CHỦ ĐỀ 3.1 KIỂM ĐỊNH GIẢ THUYẾT MỘT MẪU

Trong chủ đề này, các em phải nắm và thực hiện được các nội dung như sau

1) Nắm được 5 bước cơ bản trong bài toán kiểm định gồm

   - ☑ **B1.** Phát biểu giả thuyết kiểm định.
   - ☑ **B2.** Xác định mức ý nghĩa α.
   - ☑ **B3.** Tính giá trị thống kê kiểm định.
   - ☑ **B4.** Xác định miền bác bỏ hoặc tính $p-$giá trị.
   - ☑ **B5.** So sánh và kết luận.

2) Thực hiện được kiểm định giả thuyết cho trung bình khi phương sai đã biết.

3) Thực hiện được kiểm định giả thuyết cho trung bình khi phương sai chưa biết.

4) Thực hiện được kiểm định giả thuyết cho tỷ lệ.

1. KIỂM ĐỊNH MỘT MẪU CHO TRUNG BÌNH

1.1. KIỂM ĐỊNH TRUNG BÌNH (SO SÁNH TRUNG BÌNH VỚI MỘT SỐ) TRƯỜNG HỢP PHƯƠNG SAI ĐÃ BIẾT

- ☑ **B1.** Phát biểu giả thuyết kiểm định.
- ☑ **B2.** Xác định mức ý nghĩa α.
- ☑ **B3.** Tính giá trị thống kê kiểm định:

$$Z_0 = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}.$$

- ☑ **B4.** Xác định miền bác bỏ.

Đối thuyết	Miền bác bỏ
$H_1 : \mu \neq \mu_0$	$\lvert z_0 \rvert > z_{1-\alpha/2}$
$H_1 : \mu < \mu_0$	$z_0 < -z_{1-\alpha}$
$H_1 : \mu > \mu_0$	$z_0 > z_{1-\alpha}$

Ngược lại, chưa đủ cơ sở bác bỏ H_0.

- ☑ **B5.** So sánh và kết luận.

Ở Bước 4, ta có thể sử dụng $p-$giá trị thay thế bằng cách tính $p-$giá trị theo bảng dưới đây

Đối thuyết	$p-$giá trị
$H_1 : \mu \neq \mu_0$	$p-$giá trị $= 2\left[1-\Phi(\lvert z_0\rvert)\right]$
$H_1 : \mu < \mu_0$	$p-$giá trị $= \Phi(z_0)$
$H_1 : \mu > \mu_0$	$p-$giá trị $= 1-\Phi(z_0)$

Bác bỏ H_0 khi $p-$giá trị $< \alpha$. Ngược lại, chưa đủ cơ sở bác bỏ H_0.

BÀI 3.1 (Câu 2 - Đề 1 HKI 22-23). Một hệ thống tên lửa phản lực sử dụng động cơ đẩy nhiên liệu rắn. Tốc độ cháy của nhiên liệu rắn là một đặc trưng quan trọng của động cơ. Các kỹ sư biết rằng độ lệch chuẩn của tốc độ cháy là 2 cm/s. Các kỹ sư chọn cỡ mẫu là $n = 25$ thu được trung bình mẫu tốc độ cháy là $\bar{x} = 51{,}3$ cm/s. Biết rằng tốc độ cháy tuân theo phân phối chuẩn.

a) Tìm khoảng tin cậy 95% cho tốc độ cháy trung bình của nhiên nhiên liệu.

b) Thông số kỹ thuật yêu cầu tốc độ cháy trung bình của thanh nhiên liệu là 50 cm/s. Dựa trên dữ liệu đã thu thập được, hãy kiểm định xem thông số kỹ thuật này có được đáp ứng hay không với mức ý nghĩa 1%.

✍ **LỜI GIẢI.**

Gọi X (cm/s) là tốc độ cháy của thanh nhiên liệu rắn.
Theo đề bài, ta có $X \sim N(\mu; \sigma^2)$ với $\sigma = 2$: đã biết.
$n = 25$; $\bar{x} = 51{,}3$.

a) Tìm khoảng tin cậy 95% cho tốc độ cháy trung bình của nhiên nhiên liệu.

- ☑ **Độ tin cậy:** $95\% \Rightarrow \alpha = 0{,}05$.
  $\Rightarrow z_{1-\alpha/2} = z_{0{,}975} \approx 1{,}96$.
- ☑ **Sai số:** $\epsilon = z_{1-\alpha/2} \cdot \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$
  $= 1{,}96 \cdot \dfrac{2}{\sqrt{25}}$
  $= 0{,}784$.
- ☑ **KTC** 95% **cho trung bình** μ **là:**

$$\begin{aligned} \bar{x}-\epsilon \leq &\ \mu \leq \bar{x}-\epsilon \\ \Leftrightarrow 51{,}3-0{,}784 \leq &\ \mu \leq 51{,}3+0{,}784 \\ \Leftrightarrow 50{,}516 \leq &\ \mu \leq 52{,}084 \end{aligned}$$

$\Rightarrow \mu \in [50{,}516; 52{,}084]$.

b) Thông số kỹ thuật yêu cầu tốc độ cháy trung bình của thanh nhiên liệu là 50 cm/s. Dựa trên dữ liệu đã thu thập được, hãy kiểm định xem thông số kỹ thuật này có được đáp ứng hay không với mức ý nghĩa 1%.
$\sigma = 2$: đã biết.
Ta có: $n = 25$; $\bar{x} = 51{,}3$.

- ☑ **Giả Thuyết KĐ:** $\begin{cases} H_0 : \mu = 50 \\ H_1 : \mu \neq 50 \end{cases}$: KĐ 2 phía, $\mu_0 = 50$.
- ☑ **Mức ý nghĩa:** $\alpha = 0{,}01$.

☑ **Giá trị Thống kê kiểm định:**

$$z_0 = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} = \frac{51{,}3 - 50}{\frac{2}{\sqrt{25}}} = 3{,}25.$$

☑ **Miền bác bỏ:** Bác bỏ H_0 nếu $|z_0| > z_{1-\alpha/2}$.
Ta có $\alpha = 0{,}01$
$\Rightarrow z_{1-\alpha/2} = z_{0{,}995} \approx 2{,}58$.

☑ **So sánh**
Ta có: $|z_0| > z_{1-\alpha/2}$
$\Leftrightarrow |3{,}25| > z_{1-\alpha/2}$
$\Leftrightarrow 3{,}25 > 2{,}58$ (sai)
$\Rightarrow$ Chưa đủ cơ sở để bác bỏ $H_0 : \mu = 50$.
Kết luận: Với mức ý nghĩa 1% thì tốc độ cháy trung bình của thanh nhiên liệu là 50 cm/s hay thông số kỹ thuật này được đáp ứng.

