } f(x) = y \end{aligned}$$

Ví dụ. Cho $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ với $f(x) = 2x + 1$. Khi đó $f^{-1}(y) = \dfrac{y-1}{2}$.

1. 2. Ánh xạ tuyến tính

Định nghĩa. Cho V và W là hai không gian vectơ trên trường $\mathbb{R}$. Ta nói $f : V \longrightarrow W$ là một ***ánh xạ tuyến tính*** nếu nó thỏa hai điều kiện dưới đây:

i) $f(u+v) = f(u) + f(v), \forall u, v \in V$,

ii) $f(\alpha u) = \alpha f(u), \forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall u \in V$.

Nhận xét. *Điều kiện i) và ii) trong định nghĩa có thể được thay thế bằng một điều kiện :*

$$f(\alpha u + v) = \alpha f(u) + f(v), \forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall u, v \in V.$$

Ký hiệu.

- $\mathrm{L(V, W)}$ là tập hợp các ánh xạ tuyến tính từ $V \to W$.

- Nếu $f \in L(V, V)$ thì f được gọi là một ***toán tử tuyến tính*** trên V. Viết tắt $f \in L(V)$.

Nhận xét. *Nếu* $f \in L(V, W)$ *thì*

- $f(0) = 0$;
- $f(-u) = -f(u), \forall u \in V$.

Ví dụ. Cho ánh xạ $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ xác định bởi

$$f(x, y, z) = (x + 2y - 3z, 2x + z).$$

Chứng tỏ f là ánh xạ tuyến tính.

Giải. $\forall u = (x_1, y_1, z_1), v = (x_2, y_2, z_2) \in \mathbb{R}^3$. Ta có

$$\begin{aligned} f(u+v) &= f(x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2) \\ &= (x_1 + x_2 + 2y_1 + 2y_2 - 3z_1 - 3z_2, 2x_1 + 2x_2 + z_1 + z_2) \\ &= (x_1 + 2y_1 - 3z_1, 2x_1 + z_1) + (x_2 + 2y_2 - 3z_2, 2x_2 + z_2) \\ &= f(u) + f(v). \end{aligned}$$

Tính chất $\forall \alpha \in \mathbb{R}, f(\alpha u) = \alpha f(u)$ kiểm tra tương tự.

Định lý. *Cho V và W là hai không gian vectơ, $\mathcal{B} = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ là cơ sở của V. Khi đó, nếu $S = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ là một tập hợp của W thì tồn tại duy nhất một $f \in L(V, W)$ sao cho*

$$f(u_1) = v_1, f(u_2) = v_2, \ldots, f(u_n) = v_n.$$

Hơn nữa, nếu $[u]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$ *thì*

$$f(u) = \alpha_1 f(u_1) + \alpha_2 f(u_2) + \ldots + \alpha_n f(u_n)$$

Ví dụ. Trong không gian $\mathbb{R}^3$ cho các vectơ:

$$u_1 = (1, -1, 1); u_2 = (1, 0, 1); u_3 = (2, -1, 3).$$

i) Chứng tỏ $\mathcal{B} = (u_1, u_2, u_3)$ là một cơ sở của $\mathbb{R}^3$.

ii) Tìm ánh xạ tuyến tính $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ thỏa:
$$f(u_1) = (2, 1, -2); f(u_2) = (1, 2, -2); f(u_3) = (3, 5, -7).$$

Giải.

$a)$ Chứng tỏ $\mathcal{B} = (u_1, u_2, u_3)$ là một cơ sở của $\mathbb{R}^3$.

Lập $A = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$. Ta có $|A| = 1$. Suy ra $\mathcal{B}$ độc lập tuyến tính. Vì $\dim\mathbb{R}^3 = 3$ bằng số vectơ của $\mathcal{B}$ nên $\mathcal{B}$ là một cơ sở của $\mathbb{R}^3$.

