Hàm biến phức

Với bài tập và các đề Qualifying Exam

Biên soạn bởi:

Nguyễn Mạnh Tiến

Đào Mạnh Khang

Nguyễn Đình Thi

Nguyễn Ngọc Phát

Trần Minh Quân

TP. HCM, Hè 2012

Lời cảm ơn

Nhóm biên soạn xin dành những dòng đầu tiên để bày tỏ sự biết ơn chân thành đến GS. Đặng Đức Trọng, người đã tạo điều kiện tốt nhất để tài liệu này được hoàn thành cũng như tận tình giúp đỡ các thành viên của nhóm biện soạn trong bộ môn Giải tích.

Nhóm biên soạn cũng xin cảm ơn bạn Vương Quốc Hùng, sinh viên khóa 2010, khoa Toán-Tin học trường Đại học Khoa học Tự nhiên TP.HCM. Tài liệu này đã không thể hoàn chỉnh nếu thiếu những hình vẽ và trang bìa của bạn.

Phiên bản **3.0**

Cập nhật ngày **29** tháng **06** năm **2012**.

Dedicated to my family, especially my little brother,
who will enjoy these theorems one day.

Lời nói đầu

Tài liệu này là kết quả của quá trình học tập và rèn luyện của nhóm biên soạn tại khoa Toán-Tin học, trường ĐH Khoa học Tự nhiên TP.HCM, đồng thời cũng là tiểu luận của nhóm cho môn học Hàm biến phức. Về bố cục, tài liệu này gồm 4 phần chính với các mục tiêu khác nhau.

Phần đầu là những kiến thức cơ bản về hàm phức một biến, nhóm biên soạn đã tham khảo và trình bày theo hướng tiếp cận bằng hình học từ cuốn sách [1]. Với lợi thế trực quan và không kém phần chặt chẽ, hướng tiếp cận này cho ta nhiều kết quả tổng quát với những chứng minh chân phương hơn việc tiếp cận bằng chuỗi trong cuốn sách [2]. Tuy vậy, một số kết quả về chuỗi vẫn được đề cập, nhằm phục vụ cho những phần sau. Cũng với lý do này, một số định lý, kết quả đã được nhóm biên soạn thay đổi thứ tự trình bày cũng như cách phát biểu sao cho phù hợp nhất với phần bài tập và các đề thi.

Phần thứ hai gồm các bài tập tính toán cơ bản được tập hợp từ cuốn sách [4] với mục đích giúp người đọc rèn luyện kĩ năng tính toán cũng như trình bày ý nghĩa của tích phân phức trong các bài toán về vật lý và kĩ thuật.

Hai phần cuối của tài liệu bao gồm các bài tập lý thuyết. Nếu như phần thứ ba chủ yếu là các bài tập của các chương 10, 11 và 12 từ cuốn sách [2] thì phần thứ tư là các đề Qualifying Exam của các trường đại học lớn của Mỹ như Harvard, Stanford, UCLA, Wisconsin-Madison, Rutger, Courant Institute, Indiana... Một số đề thi cũ từ trước năm 1998 đã được nhóm biên soạn tham khảo từ [3], mặc dù hầu hết các lời giải đều được nhóm tiếp cận theo hướng khác. Ngoài ra, một số đề thi mới hơn cũng được bổ sung để cập nhật xu hướng ra đề của các trường. Cụ thể, các đề thi từ năm 2009 đến nay của các trường Harvard, UCLA và Wisconsin-Madison đều được đề cập và bàn luận cụ thể ở phần này. Khác với một số tài liệu hiện có trên internet chủ yếu giải các bài tính toán trong đề thi, tài liệu này tập trung nhiều hơn vào các bài toán lý thuyết.

Dù đã được kiểm tra rất nhiều lần một cách độc lập bởi các thành viên khác nhau trong nhóm biên soạn, tuy nhiên với khả năng và thời gian làm việc có hạn, chắc chắn tài liệu vẫn còn một số sai sót nhất định. Nhóm biên soạn vẫn luôn cố gắng chỉnh sửa để tài liệu ngày càng được hoàn thiện hơn. Mọi đóng góp về tài liệu này xin gửi về địa chỉ email `tth1ak10.ca@gmail.com`

Thành phố Hồ Chí Minh, ngày 29 tháng 06 năm 2012

Trưởng nhóm biên soạn

Nguyễn Mạnh Tiến

Mục lục

Phần I

Lý thuyết cơ bản

Chương 1

Đại số của số phức

Mục lục

1.1 Đại số của số phức

1.1.1 Sự tồn tại của số phức và các phép toán cơ bản

Ta đã biết rằng $\mathbb{R}$ là một trường, nghĩa là phép cộng và phép nhân được định nghĩa, thỏa tính chất kết hợp, giao hoán và phân phối. Số 0 và 1 là hai phần tử trung hòa duy nhất của phép cộng và phép nhân. Hơn nữa, phương trình $\beta + x = \alpha$ luôn có nghiệm và phương trình $\beta x = \alpha$ có nghiệm với mọi $\beta \neq 0$.

Tuy nhiên, không phải đa thức hệ số thực nào cũng có nghiệm trên $\mathbb{R}$, tức $\mathbb{R}$ chưa phải là một trường đóng đại số. Phương trình $x^2 + 1 = 0$ là một trong số những phương trình đơn giản nhất thuộc loại này, vì $\alpha^2 + 1$ luôn dương. Ta mong muốn xây dựng một trường $\mathbb{F}$ nhận $\mathbb{R}$ làm trường con và trong trường $\mathbb{F}$ này, phương trình $x^2 + 1 = 0$ có thể giải được. Giả sử đã xây dựng được $\mathbb{F}$, ta kí hiệu một nghiệm của phương trình $x^2 + 1 = 0$ là i. Ta dễ dàng kiểm tra được

$$\mathbb{C} = \left\{ z \in \mathbb{F} : \quad z = \alpha + i\beta \text{ với } \alpha, \beta \in \mathbb{R} \right\}$$

là một trường con của $\mathbb{F}$ và chứa $\mathbb{R}$. Trước hết, biểu diễn của các phần tử trong $\mathbb{C}$ là duy nhất, vì nếu $\alpha + i\beta = \alpha' + i\beta'$ thì ta suy ra $\alpha - \alpha' = -i(\beta - \beta')$, nên $(\alpha - \alpha') = -(\beta - \beta')^2$. Điều này xảy ra chỉ khi $\alpha = \alpha', \beta = \beta'$. Ngoài ra ta cũng kiểm tra được

$$\begin{aligned}
(\alpha + i\beta) + (\gamma + i\delta) &= (\alpha + \gamma) + i(\beta + \delta) \\
(\alpha + i\beta)(\gamma + i\delta) &= (\alpha\gamma - \beta\gamma) + i(\alpha\delta + \beta\gamma)
\end{aligned}$$

Ta sẽ chứng minh $\frac{\alpha + i\beta}{\gamma + i\delta}$ là một số phức với $\gamma + i\delta \neq 0$. Nếu thương số là $x + iy$, ta phải có

$$\alpha + i\beta = (\gamma + i\delta)(x + iy),$$

suy ra

$$\alpha + i\beta = (\gamma x - \delta y) + i(\delta x + \gamma y)$$

và do đó ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} \alpha & = \gamma x - \delta y \\ \beta & = \delta x + \gamma y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x & = \dfrac{\alpha\gamma + \beta\delta}{\gamma^2 + \delta^2} \\ y & = \dfrac{\beta\gamma - \alpha\delta}{\gamma^2 + \delta^2} \end{cases}$$

với $\gamma^2 + \delta^2$ khác không. Vậy nên

$$\frac{\alpha + i\beta}{\gamma + i\delta} = \frac{\alpha\gamma + \beta\delta}{\gamma^2 + \delta^2} + i\frac{\beta\gamma - \alpha\delta}{\gamma^2 + \delta^2}.$$

Ta đã chứng minh được $\frac{\alpha+i\beta}{\gamma+i\delta}$ là một số phức. Tuy nhiên ta có thể tính giá trị của nó một cách đơn giản hơn như sau:

$$\frac{\alpha + i\beta}{\gamma + i\delta} = \frac{(\alpha + i\beta)(\gamma - i\delta)}{(\gamma + i\delta)(\gamma - i\delta)} = \frac{(\alpha\gamma + \beta\delta) + i(\beta\gamma - \alpha\delta)}{\gamma^2 + \delta^2}$$

Trường hợp đặc biệt, nghịch đảo của một số phức khác không là:

$$\frac{1}{\alpha + i\beta} = \frac{\alpha}{\alpha^2 + \beta^2} - i\frac{\beta}{\alpha^2 + \beta^2}$$

Khi đó đa thức $x^2 + 1 = (x - i)(x + i)$ có đúng hai nghiệm trong $\mathbb{C}$, i và $-i$. Vậy $\mathbb{C}$ là trường nhỏ nhất chứa $\mathbb{R}$ mà trong đó phương trình $x^2 + 1 = 0$ có nghiệm.

Vậy công việc còn lại của ta sẽ là xây dựng một trường $\mathbb{F}$ sao cho phương trình $x^2 + 1$=0 có nghiệm. Lấy lại ý tưởng từ phép cộng và nhân của trường $\mathbb{C}$ như trên, ta xây dựng $\mathbb{F}$ như $\mathbb{R}^2$ với phép cộng và nhân được định nghĩa như sau:

$$\begin{cases} (\alpha, \beta) + (\alpha', \beta') & = (\alpha + \alpha', \beta + \beta') \\ (\alpha, \beta) . (\alpha', \beta') & = (\alpha\alpha' - \beta\beta', \alpha\beta' + \alpha'\beta) \end{cases} \tag{1.1.1}$$

Việc kiểm tra $\mathbb{F}$ là một trường hoàn toàn tương tự như trên. Khi đó trường $\mathbb{C}$ tương ứng cũng đúng bằng $\mathbb{F}$ và được gọi là *trường số phức*. Như vậy, (1.1.1) cho ta thấy $\mathbb{C}$ là không gian vector với phép cộng hoàn toàn giống với $\mathbb{R}^2$. Vậy nếu xem chuẩn của một phần tử trong $\mathbb{C}$ chính là chuẩn của phần tử tương ứng trong $\mathbb{R}^2$ thì mọi khái niệm metric (và do đó là topo) trên $\mathbb{C}$ giống với $\mathbb{R}^2$. Sự khác nhau giữa chúng giờ chỉ còn là phép nhân, chia. Chính điều này là nguyên nhân dẫn đến một loạt những điều bất ngờ về đạo hàm, tích phân của các hàm trên $\mathbb{C}$ ở những chương sau.

Ta nhận thấy $\{(\alpha, 0) \in \mathbb{C} : \ \alpha \in \mathbb{R}\}$ đẳng cấu (trường) với $\mathbb{R}$, do đó ta có thể xem $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$, ký hiệu $i = (0, 1)$, ta có

$$\begin{aligned} i^2 &= (1, 0) = 1 \\ (\alpha, \beta) &= a + i\beta \end{aligned}$$

Gọi α là phần thực và β là phần ảo của số phức $z = (\alpha, \beta)$, ký hiệu là $\mathrm{Re}\,(z)$ và $\mathrm{Im}\,(z)$, ta có đầy đủ cơ sở lý thuyết cho kí hiệu hình thức $\alpha + i\beta$ quen thuộc từ phổ thông.

1.1.2 Liên hợp và trị tuyệt đối

Cho $a = \alpha + i\beta \in \mathbb{C}$. Khi đó $\alpha - i\beta$ gọi là *liên hợp* của $\alpha + i\beta$ và kí hiệu là $\overline{a}$. Một số phức là thực khi và chỉ khi nó và liên hợp của nó bằng nhau. Biểu thức

$$\mathrm{Re}\,(a) = \frac{a + \overline{a}}{2}, \quad \mathrm{Im}\,(a) = \frac{a - \overline{a}}{2}$$

biểu diễn phần thực và phần ảo qua số phức và liên hợp của nó.

Tính chất cơ bản của số liên hợp là

1. Phép lấy liên hợp tương thích với tổng và tích theo nghĩa

$$\overline{a + b} = \overline{a} + \overline{b}$$

$$\overline{ab} = \overline{a}\overline{b}$$

Do đó nếu $x = \frac{b}{a}$ thì $ax = b$, suy ra $\overline{ax} = \overline{b}$, và do đó $\overline{\left(\frac{b}{a}\right)} = \frac{\overline{b}}{\overline{a}}$ do thương này tồn tại duy nhất, tức phép lấy liên hợp cũng tương thích với thương.

2. Xét phương trình

$$c_0 z + c_1 z^{n-1} + \ldots + c_{n-1} z + c_n = 0$$

Nếu ζ là một nghiệm của phương trình thì $\overline{\zeta}$ sẽ là nghiệm của phương trình:

$$\overline{c_0} z + \overline{c_1} z^{n-1} + \ldots + \overline{c_{n-1}} z + \overline{c_n} = 0$$

Do đó một đa thức có hệ số thực $P(z)$ nhận ζ là nghiệm thì nó cũng nhận $\overline{\zeta}$ là nghiệm. Điều này, kết hợp với việc $\zeta + \overline{\zeta}$ và $\zeta\overline{\zeta}$ là số thực cho tính chất quen thuộc: Mọi đa thức trong $\mathbb{R}[x]$ có bậc lớn hơn 2 đều khả quy trong $\mathbb{R}[x]$.