□

BÀI 3.2 (Câu 2 - Đề 2 HKI 22-23). Nhiệt độ nước trung bình hạ lưu từ ống tháp xả giải nhiệt của nhà máy điện không được lớn hơn 100°F. Kinh nghiệm quá khứ đã chỉ ra rằng độ lệch chuẩn của nhiệt độ là 2°F. Nhiệt độ nước được đo trên chín ngày được lựa chọn ngẫu nhiên, và nhiệt độ trung bình được tìm thấy là 98°F. Biết rằng nhiệt độ nước tuân theo phân phối chuẩn.

a) Tìm khoảng tin cậy 96% cho nhiệt độ nước trung bình.

b) Có bằng chứng gì cho ta thấy nhiệt độ nước có thể chấp nhận được hay không với mức ý nghĩa 2%?

✍ **LỜI GIẢI.**
Gọi X (°F) là nhiệt độ hạ lưu từ ống tháp xả giải nhiệt của nhà máy điện.
Theo đề bài, ta có $X \sim N(\mu; \sigma^2)$ với $\sigma = 2$: đã biết.
$n = 9$; $\bar{x} = 98$.

a) Tìm khoảng tin cậy 96% cho nhiệt độ nước trung bình.
• **Độ tin cậy:** 96% $\Rightarrow \alpha = 0.04$.
$\Rightarrow z_{1-\alpha/2} = z_{0.98} \approx 2.05$.
• **Sai số:** $\epsilon = z_{1-\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$
$= 2.05 \cdot \frac{2}{\sqrt{9}}$
$= \frac{41}{30}$
≈ 1.3667.
• **KTC** 96% **cho trung bình** μ **là:**

$$\begin{aligned} \bar{x} - \epsilon \leq & \quad \mu \quad \leq \bar{x} - \epsilon \\ \Leftrightarrow 98 - 1.3667 \leq & \quad \mu \quad \leq 98 + 1.3667 \\ \Leftrightarrow 96.6333 \leq & \quad \mu \quad \leq 99.3667 \end{aligned}$$

$\Rightarrow \mu \in [96.6333; 99.3667]$.

b) Có bằng chứng gì cho ta thấy nhiệt độ nước có thể chấp nhận được hay không với mức ý nghĩa 2%?
$\sigma = 2$: chưa biết.
Ta có: $n = 9$; $\bar{x} = 98$.
• **Giả Thuyết KĐ:** $\begin{cases} H_0 : \mu \leq 100 \\ H_1 : \mu > 100 \end{cases}$: KĐ 1 phía, $\mu_0 = 100$.
• **Mức ý nghĩa:** $\alpha = 0.02$.
• **Giá trị Thống kê kiểm định:**

$$z_0 = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} = \frac{98 - 100}{\frac{2}{\sqrt{9}}} = -3.$$

• **Miền bác bỏ:** Bác bỏ H_0 nếu $z_0 > z_{1-\alpha}$.
Ta có $\alpha = 0.02$
$\Rightarrow z_{1-\alpha} = z_{0.98} \approx 2.05$.
• **So sánh và kết luận:**
Ta có: $z_0 > z_{1-\alpha}$
$\Leftrightarrow -3 > 2.05$ (sai)
$\Rightarrow$ Chưa đủ cơ sở để bác bỏ $H_0 : \mu \leq 100$.
Kết luận: Với mức ý nghĩa 2% thì nhiệt độ nước không vượt quá 100°F hay nhiệt độ có thể chấp nhận được.

□

1.2. KIỂM ĐỊNH TRUNG BÌNH (SO SÁNH TRUNG BÌNH VỚI MỘT SỐ) TRƯỜNG HỢP PHƯƠNG SAI CHƯA BIẾT

- ☑ **B1.** Phát biểu giả thuyết kiểm định.
- ☑ **B2.** Xác định mức ý nghĩa α.
- ☑ **B3.** Tính giá trị thống kê kiểm định

$$T_0 = \frac{\bar{X} - \mu_0}{s/\sqrt{n}}$$

- ☑ **B4.** Xác định miền bác bỏ.

Đối thuyết	Miền bác bỏ
$H_1 : \mu \neq \mu_0$	$\lvert t_0 \rvert > t_{\alpha/2;n-1}$
$H_1 : \mu < \mu_0$	$t_0 < -t_{\alpha;n-1}$
$H_1 : \mu > \mu_0$	$t_0 > t_{\alpha;n-1}$

Ngược lại, chưa đủ cơ sở bác bỏ H_0.

- ☑ **B5.** Kết luận.

BÀI 3.3 (Câu 3 - Đề 2 CKI 19-20). Hàm lượng natri của hai mươi hộp bắp hữu cơ 300 gram được xác định. Dữ liệu (tính bằng miligam) như sau:

131.15	130.69	130.91	129.54	129.64	128.77	130.72	128.33	128.24	129.65
130.14	129.29	128.71	129.00	129.39	130.42	129.53	130.12	129.78	130.92

Giả sử rằng hàm lượng natri có phân phối chuẩn. Bạn hãy kiểm định xem giá trị trung bình có khác 130 milligram với $\alpha = 0.05$?

✍ **LỜI GIẢI.**

Gọi X (milligram) là hàm lượng natri của mỗi hộp bắp hữu cơ 300 gram.
Ta có: $n = 20$; $\bar{x} = 129.747$; $s = 0.87643$.
Phương sai σ^2 : chưa biết.

• **Giả Thuyết KĐ:** $\begin{cases} H_0 : \mu = 130 \\ H_1 : \mu \neq 130 \end{cases}$: KĐ 2 phía, $\mu_0 = 130$.

• **Mức ý nghĩa:** $\alpha = 0.05$.

• **Giá trị Thống kê kiểm định:**

$$t_0 = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\frac{s}{\sqrt{n}}} = \frac{129.747 - 130}{\frac{0.87643}{\sqrt{20}}} \approx -1.29098.$$

• **Miền bác bỏ:** Bác bỏ H_0 nếu $|t_0| > t_{\frac{\alpha}{2};n-1}$.

Ta có $\alpha = 0.05$

$\Rightarrow t_{\frac{\alpha}{2};n-1} = t_{0.025;19} = 2.093$.

• **So sánh và kết luận:**

Ta có: $|t_0| > t_{\frac{\alpha}{2};n-1}$

$\Leftrightarrow |-1.29098| > 2.093$

$\Leftrightarrow 1.29098 > 2.093$ (sai)

$\Rightarrow$ Chưa đủ cơ sở để bác bỏ $H_0 : \mu = 130$.

Kết luận: Với mức ý nghĩa 5%, hàm lượng natri trung bình của mỗi hộp bắp hữu cơ 300 gram là 130 milligram. □

BÀI 3.4 (Câu 3 - Đề 3 CKII 19-20). Một máy đóng gói các sản phẩm có khối lượng 1 kg. Nghi ngờ máy hoạt động không bình thường, người ta chọn ra một mẫu ngẫu nhiên gồm 100 sản phẩm thì thấy như sau

Khối lượng	0.95	0.97	0.99	1.01	1.03	1.05
Số gói	9	31	40	15	3	2

Với mức ý nghĩa 5%, hãy kết luận về nghi ngờ trên.

✍ **LỜI GIẢI.**

Gọi X (kg) là khối lượng của mỗi sản phẩm.
Theo đề bài: $X \sim N(\mu; \sigma^2)$
σ^2: chưa biết.
Ta có: $n = 100$; $\bar{x} = 1.1746$; $s \approx 1.3390$.