$b)$ Tìm ánh xạ tuyến tính $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ thỏa:

$$f(u_1) = (2, 1, -2); f(u_2) = (1, 2, -2); f(u_3) = (3, 5, -7).$$

Cho $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Tìm $[u]_{\mathcal{B}}$.
Lập

$$(u_1^\top\ u_2^\top\ u_3^\top\ |u^\top) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & x \\ -1 & 0 & -1 & y \\ 1 & 1 & 3 & z \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & x - y - z \\ 0 & 1 & 0 & 2x + y - z \\ 0 & 0 & 1 & -x + z \end{array}\right).$$

Vậy $[u]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} x-y-z \\ 2x+y-z \\ -x+z \end{pmatrix}$.

Suy ra $u = (x-y-z)u_1 + (2x+y-z)u_2 + (-x+z)u_3$.

Vậy, ta có

$$\begin{aligned} f(u) &= (x-y-z)f(u_1) + (2x+y-z)f(u_2) + (-x+z)f(u_3) \\ &= (x-y-z)(2,1,-2) + (2x+y-z)(1,2,-2) \\ &\qquad + (-x+z)(3,5,-7) \\ &= (x-y, y+2z, x-3z). \end{aligned}$$

2. Nhân và ảnh của ánh xạ tuyến tính

2.1 Không gian nhân

Định nghĩa. Cho $f : V \to W$ là một ánh xạ tuyến tính. Ta đặt

$$\operatorname{Ker} f = \{u \in V \mid f(u) = 0\}$$

Khi đó $\operatorname{Ker} f$ là không gian con của V, ta gọi $\operatorname{Ker} f$ là ***không gian nhân*** của f.

Nhận xét. *Dựa vào Định nghĩa, ta được*

$$u \in \operatorname{Ker} f \Leftrightarrow f(u) = 0.$$

Ví dụ. Cho $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ được xác định bởi:

$$f(x, y, z) = (x + y - z, 2x + 3y - z, 3x + 5y - z)$$

Tìm một cơ sở của Ker$f$.

Giải. Gọi $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

$$\begin{aligned} u \in \mathrm{Ker} f &\Leftrightarrow f(u) = 0 \\ &\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & - & z & = & 0 \\ 2x & + & 3y & - & z & = & 0 \\ 3x & + & 5y & - & z & = & 0 \end{array} \right. \end{aligned}$$

Ma trận hóa, $\tilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & -1 \\ 3 & 5 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$

Hệ phương trình có nghiệm $(x, y, z) = (2t, -t, t)$ với $t \in \mathbb{R}$.

Nghiệm cơ bản của hệ là $u_1 = (2, -1, 1)$.

Vậy, Ker$f$ có cơ sở là $\{u_1 = (2, -1, 1)\}$.

2.1 Không gian ảnh

Định nghĩa. Cho $f : V \to W$ là một ánh xạ tuyến tính. Ta đặt

$$\mathrm{Im} f = \{f(u) \,|\, u \in V\}$$

Khi đó $\mathrm{Im} f$ là không gian con của W, ta gọi $\mathrm{Im} f$ là ***không gian ảnh*** của f.

Định lý. *Cho $f : V \to W$ là một ánh xạ tuyến tính. Khi đó, nếu*

$$S = \{u_1, u_2, \ldots, u_m\}$$

là tập sinh của V thì

$$f(S) = \{f(u_1), f(u_2), \ldots, f(u_m)\}$$

là tập sinh của $\mathrm{Im} f$.

Nhận xét. *Dựa vào định lý trên, để tìm cơ sở* $\mathrm{Im}f$, *ta chọn một tập sinh* S *của* V *(để đơn giản ta có thể chọn cơ sở chính tắc). Khi đó* $\mathrm{Im}f$ *sinh bởi tập ảnh của* S.

Ví dụ. Cho $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ được xác định bởi:

$$f(x, y, z) = (x + y - z, 2x + 3y - z, 3x + 5y - z)$$

Tìm một cơ sở của $\mathrm{Im}f$.

Giải. Gọi $\mathcal{B}_0 = \{e_1, e_2, e_3\}$ là cơ sở chính tắc của $\mathbb{R}^3$. Ta có

$$\begin{array}{rcl} f(e_1) = f(1,0,0) & = & (1,2,3) \\ f(e_2) = f(0,1,0) & = & (1,3,5) \\ f(e_3) = f(0,0,1) & = & (-1,-1,-1) \end{array}$$

Ta có $\mathrm{Im}f$ sinh bởi $\{f(e_1), f(e_2), f(e_3)\}$.