3. Tích $a\overline{a} = \alpha^2 + \beta^2$ luôn không âm. Căn bậc hai số học của nó được gọi là *modulus* hay *trị tuyệt đối* (*absolute value*) của a, kí hiệu là $|a|$. Đây chính là *chuẩn* mà ta nhắc đến ở phần trên, bất đẳng thức tam giác sẽ được ta kiểm chứng ngay ở phần sau. Đặc biệt hơn, ta có tính chất

$$|ab|^2 = ab \cdot \overline{ab} = a\overline{a}b\overline{b} = |a|^2 |b|^2$$

và do đó

$$|ab| = |a| \cdot |b|$$

Một cách tổng quát thì

$$|a_1 a_2 \ldots a_n| = |a_1| \cdot |a_2| \cdots |a_n|$$

Và với tỉ số $\frac{a}{b}$ $(b \neq 0)$, ta có $b\,(a/b) = a$, do đó $|b|\,|a/b| = |a|$, nghĩa là

$$\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$$

4. Ta có

$$\begin{cases} |a+b|^2 & = |a|^2 + |b|^2 + 2\mathrm{Re}\left(a\bar{b}\right) \\ |a-b|^2 & = |a|^2 + |b|^2 - 2\mathrm{Re}\left(a\bar{b}\right) \end{cases}$$

do đó ta có *đẳng thức hình bình hành*

$$|a+b|^2 + |a-b|^2 = 2\left(|a|^2 + |b|^2\right)$$

1.1.3 Bất đẳng thức

Ta sẽ chứng minh một vài bất đẳng thức quan trọng. Vì trong $\mathbb{C}$ không có quan hệ thứ tự, các bất đẳng thức chỉ áp dụng giữa những số thực. Từ định nghĩa của modulus, ta có

$$\begin{aligned} -|a| &\leq \mathrm{Re}\,(a) \leq & |a| \\ -|a| &\leq \mathrm{Im}\,(a) \leq & |a| \end{aligned}$$

Các đẳng thức lần lượt xảy ra khi và chỉ khi a có dạng $-t, t, -it, it$ với t là số thực không âm. Sử dụng kết quả này vào phương trình $|a+b|^2 = |a|^2 + |b|^2 + 2\mathrm{Re}\left(a\bar{b}\right)$, ta nhận được

$$|a+b|^2 \leq (|a| + |b|)^2$$

nên

$$|a+b| \leq |a| + |b|$$

Vậy ta đã chứng minh được *bất đẳng thức tam giác*, dễ dàng kiểm chứng các tính chất còn lại, ta kết luận $|.|$ là một chuẩn trên $\mathbb{C}$, tức $(\mathbb{C}, |.|)$ là một không gian định chuẩn. Khác với một không gian định chuẩn tổng quát, ở đây ta quan tâm nhiều hơn đến trường hợp đẳng thức xảy ra. Đối với trường hợp trên, đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $ab \geq 0$, nói cách khác là $\frac{a}{b} \geq 0$, nếu b là số phức khác 0. Tổng quát hơn, ta cũng có

Định lý 1. *(Bất đẳng thức tam giác) Với $a_1, a_2, \ldots, a_n$ là các số phức, ta có*

$$|a_1 + a_2 + \cdots + a_n| \leq |a_1| + |a_2| + \cdots + |a_n|.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi tỉ số của hai số hạng khác không bất kì là dương.

Chứng minh. Bất đẳng thức được suy ra dễ dàng từ trường hợp 2 số. Ta quan tâm đến trường hợp 2 vế bằng nhau xảy ra. Giả sử đẳng thức xảy ra, thế thì

$$\begin{aligned} |a_1| + |a_2| + \ldots + |a_n| &= |(a_1 + a_2) + a_3 + \cdots + a_n| \\ &\leq |a_1 + a_2| + |a_3| + \cdots + |a_n| \\ &\leq |a_1| + |a_2| + \ldots + |a_n| \end{aligned}$$

Do đó $|a_1 + a_2| = |a_1| + |a_2|$ và nếu $a_2 \neq 0$, ta thu được $\frac{a_1}{a_2} \geq 0$. Một cách tương tự, ta có tỉ số của hai số hạng khác không bất kì phải lớn hơn 0. Giả sử ngược lại rằng điều kiện trên được thỏa và số hạng a_1 khác 0, khi đó ta có

$$\begin{aligned} |a_1 + a_2 + \cdots + a_n| &= |a_1| \left|1 + \frac{a_2}{a_1} + \cdots + \frac{a_n}{a_1}\right| \\ &= |a_1| \left(1 + \frac{|a_2|}{|a_1|} + \cdots + \frac{|a_n|}{|a_1|}\right) \\ &= |a_1| + |a_2| + \ldots + |a_n| \end{aligned}$$

Vậy đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi tỉ số của hai số hạng khác không bất kì là dương. □

Một bất đẳng thức khác cũng rất thông dụng là

Định lý 2. *(Bất đẳng thức Cauchy) Với* a_i, b_i *là các số phức, ta có*

$$\left|\sum_{i=0}^{n} a_i b_i\right|^2 \leq \sum_{i=1}^{n} |a_i|^2 \sum_{i=1}^{n} |b_i|^2$$

Chứng minh. Để chứng minh điều này, đặt λ là một số phức tùy ý. Ta đã biết

$$\sum_{i=1}^{n} |a_i - \lambda b_i|^2 = \sum_{i=1}^{n} |a_i|^2 + |\lambda|^2 \sum_{i=1}^{n} |b_i|^2 - 2\mathrm{Re}\left(\overline{\lambda}\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right) \geq 0$$

Ta có thể chọn

$$\lambda = \frac{\sum_{1}^{n} a_i b_i}{\sum_{1}^{n} |b_i|^2},$$

và đơn giản biểu thức, ta suy ra

$$\sum_{1}^{n} |a_i|^2 - \frac{\left|\sum_{1}^{n} a_i b_i\right|^2}{\sum_{1}^{n} |b_i|^2} \geq 0$$

Đây là điều ta cần chứng minh. □

1.2 Biểu diễn hình học của số phức

Như đã phân tích ở phần trước, $\mathbb{C}$ chính là $\mathbb{R}^2$ nhưng trang bị thêm phép nhân. Vậy nên ta có thể biểu diễn số phức $\alpha + i\beta$ bởi vector (α, β) trên mặt phẳng. Trục hoành (trục x) biểu diễn cho các số thực và được gọi là *trục thực* và trục tung (trục y) biểu diễn cho các số thuần ảo và được gọi là *trục ảo*. Mặt phẳng chứa trục thực và trục ảo gọi là *mặt phẳng phức.*

1.2.1 Dạng lượng giác của số phức.

Ta biểu diễn một số phức không chỉ bằng một điểm, mà còn bằng một vector xuất phát từ gốc tọa độ đến điểm đó. Số, điểm và vector đó đều được kí hiệu chung là a. Ta cũng thấy rằng bất đẳng thức tam giác $|a+b| \leq |a| + |b|$ và đẳng thức hình bình hành $|a+b|^2 + |a-b|^2 = 2\left(|a|^2 + |b|^2\right)$ trở thành những định lý hình học đơn giản.

Trên mặt phẳng phức, phép cộng dễ dàng biểu diễn bởi tổng 2 vector, tuy nhiên để biểu diễn phép nhân một cách thuận tiện, người ta dùng tọa độ cực. Nếu tọa độ cực của (α, β) là (r, φ) thì ta có

$$\begin{aligned} \alpha &= r\cos\varphi \\ \beta &= r\sin\varphi \end{aligned}$$

Do đó ta có thể viết $a = \alpha + i\beta = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ với $r = |a|$. Đây gọi là *dạng lượng giác của số phức.* Góc φ gọi là *argument* của số phức, kí hiệu là $\arg a$. Giờ ta xét hai số phức $a_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$ và $a_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$, tích của chúng là

$$\begin{aligned} a_1a_2 &= r_1r_2\left[(\cos\varphi_1\cos\varphi_2 - \sin\varphi_1\sin\varphi_2) + i(\sin\varphi_1\cos\varphi_2 + \cos\varphi_1\sin\varphi_2)\right] \\ &= r_1r_2\left[\cos(\varphi_1+\varphi_2) + i\sin(\varphi_1+\varphi_2)\right] \end{aligned}$$

Vậy kết quả của phép nhân dạng lượng giác đơn giản và dễ nhớ hơn dạng đại số rất nhiều, và đặc biệt, ta có

$$\arg(a_1a_2) = \arg a_1 + \arg a_2$$

Ta quy ước rằng argument của 0 là không xác định. Trong trường hợp phép chia thì biểu thức trên trở thành

$$\arg\frac{a_1}{a_2} = \arg a_1 - \arg a_2.$$

Một cách tổng quát, ta cũng tính được lũy thừa của $a = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ là

$$a^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)$$

và biểu thức này vẫn đúng khi $n \leq 0$. Với $r = 1$ ta có *công thức de Moivre* nổi tiếng sau:

$$(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)^n = \cos n\varphi + i\sin n\varphi$$

Điều này giúp ta dễ dàng tìm được căn bậc n của một số phức, tức giải phương trình dạng

$$z^n = a$$

với $a \neq 0$ và $a = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$. Đặt $z = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)$, ta có

$$\rho^n(\cos n\theta + i\sin n\theta) = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

Phương trình này thỏa nếu và chỉ nếu $\rho^n = r$ và $n\theta = \varphi + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$, tuy nhiên chỉ khi $k = 0, 1, \ldots, n-1$ thì z mới nhận những giá trị khác nhau, vì vậy căn bậc n của một số phức a có đúng n giá trị là:

$$z = \sqrt[n]{r}\left[\cos\left(\frac{\varphi}{n} + k\frac{2\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\varphi}{n} + k\frac{2\pi}{n}\right)\right], \quad k = 0, 1, \ldots n-1.$$

Nghiệm của phương trình $z^n = 1$ được gọi là các căn của đơn vị, và nếu ta đặt nghiệm có argument nhỏ nhất là

$$\omega = \cos\frac{2\pi}{n} + i\sin\frac{2\pi}{n}$$

thì tất cả các nghiệm là $1, \omega, \omega^2, \ldots, \omega^{n-1}$. Biểu diễn trên đường tròn, chúng chính là đỉnh của một n giác đều nội tiếp đường tròn đơn vị.

Ở phần trên, ta đã nhắc lại dạng lượng giác của số phức, trong đó sử dụng các công thức lượng giác cũng như khái niệm "góc" của hình học sơ cấp. Việc trình bày tường minh điều này bằng ngôn ngữ giải tích sẽ được nói đến ở chương sau, khi ta định nghĩa lại hàm arg bằng các chuỗi số.

1.2.2 Hình học với số phức

Trong hình học giải tích cổ điển, phương trình của các quỹ tích được diễn tả bằng một phương trình giữa x và y hoặc hai phương trình giữa x, y và đại lượng t thứ ba (phương trình tham số). Điều này, không lạ gì, giống khi ta làm việc với các vector

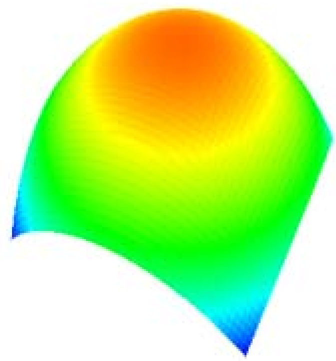
Chẳng hạn, phương trình một đường tròn tâm a, bán kính r có biểu diễn khá đơn giản là $|z - a| = r$ trong khi biểu diễn của một đường thẳng trong mặt phẳng phức có thể được biểu diễn bởi một phương trình tham số $z = a + bt$, với a và b là những số phức và t là một số thực tùy ý.

Hai phương trình $z = a + bt$ và $z = a' + b't$ biểu diễn cùng một đường thẳng khi và chỉ khi $a - a'$ và b' là một bội thực của b. Điều này được nhận ra dễ dàng bằng việc viết các phương trình tham số tương ứng. Tương tự, hai đường thẳng này song song nếu b' là một bội thực của b và cùng hướng nếu b' là một bội thực dương của b. ta có thể nhận ra $\arg b$ chính là góc (có hướng) giữa trục thực và đường thẳng. Do đó, góc giữa hai đường thẳng nói trên là $\arg\frac{b'}{b}$. Hai đường thẳng này vuông góc nếu $\frac{b'}{b}$ là số thuần ảo.

Ngoài ra, bất đẳng thức $|z - a| < r$ biểu diễn phần trong của một đường tròn. Đơn giản hơn, một đường thẳng có hướng $z = a + bt$ xác định một nửa bên phải mặt phẳng (theo hướng đang xét) mọi điểm z có $\mathrm{Im}\frac{z-a}{b} < 0$ và một nửa bên trái mặt phẳng các điểm z thỏa $\mathrm{Im}\frac{z-a}{b} > 0$.