• **Giả Thuyết KĐ:** $\begin{cases} H_0 : \mu = 1 \\ H_1 : \mu \neq 1 \end{cases}$: KĐ 2 phía, $\mu_0 = 1$.

• **Mức ý nghĩa:** $\alpha = 5\% = 0.05$.

• **Giá trị Thống kê kiểm định:**

$$t_0 = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\frac{s}{\sqrt{n}}} = \frac{1.1746 - 1}{\frac{1.3390}{\sqrt{100}}} \approx 1.30396.$$

• **Miền bác bỏ:** Bác bỏ H_0 nếu $|t_0| > t_{\alpha/2;n-1}$.

Ta có $\alpha = 0.05$

$\Rightarrow t_{\alpha/2;n-1} = t_{0.025;99} \approx z_{0.975} \approx 1.96.$

• **So sánh và kết luận:**

Ta có: $|t_0| > t_{\alpha/2;n-1}$

$\Leftrightarrow |1.30396| > 1.96$

$\Leftrightarrow 1.30396 > 1.96$ (sai)

$\Rightarrow$ chưa đủ cơ sở để bác bỏ $H_0 : \mu = 1$.

Kết luận: Với mức ý nghĩa 5% thì khối lượng của mỗi sản phẩm vẫn là 1 kg hay nghi ngờ máy hoạt động không bình thường là không đúng. □

BÀI 3.5 (Câu 2 - Đề 2 CKII 19-20). Một trung tâm khám chữa bệnh tuyên bố rằng thời gian trung bình một bệnh nhân chờ khám không quá 20 phút. Một cuộc khảo sát ngẫu nhiên 35 bệnh nhân cho thấy thời gian chờ khám trung bình là 24.77 phút và độ lệch chuẩn là 7.26 phút. Giả sử thời gian chờ khám là đại lượng ngẫu nhiên có phân phối chuẩn. Dựa vào dữ liệu khảo sát, hãy kiểm tra tuyên bố của phòng khám đó có đúng không với mức ý nghĩa 3%.

✍ **LỜI GIẢI.**

Gọi X (phút) là thời gian một bệnh nhân chờ khám tại trung tâm.

Theo đề bài: $X \sim N(\mu; \sigma^2)$

σ^2: chưa biết.

Ta có: $n = 35$; $\bar{x} = 24.77$; $s \approx 7.26$.

• **Giả Thuyết KĐ:** $\begin{cases} H_0 : \mu \leq 20 \\ H_1 : \mu > 20 \end{cases}$: KĐ 1 phía, $\mu_0 = 20$.

• **Mức ý nghĩa:** $\alpha = 3\% = 0.03$.

• **Giá trị Thống kê kiểm định:**

$$t_0 = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\frac{s}{\sqrt{n}}} = \frac{24.77 - 20}{\frac{7.26}{\sqrt{35}}} \approx 3.8870.$$

• **Miền bác bỏ:** Bác bỏ H_0 nếu $t_0 > t_{\alpha;n-1}$.

Ta có $\alpha = 0.03$

$\Rightarrow t_{\alpha;n-1} = t_{0.03;34} \approx z_{0.97} \approx 1.88.$

• **So sánh và kết luận:**

Ta có: $t_0 > t_{\alpha;n-1}$

$\Leftrightarrow 3.8870 > 1.88$ (đúng)

$\Rightarrow$ bác bỏ $H_0 : \mu \leq 20$.

Kết luận: Với mức ý nghĩa 3% thì thời gian trung bình một bệnh nhân chờ khám hơn 20 phút hay tuyên bố của phòng khám đó không đúng. □

2. KIỂM ĐỊNH MỘT MẪU CHO TỶ LỆ

Với Y là số phần tử có tính chất A trong mẫu gồm n phần tử.

Mẫu: $n = ...$; $y = ...$ $\Rightarrow$ tỷ lệ mẫu $\hat{P} = \frac{y}{n}$.

☑ **B1.** Phát biểu giả thuyết kiểm định.

☑ **B2.** Xác định mức ý nghĩa α.

☑ **B3.** Tính giá trị thống kê kiểm định

$$Z_0 = \frac{\hat{P} - p_0}{\sqrt{\dfrac{p_0(1-p_0)}{n}}}$$

☑ **B4.** Xác định miền bác bỏ.

Đối thuyết	**Miền bác bỏ H_0**
$H_1: p \neq p_0$	$\lvert z_0 \rvert > z_{1-\alpha/2}$
$H_1: p < p_0$	$z_0 < -z_{1-\alpha}$
$H_1: p > p_0$	$z_0 > z_{1-\alpha}$

Ngược lại, chưa đủ cơ sở bác bỏ H_0.

☑ **B5.** Kết luận.

Ở **Bước 4**, ta có thể sử dụng $p-$giá trị thay thế bằng cách tính $p-$giá trị theo bảng dưới đây

Đối thuyết	**$p-$giá trị**
$H_1: p \neq p_0$	$p-$giá trị $= 2\left[1 - \Phi(\lvert z_0 \rvert)\right]$
$H_1: p < p_0$	$p-$giá trị $= \Phi(z_0)$
$H_1: p > p_0$	$p-$giá trị $= 1 - \Phi(z_0)$

Bác bỏ H_0 khi $p-$giá trị $< \alpha$. Ngược lại, chưa đủ cơ sở bác bỏ H_0.

BÀI 3.6 (Câu 2 - Đề 1 CKI 20-21). Giả sử rằng trong 1000 khách hàng được khảo sát có 850 người hài lòng hoặc rất hài lòng với các sản phẩm và dịch vụ của công ty. Gọi p là tỷ lệ người hài lòng hoặc rất hài lòng trong tất cả khách hàng. Kiểm định giả thuyết $H_0: p = 0.9$ với đối thuyết $H_1: p \neq 0.9$ với $\alpha = 0.05$. Tìm $p-$giá trị.

✍ **LỜI GIẢI.**

Gọi Y là số người hài lòng hoặc rất hài lòng trong tất cả khách hàng.

Ta có $n = 1000$, $y = 850 \Rightarrow$ tỷ lệ mẫu $\hat{p} = \dfrac{y}{n} = \dfrac{850}{1000} = 0.85$.

• **GTKĐ:** $\begin{cases} H_0: p = 0.9 \\ H_1: p \neq 0.9 \end{cases}$: KĐ 2 phía, $p_0 = 0.9$.

• **Mức ý nghĩa:** $\alpha = 0.05$.

• **Giá trị Thống kê kiểm định:**

$$z_0 = \frac{\hat{p} - p_0}{\sqrt{\dfrac{p_0(1-p_0)}{n}}} = \frac{0.85 - 0.9}{\sqrt{\dfrac{0.9(1-0.9)}{1000}}} \approx -5.2705.$$

• **Miền bác bỏ:** Bác bỏ H_0 nếu $\lvert z_0 \rvert > z_{1-\alpha/2}$.

Ta có $\alpha = 0.05$

$\Rightarrow z_{1-\alpha/2} = z_{0.975} \approx 1.96$.

