CHỦ ĐỀ 1. MỘT SỐ PHÂN PHỐI THƯỜNG GẶP

1. PHÂN PHỐI NHỊ THỨC

Xét X là số lần "thành công" trong phép thử n Bernoulli với xác suất p đã biết và không đổi, khi đó $X \sim B(n;p)$

- ☑ $\mathbb{P}(X = x) = C_n^x p^x (1-p)^{n-x}, \quad x = 0, 1, 2, ..., n.$
- ☑ $\mathbb{P}(X \leq k) = \sum\limits_{x=0}^{k} C_n^x p^x (1-p)^{n-x}, \quad k \leq n.$
- ☑ $\mathbb{P}(X \geq k) = \sum\limits_{x=k}^{n} C_n^x p^x (1-p)^{n-x}, \quad k \leq n.$
- ☑ $\mathbb{P}(a \leq X \leq b) = \sum\limits_{x=a}^{b} C_n^x p^x (1-p)^{n-x}, \quad 0 \leq a < b \leq n.$
- ☑ Trung bình $\mu_X = \mathbb{E}(X) = np.$
- ☑ Phương sai $\sigma_X^2 = Var(X) = np(1-p).$

VÍ DỤ 1.1. Tỷ lệ nữ trong một vùng là 60%. Chọn ngẫu nhiên 20 người trong vùng này. Gọi X là số nữ có trong 20 người chọn ra. Tính

a) $\mathbb{P}(X = 15)$.

b) $\mathbb{P}(X \leq 15)$.

c) $\mathbb{P}(X \geq 10)$.

d) $\mathbb{P}(3 \leq X \leq 10)$.

e) $\mathbb{P}(X < 10)$.

f) $\mathbb{P}(X > 10)$.

✍ **LỜI GIẢI.**

Ta có: $X \sim B(20; 0.6)$.

a) $\mathbb{P}(X = 5) = \mathrm{C}_{20}^5 \cdot 0.6^5 \cdot (1-0.6)^{20-5} \approx 1.2945 \cdot 10^{-3}.$

b) $\mathbb{P}(X \leq 15) = \sum\limits_{x=0}^{15} \mathrm{C}_{20}^x \cdot 0.6^x \cdot (1-0.6)^{20-x} \approx 0.94905.$

c) $\mathbb{P}(X \geq 15) = \sum\limits_{x=15}^{20} \mathrm{C}_{20}^x \cdot 0.6^x \cdot (1-0.6)^{20-x} \approx 0.1256.$

d) $\mathbb{P}(3 \leq X \leq 10) = \sum\limits_{x=3}^{10} \mathrm{C}_{20}^x \cdot 0.6^x \cdot (1-0.6)^{20-x} \approx 0.2447.$

e) $\mathbb{P}(X < 10) = \sum\limits_{x=0}^{9} \mathrm{C}_{20}^x \cdot 0.6^x \cdot (1-0.6)^{20-x} \approx 0.1275.$

f) $\mathbb{P}(X > 10) = \sum\limits_{x=11}^{20} \mathrm{C}_{20}^x \cdot 0.6^x \cdot (1-0.6)^{20-x} \approx 0.7553.$

□

XẤP XỈ PHÂN PHỐI NHỊ THỨC BẰNG PHÂN PHỐI CHUẨN

Lưu ý: Khi tính xác suất với phân phối nhị thức gặp khó khăn, ta xấp xỉ như sau

- ☑ $\mathbb{P}(X \le x) = \mathbb{P}(X \le x + 0.5) \cong \mathbb{P}\left(Z \le \dfrac{x + 0.5 - np}{\sqrt{np(1-p)}}\right)$
- ☑ $\mathbb{P}(X \ge x) = \mathbb{P}(X \ge x - 0.5) \cong \mathbb{P}\left(Z \ge \dfrac{x - 0.5 - np}{\sqrt{np(1-p)}}\right)$
- ☑ $\mathbb{P}(a \le X \le b) = \mathbb{P}(a - 0.5 \le X \le b + 0.5) \approx \mathbb{P}\left(\dfrac{x - 0.5 - np}{\sqrt{np(1-p)}} \le Z \le \dfrac{x + 0.5 - np}{\sqrt{np(1-p)}}\right)$.

VÍ DỤ 1.2. Tỷ lệ thanh niên đã tốt nghiệp THPT của quận A là 75%. Trong đợt tuyển quân đi nghĩa vụ quân sự, quận A đã gọi ngẫu nhiên 400 thanh niên. Tính xác suất để có hơn 300 thanh niên đã tốt nghiệp THPT.

✍ **LỜI GIẢI.**

Gọi X là số thanh niên đã tốt nghiệp THPT trong 400 thanh niên được chọn.
Ta có: $X \sim B(400; 0.75)$.