Người ta cũng mở rộng trường số phức bằng cách thêm một điểm vô cực ∞ với các quy ước

$$\begin{aligned} a + \infty &= \infty \quad (a \neq \infty) \\ b \cdot \infty = \infty \cdot b &= \infty \quad \forall b \neq 0 \end{aligned}$$



Hình 1.2.1: Gấp mặt phẳng về phía sau.

$$\begin{aligned} a/0 &= \infty \\ b/\infty &= 0 \quad (b \neq \infty) \end{aligned}$$

Việc biểu diễn phần tử ∞ này khó có thể thực hiện, một cách dễ nhìn, trong mặt phẳng ngoại trừ việc sử dụng trí tưởng tượng. Khi đó, ta tưởng tượng có một điểm ∞ nằm phía sau mặt phẳng, là điểm mà mọi đường thẳng đều đi qua (và do đó mọi nửa mặt phẳng đều không chứa điểm vô cực). Chính tưởng tượng này đã đưa ta đến việc gấp mặt phẳng về phía sau thành một hình cầu (hoặc như một cây gậy bóng chày) như Hình 1.2.1. Và do đó, ta có biểu diễn của số phức trên mặt cầu Riemann như sau. Xét một mặt cầu S và một điểm λ trên mặt đó. Với mặt phẳng phức P không đi qua λ và có vector pháp tuyến song song với bán kính của S đi qua λ. Khi đó, ta tương ứng mọi điểm z trên mặt phẳng P với giao điểm (duy nhất) của đường thẳng nối z và λ với S. Ta kiểm chứng được rằng đây là một song ánh giữa P và $S \setminus \{\lambda\}$. Vậy ta có thể xem mặt cầu S chính là mặt phẳng phức, và khi bổ sung thêm điểm λ (biểu diễn cho ∞) ta được mặt phẳng phức mở rộng. Ý tưởng này được cụ thể hóa bằng các tính toán như dưới đây.

Xét một mặt cầu đơn vị S có phương trình trong không gian ba chiều là $x_1^2+x_2^2+x_3^2 =$

1, với mọi điểm Z trên S, trừ (0,0,1), ta có một tương ứng

$$z = \frac{x_1 + ix_2}{1 - x_3} \tag{1.2.1}$$

và tương ứng này là một song ánh với

$$|z|^2 = \frac{x_1^2 + x_2^2}{(1 - x_3)^2} = \frac{1 + x_3}{1 - x_3}.$$

Do đó ta tính được các thành phần của Z

$$\begin{aligned} x_3 &= \frac{|z|^2 - 1}{|z|^2 + 1} \\ x_1 &= \frac{z + \overline{z}}{1 + |z|^2} \\ x_2 &= \frac{z - \overline{z}}{i\left(1 + |z|^2\right)} \end{aligned} \tag{1.2.2}$$

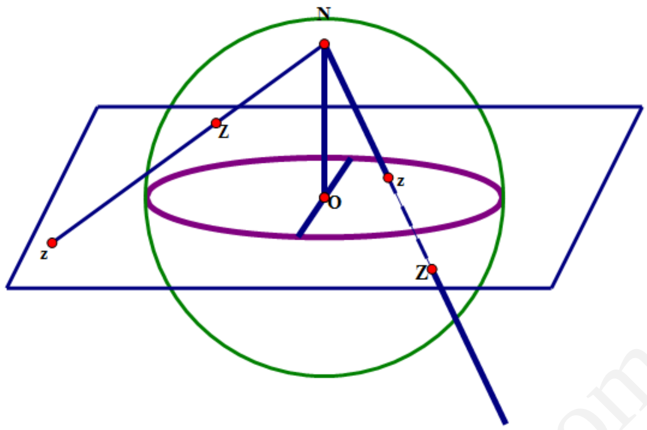
Như đã nói ở trên, ta sẽ tương ứng điểm $(0, 0, 1)$ với ∞. Khi đó toàn bộ mặt cầu là một biểu diễn của mặt phẳng phức mở rộng. Ta có thể nhận thấy rằng bán cầu $x_3 < 0$ ứng với đĩa $|z| < 1$ và bán cầu $x_3 > 0$ ứng với phần ngoài của đĩa: $|z| > 1$. Mặt cầu này được gọi là *mặt cầu Riemann* (Hình 1.2.2)

Do ta đã xem mặt phẳng phức Oxy như mặt phẳng Ox_1x_2, (1.2.1) cho ta

$$x_1 : x_2 : (1 - x_3) = x : y : 1,$$

nghĩa là các điểm $(0, 0, 1)$, Z, z thẳng hàng như ý tưởng ban đầu. Do đó tương ứng đang xét gọi là *phép chiếu lập thể*.

Phép chiếu lập thể đưa mọi đường thẳng trong mặt phẳng phức thành một đường tròn trên S đi qua điểm cực $(0, 0, 1)$, và ngược lại cũng đúng. Tổng quát hơn, mọi đường tròn trên mặt cầu tương ứng với một đường tròn hoặc một đường thẳng trong mặt phẳng phức. Để chứng minh điều này, ta xét một đường tròn trên mặt cầu, chính



Hình 1.2.2: Mặt cầu Riemann

là giao điểm của S với mặt phẳng $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 = \alpha_0$, với $\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 = 1$ và $0 \leq \alpha_0 < 1$. Thay x_1, x_2, x_3 bởi các biểu thức tương ứng theo z và $\overline{z}$, ta có

$$\alpha_1 (z + \overline{z}) - \alpha_2 i (z - \overline{z}) + \alpha_3 \left(|z|^2 - 1\right) = \alpha_0 \left(|z|^2 + 1\right),$$

tức là

$$(\alpha_0 - \alpha_3)\left(x^2 + y^2\right) - 2\alpha_1 x - 2\alpha_2 y + \alpha_0 + \alpha_3 = 0$$

Vậy nếu $\alpha_0 \neq \alpha_3$ thì phương trình trên là phương trình của một đường tròn, còn nếu $\alpha_0 = \alpha_3$ thì đó là phương trình của một đường thẳng. Ngược lại, một hệ phương trình sẽ cho thấy mọi đường tròn hoặc đường thẳng đều được biểu diễn dưới dạng này. Vậy tương ứng đang xét là một song ánh.

Tiếp theo ta tính khoảng cách $d(Z, Z')$ giữa hai điểm trên S dựa trên hình chiếu lập thể của z và z' của chúng. Nếu những điểm Z, Z' trên mặt cầu có tọa độ là (x_1, x_2, x_3), (x_1', x_2', x_3') thì

$$|Z - Z'|^2 = (x_1 - x_1')^2 + (x_2 - x_2')^2 + (x_3 - x_3')^2 = 2 - 2\left(x_1 x_1' + x_2 x_2' + x_3 x_3'\right)$$

Kết hợp với thay các thành phần của Z và Z' bởi (1.2.2), ta thu được

$$\begin{aligned} x_1x_1' + x_2x_2' + x_3x_3' &= \frac{(z+\overline{z})\left(z'+\overline{z'}\right) - (z-\overline{z})\left(z'-\overline{z'}\right) + \left(|z|^2-1\right)\left(|z'|^2-1\right)}{\left(1+|z|^2\right)\left(1+|z'|^2\right)} \\ &= \frac{\left(1+|z|^2\right)\left(1+|z'|^2\right) - 2\,|z-z'|^2}{\left(1+|z|^2\right)\left(1+|z'|^2\right)} \end{aligned}$$

Và như thế ta có

$$|Z - Z'| = \frac{2\,|z-z'|}{\sqrt{\left(1+|z|^2\right)\left(1+|z'|^2\right)}},$$

với $z' = \infty$ thì biểu thức trên trở thành $d\,(Z,\lambda) = \frac{2}{\sqrt{1+|z|^2}}$ trong đó $\lambda = (0,0,1)$.

Chương 2

Tính giải tích và các hàm số cơ bản

Mục lục

2.1 Giới hạn và đạo hàm của hàm phức

Như đã nói ở trên, các khái niệm về topo (đóng, mở, compact) cũng như các vấn đề về hội tụ và giới hạn của $\mathbb{C}$ giống hệt như $\mathbb{R}^2$. Từ định nghĩa, ta cũng dễ dàng chứng minh được

$$\lim_{x\to a}\overline{f(x)} = \overline{A}$$

dẫn đến

$$\begin{aligned}\lim_{x\to a}\mathrm{Re}f(x) &= \mathrm{Re}A\\ \lim_{x\to a}\mathrm{Im}f(x) &= \mathrm{Im}A\end{aligned}$$

Ngược lại, nếu có

$$\begin{aligned}\lim_{x\to a}\mathrm{Re}f(x) &= R\\ \lim_{x\to a}\mathrm{Im}f(x) &= I\end{aligned}$$

thì $\lim_{x\to a}f(x) = R + iI$. Khái niệm đạo hàm của hàm phức cũng được định nghĩa tương tự với hàm thực như sau.

Định nghĩa 3. *Đạo hàm* của hàm f tại a được kí hiệu là $f'(a)$và được định nghĩa như sau:

$$f'(a) = \lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}.$$

Do các tính chất bảo toàn giới hạn của tổng, hiệu hai hàm số nên nếu f và g có đạo hàm tại a thì $(f\pm g)'(a) = f'(a) \pm g'(a)$. Ta cũng dễ dàng kiểm tra được $(f.g)'(a) = f'(a)\,g(a) + f(a)\,g'(a)$. Đối với hàm phức, người ta quan tâm đến sự tồn tại của đạo hàm trên lân cận của một điểm hơn, chính vì vậy khái niệm hàm giải tích được định nghĩa như sau.

Định nghĩa 4. Hàm f được gọi là *giải tích* tại a nếu hàm f có đạo hàm trong một lân cận nào đó của a.

Từ đây, ta cũng rút ra được kết luận tổng và tích hai hàm giải tích tại a là các hàm giải tích tại a. Hàm thương của hai hàm giải tích f và g cũng là một hàm giải tích tại a nếu $g(a) \neq 0$. Tiếp theo ta sẽ tìm điều kiện để hàm $f = u + iv$ (u và v là hai hàm thực biến phức) là giải tích.

Khi đó, ta có thể viết lại định nghĩa của đạo hàm như sau:

$$f'(z) = \lim_{h \to 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h}$$

Giới hạn sẽ là không thay đổi nếu ta chọn h tiến đến 0 bất kì. Do đó, ta chọn h là số thực thì ta suy ra

$$f'(z) = \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Tương tự, nếu chọn $h = ik$ (với $k \in \mathbb{R}$) là số thuần ảo tiến về 0 thì lại có

$$f'(z) = -\frac{\partial f}{\partial y} = -i\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y}.$$

Từ đó, ta suy ra

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y} \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{\partial v}{\partial x} \end{cases} \tag{2.1.1}$$

Hệ thức (2.1.1) được gọi là *hệ thức Cauchy-Riemann* của hàm giải tích f. Ta nhận thấy rằng nếu f có các đạo hàm thì f' có thể được biểu diễn như sau

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x},$$

do đó ta có

$$|f'(z)|^2 = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Khai triển này cho ta thấy được $|f'(z)|^2$ là Jacobian của (u, v) theo (x, y). Nếu u và v có các đạo hàm riêng liên tục (thực chất, ở chương sau, ta cũng chứng minh được rằng nếu f giải tích thì đạo hàm f' cũng giải tích, vì vậy việc này thực chất luôn đúng) thì ta suy ra

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} \\ \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x} \end{aligned}$$

Dùng (2.1.1) ta được:

$$\begin{aligned} \Delta u &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \\ \Delta v &= \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0 \end{aligned}$$

Các hàm số u, v thỏa mãn *phương trình Laplace* $\Delta u = 0$. Các hàm như thế được gọi là *hàm điều hòa*. Như vậy, phần thực và phần ảo của hàm giải tích là điều hòa. Nếu hai hàm u và v là hàm điều hòa và thỏa mãn điều kiện Cauchy-Riemann thì v được gọi là hàm *điều hòa liên hợp của u*.

Ngược lại, cho u và v là cặp hàm điều hòa liên hợp, khi đó ta cũng suy được f là hàm giải tích. Điều này được bàn rõ ở định lý sau.

Định lý 5. *Nếu u và v là hai hàm có đạo hàm riêng liên tục và thỏa mãn điều kiện Cauchy-Riemann (2.1.1) thì*

$$f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$$

là hàm giải tích, có đạo hàm f' liên tục.