• **So sánh và kết luận:**

Ta có: $\qquad |z_0| > z_{1-\alpha/2}$

$\Leftrightarrow |-5.2705| > 1.96$

$\Leftrightarrow 5.2705 > 1.96 \quad$ (đúng)

$\Rightarrow$ chưa đủ cở sở để bác bỏ $H_0 : p = 0.9$.

Kết luận: Với mức ý nghĩa 5% thì tỷ lệ người hài lòng hoặc rất hài lòng trong tất cả khách hàng không phải là 90%.

⋇ Tìm p-giá trị:

Ta có $p-$giá trị $= 2[1 - \Phi(|z_0|)] = 2[1 - \Phi(|-5.2705|)] = 2[1 - \Phi(5.2705)] \approx 2[1-1] = 0$. □

BÀI 3.7 (Câu 2 - Đề 2 CKI 20-21). Giả sử người ta kiểm tra 500 thành phần máy móc do một nhà máy sản xuất và thấy có 10 thành phần bị loại bỏ. Gọi p là tỷ lệ thành phần bị loại bỏ do nhà máy sản xuất. Kiểm định giả thuyết $H_0 : p = 0{,}03$ với đối thuyết $H_1 : p < 0{,}03$, sử dụng $\alpha = 0{,}05$. Tìm $p-$giá trị.

✍ **LỜI GIẢI.**

Ta có: $n = 500$, $y = 10 \Rightarrow$ tỷ lệ mẫu $\hat{p} = \dfrac{y}{n} = \dfrac{10}{500} = 0.02$.

• **GTKĐ:** $\begin{cases} H_0 : p = 0.03 \\ H_1 : p < 0.03 \end{cases}$: $\qquad$ KĐ 1 phía, $p_0 = 0.03$.

• **Mức ý nghĩa:** $\alpha = 0.05$.

• **Giá trị Thống kê kiểm định:**

$$z_0 = \frac{\hat{p} - p_0}{\sqrt{\dfrac{p_0(1-p_0)}{n}}} = \frac{0.02 - 0.03}{\sqrt{\dfrac{0.03(1-0.03)}{500}}} \approx -1.31081.$$

• **Miền bác bỏ:** Bác bỏ H_0 nếu $z_0 < -z_{1-\alpha}$.

Ta có $\alpha = 0.05$

$\Rightarrow -z_{1-\alpha} = -z_{0.95} = -1.64485$.

• **So sánh và kết luận:**

Ta có: $\qquad z_0 < -z_{1-\alpha}$

$\Leftrightarrow -1.31081 < -1.64485 \quad$ (sai)

$\Rightarrow$ Chưa đủ cơ sở để bác bỏ $H_0 : p = 0.03$.

Kết luận: Với mức ý nghĩa 1%, tỷ lệ thành phần bị loại bỏ do nhà máy sản xuất là 0.03.

• **$p-$giá trị**

$p-$giá trị $= \Phi(z_0) = \Phi(-1.31081) \approx 0.09496$. □

BÀI 3.8 (Câu 4 - Đề 3 CKII 19-20). Một bài báo trên tạp chí y khoa Anh "So sánh điều trị sỏi thận bằng phẫu thuật phẫu thuật, cắt bỏ sỏi thận, và Lithotrips sóng bổ sung," (1986, Vol. 292, pp. 879–882)] thấy rằng tác động qua da (PN) có tỷ lệ thành công trong việc loại bỏ sỏi thận của 289 trong số 350 bệnh nhân. Phương pháp truyền thống đạt hiệu quả 78%. Có bằng chứng gì cho thấy tỉ lệ thành công của PN lớn hơn so với truyền thống với mức ý nghĩa $\alpha = 1\%$? Tìm $p-$giá trị.

✍ **LỜI GIẢI.**

Gọi Y là số bệnh nhân loại bỏ sỏi thận thành công bằng phương pháp PN.

Ta có: $n = 350$, $y = 289 \Rightarrow$ tỷ lệ mẫu $\hat{p} = \dfrac{y}{n} = \dfrac{289}{350}$.

• **GTKĐ:** $\begin{cases} H_0 : p \le 0.78 \\ H_1 : p > 0.78 \end{cases}$: $\qquad$ KĐ 1 phía, $p_0 = 78\% = 0.78$.

• **Mức ý nghĩa:** $\alpha = 1\% = 0.01$.

• **Giá trị Thống kê kiểm định:**

$$z_0 = \frac{\hat{p} - p_0}{\sqrt{\dfrac{p_0(1-p_0)}{n}}} = \frac{\dfrac{289}{350} - 0.78}{\sqrt{\dfrac{0.78(1-0.78)}{350}}} \approx 0.9032.$$

• **Miền bác bỏ:** Bác bỏ H_0 nếu $z_0 > z_{1-\alpha}$.
Ta có $\alpha = 0.01$
$\Rightarrow z_{1-\alpha} = z_{0.99} \approx 2.33.$
• **So sánh và kết luận:**
Ta có: $\quad z_0 > z_{1-\alpha}$
$\Leftrightarrow 0.9032 > 2.33 \quad$ (sai)
$\Rightarrow$ chưa đủ cơ sở để bác bỏ $H_0 : p \leq 0.78$.
Kết luận: Với mức ý nghĩa 1% thì tỉ lệ thành công của PN không lớn hơn 0.78 hay không có bằng chứng cho thấy tỉ lệ thành công của PN lớn hơn so với truyền thống.
※ Tính p-giá trị:

$$p - \text{giá trị} = 1 - \Phi(z_0) = 1 - \Phi(0.9032) \approx 1 - 0.8168 = 0.1832.$$

□

BÀI 3.9 (Câu 3 - Đề 1 HKI 22-23). Một nhà sản xuất chất bán dẫn sản xuất bộ điều khiển sử dụng trong công nghệ động cơ ô tô. Nhà sản xuất bán dẫn lấy mẫu ngẫu nhiên gồm 200 sản phẩm và thấy rằng có bốn sản phẩm bị lỗi.

a) Tìm khoảng tin cậy 95% cho tỷ lệ lỗi của sản phẩm.

b) Khách hàng yêu cầu tỷ lệ lỗi của sản phẩm phải dưới 0,05. Hỏi nhà sản xuất có thể chứng minh khả năng đáp ứng ở mức chất lượng này cho khách hàng không? Sử dụng mức ý nghĩa 1%.