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X > 300) = 1 - \mathbb{P}(X \le 300) &= 1 - \mathbb{P}(X \le 300 + 0.5) \\
&\cong 1 - \mathbb{P}\left(Z \le \frac{300 + 0.5 - 400 \cdot 0.75}{\sqrt{400 \cdot 0.75 \cdot 0.25}}\right) \\
&= 1 - \mathbb{P}\left(Z \le \frac{\sqrt{3}}{10}\right) \\
&= 1 - \Phi(0.05774) \\
&= 1 - 0.52302 \\
&= 0.47698.
\end{aligned}$$

□

BÀI 1.1 (Câu 1 - Đề 1 HKI 22-23). Xác suất để một bu lông được sản xuất đáp ứng yêu cầu kỹ thuật là 0,86.

a) Chọn ngẫu nhiên 50 bu lông được sản xuất. Tính xác suất có ít nhất 48 bu lông đáp ứng yêu cầu kỹ thuật.

b) Một lô hàng gồm 500 bu lông được sản xuất ra. Dùng một xấp xỉ phù hợp để tính xác suất có ít nhất 250 bu lông đáp ứng yêu cầu kỹ thuật.

✍ **LỜI GIẢI.**

a) Gọi X là số bu lông đáp ứng yêu cầu kỹ thuật trong 50 bu lông.
Khi đó $X \sim B(50; 0{,}86)$.
Xác suất có ít nhất 48 bu lông đáp ứng yêu cầu kỹ thuật là

$$\mathbb{P}(X \ge 48) = \sum_{x=48}^{50} \mathrm{C}_{50}^{x} \cdot 0{,}86^x \cdot (1 - 0{,}86)^{50-x} \approx 0{,}0221.$$

b) Gọi Y là số bu lông đáp ứng yêu cầu kỹ thuật trong 500 bu lông.
Khi đó $Y \sim B(500; 0{,}86)$.

Tiến hành xấp xỉ phân phối nhị thức bằng phân phối chuẩn.
Xác suất có ít nhất 250 bu lông đáp ứng yêu cầu kỹ thuật là

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(Y \geq 250) &= \mathbb{P}(Y \geq 250 - 0{,}5) \\
&\approx \mathbb{P}\left(Z \geq \frac{250 - 0{,}5 - np}{\sqrt{np(1-p)}}\right) \\
&= \mathbb{P}\left(Z \geq \frac{250 - 0{,}5 - 500 \cdot 0{,}86}{\sqrt{500 \cdot 0{,}86 \cdot (1 - 0{,}86)}}\right) \\
&= \mathbb{P}(Z \geq -23{,}2637) \\
&\approx 1.
\end{aligned}$$

□

BÀI 1.2 (Câu 1 - Đề 1 CKI 17-18). Các sản phẩm được sản xuất trong một dây chuyền. Để thực hiện kiểm tra chất lượng, mỗi giờ người ta rút ngẫu nhiên không hoàn lại 10 sản phẩm từ một hộp có 25 sản phẩm. Quá trình sản xuất được báo cáo là đạt yêu cầu nếu có không quá một sản phẩm là thứ phẩm.

a) Nếu tất cả các hộp được kiểm tra đều chứa chính xác hai thứ phẩm, thì xác suất quá trình sản xuất được báo cáo đạt yêu cầu ít nhất 7 lần trong một ngày làm việc 8 giờ là bao nhiêu?

b) Sử dụng phân phối Poisson để xấp xỉ xác suất được tính trong câu a).
Hướng dẫn: Phân phối Nhị thức có thể được xấp xỉ bằng phân phối Poisson khi n lớn và p nhỏ gần 0. Cụ thể, nếu $X \sim B(n;p)$ và $n \geq 100$, $p \leq 0{,}01$, $np \leq 20$ thì $X \sim P(np)$.

c) Biết rằng lần kiểm tra chất lượng cuối cùng trong câu a), quá trình sản xuất được báo cáo đạt yêu cầu. Hỏi xác suất mẫu 10 sản phẩm tương ứng không chứa thứ phẩm là bao nhiêu?

✍ **LỜI GIẢI.**

a) Gọi X là số thứ phẩm trong 10 sản phẩm được kiểm tra.
Khi đó $X(\Omega) = \{0; 1; 2\}$.
Ta có

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X = 0) &= \frac{\mathrm{C}_{23}^{10}}{\mathrm{C}_{25}^{10}} = 0.35 \\
\mathbb{P}(X = 1) &= \frac{\mathrm{C}_{2}^{1}\mathrm{C}_{23}^{9}}{\mathrm{C}_{25}^{10}} = 0.5
\end{aligned}$$

Xác suất quá trình sản xuất được báo cáo đạt yêu cầu là

$$\mathbb{P}(X \leq 1) = \mathbb{P}(X = 0) + \mathbb{P}(X = 1) = 0.35 + 0.5 = 0.85.$$