Chứng minh. Theo giải thiết, ta có

$$\begin{aligned} u\left(x+h,y+k\right)-u\left(x,y\right) &= \frac{\partial u}{\partial x}h+\frac{\partial u}{\partial y}k+\sqrt{h^2+k^2}\varepsilon_1\left(h,k\right) \\ v\left(x+h,y+k\right)-v\left(x,y\right) &= \frac{\partial v}{\partial x}h+\frac{\partial v}{\partial y}k+\sqrt{h^2+k^2}\varepsilon_2\left(h,k\right) \end{aligned}$$

với $\varepsilon_i\left(h,k\right)\to 0$ khi $\left(h,k\right)\to 0$. Do đó ta có

$$\begin{aligned} f\left(z+\left(h+ik\right)\right)-f\left(z\right) &= \left(\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}\right)h+\left(\frac{\partial u}{\partial y}+i\frac{\partial v}{\partial y}\right)k+\sqrt{h^2+k^2}\left[\varepsilon_1\left(h,k\right)+i\varepsilon_2\left(h,k\right)\right] \\ &= \left(\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}\right)\left(h+ik\right)+\sqrt{h^2+k^2}\left[\varepsilon_1\left(h,k\right)+i\varepsilon_2\left(h,k\right)\right] \end{aligned}$$

do đó ta có

$$\lim_{h+ik\to 0}\frac{f\left(z+h+ik\right)-f\left(z\right)}{h+ik}=\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Vậy định lý được chứng minh. □

2.2 Các hàm đa thức và phân thức

2.2.1 Hàm đa thức.

Với công thức tính đạo hàm và điều kiện Cauchy-Riemann, ta biết được hàm $f\left(z\right)=c$ (hằng số) và $g\left(z\right)=z$ là hai hàm giải tích trên $\mathbb{C}$ và có đạo hàm lần lượt là 0 và 1. Vì các tính chất cộng và nhân các hàm giải tích là hàm giải tích, ta suy ra hàm đa thức

$$P\left(z\right)=a_0+a_1z+a_2z^2+\ldots+a_nz^n \qquad \left(a_n\neq 0\right)$$

là hàm giải tích và

$$P'\left(z\right)=a_1+2a_2z+3a_3z^2+\ldots na_nz^{n-1}$$

Như ta đã biết, với đa thức $P(z)$ bậc n như trên, thì tồn tại bộ nghiệm $\{\alpha_1, \alpha_2 \ldots, \alpha_m\}$ $(m \leq n)$ sao cho:

$$P(z) = \prod_{i=1}^{n} (z - \alpha_i).$$

Như vậy với một nghiệm α bất kì, luôn tồn tại h_i để $P(z) = (z - \alpha_i)^{h_i} P_{h_i}(z)$ với $P_{h_i}(\alpha_i) \neq 0$, dẫn đến

$$P(\alpha_i) = P'(\alpha_i) = \ldots = P^{(h_i-1)}(\alpha_i) = 0 \text{ và } P^{(h_i)}(\alpha_i) \neq 0$$

Ta số nguyên h_i như thế là *bậc của không điểm a_i*. Áp dụng điều này, ta có định lý sau:

Định lý 6. *(Định lý Lucas) Nếu mọi không điểm của đa thức $P(z)$ nằm trên nửa mặt phẳng phức, thì mọi không điểm của đạo hàm $P'(z)$ cũng nằm trên nửa mặt phẳng đó. Hơn nữa, bao lồi của tập chứa các nghiệm của P cũng chứa luôn các nghiệm của $P'(z)$.*

Chứng minh. Đặt

$$P(z) = (z - \alpha_1)(z - \alpha_2) \ldots (z - \alpha_n)$$

(trong đó các α_i không nhất thiết khác nhau), ta có

$$\frac{P'(z)}{P(z)} = \frac{1}{z - a_1} + \frac{1}{z - a_2} + \ldots + \frac{1}{z - a_n} \tag{2.2.1}$$

Giả sử nửa mặt phẳng H trên $\mathbb{C}$ cho bởi $\left\{ z : \dfrac{\operatorname{Im}(z-a)}{b} < 0 \right\}$ chứa tất cả các nghiệm α_i và $z \notin H$, ta có

$$\operatorname{Im}\frac{z - \alpha_k}{b} = \operatorname{Im}\frac{z - a}{b} - \operatorname{Im}\frac{\alpha_k - a}{b} > 0.$$

Mặt khác, do ta có $\operatorname{Im}(\zeta) = -\frac{\operatorname{Im}(\zeta)^{-1}}{|\zeta|^2}$ nên ta suy ra

$$\operatorname{Im} \frac{b}{z - \alpha_k} < 0 \qquad \forall k \in \overline{1, n}$$

Do đó ta có

$$\sum \frac{b}{z - \alpha_k} \neq 0$$

do có phần phức khác 0. Kết hợp với (2.2.1), ta suy ra

$$\frac{bP'(z)}{P(z)} \neq 0,$$

do đó $P'(z) \neq 0$. Giả sử có một nghiệm β của P' không nằm trên bao lồi $C(P)$ (vốn cũng là một compact) các nghiệm của P, định lý Hahn-Banach cho ta một đường thẳng phân cách β và $C(P)$. Điều này mâu thuẫn và chứng tỏ tập lồi chứa các không điểm của P thì sẽ chứa luôn các không điểm của P'. $\square$

2.2.2 Hàm phân thức.

Ta xét hàm phân thức

$$R(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$$

Không mất tính tổng quát, ta có thể giả sử $P(z)$ và $Q(z)$ không có nhân tử chung, hay nói cách khác là chúng không có cùng không điểm. Phân thức $R(z)$ sẽ có giá trị là ∞ tại không điểm của $Q(z)$. Vì vậy ta phải xem xét hàm với giá trị trên mặt phẳng phức mở rộng, và khi đó, $R(z)$ cũng là hàm liên tục. Không điểm của $Q(z)$ được gọi là cực của $R(z)$ và bậc của cực được định nghĩa bằng giá trị bậc của không điểm $Q(z)$. Khi đó, ta có đạo hàm của $R(z)$ như sau

$$R'(z) = \frac{P'(z)\,Q(z) - Q'(z)\,P(z)}{Q^2(z)}$$

tồn tại khi $Q(z) \neq 0$. Đẳng thức trên cho ta thấy R' có cùng cực với R và các cực có bậc trong R' lớn hơn trong $R(z)$ 1 đơn vị.

Ta có thể định nghĩa $R(\infty)$ như là giới hạn của $R(z)$ khi $z \to \infty$, nhưng cách này không xác định được bậc của không điểm hoặc cực tại ∞. Vì vậy, ta quan tâm đến hàm $R_1(z) = R\left(\frac{1}{z}\right)$ với quy ước

$$R_1(0) = \lim_{z \to \infty} R(z)$$

Nếu $R_1(0) = 0$ (hoặc ∞) thì bậc của không điểm (hoặc cực) tại ∞ của R được định nghĩa như là bậc của không điểm (hay cực) của $R_1(z)$ tại gốc tọa độ. Cụ thể, nếu đặt:

$$R(z) = \frac{a_0 + a_1 z + \ldots + a_n z^n}{b_0 + b_1 z + \ldots b_m z^m}$$

thì

$$R_1(z) = z^{m-n} \frac{a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_n}{b_0 z^m + b_1 z^{m-1} + \ldots + b_m}$$

Nếu $m > n$ thì $R(z)$ có bậc của không điểm ∞ là $m - n$, mặt khác nếu $m < n$ thì ∞ là cực bậc $n - m$. Còn $m = n$ thì

$$R(\infty) = a_m / b_m \neq 0, \infty$$

Khi đó ∞ không là cực, cũng không là không điểm của R. Như vậy, vì đa thức bậc n thì có đúng n nghiệm nên ta có thể kiểm chứng được dễ dàng rằng tổng số không điểm (tính cả bậc) đúng bằng tổng số cực (tính cả bậc) và chính là $\max\{m, n\}$. Số này được gọi là *bậc* của hàm phân thức. Như vậy, hàm phân thức R có bậc p thì có p không điểm, p cực và phương trình $R(z) = a$ có p nghiệm với mọi $a \in \mathbb{C}$. Định lý sau đây sẽ chứng minh mọi hàm phân thức $R(z)$ đều viết được dưới dạng tổng của các đa thức biến z và $\frac{1}{z-\beta}$.

Định lý 7. *Cho R là một hàm phân thức có β_j $(1 \leq j \leq q)$ là các cực khác ∞. Ta* *có R viết dưới dạng*

$$R(z) = G(z) + \sum_{j=1}^{q} G_j\left(\frac{1}{z-\beta_j}\right)$$

với G và G_j là các đa thức và được gọi là các hàm riêng phần *của R. Khi đó G và G_j lần lượt được gọi là* phần kì dị *của R tại ∞ và β_j*

Chứng minh. Đầu tiên ta tìm G, đa thức này chỉ khác 0 khi bậc ở tử lớn hơn bậc ở mẫu của R. Nếu R có cực tại ∞, ta thực hiện phép chia đa thức cho tử và mẫu của R và do đó có thể viết

$$R(z) = G(z) + H(z)$$

với $G(z)$ là đa thức không có hệ số tự do và $H(\infty) \neq \infty$. Giờ ta gọi các cực khác ∞ của R là $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_q$. Các hàm $R\left(\beta_i + \dfrac{1}{\zeta}\right)$ là hàm phân thức của ζ với cùng nhận ∞ làm cực, do đó lại áp dụng phép chia như trên, ta được

$$R\left(\beta_j + \frac{1}{\zeta}\right) = G_j(\zeta) + H_j(\zeta).$$

Thực hiện đổi biến $z = \beta_j + \frac{1}{\zeta}$, ta có

$$R(z) = G_j\left(\frac{1}{z-\beta_j}\right) + H_j\left(\frac{1}{z-\beta_j}\right)$$

Với $G_j(\zeta)$ là đa thức theo $\zeta = \frac{1}{z-\beta_j}$ và $H_j\left(\dfrac{1}{z-\beta_j}\right)$ khác ∞ với $z = \beta_j$. Vậy ta xét tổng

$$R(z) - G(z) - \sum_{j=1}^{q} G_j\left(\frac{1}{z-\beta_j}\right)$$

Đây là hàm phân thức có không cực nào khác ngoài $\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_q$ và ∞ và do đó phải là hàm hằng (lưu ý rằng các đa thức đều có cực tại ∞). Vậy mọi hàm phân thức R

đều viết được dưới dạng

$$R(z) = G(z) + \sum_{j=1}^{q} G_j\left(\frac{1}{z-\beta_j}\right)$$

với G, G_j là các đa thức và β_j là các cực (khác ∞) của R. Đẳng thức này thường xuyên được sử dụng để tính toán nguyên hàm, tích phân của các hàm phân thức. $\square$

2.3 Hàm mũ và hàm lượng giác

Trong phần này, ta sẽ nói về sự liên hệ của hàm e^z và hàm lượng giác. Thoạt đầu thì hai hàm này không có gì liên hệ với nhau, về sự ra đời lẫn hình thức nhưng chúng lại có quan hệ rất chặt chẽ với nhau qua khai triển chuỗi và công thức Euler: $e^{iz} = \cos z + i\sin z$. Trước hết ta sẽ định nghĩa các hàm mũ bằng chuỗi lũy thừa, sau đó định nghĩa các hàm lượng giác và hàm logarithm. Khái niệm số đo góc và argument sẽ được ta xem như hệ quả của các định nghĩa này.

2.3.1 Sơ lược về chuỗi lũy thừa

Ta nhắc lại một định lý quen thuộc sau đây cho các chuỗi lũy thừa phức, phần chứng minh hoàn toàn tương tự như với số thực.

Định lý 8. *(Định lý Abel về bán kinh hội tụ) Với mọi chuỗi lũy thừa*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n,$$

tồn tại một số $0 \le R \le +\infty$ thỏa các tính chất sau:

1. *Chuỗi f hội tụ tuyệt đối với mọi z thỏa $|z| < R$. Ngoài ra, chuỗi hội tụ đều trên $0 \le |z| \le \rho$ với mọi $\rho < R$.*

2. *Với* $|z| > R$*, dãy* $\{a_n z^n\}$ *không bị chặn và do đó chuỗi* $f(z)$ *phân kì.*

3. *Hàm* f *có đạo hàm khi* $|z| < R$ *và đạo hàm* f' *được cho bởi công thức*

$$f'(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)\, a_{n+1} z^n$$

R được gọi là bán kính hội tụ *của* f *và được tính bởi công thức Hadamard:*

$$\frac{1}{R} = \lim_{n\to\infty} \sup \sqrt[n]{|a_n|}.$$

Tuy nhiên, ta khó có thể kiểm soát được sự hội tụ của chuỗi tại các điểm nằm trên đường tròn tâm 0, bán kính R. Nhiều phản ví dụ có thể được chỉ ra để cho thấy điều này. Định lý, cũng của Abel, sau đây thiết lập điều kiện cho sự hội tụ tại đường tròn này.

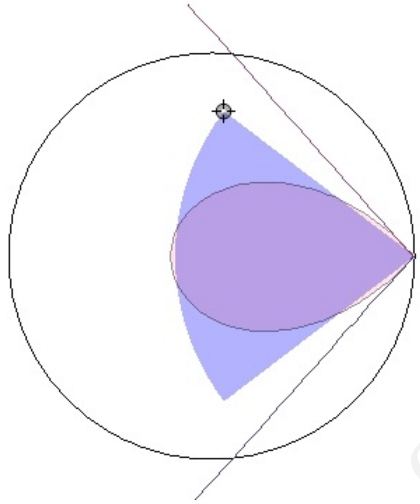
Định lý 9. *(Định lý giới hạn Abel)Cho chuỗi lũy thừa*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

thỏa mãn điều kiện $f(z)$ *hội tụ khi* $z = 1$*. Khi đó ta có* $f(z)$ *hội tụ về* $f(1)$ *khi* z *tiến về* 1 *thỏa mãn* $\frac{|1-z|}{1-|z|}$ *bị chặn. Thực chất ta có thể xem điều kiện này như là việc* z *thuộc một góc (có số đo không quá* π*) có đỉnh nằm tại* 1 *và nhận trục thực làm tia phân giác. Góc này còn được gọi là* góc Stolz *(thực ra tập các điểm* $z \in \mathbb{C}$ *thỏa* $\frac{|1-z|}{1-|z|} < M$ *không là một góc, nhưng các điều kiện này là tương đương).*

Chứng minh. Giả sử $\frac{|1-z|}{1-|z|} < M$, khi đó ta có

$$|f(1) - f(z)| = \left|\sum_{n=0}^{\infty} a_n (1 - z^n)\right|$$



Hình 2.3.1: Góc Stolz và tập các điểm thỏa $\frac{|1-z|}{1-|z|} < M$

$$= \quad |1-z| \left| \sum_{n=1}^{\infty} a_n \left(1 + z + \cdots + z^{n-1}\right) \right|$$

Sử dụng khai triển Abel, với $S_n = a_0 + \cdots + a_n$, ta có $S_n \to f(1)$ khi $n \to \infty$ và

$$\begin{aligned} \left| \sum_{n=1}^{N} a_n \left(1 + z + \cdots + z^{n-1}\right) \right| &= \left| \sum_{n=1}^{N} (S_n - S_{n-1}) \left(1 + z + \cdots + z^{n-1}\right) \right| \\ &= \left| -S_0 - S_1 z - S_2 z^2 - \cdots - S_{N-1} z^{N-1} + S_N \left(\sum_{n=0}^{N-1} z^n \right) \right| \\ &= \left| (S_N - f(1)) \left(\sum_{n=0}^{N-1} z^n \right) - \sum_{n=0}^{N-1} (S_n - f(1)) z^n \right| \end{aligned}$$