Lập ma trận $A = \begin{pmatrix} f(e_1) \\ f(e_2) \\ f(e_3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Do đó, $\mathrm{Im} f$ có cơ sở là $\{v_1 = (1,2,3), v_2 = (0,1,2)\}$.

Định lý. *Cho $f : V \to W$ là ánh xạ tuyến tính và V hữu hạn chiều. Khi đó*

$$\dim \mathrm{Im} f + \dim \mathrm{Ker} f = \dim V.$$

Mệnh đề. *Cho $f : V \to W$ là ánh xạ tuyến tính. Khi đó*

i) f *là đơn cấu khi và chỉ khi* $\mathrm{Ker} f = \{0\}$.

ii) f *là toàn cấu khi và chỉ khi* $\mathrm{Im} f = W$.

iii) f *là đẳng cấu khi và chỉ khi* $\mathrm{Ker} f = \{0\}$ *và* $\mathrm{Im} f = W$.

Định nghĩa. Cho V có cơ sở $\mathcal{B} = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$, W có cơ sở $\mathcal{B}' = (v_1, v_2, \ldots, v_m)$ và $f \in L(V, W)$. Đặt

$$P = ([f(u_1)]_{\mathcal{B}'} \ [f(u_2)]_{\mathcal{B}'} \ldots [f(u_n)]_{\mathcal{B}'})$$

Khi đó ma trận P được gọi là ***ma trận biểu diễn*** của ánh xạ f theo cặp cơ sở $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$, ký hiệu $P = [\mathrm{f}]_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$ (hoặc $[f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$).

Nếu $f \in L(V)$ thì ma trận $[f]_{\mathcal{B},\mathcal{B}}$ được gọi là *ma trận biểu diễn* toán tử tuyến tính f, ký hiệu $[\mathrm{f}]_{\mathcal{B}}$

Ví dụ. Xét ánh xạ tuyến tính $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ xác định bởi

$$f(x, y, z) = (x - y, 2x + y + z)$$

và cặp cơ sở $\mathcal{B} = (u_1 = (1, 1, 0), u_2 = (0, 1, 2), u_3 = (1, 1, 1))$, $\mathcal{C} = (v_1 = (1, 3), v_2 = (2, 5))$. Tìm $[f]_{\mathcal{B},\mathcal{C}}$.

Ta có

$$\begin{aligned} f(u_1) &= (0,3) \\ f(u_2) &= (-1,3) \\ f(u_3) &= (0,4) \end{aligned}$$

Với $v=(a,b)\in\mathbb{R}^2$, tìm $[v]_{\mathcal{C}}$.

Lập $(v_1^\top \ v_2^\top | v^\top) \to \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & a \\ 3 & 5 & b \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|l} 1 & 0 & -5a+2b \\ 0 & 1 & 3a-b \end{array}\right)$

Suy ra $[v]_{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} -5a+2b \\ 3a-b \end{pmatrix}$

Lần lượt thay $f(u_1), f(u_2), f(u_3)$ ta có

$$[f(u_1)]_{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \end{pmatrix}, [f(u_2)]_{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 11 \\ -6 \end{pmatrix}, [f(u_3)]_{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 8 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

Vậy

$$[f]_{\mathcal{B},\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 6 & 11 & 8 \\ -3 & -6 & -4 \end{pmatrix}.$$

Ví dụ. Cho ánh xạ tuyến tính $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ định bởi

$$f(x, y, z, t) = (x - 2y + z - t, x + 2y + z + t, 2x + 2z).$$

Tìm ma trận biểu diễn ánh xạ tuyến tính f theo cặp cơ sở chính tắc.