Gọi Y là số lần quá trình sản xuất được báo cáo đạt yêu cầu trong 8 lần kiểm tra. Ta có $Y \sim B(8; 0.85)$.
Xác suất quá trình sản xuất được báo cáo đạt yêu cầu ít nhất 7 lần trong một ngày làm việc 8 giờ là

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(Y \leq 7) &= \sum_{x=7}^{8} \mathbb{P}(X = x) \\
&= \sum_{x=7}^{8} \mathrm{C}_8^x \cdot 0.85^x \cdot (1 - 0.85)^{8-x} \\
&\approx 0.6572
\end{aligned}$$

b) Sử dụng phân phối Poisson để xấp xỉ xác suất được tính trong câu a).
Nhắc lại: Phân phối Nhị thức có thể được xấp xỉ bằng phân phối Poisson khi n lớn và p nhỏ gần 0. Cụ thể, nếu $X \sim B(n;p)$ và $n \geq 100$, $p \leq 0{,}01$, $np \leq 20$ thì $X \sim P(np)$.
Gọi Z là số lần quá trình sản xuất được báo cáo không đạt yêu cầu trong 8 lần kiểm tra. Ta có $Z \sim B(8;0.15)$. Khi đó $Z \sim P(np = 8 \cdot 0.15 = 1.2)$.
Do đó

$$\mathbb{P}(Y \leq 7) = \mathbb{P}(Z \leq 1) = \sum_{x=0}^{1} \mathbb{P}(Z = x) = \sum_{x=0}^{1} \frac{e^{-1.2} \cdot 1.2^x}{x!} \approx 0.6626.$$

c) Biết rằng lần kiểm tra chất lượng cuối cùng trong câu a), quá trình sản xuất được báo cáo đạt yêu cầu. Hỏi xác suất mẫu 10 sản phẩm tương ứng không chứa thứ phẩm là bao nhiêu?

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X = 0|X \leq 1) &= \frac{\mathbb{P}(X = 0, X \leq 1)}{\mathbb{P}(X \leq 1)} \\
&= \frac{\mathbb{P}(X = 0)}{\mathbb{P}(X \leq 1)} \\
&= \frac{0.35}{0.85} \\
&= \frac{7}{17}.
\end{aligned}$$

□

BÀI 1.3 (Câu 1 - Đề 2 CKI 17-18). Một công ty kỹ thuật thiết lập một bài kiểm tra năng lực khi các ứng viên nộp đơn để thực tập. Thời gian hoàn thành bài kiểm tra có phân phối chuẩn với trung bình 40,5 phút và độ lệch chuẩn 7,5 phút. Các ứng viên hoàn thành bài thi ít hơn 30 phút được chấp nhận thực tập ngay. Những người hoàn thành bài thi từ 30 đến 36 phút được yêu cầu làm thêm một bài kiểm tra khác. Mọi ứng viên khác sẽ bị từ chối.

a) Với một ứng viên được chọn ngẫu nhiên, tính xác suất để người này được

   i) chấp nhận thực tập ngay;

   ii) yêu cầu làm thêm một bài kiểm tra khác.

b) Cho biết một ứng viên được chọn ngẫu nhiên không bị từ chối sau bài kiểm tra đầu tiên này, tính xác suất ứng viên được chấp nhận thực tập ngay.

c) Vào một dịp nào đó có 100 ứng viên. Sử dụng một xấp xỉ phù hợp để tính xác suất có nhiều hơn 25 ứng viên được yêu cầu làm thêm một bài kiểm tra khác.

✍ **LỜI GIẢI.**

a) Gọi X là thời gian một ứng viên hoàn thành bài kiểm tra. Ta có $X \sim N(40.5; 7.5^2)$ Xác suất ta phải tìm để ứng viên này được

   i) chấp nhận thực tập ngay

$$\mathbb{P}(X < 30) = \mathbb{P}\left(\frac{X - 40.5}{7.5} < \frac{30 - 40.5}{7.5}\right) = \mathbb{P}\left(Z < -1.4\right) = \Phi(-1.4) = 1 - \Phi(1.4) \approx 0.0808.$$

   ii) yêu cầu làm thêm một bài kiểm tra khác

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(30 \leq X \leq 36) &= \mathbb{P}\left(\frac{30 - 40.5}{7.5} \leq \frac{X - 40.5}{7.5} \leq \frac{36 - 40.5}{7.5}\right) \\
&= \mathbb{P}\left(-1.4 \leq Z \leq -0.6\right) \\
&\approx 0.1935.
\end{aligned}$$

b) Xác suất để một ứng viên không bị từ chối là

$$\mathbb{P}(X \leq 36) = \mathbb{P}(X < 30) + \mathbb{P}(30 \leq X \leq 36) = 0.0808 + 0.1935 = 0.2743.$$