Đặt $P_n = S_n - f(1)$, ta có $P_n \to 0$ khi $n \to \infty$ và

$$\left| \sum_{n=0}^{N} a_n (1 - z^n) \right| \leq M (1 - |z|) \left[|P_N| \left(\sum_{n=0}^{N-1} |z|^n \right) + \sum_{n=0}^{N-1} |P_n| \, |z|^n \right]$$

$$\begin{aligned} &= M\left[|P_N|\left(1-|z|^N\right)+(1-|z|)\sum_{n=0}^{N-1}|P_n|\,|z|^n\right] \\ &\le M\,|P_N|+M\,(1-|z|)\sum_{n=0}^{N-1}|P_n|\,|z|^n \end{aligned}$$

Với $\varepsilon > 0$, tồn tại $C_\varepsilon > 0$ để $|P_n| < \varepsilon$ với mọi $n \geq C_\varepsilon$, khi đó ta có

$$\begin{aligned} \left|\sum_{n=0}^{N} a_n\,(1-z^n)\right| &\le M\,|P_N|+M\,(1-|z|)\left[\sum_{n=0}^{C_\varepsilon}|P_n|\,|z|^n+\varepsilon\sum_{n=C_\varepsilon+1}^{N}|z|^n\right] \\ &\le 2M\varepsilon+M\,(1-|z|)\sum_{n=0}^{C_\varepsilon}|P_n|\,|z|^n \end{aligned}$$

Chọn z đủ gần 1 sao cho

$$(1-|z|)\sum_{n=0}^{C_\varepsilon}|P_n|\,|z|^n \le \varepsilon,$$

khi đó, ta có

$$\left|\sum_{n=0}^{N} a_n\,(1-z^n)\right| \le 3M\varepsilon$$

Cho N dần về vô cùng, ta suy ra $|f(z) - f(1)| \leq 3M\varepsilon$ và do đó

$$\lim_{z\to 1} f(z) = f(1)\,.$$

$\square$

2.3.2 Hàm e^z

Ta bắt đầu việc định nghĩa hàm e^z bằng cách giải phương trình vi phân sau:

$$f'(z) = f(z)$$

với $f(0) = 1$. Ta viết lại:

$$\begin{aligned} f(z) &= a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots + a_n z^n + \ldots \\ f'(z) &= a_1 + 2a_2 z + 3a_3 z^2 + \ldots + \ldots a_n z^{n-1} + \ldots \end{aligned}$$

nếu f là nghiệm của phương trình nêu trên thì ta phải có $a_{n-1} = na_n$và $a_0 = 1$. Từ đó suy ra $a_n = \dfrac{1}{n!}$. Ta kí hiệu hàm f thỏa tính chất trên là e^z hay exp$z$. Vậy:

$$e^z = 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \ldots + \frac{z^n}{n!} + \ldots$$

hội tụ theo tiêu chuẩn tỉ số và do đó ta cũng có được $\frac{d\exp z}{dz} = \exp z$. Với hàm exp được định nghĩa như trên có các tính chất sau:

1. Có phép nhân giống hàm exp thực, tức $e^a.e^b = e^{a+b}$. Thật vậy, ta có

$$\left(e^z e^{c-z}\right)' = e^z e^{c-z} + e^z\left(-e^{c-z}\right) = 0$$

   Với một hàm phức có đạo hàm triệt tiêu, ta cũng có được các đạo hàm riêng theo phần thực và phần phức lần lượt triệt tiêu. Do đó ta có thể kết luận $e^z.e^{c-z}$ là hằng số (theo z). Thay $z = 0$ ta được $e^z.e^{c-z} = e^c$. Tiếp tục thay $z = a$ và $c = a + b$ ta có điều phải chứng minh.

2. Do $e^z.e^{-z} = e^0 = 1$ nên ta có $e^z \neq 0$ với mọi z. Nếu $x \in \mathbb{R}^+$ thì theo định nghĩa hàm e^z như trên, ta có $e^x > 1$ và nếu $x \in \mathbb{R}^-$ thì $0 < e^x < 1$.

3. Do các hệ số trong chuỗi lũy thừa trên đều là số thực nên ta suy ra $e^{\overline{z}} = \overline{e^z}$, từ đó ta có $\left|e^{iy}\right|^2 = e^{iy}.e^{-iy} = 1$, dẫn đến $\left|e^{x+iy}\right| = e^x$.

2.3.3 Hàm lượng giác

Các *hàm lượng giác* được định nghĩa như sau:

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \qquad \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \tag{2.3.1}$$

Từ cách định nghĩa hàm e^z đã nêu trên ta suy ra khai triển chuỗi cho cos và sin là

$$\begin{aligned}
\cos z &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \dots \\
\sin z &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \dots
\end{aligned}$$

Nếu z là số thực thì công thức trên chính là khai triển Taylor của hàm $\cos x$ và $\sin x$. Do đó các hàm trên chính là mở rộng của sin và cos trên $\mathbb{C}$. Ngoài ra khai triển chuỗi sau cũng cho ta *công thức Euler* nổi tiếng sau:

$$e^{iz} = \cos z + i \sin z. \tag{2.3.2}$$

Các tính chất của hàm lượng giác cũng giống như hàm lượng giác thực, tức chúng thỏa các tính chất sau:

1. $\sin^2 z + \cos^2 z = 1$, đẳng thức này thu được từ (2.3.2) $|\cos z + i \sin z| = |e^{iz}|$.

2. Tính chất đạo hàm của hàm e^z cho ta $(\cos z)' = -\sin z$ và $(\sin z)' = \cos z$.

3. Tính toán trực tiếp từ (2.3.1), ta có các công thức cộng lượng giác quen thuộc:

$$\begin{aligned}
\cos(a+b) &= \cos a \cos b - \sin a \sin b \\
\sin(a+b) &= \cos a \sin b + \sin a \cos b
\end{aligned}$$

Hàm $\tan z$ cũng được ta định nghĩa là thương của $\sin z$ và $\cos z$, tức $\tan z = -i\dfrac{e^{iz} - e^{-iz}}{e^{iz} + e^{-iz}}$.

Giờ ta sẽ chứng minh các hàm exp là tuần hoàn và tìm chu kì cơ sở của nó. Thật vậy, giả sử ta muốn tìm chu kì T của hàm exp, khi đó ta có

$$e^T = e^0 = 1,$$

suy ra T phải có dạng iw với $w \in \mathbb{R}^+$. Vậy ta cần tìm w để $e^{iw} = 1$. Thực chất ta sẽ chỉ ra một số w_0 thỏa mãn điều này và chứng tỏ các số w cần tìm chỉ có thể là những bội nguyên của w_0. Thật vậy, ta có bất đẳng thức quen thuộc sau

$$\cos y < 1 - \frac{y^2}{2!} + \frac{y^4}{4!}.$$

Do đó ta suy ra $\cos 0 = 1 > 0 > \cos\sqrt{3}$, nên tồn tại $y_0 \in \left(0, \sqrt{3}\right)$ sao cho $\cos y_0 = 0$, vậy ta có được

$$e^{iy_0} = \cos y_0 + i\sin y_0 = \pm i,$$

suy ra $e^{i4y_0} = 1$ và chọn $w_0 = 4y_0$. Ta sẽ chứng minh mọi số w khác đều là lớn hơn w_0, tức $e^{iw} \neq 1$ với mọi $w \in (0, w_0)$. Thật vậy, với mọi $y \in (0, y_0) \subset \left(0, \sqrt{3}\right)$, ta có

$$\sin y > y\left(1 - \frac{y^2}{6}\right) > 0,$$

nên $\cos y$ là hàm giảm trên $(0, y_0)$, tức $\cos y > 0$ với mọi $y \in (0, y_0)$. Do đó ta lại suy ra được $\sin y$ là hàm tăng trên $(0, y_0)$, nghĩa là $0 < \sin y < \sin y_0$. Vậy ta có $\sin y_0 = 1$ và $\sin y \in (0, 1)$ với mọi $y \in (0, y_0)$ nên

$$e^{iy} = \cos y + i\sin y \neq \pm 1,\ \pm i.$$

Vậy nên ta suy ra $e^{iw} = \left(e^{i\frac{w}{4}}\right)^4 \neq 1$ do $e^{i\frac{w}{4}} \neq \pm 1,\ \pm i$ với mọi $w \in (0, 4y_0)$. Điều này chứng tỏ iw_0 là chu kì cơ sở của hàm e^z và do đó, ta kí hiệu w_0 bởi 2π. Ta có thể kiểm chứng được mọi chu kì w đều là bội nguyên của chu kì cơ sở w_0 bởi phép chia lấy dư $w = nw_0 + w'$ với $w' \in [0, w_0)$ và là một cơ sở. Trong phần chứng minh trên, ta cũng đã khẳng định các đẳng thức sau

$$e^{i\frac{\pi}{2}} = i, \quad e^{i\pi} = -1, \quad e^{i2\pi} = 1.$$

Vì mọi số phức z có $|z| = 1$ đều viết được dưới dạng e^{iy} và $\exp(i[0, 2\pi)) = \exp(i\mathbb{R})$ nên luôn tồn tại $y_1 \in [0, 2\pi)$ để ta có

$$z = e^{iy_1}.$$

Biểu diễn này sẽ được ta sử dụng để định nghĩa khái niệm argument ở phần sau.

2.3.4 Hàm Logarithm và hàm mũ.

Ta định nghĩa hàm *logarithm* phức như là hàm ngược của hàm mũ, tức $z = \log w$ nếu và chỉ nếu z là nghiệm của phương trình $e^z = w$. Nhận thấy do $e^z \neq 0$ nên 0 không có logarithm. Với $w \neq 0$, đặt $z = x + iy$, ta có phương trình $e^{x+iy} = w$, dẫn đến:

$$e^x = |w|, \qquad e^{iy} = \frac{w}{|w|}$$

ta suy ra $x = \ln |w|$ (đây là logarithm thực và để tránh nhầm lẫn, ta sử dụng kí hiệu ln thay cho log). Phương trình còn lại luôn có nghiệm do $\frac{w}{|w|}$ có modulus bằng 1. Ngoài ra, nghiệm cũng là duy nhất trên $[0, 2\pi)$ và khi cứ thêm 2π vào một nghiệm thì ta sẽ có một nghiệm khác của phương trình $e^{iy} = \dfrac{w}{|w|}$. Vậy ta suy ra với mọi số phức khác 0 đều có vô số logarithm và chúng sai khác nhau bội nguyên của $2\pi i$.

Phần ảo của $\log w$ được gọi là *argument* của w, kí hiệu là $\arg w$ như ta đã nói ở phần trước. Ta đã định nghĩa lại được một trong những khái niệm cơ bản của hình học cổ điển - *góc* (với đơn vị đo là radian). Ta nhận thấy argument của một số phức cũng có vô số giá trị và chúng sai khác nhau bội của 2π và

$$\log w = \log |w| + i \arg w.$$

Từ các tính chất của hàm exp, ta nhận thấy được tính chất của hàm log và arg như sau

$$\begin{aligned} \log(z_1 z_2) &= \log z_1 + \log z_2 \\ \arg(z_1 z_2) &= \arg z_1 + \arg z_2 \end{aligned}$$

Quy ước.

1. Với các số thực dương w, người ta thường quy ước $\log w$ là đơn trị và nhận giá trị bằng đúng $\ln w$.

2. Dùng khái niệm argument, mọi số phức z đều có thể viết dưới dạng

   $$z = re^{i\theta},$$

   với $r = |z|$ và $\theta = \arg z$. Số phức viết dưới dạng này có thể dễ dàng được sử dụng trong các phép nhân, lũy thừa hay khai căn,...

Giờ ta sẽ định nghĩa hàm mũ với cơ số là một số phức bất kỳ. Với a, b là hai số phức bất kì và $a \neq 0$, ta định nghĩa

$$a^b = e^{b \log a}.$$

Nếu $a \in \mathbb{R}^+$, theo quy ước trên thì $\log a \in \mathbb{R}$ và do đó a^b là đơn trị. Trong những trường hợp còn lại, ta hiểu $\log a$ là logarithm phức, do đó a^b có nhận những giá trị sai khác nhau các thừa số $e^{2\pi i b}$. Những giá trị này bằng nhau nếu và chỉ nếu $b \in \mathbb{Z}$. Tóm lại, biểu thức a^b là đơn trị nếu và chỉ nếu $a \in \mathbb{R}^+$ hay b là số nguyên. Điều này phù hợp với phép lũy thừa số phức mà ta đã có.

Chương 3

Tích phân phức và ứng dụng

Mục lục

Trong phần này, ta quan tâm đến các tích phân của hàm phức trên một đường trơn từng khúc γ. Ta tiếp cận bài toán bằng cách đưa ra các điều kiện của f, miền xác định của nó cũng như tính chất của đường γ để $\int_\gamma f(z)\,dz = 0$. Qua đó, ta có được Định lý Cauchy và các hệ quả quan trọng của nó.