Giải.

$$[f]_{\mathcal{B}_0,\mathcal{B}'_0} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Ví dụ. Cho $f \in L(\mathbb{R}^2)$ xác định bởi $f(x, y) = (2x + y, x - 4y)$. Khi đó ma trận biểu diễn f theo cơ sở chính tắc $\mathcal{B}_0$ là:

$$[f]_{\mathcal{B}_0} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}.$$

Định lý. *Cho V và W là các không gian vectơ hữu hạn chiều; $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ và $\mathcal{C}, \mathcal{C}'$ tương ứng là các cặp cơ sở trong V và W. Khi đó, với mọi ánh xạ tuyến tính $f : V \to W$ ta có*

i) $\forall u \in V, [f(u)]_{\mathcal{C}} = [f]_{\mathcal{B},\mathcal{C}}[u]_{\mathcal{B}}$.

ii) $[f]_{\mathcal{B}',\mathcal{C}'} = (\mathcal{C} \to \mathcal{C}')^{-1}[f]_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(\mathcal{B} \to \mathcal{B}')$.

Hệ quả. *Cho $\mathcal{B}$ và $\mathcal{B}'$ là hai cơ sở của không gian hữu hạn chiều V. Khi đó đối với mọi toán tử tuyến tính $f \in L(V)$ ta có*

i) $\forall u \in V, [f(u)]_{\mathcal{B}} = [f]_{\mathcal{B}}[u]_{\mathcal{B}}$.

ii) $[f]_{\mathcal{B}'} = (\mathcal{B} \to \mathcal{B}')^{-1}[f]_{\mathcal{B}}(\mathcal{B} \to \mathcal{B}')$.

Ví dụ. Trong không gian $\mathbb{R}^3$ cho cơ sở

$$\mathcal{B} = (u_1 = (1,1,0); u_2 = (0,2,1); u_3 = (2,3,1))$$

và ánh xạ tuyến tính $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ định bởi:
$f(x,y,z) = (2x + y - z, x + 2y - z, 2x - y + 3z)$. Tìm $[f]_{\mathcal{B}}$

Giải. Gọi $\mathcal{B}_0$ là cơ sở chính tắc của $\mathbb{R}^3$, ta có

$$[f]_{\mathcal{B}_0} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Áp dụng hệ quả, ta có

$$[f]_{\mathcal{B}} = (\mathcal{B}_0 \to \mathcal{B})^{-1}[f]_{\mathcal{B}_0}(\mathcal{B}_0 \to \mathcal{B}),$$

trong đó $(\mathcal{B}_0 \to \mathcal{B}) = (u_1^\top \; u_2^\top \; u_3^\top) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, do đó

$$(\mathcal{B}_0 \to \mathcal{B})^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -4 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Suy ra

$$[f]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -4 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -8 & 7 & -13 \\ -3 & 2 & -3 \\ 5 & -3 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -8 \\ -1 & 1 & -3 \\ 2 & 0 & 7 \end{pmatrix}.$$

Ví dụ. Cho ánh xạ tuyến tính $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, biết ma trận biểu diễn của f trong cặp cơ sở $\mathcal{B} = (u_1 = (1,1,1); u_2 = (1,0,1); u_3 = (1,1,0))$ và $\mathcal{C} = (v_1 = (1,1); v_2 = (2,1))$ là

$$[f]_{\mathcal{B},\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 0 & 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Tìm công thức của f.

Giải.

Cách 1. Do $[f]_{\mathcal{B},\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 0 & 3 & 4 \end{pmatrix}$.

Ta có

- $[f(u_1)]_{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$. Suy ra $f(u_1) = 2v_1 + 0v_2 = (2,2)$
- $[f(u_2)]_{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$. Suy ra $f(u_2) = v_1 + 3v_2 = (7,4)$
- $[f(u_3)]_{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix}$. Suy ra $f(u_3) = -3v_1 + 4v_2 = (5,1)$

Cho $u = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. Tìm $[u]_{\mathcal{B}}$.

Lập $(u_1^\top \, u_2^\top \, u_3^\top \,|u^\top) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & x \\ 1 & 0 & 1 & y \\ 1 & 1 & 0 & z \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & x-y-z \\ 0 & 1 & 0 & 2x+y-z \\ 0 & 0 & 1 & -x+z \end{array}\right)$.

Vậy $[u]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} -x+y+z \\ x-y \\ x-z \end{pmatrix}$.

Suy ra $u = (-x+y+z)u_1 + (x-y)u_2 + (x-z)u_3$.