✍ **LỜI GIẢI.**

a) Tìm khoảng tin cậy 95% cho tỷ lệ lỗi của sản phẩm.
Gọi Y là số sản phẩm bị lỗi.
Ta có: $n = 200$, $y = 4 \Rightarrow$ tỷ lệ mẫu $\hat{p} = \dfrac{y}{n} = \dfrac{4}{200} = 0{,}02.$
• **Độ tin cậy:** 95% $\Rightarrow \alpha = 0{,}05$.
$\Rightarrow z_{1-\alpha/2} = z_{0{,}975} \approx 1{,}96.$
• **Sai số:** $\epsilon = z_{1-\alpha/2} \cdot \sqrt{\dfrac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}$
$= 1{,}96 \cdot \sqrt{\dfrac{0{,}02\,(1-0{,}02)}{200}}$
$\approx 0{,}0194.$
• **KTC 95% cho tỷ lệ p là**

$$\begin{aligned} \hat{p} - \epsilon \leq \;& p \leq \hat{p} + \epsilon \\ \Leftrightarrow 0{,}02 - 0{,}0194 \leq \;& p \leq 0{,}02 + 0{,}0194 \\ \Leftrightarrow 0{,}0006 \leq \;& p \leq 0{,}0394 \end{aligned}$$

$\Rightarrow p \in [0{,}0006; 0{,}0394].$

b) Khách hàng yêu cầu tỷ lệ lỗi của sản phẩm phải dưới 0,05. Hỏi nhà sản xuất có thể chứng minh khả năng đáp ứng ở mức chất lượng này cho khách hàng không? Sử dụng mức ý nghĩa 1%.

• **GTKĐ:** $\begin{cases} H_0 : p \geq 0{,}05 \\ H_1 : p < 0{,}05 \end{cases}$: KĐ 1 phía, $p_0 = 0{,}05$.

• **Mức ý nghĩa:** $\alpha = 1\% = 0{,}01$.

• **Giá trị Thống kê kiểm định:**

$$z_0 = \frac{\hat{p} - p_0}{\sqrt{\dfrac{p_0(1-p_0)}{n}}} = \frac{0{,}02 - 0{,}05}{\sqrt{\dfrac{0{,}05(1-0{,}05)}{200}}} \approx -1{,}9467.$$

• **Miền bác bỏ:** Bác bỏ H_0 nếu $z_0 < -z_{1-\alpha}$.

Ta có $\alpha = 0{,}01$

$\Rightarrow -z_{1-\alpha} = -z_{0{,}99} \approx -2{,}33$.

• **So sánh và kết luận:**

Ta có: $z_0 < -z_{1-\alpha}$

$\Leftrightarrow -1{,}9467 < -2{,}33$ (sai)

$\Rightarrow$ Chưa đủ cơ sở để bác bỏ $H_0 : p \geq 0{,}05$.

Kết luận: Với mức ý nghĩa 1% thì tỷ lệ lỗi của sản phẩm không dưới 0,05 hay nhà sản xuất không thể chứng minh khả năng đáp ứng ở mức chất lượng này cho khách hàng.

□

BÀI 3.10 (Câu 2 - Đề 2 HKI 22-23). Trong một mẫu ngẫu nhiên gồm 85 vòng bi trục khuỷu động cơ ôtô trong đó có 10 vòng bi độ nhám bề mặt hoàn thiện vượt quá các thông số kỹ thuật (gọi tắt là vượt chuẩn).

a) Tìm khoảng tin cậy 96% cho tỷ lệ vòng bi vượt chuẩn.

b) Dữ liệu này có cho thấy rằng tỷ lệ vòng bi vượt chuẩn là cao hơn 0.10 hay không với mức ý nghĩa 2%.

✍ LỜI GIẢI.

a) Tìm khoảng tin cậy 96% cho tỷ lệ vòng bi vượt chuẩn. Gọi Y là số vòng bi vượt chuẩn.

Ta có: $n = 85$, $y = 10 \Rightarrow$ tỷ lệ mẫu $\hat{p} = \dfrac{y}{n} = \dfrac{10}{85} = \dfrac{2}{17}$.

• **Độ tin cậy:** 96% $\Rightarrow \alpha = 0.04$.

$\Rightarrow z_{1-\frac{\alpha}{2}} = z_{0.98} \approx 2.05$.

• **Sai số:** $\epsilon = z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\dfrac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}$

$$= 2.05 \cdot \sqrt{\frac{\frac{2}{17}\left(1 - \frac{2}{17}\right)}{85}}$$

$$\approx 0.0716.$$

• **KTC** 96% **cho tỷ lệ** p **là**

$$\begin{aligned} \hat{p} - \epsilon \leq \; & p \leq \hat{p} + \epsilon \\ \Leftrightarrow \frac{2}{17} - 0.0716 \leq \; & p \leq \frac{2}{17} + 0.0716 \\ \Leftrightarrow 0.0460 \leq \; & p \leq 0.1892 \end{aligned}$$

$\Rightarrow p \in [0.0460; 0.1892]$.

b) Dữ liệu này có cho thấy rằng tỷ lệ vòng bi vượt chuẩn là cao hơn 0.10 hay không với mức ý nghĩa 2%.

• **GTKĐ:** $\begin{cases} H_0 : p \leq 0.10 \\ H_1 : p > 0.10 \end{cases}$: KĐ 1 phía, $p_0 = 0.10$.

• **Mức ý nghĩa:** $\alpha = 2\% = 0.02$.

• **Giá trị Thống kê kiểm định:**

$$z_0 = \frac{\hat{p} - p_0}{\sqrt{\dfrac{p_0(1-p_0)}{n}}} = \frac{\dfrac{2}{17} - 0.10}{\sqrt{\dfrac{0.10(1-0.10)}{85}}} \approx 0.5423.$$

• **Miền bác bỏ:** Bác bỏ H_0 nếu $z_0 > z_{1-\alpha}$.

Ta có $\alpha = 0.02$

$\Rightarrow z_{1-\alpha} = z_{0.98} \approx 2.05$.

• **So sánh và kết luận:**

Ta có: $z_0 > z_{1-\alpha}$

$\Leftrightarrow 0.5423 > 2.05$ (sai)

$\Rightarrow$ Chưa đủ cơ sở để bác bỏ $H_0 : p \leq 0.10$.

Kết luận: Với mức ý nghĩa 2% thì tỷ lệ vòng bi vượt chuẩn không cao hơn 0.10.

□

BÀI 3.11 (Câu 1 - Đề 2 CKI 18-19). Thực hiện một khảo sát xã hội về số tiền chi trả cho các hoạt động vui chơi giải trí trong 1 tháng của 400 thanh niên tại TP.HCM người ta thu được bảng sau:

Số tiền (USD)	50 – 80	80 – 120	120 – 160	160 – 200	200 – 220	220 – 250
Số người	50	80	100	80	60	30

Giả thiết số tiền phải bỏ ra cho các hoạt động vui chơi giải trí trong một tháng của một thanh niên tại TP.HCM là một đại lượng ngẫu nhiên phân phối theo qui luật chuẩn.

a) Ước lượng số tiền trung bình một thanh niên phải bỏ ra với độ tin cậy 95%. (1.5đ)

b) Những thanh niên bỏ ra trên 200 USD/tháng cho các hoạt động vui chơi là những thanh niên khá giả. Hãy ước lượng tỉ lệ những thanh niên khá giả với độ tin cậy 97%. Nếu muốn sai số ≤ 0.01 thì phải khảo sát thêm bao nhiêu thanh niên? (2.5đ)

c) Một nhà nghiên cứu xã hội cho rằng cứ 100 thanh niên ở TP.HCM thì có 30 người thuộc diện khá giả, trong khi nhà thống kê lại tỏ ra nghi ngờ và họ cho rằng con số này thực sự phải nhỏ hơn con số thống kê do nhà nghiên cứu ngày đưa ra. Vậy theo các bạn, ý kiến nào đúng đắn với mức ý nghĩa $\alpha = 5\%$. (1.5đ)

d) Lời khẳng định: "Tỷ lệ thanh niên có thu nhập hạn chế là 50%" có được chấp nhận hay không, mức ý nghĩa 1%. Biết rằng một thanh niên được gọi là có thu nhập hạn chế nếu số tiền bỏ ra cho hoạt động vui chơi dưới 120 USD/tháng. (1.5đ)

✍ **LỜI GIẢI.**

Ta có

Số tiền (USD)	65	100	140	180	210	235
Số người	50	80	100	80	60	30

Gọi X_1 là số tiền chi trả cho hoạt động vui chơi giải trí trong 1 tuần của thanh niên tại Tp.HCM. (đv: USD)

a) Ta có $n = 400$; $\bar{x} = 148.25$; $s = 51.90$.
Phương sai σ^2: chưa biết.