3.1 Các khái niệm cơ bản

3.1.1 Tích phân phức, đường và chu trình

Trước hết, ta định nghĩa các khái niệm về tích phân phức mà đầu tiên là khái niệm tích phân đường. Với một hàm phức f xác định trên $\mathbb{R}$ viết dưới dạng $f = u + iv$, trong đó u, v là các hàm thực, ta định nghĩa $\int_a^b f(t)\,dt$ như sau

$$\int_a^b f(t)\,dt = \int_a^b u(t)\,dt + \int_a^b v(t)\,dt.$$

Khi đó ta có các tính chất sau

Mệnh đề 10. *Ta có*

1. $\int_a^b cf(t)\,dt = c\int_a^b f(t)\,dt.$
2. $\left|\int_a^b f(t)\,dt\right| \le \int_a^b |f(t)|\,dt.$

Chứng minh. Tính chất đầu tiên được suy ra trực tiếp từ định nghĩa. Tình chất thứ hai có thể được chứng minh ngắn gọn bằng tính chất thứ nhất như sau. Nếu vế trái bằng 0, ta hiển nhiên có kết luận, ngược lại, gọi θ là argument của vế trái, ta có

$$\begin{aligned}
\left|\int_a^b f(t)\,dt\right| &= \int_a^b e^{-i\theta} f(t)\,dt \\
&= \operatorname{Re}\left(\int_a^b e^{-i\theta} f(t)\,dt\right) \\
&= \int_a^b \operatorname{Re}\left(e^{-i\theta} f(t)\right)\,dt \\
&\le \int_a^b |f(t)|\,dt
\end{aligned}$$

Tính chất, do đó, được chứng minh. □

Từ đây ta định nghĩa tích phân đường như sau. Ta cũng nhận thấy rằng tích phân đường phức cũng có các tính chất như tích phân đường thực, bao gồm: không đổi qua các phép đổi biến (tham số hóa lại đường) và đổi dấu khi đường đổi ngược định hướng. Trong tài liệu này, ta quy ước kí hiệu đường thu được khi đảo ngược định hướng của đường γ là $-\gamma$ và nếu không nói gì thêm thì các đường được giả sử là trơn từng khúc.

Định nghĩa 11. Với f là một hàm phức liên tục trên Ω và γ là một đường trơn từng khúc trong mặt phẳng phức có khoảng tham số là $[a,b]$, ta định nghĩa *tích phân* của f trên γ là

$$\int_a^b f(\gamma(t))\,\gamma'(t)\;dt,$$

và kí hiệu là $\displaystyle\int_\gamma f(z)\;dz$. Trong trường hợp γ là đường đóng, ta có thể sử dụng kí hiệu $\displaystyle\oint_\gamma f(z)\;dz$ để chỉ tích phân của f trên γ.

Nếu $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$ là một *phân hoạch* của đường γ, tức ta có thể tham số hóa lại các γ_j trên khoảng tham số $[j-1,j]$ và γ trên $[0,n]$ thì $\gamma(t) = \gamma_j(t)$ với mọi $t \in [j-1,j]$, thì

$$\int_\gamma f(z)\;dz = \sum_{j=1}^n \int_{\gamma_j} f(z)\;dz.$$

Điều này giải thích cho sự lạm dụng kí hiệu khi ta viết $\gamma = \sum_{j=1}^n \gamma_j$.

Ngoài ra, với một đường γ trơn từng khúc xác định trên khoảng $[a,b]$, ta dễ dàng nhận thấy rằng γ có thể viết được dưới dạng $\gamma(t) = x(t) + iy(t)$ với x, y là các hàm trơn từng khúc. Khi đó ta định nghĩa

$$\begin{aligned}\int_\gamma f\,dx &= \int_a^b f(\gamma(t))\,x'(t)\;dt\\ \int_\gamma f\,dy &= \int_a^b f(\gamma(t))\,y'(t)\;dt\end{aligned}$$

Do đó ta có $\int_\gamma f\,dz = \int_\gamma f\,dx + i\int_\gamma f\,dy$. Điều này giải thích kí hiệu $dz = dx + idy$.

Một *tổng hình thức* là biểu thức $\gamma_1 + \gamma_2 + \cdots + \gamma_n$ trong đó các γ_j không nhất thiết là phân hoạch của một đường nào đó. Ta định nghĩa *tích phân* của f trên tổng hình thức này như là tổng các tích phân trên các đường γ_j. Như vậy, ta sẽ gặp phải trường hợp nhiều tổng hình thức cùng biểu diễn cho một tập hợp điểm, điều đó dẫn đến việc chia lớp tương đương các tổng hình thức này, và đưa ra định nghĩa dây chuyền như sau.

Định nghĩa 12. Hai tổng hình thức được gọi là tương đương nếu như tích phân của mọi hàm liên tục từng khúc trên chúng là bằng nhau. Dễ dàng nhận thấy đây là một quan hệ tương đương và phân lớp tập các tổng hình thức. Ta gọi mỗi lớp tương đường này là *dây chuyền* và xem các tổng hình thức là một *biểu diễn* của dây chuyền ấy.

Tính chất sau đây được suy ra trực tiếp từ định nghĩa trên. Phần chứng minh không có gì khó khăn.

Mệnh đề 13. *Hai tổng hình thức cùng biểu diễn cho một dây chuyền nếu như ta thu được tổng này từ tổng kia bằng các phép*

1. *Hoán vị hai đường thành phần với nhau.*
2. *Phân hoạch một đường thành phần.*
3. *Ghép các phân hoạch đã có thành một đường.*
4. *Tham số lại các đường.*
5. *Triệt tiêu các đường ngược nhau.*

Ta định nghĩa *tổng của hai dây chuyền* như là tổng của các tổng hình thức, tức nếu $\Gamma_1 = \sum_j \gamma_j^1$ và $\Gamma_2 = \sum_j \gamma_j^2$ thì $\Gamma_1 + \Gamma_2 = \sum_j \gamma_j^1 + \sum_j \gamma_j^2$. Ta nhận thấy rằng cách định nghĩa này không thay đổi khi ta chọn các cách biểu diễn các nhau của cùng một chu trình. Lưu ý rằng ta có thể thực hiện cộng hai dây chuyền một cách đơn giản hơn nếu ta chọn các biểu diễn phù hợp, với các đường thành phần trùng nhau. Giả sử ta muốn công hai dây chuyền Γ_1 và Γ_2, ta viết chúng dưới dạng

$$\begin{aligned}\Gamma_1 &= \sum_{j=1}^{n} a_j\gamma_j \\ \Gamma_2 &= \sum_{j=1}^{n} b_j\gamma_j\end{aligned}$$

trong đó a_j, b_j là các số tự nhiên, lớn hơn 0 nếu như đường γ_j bị lặp lại, bằng 0 nếu đường này bị triệt tiêu hoặc không chứa trong dây chuyền đang xét, nhỏ hơn 0 nếu sau khi triệt tiêu vẫn còn đường $-\gamma_j$. Khi đó ta chỉ cần cộng các hệ số tương ứng để có được tổng hai dây chuyền.

Định nghĩa 14. Một dây chuyền γ được gọi là *chu trình* nếu nó có thể biểu diễn thành tổng các đường đóng.

Với định nghĩa trên, ta nhận thấy rằng một dây chuyền là chu trình nếu và chỉ nếu trong mọi cách biểu diễn, các đường thành phân cô lập (tức không có giao với các đường còn lại) đều đóng. Điều này có thể được chứng minh dễ dàng bằng phản chứng.

3.1.2 Chỉ số, đồng đều và đồng luân

Ta đi đến một loạt khái niệm quan trọng sau, trong đó bao gồm chỉ số của một điểm z_0 đối với đường cong kín γ. Khái niệm này mô tả một cách rõ ràng các vấn đề khá cảm tính, chẳng hạn như số lần mà đường γ "quay quanh" điểm z_0.

Định lý 15. *(Chỉ số của một điểm) Cho γ là một đường cong kín trơn từng khúc và điểm a không thuộc ảnh của γ. Khi đó số*

$$Ind(\gamma, a) = \frac{1}{2i\pi}\oint_\gamma \frac{1}{z-a}\,dz$$

luôn là một số nguyên và được gọi là chỉ số (index) *của* a *đối với* γ. *Chỉ số này không thay đổi khi* a *di chuyển trên một thành phần liên thông của* $\mathbb{C} \setminus \gamma^*$ *và bằng* 0 *trong thành phần liên thông không bị chặn.*

Chứng minh. Ta chỉ cần chứng minh $e^{\oint_\gamma \frac{dz}{z-a}} = 1$. Để làm điều này, ta tham số hóa γ bởi hàm $z(t)$ có khoảng tham số là $[0,1]$. Khi đó đặt

$$g(x) = e^{\int_0^x \frac{z'(t)\,dt}{z(t)-a}} \qquad \forall x \in [0,1]$$

và cần chứng minh $g(1) = 1$. Thật vậy, ta có

$$g'(x) = \frac{z'(x)}{z(x)-a} g(x),$$

suy ra $[(z(x)-a)\,g(x)]' = 0$, cho ta $g(x) = \frac{c}{z(x)-a}$. Vậy ta có

$$g(1) = \frac{c}{z(1)-a} = \frac{c}{z(0)-a} = g(0) = 1.$$

Vậy chỉ số của a với γ luôn là một số nguyên. Do $\operatorname{Ind}(\gamma, a)$ là hàm liên tục theo a và chỉ nhận các giá trị nguyên nên không đổi trên các thành phần liên thông của $\mathbb{C} \setminus \gamma^*$. Trên thành phần liên thông không bị chặn, ta cho $a \to \infty$ thì nhận được $\operatorname{Ind}(\gamma, a) \to 0$. Vì chỉ nhận các giá trị nguyên nên chỉ số này phải là 0. Định lý được chứng minh. □

Ta có cách sau để xác định chỉ số của một điểm a cho trước đối với đường cong kín γ. Không mất tính tổng quát, ta có thể giả sử a là gốc tọa độ. Khi đó ta có Bổ đề sau:

Bổ đề 16. *Xét* z_1, z_2 *là 2 điểm trên đường cong kín* γ *không đi qua gốc tọa độ. Ký hiệu* γ_1 *là phần cung đi từ* z_1 *đến* z_2, γ_2 *là phần cung đi từ* z_2 *đến* z_1. *Giả sử rằng* z_1 *nằm ở nửa mặt phẳng phía dưới,* z_2 *nằm ở nửa mặt phẳng phía trên và* $\gamma_1 \cap \mathbb{R}^- = \gamma_2 \cap \mathbb{R}^+ = \emptyset$. *Khi đó ta có* $Ind(\gamma, 0) = 1$.

Chứng minh. Gọi d là khoảng cách từ 0 đến compact γ^*, $\varepsilon = \frac{d}{2}$ và C_ε là đường tròn tâm 0, bán kính ε định hướng dương. Bằng cách tham số hóa C_ε bởi $e^{2\pi\theta}$ trên khoảng $[0, 1]$, ta tính được $\operatorname{Ind}(C_\varepsilon, 0) = 1$.

Gọi η_1 là nửa đường tròn C_ε xác định bởi εi và $-\varepsilon i$, không cắt $\mathbb{R}^-$ và η_2 là nửa đường tròn còn lại có cùng định hướng với C_ε. Xét ν_1 là đường cong kín xác định bởi hợp nối γ_1, đường thẳng Γ_2 từ z_2 đến εi, $-\eta_1$, đường thẳng Γ_1 từ $-\varepsilon i$ đến z_1 và ν_2 là đường cong kín xác định bởi hợp nối γ_2, $-\Gamma_1$, $-\eta_2$, $-\Gamma_2$, ta có ν_1 không cắt $\mathbb{R}_0^+$ và ν_2 không cắt $\mathbb{R}_0^-$, tức 0 đều thuộc các thành phần liên thông không bị chặn của $\mathbb{C} \setminus \nu_1$ và $\mathbb{C} \setminus \nu_2$. Do đó ta suy ra

$$\operatorname{Ind}(\gamma, 0) = \operatorname{Ind}(\nu_1, 0) + \operatorname{Ind}(\nu_2, 0) + \operatorname{Ind}(C_\varepsilon, 0) = 1.$$

$\square$

Một cách hình tượng (và hình thức), ta có thể tính được chỉ số của điểm z_0 đối với đường γ bằng mẹo sau. Từ z_0 kẻ một tia bất kì, cắt γ tại hữu hạn điểm $\zeta_1, \zeta_2 \ldots, \zeta_n$, gọi A là số điểm ζ_i mà tại đó γ đi theo chiều dương và B là số các điểm ζ_i mà tại đó γ đi theo chiều âm. Khi đó chỉ số của z_0 chính là

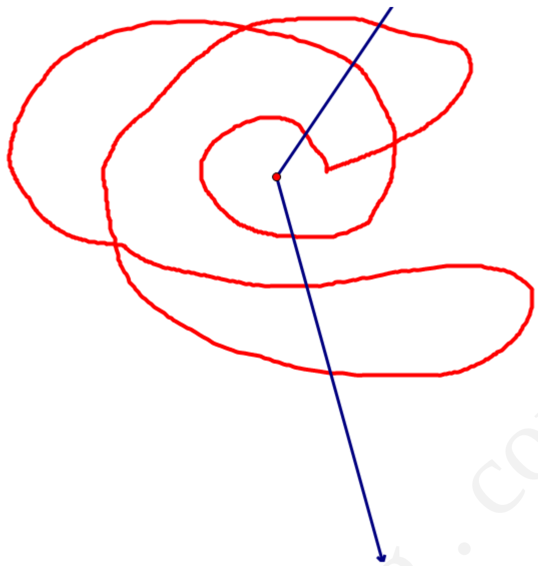
$$\operatorname{Ind}(\gamma, z_o) = A + B.$$

Với mục đích phân lớp tương đương các đường cong kín trên một miền Ω, ta quan tâm đến chỉ số của các đường này và do đó ta có các định nghĩa sau.