Nếu một ứng viên được chọn ngẫu nhiên không bị từ chối sau bài kiểm tra đầu tiên này thì xác suất ứng viên được chấp nhận thực tập ngay là

$$\mathbb{P}(X < 30|X \leq 30) = \frac{\mathbb{P}\left[(X < 30) \cap (x \leq 36)\right]}{\mathbb{P}(X \leq 36)} = \frac{\mathbb{P}(X < 30)}{\mathbb{P}(X \leq 36)} = \frac{0.0808}{0.2743} \approx 0.2946.$$

c) Gọi Y là số ứng viên được yêu cầu làm thêm một bài kiểm tra.
Khi đó $X \sim B(100; 0.1935)$.
Xác suất có nhiều hơn 25 ứng viên được yêu cầu làm thêm một bài kiểm tra khác là

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(Y > 25) = 1 - \mathbb{P}(Y \leq 25) \approx 1 - \mathbb{P}(Y \leq 25 + 0.5) &\approx 1 - \mathbb{P}\left(Z \leq \frac{25 + 0.5 - 100 \cdot 0.1935}{\sqrt{100 \cdot 0.1935 \cdot (1 - 0.1935)}}\right) \\
&\approx 1 - \mathbb{P}\left(Z \leq 1.5568\right) \\
&\approx 1 - 0.9402 \\
&= 0.0598.
\end{aligned}$$

□

2. PHÂN PHỐI POISSON

Xét X là số lượng biến cố xảy ra trong những khoảng thời gian hoặc không gian nhất định với số lượng trung bình λ đã biết, khi đó $X \sim P(\lambda)$ và

$$\mathbb{P}(X = x) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}, \quad x = 0, 1, 2, \ldots$$

Lưu ý 1: Trung bình λ thay đổi tỷ lệ theo khoảng thời gian và không gian tương ứng.
Lưu ý 2: $\mathbb{P}(X > x) = 1 - \mathbb{P}(X \leq x)$.

VÍ DỤ 2.1. Tại bệnh viện A trung bình 3 giờ có 9 ca mổ. Tính xác suất để trong 1 giờ bệnh viện A có 5 ca mổ.

✍ **LỜI GIẢI.**
Gọi X là số ca mổ trong 1 giờ tại bệnh viện.
Ta có: $X \sim P(3) \Rightarrow \lambda = 3$.
$\mathbb{P}(X = 5) = \dfrac{\mathrm{e}^{-3} \cdot 3^5}{5!} \approx 0{,}10082.$ □

3. PHÂN PHỐI CHUẨN

3.1. ĐỊNH NGHĨA

Biến ngẫu nhiên liên tục X được gọi là có **phân phối chuẩn** nếu hàm mật độ xác suất có dạng

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \quad x \in \mathbb{R},$$

trong đó $\mu = \mathbb{E}(X)$ và $\sigma^2 = Var(X)$, ký hiệu $X \sim N(\mu, \sigma^2)$.

Đặc biệt, nếu $\mu = 0$ và $\sigma^2 = 1$ thì ta gọi Z là biến ngẫu nhiên có **phân phối chuẩn tắc**, ký hiệu $Z \sim N(0; 1)$ và đặt Φ là hàm phân phối tích lũy có dạng

$$\Phi(z) = \mathbb{P}(Z \le z) = \int_{-\infty}^{z} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx.$$

Giá trị của hàm này được tra trong bảng hoặc bấm máy tính.

3.2. MỘT SỐ TÍNH CHẤT QUAN TRỌNG

- Nếu $X \sim N(\mu; \sigma^2)$ thì $Z = \dfrac{X - \mu}{\sigma} \sim N(0; 1)$.
- Nếu $X \sim N(\mu; \sigma^2)$ thì $\mathbb{P}(X \le x) = \mathbb{P}\left(\dfrac{X - \mu}{\sigma} \le \dfrac{x - \mu}{\sigma}\right) = \mathbb{P}(Z \le z) = \Phi(z)$.
- $\Phi(-z) = 1 - \Phi(z)$.
- Nếu $X \sim N(\mu; \sigma^2)$ thì

$$\mathbb{P}(a \le X \le b) = \Phi\left(\frac{b - \mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a - \mu}{\sigma}\right).$$

- **Lưu ý:** Nếu $X_1 \sim N(\mu_1; \sigma_1^2)$; $X_2 \sim N(\mu_2; \sigma_2^2)$; $\dots$; $X_k \sim N(\mu_k; \sigma_k^2)$ và X_i độc lập X_j với mọi $i \ne j$. Xét

$$X = a_1 X_1 + a_2 X_2 + \cdots + a_k X_k$$

khi đó $X \sim N(\mu; \sigma^2)$ trong đó

  - $\mu = a_1\mu_1 + a_2\mu_2 + \cdots + a_k\mu_k$.
  - $\sigma^2 = a_1^2\sigma_1^2 + a_2^2\sigma_2^2 + \cdots + a_k^2\sigma_k^2$.