- **Độ tin cậy:** $95\% \Rightarrow \alpha = 0.05. \Rightarrow t_{\alpha/2;n-1} = t_{0.025;399} = 1.96$
- **Sai số:** $\epsilon = t_{\alpha/2;n-1} \cdot \dfrac{s}{\sqrt{n}}$

$$= 1.96 \cdot \frac{51.90}{\sqrt{400}}$$
$$\approx 5.0862.$$

- **Khoảng tin cậy** 95% **cho** μ **là:**

$$\begin{aligned} \bar{x} - \epsilon \leq & \quad \mu \quad \leq \bar{x} + \epsilon \\ \Leftrightarrow 148.25 - 5.0862 \leq & \quad \mu \quad \leq 148.25 + 5.0862 \\ \Leftrightarrow 143.1638 \leq & \quad \mu \quad \leq 153.3362 \end{aligned}$$

$\Rightarrow \mu \in [143.1638; 153.3362]$.

b) Gọi Y là số thanh niên khá giả.
Ta có $y = 60 + 30 = 90$, $n = 400 \Rightarrow \hat{p} = \dfrac{y}{n} = \dfrac{90}{400} = 0{,}225$.

- **Độ tin cậy:** $97\% \Rightarrow \alpha = 0.03$
$\Rightarrow z_{1-\alpha/2} = z_{0.985} = 2.17$.
- **Sai số:** $\epsilon = z_{1-\alpha/2} \cdot \sqrt{\dfrac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} = 2.17 \cdot \sqrt{\dfrac{0{,}225(1-0{,}225)}{400}} \approx 0{,}0453$.
- **KTC** 97% **cho tỷ lệ** p **là**

$$\begin{aligned} \hat{p} - \epsilon \leq & \quad p \quad \leq \hat{p} + \epsilon \\ \Leftrightarrow 0{,}225 - 0{,}0453 \leq & \quad p \quad \leq 0{,}225 + 0{,}0453 \\ \Leftrightarrow 0.1797 \leq & \quad p \quad \leq 0.2703 \end{aligned}$$

$\Rightarrow p \in [0.1797; 0.2703]$.
Ta có $\epsilon = z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\dfrac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}$
Để $\epsilon \leq 0.01$ thì

$$n \geq \left(\frac{z_{1-\alpha/2}}{\epsilon}\right)^2 \cdot \hat{p}(1-\hat{p}) = \left(\frac{2.17}{0.01}\right)^2 \cdot 0{,}225(1-0{,}225) \approx 8211.14$$

Để $\epsilon \leq 0.01$ thì phải khảo sát ít nhất 8212 thanh niên.
Vậy để $\epsilon \leq 0.01$ thì phải khảo sát thêm $8212 - 400 = 7812$ thanh niên.

c) Gọi Y_1 là số thanh niên khá giả trong Tp.HCM.
Ta có $y_1 = 60 + 30 = 90$; $n = 400 \Rightarrow \hat{p}_1 = \dfrac{y_1}{n} = \dfrac{90}{400} = 0.225$

- **Giả thuyết kiểm định:** $\begin{cases} H_0 : p_1 \geq \dfrac{30}{100} \\ H_1 : p_1 < \dfrac{30}{100} \end{cases}$; KĐ 1 phía; $p_0 = \dfrac{30}{100} = 0.3$.
- **Mức ý nghĩa:** $\alpha = 0.05$.
- **Giá trị thống kê kiểm định**

$$z_0 = \frac{\hat{p}_1 - p_0}{\sqrt{\dfrac{p_0(1-p_0)}{n}}} = \frac{0.225 - 0.3}{\sqrt{\dfrac{0.3(1-0.3)}{400}}} = -3.2751.$$

• **Miền bác bỏ:** Bác bỏ H_0 khi $z_0 < -z_{1-\alpha}$ Ta có $\alpha = 0.05$
$\Rightarrow -z_{1-\alpha} = -z_{0.95} = -1.65$.
• **So sánh và kết luận:**
Ta có: $\quad z_0 < -z_{1-\alpha}$
$$\Leftrightarrow -3.2751 < -1.65 \quad \text{(đúng)}$$
$\Rightarrow$ Bác bỏ $H_0 : p \geq \dfrac{30}{100}$.
Kết luận: Với mức ý nghĩa 5% thì tỷ lệ người thuộc diện khá giả ít hơn 30% hay ý kiến nhà thống kê đúng.

d) Gọi Y_2 là số thanh niên có thu nhập thấp trong Tp.HCM.
Ta có $y_2 = 310$; $n = 400 \Rightarrow \hat{p}_2 = \dfrac{y_2}{n} = \dfrac{310}{400} = 0.775$
Giả thuyết kiểm định: $\begin{cases} H_0 : p_2 = 0.5 \\ H_1 : p_2 \neq 0.5 \end{cases}$; KĐ 2 phía; $p_0 = 0.5$.
• **Mức ý nghĩa:** $\alpha = 0.01$.
• **Giá trị thống kê kiểm định**
$$z_0 = \frac{\hat{p}_2 - p_0}{\sqrt{\dfrac{p_0(1-p_0)}{n}}} = \frac{0.775 - 0.5}{\sqrt{\dfrac{0.5(1-0.5)}{400}}} = 11$$
• **Miền bác bỏ:** Bác bỏ H_0 khi $|z_0| > z_{1-\alpha/2}$.
Ta có $\alpha = 0.01$
$\Rightarrow z_{1-\alpha/2} = z_{0.995} = 2.57$.
• **So sánh và kết luận:**
Ta có: $\quad |z_0| > z_{1-\alpha/2}$
$$\Leftrightarrow |11| > 2.57$$
$$\Leftrightarrow 11 > 2.57 \quad \text{(đúng)}$$
$\Rightarrow$ Bác bỏ $H_0 : p_2 = 0.5$.
Kết luận: Với mức ý nghĩa 1% thì tỷ lệ thanh niên có thu nhập hạn chế không phải là 50% hay lời khẳng định trên là không đúng.