Định nghĩa 17. Với một miền Ω và 2 đường cong kín γ_1, γ_2, ta nói γ_1 và γ_2 *đồng đều* (*homologous*) với nhau nếu và chỉ nếu $\operatorname{Ind}(\gamma_1, a) = \operatorname{Ind}(\gamma_2, a)$ với mọi a nằm ngoài Ω. Khi đó ta viết

$$\gamma_1 \sim \gamma_2 \pmod{\Omega}.$$

Đặc biệt, nếu $\operatorname{Ind}(\gamma, a) = 0$ với mọi a ngoài Ω, ta nói γ *đồng đều với 0* (*homologous to zero*) và viết $\gamma \sim 0 \pmod{\Omega}$.



Hình 3.1.1: Với mọi tia được chọn, cách tính chỉ số trên đều cho kết quả như nhau.

Ở phần sau, ta sẽ thấy rằng tích phân của hàm giải tích trên các đường đồng đều với nhau sẽ bằng nhau. Đặc biệt, ta sẽ nhanh chóng chỉ ra rằng nếu đường γ_1 có thể thu được từ γ_2 qua một số phép "kéo dãn" thì chúng sẽ đồng đều với nhau. Nhưng trước hết, ta cần một định nghĩa rõ ràng cho tính chất mới này.

Định nghĩa 18. Cho γ_1 và γ_2 là các đường đóng trong miền Ω, ta tham số hóa lại các đường này sao cho khoảng tham số đều là $[0,1]$. Khi đó γ_1 và γ_2 được gọi là $\Omega-$*đồng luân* (*homotopic*)với nhau nếu tồn tại một hàm liên tục H từ $[0,1]\times[0,1]$ đến Ω thỏa tính chất

$$\begin{aligned} H(0,s) &= \gamma_1(s) \\ H(1,s) &= \gamma_2(s) \\ H(t,0) &= H(t,1) \end{aligned}$$

với mọi s, t trong $[0,1]$.

Đường γ được gọi là *đồng luân với 0* (*null homotopic*) nếu và chỉ nếu nó đồng luân với một hàm hằng (tức đường cong kín chỉ gồm 1 điểm). Một miền Ω thỏa mãn tính chất mọi đường cong kín trong nó đều đồng luân với 0 được gọi là *đơn liên*.

Như đã nói ở trên, giờ ta sẽ chứng minh hai đường đồng luân thì đồng đều. Ý tưởng ở đây là nếu 2 đường γ_1 và γ_2 có cùng khoảng tham số và "đủ gần nhau" thì sẽ có chỉ số bằng nhau.

Bổ đề 19. *Cho γ_1 và γ_2 là các đường đóng với khoảng tham số là $[0,1]$, α là một số phức không thuộc γ_1^* và γ_2^*. Khi đó, nếu*

$$|\gamma_1(s) - \gamma_2(s)| < |\gamma_1(s) - \alpha| \qquad \forall s \in [0,1]$$

thì ta phải có $Ind(\gamma_1, \alpha) = Ind(\gamma_2, \alpha)$.

Chứng minh. Ta có $|[\gamma_1(s) - \alpha] - [\gamma_2(s) - \alpha]| < |\gamma_1(s) - \alpha|$, do đó

$$\left|1 - \frac{\gamma_2(s) - \alpha}{\gamma_1(s) - \alpha}\right| < 1,$$

nên chỉ số của đường $\gamma = \frac{\gamma_2 - \alpha}{\gamma_1 - \alpha}$ với 0 bị triệt tiêu, nghĩa là

$$\int_0^1 \frac{\gamma'(s)}{\gamma(s)}\, ds = 0$$

Nhưng lại có

$$\frac{\gamma'(s)}{\gamma(s)} = \frac{\gamma_1'(s)}{\gamma_1(s) - \alpha} - \frac{\gamma_2'(s)}{\gamma_2(s) - \alpha}.$$

Vậy ta suy ra

$$\operatorname{Ind}(\gamma_2, \alpha) = \oint_{\gamma_1} \frac{d\zeta}{\zeta - \alpha} = \oint_{\gamma_2} \frac{d\zeta}{\zeta - \alpha} = \operatorname{Ind}(\gamma_2, \alpha),$$

và do đó bổ đề được chứng minh. □

Từ bổ đề trên, ta có được định lý sau, khẳng định 2 đường đồng luân thì đồng đều.

Định lý 20. *Nếu γ_1 và γ_1 là các đường đóng Ω-đồng luân thì ta có $\gamma_1 \sim \gamma_2$ (mod Ω).*

Chứng minh. Ta chứng minh $\operatorname{Ind}(\gamma_1, \alpha) = \operatorname{Ind}(\gamma_2, \alpha)$ với mọi $\alpha \notin \Omega$. Do $H\left([0,1]^2\right)$ là compact không chứa α nên tồn tại khoảng cách từ α với $H\left([0,1]^2\right)$. Ta giả sử

$$|H(t,s) - \alpha| > 2\varepsilon \quad \forall (s,t) \in [0,1]^2,$$

mặt khác H cũng liên tục đều nên ta suy ra tồn tại N đủ lớn để $|H(t,s) - H(u,v)| < \varepsilon$ với $|t-u| + |s-v| < \frac{1}{N}$. Ta có ý định chứng minh chỉ số của α không đổi khi t nhận các giá trị là $\frac{k}{N}$. Tuy nhiên điều này thất bại vì đường $H\left(\frac{k}{N}, s\right)$ lúc đó không chắc là trơn từng khúc. Vậy, ta sử dụng dãy các đường gấp khúc sau để xấp xỉ $H\left(\frac{k}{N}, s\right)$:

$$\begin{aligned}
\Gamma_k(s) &= H\left(\frac{k}{N}, \frac{i}{n}\right) + \frac{s - \frac{i}{N}}{\frac{1}{N}}\left[H\left(\frac{k}{N}, \frac{i+1}{n}\right) - H\left(\frac{k}{N}, \frac{i}{n}\right)\right] \\
&= (1 + i - Ns)\, H\left(\frac{k}{N}, \frac{i}{n}\right) + (Ns - i)\, H\left(\frac{k}{N}, \frac{i+1}{n}\right)
\end{aligned}$$

với mọi $\frac{i}{N} \le s \le \frac{i+1}{N}$. Ta kiểm được Γ_k được định nghĩa tốt, liên tục, trơn từng phần và $|\Gamma_0 - \gamma_1| < \varepsilon$, $|\Gamma_1 - \gamma_2| < \varepsilon$. Do đó $\operatorname{Ind}(\gamma_1, \alpha) = \operatorname{Ind}(\Gamma_0, \alpha)$ và $\operatorname{Ind}(\gamma_2, \alpha) = \operatorname{Ind}(\Gamma_1, \alpha)$.

Vậy ta chỉ cần chứng minh $\operatorname{Ind}(\Gamma_k, \alpha) = \operatorname{Ind}(\Gamma_{k+1}, \alpha)$ là đủ. Với $\frac{i}{N} \le s \le \frac{i+1}{N}$, ta có

$$\begin{cases} \left|H\left(\frac{k}{N}, \frac{i}{n}\right) - H\left(\frac{k+1}{N}, \frac{i}{n}\right)\right| & < \varepsilon \\ \left|H\left(\frac{k}{N}, \frac{i+1}{n}\right) - H\left(\frac{k+1}{N}, \frac{i+1}{n}\right)\right| & < \varepsilon \end{cases},$$

và vì $\Gamma_k(s)$ và $\Gamma_{k+1}(s)$ là các tổ hợp lồi với cùng trọng số của 4 vector trên, ta có $|\Gamma_k(s) - \Gamma_{k+1}(s)| < \varepsilon$. Vậy ta chứng minh được $|\Gamma_k - \Gamma_{k+1}| < \varepsilon$. Áp dụng bổ đề 19, ta có $\operatorname{Ind}(\Gamma_k, \alpha) = \operatorname{Ind}(\Gamma_{k+1}, \alpha)$ và do đó định lý được chứng minh. □

Ngoài ra, bổ đề 19 cho ta nhiều hơn là chỉ định lý này. Ta sẽ dùng bổ đề này để định nghĩa chỉ số của một đường Γ đóng liên tục nhưng không trơn đối với một điểm α cho trước. Ta đã biết rằng các đường đóng liên tục có thể xấp xỉ bằng dãy các đường trơn $\{\gamma_n\}$ (có thể lấy khai triển Fourier của Γ), do đó nếu ta chứng minh được rằng chỉ số của α đối với dãy các đường trơn này một lúc nào đó là không đổi thì ta có thể xem chính hằng số này là chỉ số của α đối với Γ. Ý tưởng này được cụ thể hóa ở Bài 1.28. phần bài tập.

3.2 Định lý Cauchy cho các hình đơn giản.

Đầu tiên, ta có một kết quả về tính độc lập đường của đường của các hàm phức. Một cách đơn giản, hàm f độc lập đường khi và chỉ khi nó là đạo hàm của một hàm phức khác.

Định lý 21. *Tích phân $\int_\gamma p\,dx + q\,dy$ trên miền mở Ω chỉ phụ thuộc vào điểm đầu vào điểm cuối khi và chỉ khi tồn tại hàm $U(x,y)$ trên Ω sao cho*

$$\frac{\partial U}{\partial x} = p, \qquad \frac{\partial U}{\partial y} = q.$$

Đặc biệt, với f là hàm giải tích trên Ω, ta có f độc lập đường khi và chỉ khi tồn tại hàm F giải tích sao cho $F'(z) = f(z)$. Lúc đó $f(z)\,dz$ và $p\,dx + q\,dy$ được gọi là vi phân toàn phần *(*exact differential*)*

Chứng minh. Điều kiện đủ là hiển nhiên vì

$$\begin{aligned}
\int_\gamma p\,dx + q\,dy &= \int_\gamma \frac{\partial U}{\partial x}\,dx + \frac{\partial U}{\partial y}\,dy \\
&= \int_a^b U'(x(t), y(t))\,dt \\
&= U(x(b), y(b)) - U(x(a), y(a))
\end{aligned}$$

Ta chứng minh điều kiện cần bằng cách chỉ ra hàm $U(z)$. Xem $U(z) = \int_{z_0}^{z} p\,dx + q\,dy$, vì tích phân này không phụ thuộc vào đường đi nên $U(z)$ xác định duy nhất. Ta chứng minh $\frac{\partial U}{\partial x} = p$, đẳng thức còn lại được suy ra một cách tương tự. Thật vậy, tại $z_1 \in \Omega$, tồn tại $\varepsilon > 0$ để $D(z_1, 2\varepsilon) \subset \Omega$. Ta có

$$\begin{aligned} U(z_1) &= \int_{z_0}^{z_1-\varepsilon} p\,dx + q\,dy + \int_{z_1-\varepsilon}^{z_1} p\,dx + q\,dy \\ & \int_{z_0}^{z_1-\varepsilon} p\,dx + q\,dy + \int_{z_1-\varepsilon}^{z_1} p\,dx \end{aligned}$$

Do đó ta có $\frac{\partial U}{\partial x}(z_1) = p(z_1)$ và định lý được chứng minh. Khi $f(z)$ là hàm giải tích và độc lập đường, ta có

$$\oint_\gamma f(z)\,fz = \oint_\gamma f(z)\,dx + if(z)\,dy = 0.$$

Suy ra tồn tại hàm F để

$$\frac{\partial F}{\partial x} = f, \qquad \frac{\partial F}{\partial y} = if.$$

tức F thỏa mãn hệ thức Cauchy-Riemann nên là hàm giải tích. □

Theo kết quả định lý trên, tích phân của các hàm đa thức đều độc lập đường. Một cách tổng quát, tích phân của các hàm giải tích (trong một số điều kiện nhất định) cũng sẽ độc lập đường. Ý tưởng để giải quyết điều này chính là đưa bài toán về trường hợp các hàm đa thức, mà cụ thể hơn là các hàm tuyến tính. Tính 'giải tích' được sử dụng nhằm giúp ta xấp xỉ các hàm giải tích bằng ánh xạ tuyến tính đạo hàm của nó.

Định lý 22. *(Định lý Cauchy cho hình chữ nhật) Cho f là hàm giải tích trên hình chữ nhật R. Khi đó ta có*

$$\oint_{\partial R} f(z)\,dz = 0.$$

Chứng minh. Nhắc lại rằng hàm f được gọi là giải tích trên A khi nó giải tích trên một tập mở chứa A. Từ trung điểm các cạnh của R, ta chia R thành 4 hình chữ nhật bằng nhau R^j với $j = \overline{1,4}$. Ta có

$$\oint_{\partial R} f(z)\, dz = \sum_{j=1}^{4} \oint_{\partial R_j} f(z)\, dz.$$

Do đó tồn tại j để

$$\left|\oint_{\partial R} f(z)\, dz\right| \leq 4\left|\int_{\partial R^j} f(z)\, dz\right|.$$

Ta gọi hình chữ nhật R^j này là R_1. Một cách hoàn toàn tương tự, ta xác định được một dãy lồng nhau các hình chữ nhật $\{R_n\}$ thỏa mãn tính chất

$$\left|\int_{\partial R} f(z)\, dz\right| \leq 4^n\left|\oint_{\partial R_n} f(z)\, dz\right|, \qquad L(\partial R_n) = \frac{L(\partial R)}{2^n}.$$

Vì $\{R_n\}$ là một dãy các compact lồng nhau có đường kính dần về 0 nên phần giao của chúng chứa duy nhất một điểm z_0. Vì f giải tích tại z_0 nên với mọi $\varepsilon > 0$ (đủ nhỏ để f còn giải tích trên lân cận bán kính ε của z_0), tồn tại $\delta_\varepsilon > 0$ để

$$|f(z) - f(z_0) - f'(z_0)(z - z_0)| \leq \varepsilon\,|z - z_0| \qquad \forall\,|z - z_0| \leq \delta_\varepsilon.$$

Chọn n đủ lớn để R_n chứa trong $B(z_0, \varepsilon)$, ta có

$$\begin{aligned}
\left|\oint_{\partial R} f(z)\, dz\right| &\leq 4^n\left|\oint_{\partial R_n} f(z)\, dz\right| \\
&= 4^n\left|\oint_{\partial R_n} [f(z) - f(z_0) - f'(z_0)(z - z_0)]\, dz\right| \\
&\leq 4^n \oint_{\partial R_n} \varepsilon\,|z - z_0|\, dz \\
&\leq 4^n L(\partial R_n)^2\,\varepsilon \\
&= \varepsilon L(\partial R)^2
\end{aligned}$$

Vậy ta có $\oint_{\partial R} f(z)\, dz = 0$ và định lý được chứng minh. $\square$

Tổng quát hơn, trong định lý trên, ta có thể bỏ tính giải tích của f tại một điểm (và sau đó là tại hữu hạn điểm). Việc này rất có ích khi ta cần khảo sát các điểm kì dị (cô lập) của f.