Ví dụ: Cho $X_1 \sim N(1.8; 0.96)$, $X_2 \sim N(3.2; 1.21)$.
Xét $X = 2X_1 - 3X_2$, khi đó $X \sim N(\mu_X; \sigma_X^2)$ với

  - Trung bình của X là

$$\mu_X = 2\mu_1 - 3\mu_2 = 2 \cdot 1.8 - 3 \cdot 3.2 = -6.$$

  - Phương sai của X là

$$\sigma_X^2 = 2^2\sigma_1^2 + (-3)^2\sigma_2^2 = 2^2 \cdot 0.96 + (-3)^2 \cdot 1.21 = 14.73.$$

VÍ DỤ 3.1 (Câu 1 - Đề 2 HKI 22-23). Một máy sản xuất ra bu lông với đường kính tuân theo phân phối chuẩn $N(4; 0.09)$ (đv: mm). Các bu lông được đo đạc một cách chính xác và những cái nào có đường kính nhỏ hơn 3.5 mm hoặc lớn hơn 4.4 mm sẽ bị loại bỏ. Chọn ngẫu nhiên một bu lông được máy sản xuất.

a) Tính xác suất bu lông này được chấp nhận.

b) Một lô gồm 500 bu lông được sản xuất ra. Gọi X là số bu lông được chấp nhận của lô này. Tính $\mathbb{E}(X)$ và $Var(X)$.

✍ **LỜI GIẢI.**
Gọi Y (mm) là đường kính của bu lông.
Theo đề bài, ta có $Y \sim N(4; 0.09) \Rightarrow \mu_Y = 4$; $\sigma_Y^2 = 0.09 \Rightarrow \sigma_Y = 0.3$.

a) Tính xác suất bu lông này được chấp nhận.

$$\mathbb{P}(3.5 \le Y \le 4.4) = \mathbb{P}\left(\frac{3.5-4}{0.3} \le Z \le \frac{4.4-4}{0.3}\right) = \mathbb{P}\left(-\frac{5}{3} \le Z \le \frac{4}{3}\right) = \int_{-\frac{5}{3}}^{\frac{4}{3}} f(z)\,\mathrm{d}z \approx 0.8610.$$

b) Một lô gồm 500 bu lông được sản xuất ra. Gọi X là số bu lông được chấp nhận của lô này. Tính $\mathbb{E}(X)$ và $Var(X)$.
Với X là số bu lông được chấp nhận của lô gồm 500 bu lông. Khi đó $X \sim B(500; 0.8610)$.
Do đó

- ☑ $\mathbb{E}(X) = np = 500 \cdot 0.8610 = 430.5$.
- ☑ $Var(X) = np(1-p) = 500 \cdot 0.8610 \cdot (1-0.8610) = 59.8395$.

□

VÍ DỤ 3.2 (Câu 1 - Đề 2 CKII 21-22 (CNTT hệ CLC)). Trong một nhà máy sản xuất linh kiện điện tử, biết rằng tuổi thọ của một loại chip Led (sử dụng trong các bóng đèn Led) có phân phối chuẩn với tuổi thọ trung bình là 70000 giờ và độ lệch chuẩn 1500 giờ.

a) Những chip Led có tuổi thọ trên 71500 giờ được phân loại là sản phẩm loại I. Tính tỷ lệ sản phẩm loại I.

b) Chọn ngẫu nhiên 15 chip Led trong một dây chuyền có rất nhiều sản phẩm, tính xác suất chọn được ít nhất 2 chip Led loại I.

✍ **LỜI GIẢI.**
Gọi X (giờ) là tuổi thọ của chip Led.
Theo đề bài, ta có $X \sim N(70000; 1500^2) \Rightarrow \mu = 70000; \sigma = 1500$.

a) Những chip Led có tuổi thọ trên 71500 giờ được phân loại là sản phẩm loại I. Tính tỷ lệ sản phẩm loại I:

$$\mathbb{P}(X > 71500) = \mathbb{P}\left(\frac{X-70000}{1500} > \frac{71500-70000}{1500}\right) = \mathbb{P}(Z > 1) \approx 0.8413.$$

b) Chọn ngẫu nhiên 15 chip Led trong một dây chuyền có rất nhiều sản phẩm, tính xác suất chọn được ít nhất 2 chip Led loại I.
Gọi Y là số chip Led loại I trong 15 chip.
Khi đó $Y \sim B(15; 0.8413)$.
Xác suất chọn được ít nhất 2 chip Led loại I trong 15 chip là

$$\mathbb{P}(Y \ge 2) = 1 - \mathbb{P}(Y < 2) = 1 - \mathbb{P}(Y \le 1) = 1 - \sum_{x=0}^{1} \mathrm{C}_{15}^{x} 0.8413^{x} \cdot (1-0.8413)^{15-x} = 0.(9) \approx 1.$$

□

BÀI 1.4 (Câu 1 - Đề 3 CKI 17-18). Trọng lượng A của mỗi con bò trong một đàn bò là biến ngẫu nhiên có phân phối chuẩn với kỳ vọng 300 kg và độ lệch chuẩn 50 kg. Chọn ngẫu nhiên một con bò trong chuồng. Tính xác suất để con bò được chọn:

a) Có trọng lượng trên 500 kg.

b) Có trọng lượng từ 250 kg tới 350 kg.

c) Chọn ngẫu nhiên 4 con bò trong đàn bò nói trên. Tính xác suất để có 2 trong 4 con bò nói trên có trọng lượng từ 250 kg tới 350 kg.