□

BÀI 3.12 (Câu 1 - Đề 1 CKII 21-22). Biết trọng lượng X (g/quả) của mỗi quả trứng có phân phối chuẩn. Đem cân 100 quả trứng ta có kết quả sau:

x_i	155	160	165	170	175	180	185
n_i	5	12	14	25	24	14	6

Cho biết trứng có trọng lượng **lớn hơn** 170 g là trứng loại một.

a) Tìm khoảng tin cậy 97% cho trọng lượng trứng trung bình.

b) Tìm khoảng tin cậy 98% cho tỷ lệ trứng loại một. Nếu ta muốn sai số ước lượng không quá 0.1 g thì cần khảo sát thêm bao nhiêu trứng?

c) Có ý kiến cho rằng trọng lượng trứng trung bình lớn hơn 170 g/quả. Hãy kiểm định ý kiến trên ứng với mức ý nghĩa 1%.

d) Có ý kiến cho rằng 50% số trứng thuộc loại một. Hãy kiểm định ý kiến trên với mức ý nghĩa 1%.

✍ **LỜI GIẢI.**

Gọi X (cm/s) là tốc độ cháy của nhiên liệu rắn.
Theo đề bài, ta có $X \sim N(\mu; \sigma^2)$
σ^2: chưa biết.
Từ bảng dữ liệu, ta tính được: $n = 100$; $\bar{x} = 170.85$; $s \approx 7.7543$.

a) Tìm khoảng tin cậy 97% cho trọng lượng trứng trung bình

- **Độ tin cậy:** 97% $\Rightarrow \alpha = 0.03$.
$\Rightarrow t_{\alpha/2;n-1} = t_{0.015;99} \approx z_{0.985} \approx 2.17$.
- **Sai số:** $\epsilon = t_{\alpha/2;n-1} \cdot \dfrac{s}{\sqrt{n}}$
$= 2.17 \cdot \dfrac{7.7543}{\sqrt{100}}$
≈ 1.6827.
- **KTC** 97% **cho trung bình** μ **là:**

$$\begin{aligned} \bar{x} - \epsilon \leq &\ \mu \ \leq \bar{x} - \epsilon \\ \Leftrightarrow 170.85 - 1.6827 \leq &\ \mu \ \leq 170.85 + 1.6827 \\ \Leftrightarrow 169.1673 \leq &\ \mu \ \leq 172.5327 \end{aligned}$$

$\Rightarrow \mu \in [169.1673; 172.5327]$.

b) Tìm khoảng tin cậy 98% cho tỷ lệ trứng loại một.
Gọi Y là số trứng loại một.
Ta có: $n = 100$, $y = 24 + 14 + 6 = 44 \Rightarrow$ tỷ lệ mẫu $\hat{p} = \dfrac{y}{n} = \dfrac{44}{100} = 0.44$.

- **Độ tin cậy:** 98% $\Rightarrow \alpha = 0.02$.
$\Rightarrow z_{1-\frac{\alpha}{2}} = z_{0.99} \approx 2.33$.
- **Sai số:** $\epsilon = z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\dfrac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}$
$= 2.33 \cdot \sqrt{\dfrac{0.44\,(1-0.44)}{100}}$
≈ 0.1157.
- **KTC** 98% **cho tỷ lệ** p **là**

$$\begin{aligned} \hat{p} - \epsilon \leq &\ p \ \leq \hat{p} + \epsilon \\ \Leftrightarrow 0.44 - 0.1157 \leq &\ p \ \leq 0.44 + 0.1157 \\ \Leftrightarrow 0.3243 \leq &\ p \ \leq 0.5557 \end{aligned}$$

$\Rightarrow p \in [0.3243; 0.5557]$.
⋇ Nếu ta muốn sai số ước lượng không quá 0.1 g thì cần khảo sát thêm bao nhiêu trứng?
Để $\epsilon \leq 0.1$ thì

$$n \geq \left(\frac{z_{1-\alpha/2}}{\epsilon}\right)^2 \cdot \hat{p}(1-\hat{p}) = \left(\frac{2.33}{0.1}\right)^2 \cdot 0.44(1-0.44) \approx 133.7681.$$

$\Rightarrow n \geq 134$.
Do đó, để $\epsilon \leq 0.1$ thì phải khảo sát ít nhất 134 quả trứng.
Vậy để $\epsilon \leq 0.1$ thì phải khảo sát **thêm** $134 - 100 = 34$ quả trứng nữa.

c) Có ý kiến cho rằng trọng lượng trứng trung bình lớn hơn 170 g/quả. Hãy kiểm định ý kiến trên ứng với mức ý nghĩa 1%.

σ^2: chưa biết.
Ta có: $n = 100$; $\bar{x} = 170.85$; $s \approx 7.7543$.
• **Giả Thuyết KĐ:** $\begin{cases} H_0 : \mu \leq 170 \\ H_1 : \mu > 170 \end{cases}$: KĐ 1 phía, $\mu_0 = 170$.
• **Mức ý nghĩa:** $\alpha = 0.01$.
• **Giá trị Thống kê kiểm định:**

$$t_0 = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\frac{s}{\sqrt{n}}} = \frac{170.85 - 170}{\frac{7.7543}{\sqrt{100}}} \approx 1.0962.$$

• **Miền bác bỏ:** Bác bỏ H_0 nếu $t_0 > t_{\alpha;n-1}$.
Ta có $\alpha = 0.01$
$\Rightarrow t_{\alpha;n-1} = t_{0.01;99} \approx z_{0.99} \approx 2.33$.
• **So sánh và kết luận:**
Ta có: $t_0 > t_{\alpha;n-1}$
$\Leftrightarrow 1.0962 > 2.33$ (sai)
$\Rightarrow$ Chưa đủ cơ sở để bác bỏ $H_0 : \mu \leq 170$.
Kết luận: Với mức ý nghĩa 1%, trọng lượng trứng trung bình không lớn hơn 170 g.

d) Có ý kiến cho rằng 50% số trứng thuộc loại một. Hãy kiểm định ý kiến trên với mức ý nghĩa 1%.
Ta có: $n = 100$, $y = 24 + 14 + 6 = 44 \Rightarrow$ tỷ lệ mẫu $\hat{p} = \frac{y}{n} = \frac{44}{100} = 0.44$.
• **GTKĐ:** $\begin{cases} H_0 : p = 0.5 \\ H_1 : p \neq 0.5 \end{cases}$: KĐ 2 phía, $p_0 = 50\% = 0.5$.
• **Mức ý nghĩa:** $\alpha = 1\% = 0.01$.
• **Giá trị Thống kê kiểm định:**

$$z_0 = \frac{\hat{p} - p_0}{\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}} = \frac{0.44 - 0.5}{\sqrt{\frac{0.5(1-0.5)}{100}}} = -1.2.$$

• **Miền bác bỏ:** Bác bỏ H_0 nếu $|z_0| > z_{1-\alpha/2}$.
Ta có $\alpha = 0.01$
$\Rightarrow z_{1-\alpha/2} = z_{0.995} \approx 2.58$.
• **So sánh và kết luận:**
Ta có: $|z_0| > z_{1-\alpha/2}$
$|-1.2| > 2.58$
$\Leftrightarrow 1.2 > 2.58$ (sai)
$\Rightarrow$ Chưa đủ cơ sở để bác bỏ $H_0 : p = 0.5$.
Kết luận: Với mức ý nghĩa 1%, ý kiến cho rằng 50% số trứng thuộc loại một không được chấp nhận.