Vậy, ta có

$$\begin{aligned} f(u) &= (-x+y+z)f(u_1) + (x-y)f(u_2) + (x-z)f(u_3) \\ &= (-x+y+z)(2,2) + (x-y)(7,4) + (x-z)(5,1) \\ &= (10x-5y-3z, 3x-2y+z). \end{aligned}$$

Cách 2. Gọi $\mathcal{B}_0$ và $\mathcal{C}_0$ lần lượt là cơ sở chính tắc của $\mathbb{R}^3$ và $\mathbb{R}^2$. Áp dụng công thức ta có

$$[f]_{\mathcal{B}_0,\mathcal{C}_0} = (\mathcal{C} \to \mathcal{C}_0)^{-1}[f]_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(\mathcal{B} \to \mathcal{B}_0).$$

Ta có

- $(\mathcal{C} \to \mathcal{C}_0)^{-1} = (\mathcal{C}_0 \to C) = (v_1^\top\ v_2^\top) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$
- $(\mathcal{B}_0 \to \mathcal{B}) = (u_1^\top\ u_2^\top\ u_3^\top) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Suy ra $(\mathcal{B} \to \mathcal{B}_0) = (\mathcal{B}_0 \to \mathcal{B})^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Vậy

$$\begin{aligned}
[f]_{\mathcal{B}_0,\mathcal{C}_0} &= (\mathcal{C} \to \mathcal{C}_0)^{-1}[f]_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(\mathcal{B} \to \mathcal{B}_0) \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 0 & 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 2 & 7 & 5 \\ 2 & 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 10 & -5 & -3 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Suy ra $f(x,y,z) = (10x - 5y - 3z, 3x - 2y + z)$.

Mệnh đề. *Cho V, W là hai không gian vectơ n chiều và $f \in L(V, W)$. Khi đó f là song ánh khi và chỉ khi tồn tại các cơ sở $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ lần lượt của V và W sao cho $[f]_{\mathcal{A},\mathcal{B}}$ khả nghịch.*

Hơn nữa, khi đó $f^{-1} : W \to V$ cũng là một ánh xạ tuyến tính và

$$[f^{-1}]_{\mathcal{B},\mathcal{A}} = [f]^{-1}_{\mathcal{A},\mathcal{B}}.$$

Đặc biệt, nếu $V = W$ và $\mathcal{A} = \mathcal{B}$ thì

$$[f^{-1}]_{\mathcal{B}} = [f]^{-1}_{\mathcal{B}}.$$

Ví dụ. Cho $\mathcal{B} = (u_1 = (1, 1, 1), u_2 = (1, 1, 2), u_3 = (1, 2, 1))$ là cơ sở của $\mathbb{R}^3$. Với f là toán tử tuyến tính trong $\mathbb{R}^3$ có

$$[f]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Chứng minh f là song ánh và tìm f^{-1}.

Giải. Ta có $|[f]_{\mathcal{B}}| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -1$. Suy ra $[f]_{\mathcal{B}}$ khả nghịch. Vậy f là song ánh.

Gọi $\mathcal{B}_0$ là cơ sở chính tắc ta có

$$\begin{aligned}[f]_{\mathcal{B}_0} &= (\mathcal{B} \to \mathcal{B}_0)^{-1}[f]_{\mathcal{B}}(\mathcal{B} \to \mathcal{B}_0) \\ &= (\mathcal{B}_0 \to \mathcal{B})[f]_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}_0 \to \mathcal{B})^{-1}\end{aligned}$$

Ta có $(\mathcal{B}_0 \to \mathcal{B}) = (u_1^\top \ u_2^\top \ u_3^\top) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Suy ra $(\mathcal{B}_0 \to \mathcal{B})^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Vậy

$$\begin{aligned}
[f]_{\mathcal{B}_0} &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 3 & 1 & 5 \\ 4 & 3 & 6 \\ 4 & 1 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ 3 & 2 & -1 \\ 4 & 3 & -3 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Suy ra $[f^{-1}]_{\mathcal{B}_0} = [f]_{\mathcal{B}_0}^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -2 \\ -5 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Vậy $f^{-1}(x, y, z) = (3x - 2z, -5x + y + 3z, -x + y)$.