✍ **LỜI GIẢI.**
Ta có $A \sim N(300; 50^2) \Rightarrow \mu = 300; \sigma = 50$.

a) $\mathbb{P}(A > 500) = \mathbb{P}\left(\frac{A-300}{50} > \frac{500-300}{50}\right) = \mathbb{P}(Z > 4) = 1 - \mathbb{P}(Z \le 4) \approx 1 - 0.99997 = 0.00003.$

b) $$\begin{aligned}\mathbb{P}(250 \le A \le 350) &= \mathbb{P}\left(\frac{250-300}{50} \le \frac{A-300}{50} \le \frac{350-300}{50}\right)\\ &= \mathbb{P}(-1 \le Z \le 1)\\ &= \Phi(1) - \Phi(-1)\\ &= 0.84134 - 0.15866\\ &= 0.6827.\end{aligned}$$

c) Gọi Y là số con bò có trọng lượng từ 250 kg tới 350 kg trong 4 con bò.
Khi đó $Y \sim B(4; 0.6827)$.
$\mathbb{P}(Y = 2) = \mathrm{C}_4^2 \cdot 0.6827^2 \cdot (1 - 0.6827)^{4-2} \approx 0.2816.$

□

BÀI 1.5 (Câu 2 - Đề 4 CKI 17-18). Một nhà nông trồng giống cherry Úc theo phương pháp được các nhà khoa học đề xuất; chính vì thế đường kính của quả cherry tuân theo phân phối chuẩn với trung bình 28 mm và độ lệch chuẩn 2 mm. Một quả cherry được gọi là có size 32 nếu đường kính của quả cherry nằm trong $[30; 32]$. Giả sử các quả cherry có size 32 độc lập nhau.

a) Chọn ngẫu nhiên một quả cherry trong vườn, tìm xác suất nhận được quả cherry có size 32.

b) Tìm số tự nhiên n nhỏ nhất sao cho chọn n quả cherry trong vườn thì xác suất nhận được ít nhất 1 quả cherry size 32 không bé hơn 0.99.

c) Chọn ngẫu nhiên 100 quả cherry trong vườn, hãy chọn mô hình xấp xỉ thích hợp để tìm xác suất có ít nhất 20 quả cherry size 32.

✍ **LỜI GIẢI.**
Gọi X (mm) là đường kính của một quả cherry.
Khi đó $X \sim N(28; 2^2) \Rightarrow \mu = 28; \sigma = 2$.

a) $$\begin{aligned}\mathbb{P}(30 \le X \le 32) &= \mathbb{P}\left(\frac{30-28}{2} \le \frac{X-28}{2} \le \frac{32-28}{2}\right)\\ &= \mathbb{P}(1 \le Z \le 2)\\ &= \Phi(2) - \Phi(1)\\ &= 0.97725 - 0.84134\\ &= 0.13591.\end{aligned}$$

b) Gọi Y là số quả cherry size 32 trong n quả được chọn.
Khi đó $Y \sim B(n; 0.13591)$.
Ta có: $$\begin{aligned}\mathbb{P}(Y \ge 1) &= 1 - \mathbb{P}(Y < 1)\\ &= 1 - \mathbb{P}(Y = 0)\\ &= 1 - \mathrm{C}_n^0 \cdot 0.13591^0 \cdot (1 - 0.13591)^{n-0}\\ &= 1 - 0.86409^n.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Theo đề bài} \qquad \mathbb{P}(Y \geq 1) &\geq 0.99 \\ \Leftrightarrow 1 - 0.86409^n &\geq 0.99 \\ \Leftrightarrow 0.86409^n &\geq 0.01 \\ \Rightarrow n &\geq log_{0.86409}(0.01) \\ \Leftrightarrow n &\geq 31.52534 \\ \Rightarrow n &\approx 32. \end{aligned}$$

c) Gọi W là số quả cherry size 32 trong 100 quả.
Khi đó $W \sim B(100; 0.13591)$.