□

BÀI 3.13 (Câu 1 - Đề 2 CKII 20-21). Kết quả quan sát về hàm lượng Vitamin C của một loại trái cây cho bởi bảng sau

Hàm lượng Vitamin C (mg)	6	8	10	12	14	16
Số trái	5	10	20	35	25	5

a) Ước lượng hàm lượng Vitamin C trung bình trong một trái cây với độ tin cậy 90%.

b) Những trái có hàm lượng Vitamin C trên 11 mg trở lên là trái loại I. Ước lượng tỷ lệ trái loại I với độ tin cậy 92%.

c) Có ý kiến rằng hàm lượng Vitamin C trung bình là 10 mg. Với mức ý nghĩa 6%, hãy kiểm tra ý kiến trên.

d) Lời khẳng định: "Tỷ lệ trái cây loại I là 60%" có được chấp nhận hay không với mức ý nghĩa 4%.

✍ **LỜI GIẢI.**

Gọi X (mg) là hàm lượng vitamin C trong trái cây trên.
Giả sử $X \sim N(\mu; \sigma^2)$
σ^2: chưa biết.
Từ bảng số liệu đề bài, ta có: $n = 100$; $\bar{x} = 11.6$; $s \approx 2.4288$.

a) Ước lượng hàm lượng Vitamin C trung bình trong một trái cây với độ tin cậy 90%.
• **Độ tin cậy:** $90\% \Rightarrow \alpha = 0.1$.
$\Rightarrow t_{\alpha/2;n-1} = t_{0.05;99} \approx z_{0.95} \approx 1.645$.
• **Sai số:** $\epsilon = t_{\alpha/2;n-1} \cdot \dfrac{s}{\sqrt{n}}$
$= 1.645 \cdot \dfrac{2.4288}{\sqrt{100}}$
≈ 0.3995.
• **KTC** 90% **cho trung bình** μ **là:**

$$\begin{aligned} \bar{x} - \epsilon \leq \quad & \mu \quad \leq \bar{x} - \epsilon \\ \Leftrightarrow 11.6 - 0.3995 \leq \quad & \mu \quad \leq 11.6 + 0.3995 \\ \Leftrightarrow 11.2005 \leq \quad & \mu \quad \leq 11.9995 \end{aligned}$$

$\Rightarrow \mu \in [11.2005; 11.9995]$.

b) Những trái có hàm lượng Vitamin C trên 11 mg trở lên là trái loại I. Ước lượng tỷ lệ trái loại I với độ tin cậy 92%.
Gọi Y là số trái cây loại I.
Ta có: $n = 100$, $y = 35 + 25 + 5 = 65 \Rightarrow$ tỷ lệ mẫu $\hat{p} = \dfrac{y}{n} = \dfrac{65}{100} = 0.65$.
• **Độ tin cậy:** $92\% \Rightarrow \alpha = 0.08$.
$\Rightarrow z_{1-\frac{\alpha}{2}} = z_{0.96} \approx 1.75$.
• **Sai số:** $\epsilon = z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\dfrac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}$
$= 1.75 \cdot \sqrt{\dfrac{0.65\,(1-0.65)}{100}}$
≈ 0.0835.
• **KTC** 92% **cho tỷ lệ** p **là**

$$\begin{aligned} \hat{p} - \epsilon \leq \quad & p \quad \leq \hat{p} + \epsilon \\ \Leftrightarrow 0.65 - 0.0835 \leq \quad & p \quad \leq 0.65 + 0.0835 \\ \Leftrightarrow 0.5665 \leq \quad & p \quad \leq 0.7335 \end{aligned}$$

$\Rightarrow p \in [0.5665; 0.7335]$.

c) Có ý kiến rằng hàm lượng Vitamin C trung bình là 10 mg. Với mức ý nghĩa 6%, hãy kiểm tra ý kiến trên.

σ^2: chưa biết.
Ta có: $n = 100$; $\bar{x} = 11.6$; $s \approx 2.4288$.

• **Giả Thuyết KĐ:** $\begin{cases} H_0 : \mu = 10 \\ H_1 : \mu \neq 10 \end{cases}$: KĐ 2 phía, $\mu_0 = 10$.

• **Mức ý nghĩa:** $\alpha = 6\% = 0.06$.

• **Giá trị Thống kê kiểm định:**

$$t_0 = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\frac{s}{\sqrt{n}}} = \frac{11.6 - 10}{\frac{2.4288}{\sqrt{100}}} \approx 6.5876.$$

• **Miền bác bỏ:** Bác bỏ H_0 nếu $|t_0| > t_{\alpha/2;n-1}$.
Ta có $\alpha = 0.06$
$\Rightarrow t_{\alpha/2;n-1} = t_{0.03;99} \approx z_{0.97} \approx 1.88$.

• **So sánh và kết luận:**
Ta có: $|t_0| > t_{\alpha/2;n-1}$
$\Leftrightarrow |6.5876| > 1.88$
$\Leftrightarrow 6.5876 > 1.88$ (đúng)
$\Rightarrow$ bác bỏ $H_0 : \mu = 10$.
Kết luận: Với mức ý nghĩa 6%, những trái cây trên có hàm lượng vitamin C trung bình không phải là 10 mg.

d) Lời khẳng định: "Tỷ lệ trái cây loại I là 60%" có được chấp nhận hay không với mức ý nghĩa 4%.
Ta có $n = 100$, $y = 35 + 25 + 5 = 65 \Rightarrow$ tỷ lệ mẫu $\hat{p} = \frac{y}{n} = \frac{65}{100} = 0.65$.

• **GTKĐ:** $\begin{cases} H_0 : p = 0.6 \\ H_1 : p \neq 0.6 \end{cases}$: KĐ 1 phía, $p_0 = 60\% = 0.6$.

• **Mức ý nghĩa:** $\alpha = 4\% = 0.04$.

• **Giá trị Thống kê kiểm định:**

$$z_0 = \frac{\hat{p} - p_0}{\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}} = \frac{0.65 - 0.6}{\sqrt{\frac{0.6(1-0.6)}{100}}} \approx 1.0206.$$

• **Miền bác bỏ:** Bác bỏ H_0 nếu $|z_0| > z_{1-\alpha/2}$.
Ta có $\alpha = 0.04$
$\Rightarrow z_{1-\alpha/2} = z_{0.98} \approx 2.05$.

• **So sánh và kết luận:**
Ta có: $|z_0| > z_{1-\alpha/2}$
$\Leftrightarrow |1.0206| > 2.05$
$\Leftrightarrow 1.0206 > 2.05$ (sai)
$\Rightarrow$ chưa đủ cơ sở để bác bỏ $H_0 : p = 0.6$.
Kết luận: Với mức ý nghĩa 4% thì tỷ lệ trái cây loại I là 60%.

□