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(W \geq 20) = \mathbb{P}(W \geq 20 - 0.5) &\approx \mathbb{P}\left(Z \geq \frac{20 - 0.5 - 100 \cdot 0.13591}{\sqrt{100 \cdot 0.13591 \cdot (1 - 0.13591)}}\right) \\ &= \mathbb{P}(Z \geq 1.72428) \\ &= 1 - \mathbb{P}(Z < 1.72428) \\ &= 1 - 0.95767 \\ &= 0.04233. \end{aligned}$$

□

BÀI 1.6 (Câu 4 - Đề 1 CKI 21-22). Một công ty sản xuất trò chơi điện tử thực hiện một nghiên cứu về thời gian mà người chơi hoàn thành các cấp độ trong một trò chơi mà họ vừa phát hành. Họ ghi nhận rằng thời gian để hoàn thành cấp độ I là một biến ngẫu nhiên X_1 có phân phối chuẩn với trung bình 48.1 phút và độ lệch chuẩn 15.1 phút.

a) Tính xác suất để người chơi cần nhiều hơn 50.1 phút để hoàn thành cấp độ I của trò chơi này.

b) Nhà sản xuất cần tính ngưỡng thời gian t_0 sao cho 90.15% người chơi sẽ cần ít hơn t_0 phút để hoàn thành cấp độ I của trò chơi này. Tính t_0.

c) Giả sử trò chơi gồm 3 cấp độ, trong đó thời gian để hoàn thành các cấp độ II và III lần lượt là các biến ngẫu nhiên $X_2 \sim N(55, 14.5^2)$ và $X_3 \sim N(56.8, 10.5^2)$. Giả sử rằng X_1, X_2 và X_3 là các biến ngẫu nhiên độc lập. Tính trung bình và độ lệch chuẩn cho tổng thời gian để người chơi hoàn thành cả 3 cấp độ trò chơi này.

✍ **LỜI GIẢI.**

a) Tính xác suất để người chơi cần nhiều hơn 50.1 phút để hoàn thành cấp độ I của trò chơi này.
Theo đề bài: $X_1 \sim N(48.1; 15.1^2) \Rightarrow \mu_1 = 48.1; \sigma_1 = 15.1$.
Xác suất để người chơi cần nhiều hơn 50.1 phút để hoàn thành cấp độ I của trò chơi này là

$$\mathbb{P}(X_1 > 50.1) = \mathbb{P}\left(\frac{X_1 - 48.1}{15.1} > \frac{50.1 - 48.1}{15.1}\right) = \mathbb{P}\left(Z > \frac{20}{151}\right) \approx 0.4473.$$

b) Nhà sản xuất cần tính ngưỡng thời gian t_0 sao cho 90.15% người chơi sẽ cần ít hơn t_0 phút để hoàn thành cấp độ I của trò chơi này. Tính t_0.
Cần tìm t_0 để $\mathbb{P}(X_1 < t_0) = 90.15\%$.
Ta có

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X_1 < t_0) &= 90.15\% \\ \Leftrightarrow \mathbb{P}\left(Z < \frac{t_0 - 48.1}{15.1}\right) &= 0.9015 \\ \Rightarrow \frac{t_0 - 48.1}{15.1} &\approx 1.2901 \\ \Leftrightarrow t_0 &\approx 67.5805. \end{aligned}$$

c) Giả sử trò chơi gồm 3 cấp độ, trong đó thời gian để hoàn thành các cấp độ II và III lần lượt là các biến ngẫu nhiên $X_2 \sim N(55, 14.5^2)$ và $X_3 \sim N(56.8, 10.5^2)$. Giả sử rằng X_1, X_2 và X_3 là các biến ngẫu nhiên độc lập. Tính trung bình và độ lệch chuẩn cho tổng thời gian để người chơi hoàn thành cả 3 cấp độ trò chơi này.

Lưu ý: Nếu $X_1 \sim N(\mu_1; \sigma_1^2)$; $X_2 \sim N(\mu_2; \sigma_2^2)$; $\dots$; $X_k \sim N(\mu_k; \sigma_k^2)$ và X_i độc lập X_j với mọi $i \neq j$. Xét

$$X = a_1X_1 + a_2X_2 + \dots + a_kX_k$$

khi đó $X \sim N(\mu; \sigma^2)$ trong đó

- ☑ $\mu = a_1\mu_1 + a_2\mu_2 + \dots + a_k\mu_k$.
- ☑ $\sigma^2 = a_1^2\sigma_1^2 + a_2^2\sigma_2^2 + \dots + a_k^2\sigma_k^2$.

Theo đề bài: $X_1 \sim N(48.1; 15.1^2) \Rightarrow \mu_1 = 48.1; \sigma_1 = 15.1$

$X_2 \sim N(55; 14.5^2) \Rightarrow \mu_2 = 55; \sigma_2 = 14.5$

$X_3 \sim N(56.8; 10.5^2) \Rightarrow \mu_3 = 56.8; \sigma_3 = 10.5$

Tổng thời gian để người chơi hoàn thành cả 3 cấp độ trò chơi là

$$X = X_1 + X_2 + X_3.$$

Khi đó $X \sim N(\mu; \sigma^2)$ trong đó

- ☑ $\mu = \mu_1 + \mu_2 + \mu_3 = 48.1 + 55 + 56.8 = 159.9$.
- ☑ $\sigma^2 = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 = 15.1^2 + 14.5^2 + 10.5^2 = 548.51$
  $\Rightarrow \sigma \approx 23.4203$.

□

BÀI 1.7 (Câu 5 - Đề 2 CKI 21-22). Một công ty muốn so sánh hiệu quả của hai loại nhiên liệu cho một chiếc ô tô. 5 chiếc xe giống nhau sẽ chạy 1000 km mỗi chiếc, hai chiếc sử dụng loại nhiên liệu thứ nhất và ba chiếc chạy loại thứ hai. Gọi X_1 và X_2 là hiệu suất nhiên liệu quan sát được đối với loại thứ nhất và Y_1, Y_2 và Y_3 là hiệu suất đối với loại thứ hai. Giả sử tất cả các biến này độc lập với nhau và $X_i \sim N(21, 8)$ với $i = 1, 2$ và $Y_j \sim N(18, 11)$ với $j = 1, 2, 3$. Gọi W là biến ngẫu nhiên mới được cho bởi:

$$W = \frac{X_1 + X_2}{2} - \frac{Y_1 + Y_2 + Y_3}{3}.$$

a) Tìm kỳ vọng của W.

b) Tìm phương sai của W.

c) Tìm $\mathbb{P}(W \leq 0)$.

✍ LỜI GIẢI.

Lưu ý: Nếu $X_1 \sim N(\mu_1; \sigma_1^2)$; $X_2 \sim N(\mu_2; \sigma_2^2)$; $\dots$; $X_k \sim N(\mu_k; \sigma_k^2)$ và X_i độc lập X_j với mọi $i \neq j$. Xét

$$X = a_1X_1 + a_2X_2 + \dots + a_kX_k$$

khi đó $X \sim N(\mu; \sigma^2)$ trong đó

- ☑ $\mu = a_1\mu_1 + a_2\mu_2 + \dots + a_k\mu_k$.
- ☑ $\sigma^2 = a_1^2\sigma_1^2 + a_2^2\sigma_2^2 + \dots + a_k^2\sigma_k^2$.

Theo đề bài: $X_i \sim N(\mu_{X_i}; \sigma^2_{X_i})$ với $\mu_{X_i} = 21; \sigma_{X_i} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}, \forall i = 1, 2.$

$Y_j \sim N(\mu_{Y_j}; \sigma^2_{Y_j})$ với $\mu_{Y_j} = 18; \sigma_{Y_j} = \sqrt{11}, \forall j = 1, 2, 3.$

Ta có
$$W = \frac{X_1 + X_2}{2} - \frac{Y_1 + Y_2 + Y_3}{3} = \frac{1}{2}X_1 + \frac{1}{2}X_2 - \frac{1}{3}Y_1 - \frac{1}{3}Y_2 - \frac{1}{3}Y_3.$$

a) Tìm kỳ vọng của W.

$$\begin{aligned}
\mu_W = \mathbb{E}(W) &= \mathbb{E}\left(\frac{1}{2}X_1 + \frac{1}{2}X_2 - \frac{1}{3}Y_1 - \frac{1}{3}Y_2 - \frac{1}{3}Y_3\right)\\
&= \frac{1}{2}\mu_{X_1} + \frac{1}{2}\mu_{X_2} - \frac{1}{3}\mu_{Y_1} - \frac{1}{3}\mu_{Y_2} - \frac{1}{3}\mu_{Y_3}\\
&= \frac{1}{2}\cdot 21 + \frac{1}{2}\cdot 21 - \frac{1}{3}\cdot 18 - \frac{1}{3}\cdot 18 - \frac{1}{3}\cdot 18\\
&= 3.
\end{aligned}$$

b) Tìm phương sai của W.

$$\begin{aligned}
\sigma^2_W = Var(W) &= Var\left(\frac{1}{2}X_1 + \frac{1}{2}X_2 - \frac{1}{3}Y_1 - \frac{1}{3}Y_2 - \frac{1}{3}Y_3\right)\\
&= \left(\frac{1}{2}\right)^2\cdot 8 + \left(\frac{1}{2}\right)^2\cdot 8 + \left(-\frac{1}{3}\right)^2\cdot 11 + \left(-\frac{1}{3}\right)^2\cdot 11 + \left(-\frac{1}{3}\right)^2\cdot 11\\
&= \frac{23}{3}.
\end{aligned}$$

c) Tìm $\mathbb{P}(W \le 0)$.

Ta có $W \sim N\left(3; \frac{23}{3}\right)$, do đó

$$\mathbb{P}(W \le 0) = \mathbb{P}\left(\frac{W-3}{\sqrt{\frac{23}{3}}} \le \frac{0-3}{\sqrt{\frac{23}{3}}}\right) = \mathbb{P}\left(Z \le -\frac{3\sqrt{69}}{23}\right) \approx 0.1393.$$

□