Định lý 23. *Cho f là hàm giải tích trên tập R' nhận được bằng cách bỏ đi một số điểm hữu hạn ξ_j từ hình chữ nhật R. Giả sử rằng*

$$\lim_{x\to\xi_j}(x-\xi_j)\,f(x)=0$$

với mọi j, khi đó ta có

$$\oint_{\partial R} f(z)\,dz = 0.$$

Chứng minh. Ta chỉ cần chứng minh trong trường hợp có 1 điểm bị bỏ đi là đủ. Khi đó, với mọi $\varepsilon>0$, tồn tại $\delta_\varepsilon>0$ sao cho

$$|z-z_0|\,|f(z)-f(z_0)|\le\varepsilon$$

với mọi z thuộc hình vuông $\hat{R}$ tâm tại z_0, cạnh là $2\delta_\varepsilon$. Nối dài các cạnh của hình vuông này, ta có

$$\begin{aligned}\left|\oint_{\partial R} f(z)\,dz\right| &= \left|\oint_{\partial\hat{R}} f(z)\,dz\right|\\ &= \left|\oint_{\partial\hat{R}}[f(z)-f(z_0)]\,dz\right|\\ &\le \oint_{\partial\hat{R}}\frac{\varepsilon}{\delta_\varepsilon}=8\varepsilon\end{aligned}$$

Vậy ta suy ra được $\oint_{\partial R} f(z)\,dz=0$ và định lý được chứng minh. □

Với việc tích phân trên biên các hình chữ nhật (chứa trong một lân cận của z_0) bị triệt tiêu, ta suy ra tích phân trên các đường gấp khúc kín (có các cạnh song song với 2 trục) cũng bị triệt tiêu. Do đó, ta xây dựng hàm F trên một lân cận của z_0 như tích phân trên các đường gấp khúc và kiểm tra được $F' = f$. Điều này khiến ta có thể, từ việc tích phân trên biên các hình chữ nhật triệt tiêu, suy ra tích phân trên mọi đường cong kín cũng triệt tiêu. Cụ thể, ta có định lý sau:

Định lý 24. *Cho f là hàm giải tích trên miền Δ' nhận được bằng cách bỏ đi một vài điểm ξ_j từ quả cầu mở Δ. Giả sử rằng*

$$\lim_{x \to \xi_j} (x - \xi_j) f(x) = 0$$

với mọi j, khi đó với mọi đường cong kín γ, ta có

$$\oint_\gamma f(z)\, dz = 0.$$

Chứng minh. Xét z_0 là một điểm trong Δ'. Vì Δ' là tập mở liên thông nên với mọi $z \in \Delta'$ và $\varepsilon > 0$ đủ nhỏ để $B(z, \varepsilon)$ chứa trong Δ', tồn tại các đường đi γ_1, γ_2 từ z_0 đến $z - \varepsilon$ và $z - i\varepsilon$ với các cạnh song song với 2 trục tọa độ. Do tích phân của f trên biên các hình chữ nhật đều bằng 0 nên ta suy ra được tích phân trên γ_1 và γ_2 là bằng nhau. Do đó $f(z)\, dz$ là vi phân toàn phần và tồn tại F giải tích trên Δ' để $F' = f$. Suy ra $\oint_\gamma f(z)\, dz = 0$. □

3.3 Công thức Cauchy cho các hình đơn giản.

Với khái niệm chỉ số, ta dễ dàng chứng minh được Công thức Tích phân Cauchy sau đây:

Định lý 25. *(Công thức Tích phân Cauchy) Cho $f(z)$ là hàm giải tích trên một quả cầu mở Δ và γ là một đường cong kín trong Δ. Khi đó với mọi a không nằm trên γ^*, ta có*

$$Ind(\gamma, a) f(a) = \frac{1}{2i\pi} \oint_\gamma \frac{f(z)}{z - a}\, dz.$$

Chứng minh. Xét hàm $F(z)$ xác định trên $\Delta \setminus \{a\}$ thỏa mãn $F(z) = \frac{f(z)-f(a)}{z-a}$. Ta có F giải tích và

$$\lim_{z\to a}(z-a)F(z) = \lim_{z\to a}[f(z)-f(a)] = 0$$

nên suy ra $\oint_\gamma F(z)\,dz = 0$. Do đó ta có

$$\oint_\gamma \frac{f(z)}{z-a}\,dz = \oint_\gamma \frac{f(a)}{z-a}\,dz = 2\pi i \mathrm{Ind}(\gamma, a) f(a).$$

Định lý được chứng minh hoàn toàn. □

Ta quan tâm đến một công thức tương tự với công thức Cauchy cho đạo hàm của f, cũng như việc tính các tích phân $\frac{\varphi(z)}{(z-a)^n}$ trên một đường cong kín. Vậy nên một trong những ý tưởng khá tốt là lấy đạo hàm của công thức Cauchy một hoặc nhiều lần:

$$\begin{aligned}
n(\gamma, z) f'(z) &= \frac{1}{2i\pi}\oint_\gamma \frac{f(\xi)}{(\xi-z)^2}\,d\xi \\
n(\gamma, z) f''(z) &= \frac{2}{2i\pi}\oint_\gamma \frac{f(\xi)}{(\xi-z)^3}\,d\xi \\
&\cdots \\
n(\gamma, z) f^{(n)}(z) &= \frac{n!}{2i\pi}\oint_\gamma \frac{f(\xi)}{(\xi-z)^{n+1}}\,d\xi
\end{aligned}$$

Vậy vấn đề duy nhất mà ta cần phải giải quyết là việc "lấy đạo hàm" như thế có được chứng minh chặt chẽ hay không. Cụ thể, ta có Bổ đề sau:

Bổ đề 26. *Cho $\varphi(\xi)$ là hàm liên tục trên đường cong γ. Khi đó hàm số*

$$F_n(z) = \int_\gamma \frac{\varphi(\xi)\,d\xi}{(\xi-z)^n}$$

là giải tích trên mỗi thành phân liên thông được chia bởi γ và đạo hàm của nó được tính bởi $F_n'(z) = nF_{n+1}(z)$.

Chứng minh. Ta bắt đầu với trường hợp $n = 1$. Khi đó ta có $F_1(z) = \int_\gamma \frac{\varphi(\xi)\, d\xi}{\xi - z}$ và

$$F_1(z) - F_1(z_0) = (z - z_0) \int_\gamma \frac{\varphi(\xi)\ d\xi}{(\xi - z)(\xi - z_0)}$$

Gọi δ là khoảng cách từ z_0 đến γ^* và xét z thỏa $|z - z_0| < \frac{\delta}{2}$, ta có

$$|F_1(z) - F_1(z_0)| = |z - z_0| \cdot \frac{2}{\delta^2} \cdot \int_\gamma |\varphi|\ d\xi$$

nên suy ra $F_1(z)$ là hàm liên tục.

Xét giới hạn

$$\lim_{z \to z_0} \frac{F_1(z) - F_1(z_0)}{z - z_0} = \lim_{z \to z_0} \int_\gamma \frac{\varphi(\xi)\ d\xi}{(\xi - z)(\xi - z_0)}$$

do hàm $\frac{\varphi(\xi)}{\xi - z_0}$ liên tục theo ξ nên tương tự bên trên, ta có

$$\lim_{z \to z_0} \int_\gamma \frac{\varphi(\xi)\ d\xi}{(\xi - z)(\xi - z_0)} = \lim_{z \to z_0} \int_\gamma \frac{\varphi(\xi)\ d\xi}{(\xi - z_0)^2}.$$

Đẳng thức được chứng minh khi $n = 1$. Ta sẽ sử dụng quy nạp để chứng minh phần còn lại của Bổ đề. Thật vậy, giả sử đã có $F'_{n-1}(z) = (n-1) F_n(z)$ với mọi φ liên tục, ta xét

$$\begin{aligned} F_n(z) - F_n(z_0) &= \int_\gamma \frac{\varphi(\xi)\ d\xi}{(\xi - z)^n} - \int_\gamma \frac{\varphi(\xi)\ d\xi}{(\xi - z_0)^n} \\ &= (z - z_0) \int_\gamma \frac{\varphi(\xi)\ d\xi}{(\xi - z)^n (\xi - z_0)} + \int_\gamma \frac{\varphi(\xi)\ d\xi}{(\xi - z)^{n-1}(\xi - z_0)} - \int_\gamma \frac{\varphi(\xi)\ d\xi}{(\xi - z_0)^n} \end{aligned}$$

Áp dụng giả thiết quy nạp cho $\frac{\varphi(\xi)}{(\xi - z_0)}$, ta có $\int_\gamma \frac{\varphi(\xi)\, d\xi}{(\xi - z)^{n-1}(\xi - z_0)} - \int_\gamma \frac{\varphi(\xi)\, d\xi}{(\xi - z_0)^n} \to 0$ khi $z \to z_0$. Ngoài ra thì

$$\left| (z - z_0) \int_\gamma \frac{\varphi(\xi)\ d\xi}{(\xi - z)^n (\xi - z_0)} \right| \leq |(z - z_0)| \frac{2^n}{\delta^{n+1}} \int_\gamma |\varphi|\ d\xi$$

nên ta suy ra $F_n(z)$ là hàm liên tục. Ta có

$$\frac{F_n(z)-F_n(z_0)}{z-z_0}=\int_\gamma \frac{\varphi(\xi)\,d\xi}{(\xi-z)^n(\xi-z_0)}+\frac{1}{z-z_0}\left[\int_\gamma \frac{\frac{\varphi(\xi)}{(\xi-z_0)}\,d\xi}{(\xi-z)^{n-1}}-\int_\gamma \frac{\frac{\varphi(\xi)}{(\xi-z_0)}\,d\xi}{(\xi-z_0)^{n-1}}\right].$$

Áp dụng các kết quả F_n liên tục và $F'_{n-1}(z)=(n-1)F_n(z)$ cho hàm $\frac{\varphi(\xi)}{(\xi-z_0)}$ liên tục theo ξ, ta có

$$\begin{aligned}\int_\gamma \frac{\varphi(\xi)\,d\xi}{(\xi-z)^n(\xi-z_0)} &\to \int_\gamma \frac{\varphi(\xi)\,d\xi}{(\xi-z_0)^{n+1}}\\ \frac{1}{z-z_0}\left[\int_\gamma \frac{\frac{\varphi(\xi)}{(\xi-z_0)}\,d\xi}{(\xi-z)^{n-1}}-\int_\gamma \frac{\frac{\varphi(\xi)}{(\xi-z_0)}\,d\xi}{(\xi-z_0)^{n-1}}\right] &\to (n-1)\int_\gamma \frac{\varphi(\xi)\,d\xi}{(\xi-z_0)^{n+1}}\end{aligned}$$

khi $z\to z_0$. Do đó ta có

$$F'_n(z_0)=\lim_{z\to z_0}\frac{F_n(z)-F_n(z_0)}{z-z_0}=n\int_\gamma \frac{\varphi(\xi)\,d\xi}{(\xi-z_0)^{n+1}}=nF_{n+1}(z_0).$$

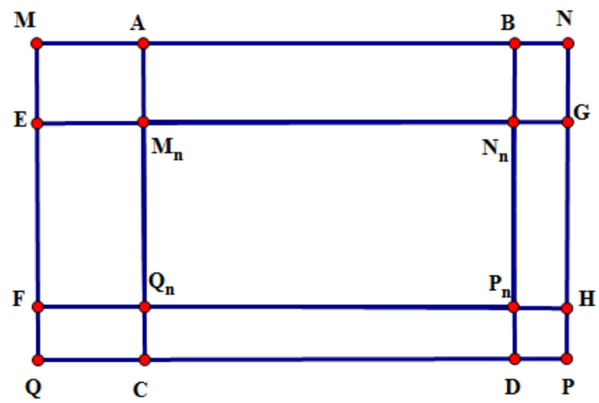
Bổ đề được chứng minh hoàn toàn. □

Như vậy, một hàm giải tích sẽ có đạo hàm vô hạn lần và đạo hàm này được cho bởi

$$f^{(n)}(z)=\frac{n!}{2i\pi}\oint_C \frac{f(\xi)\,d\xi}{(\xi-z)^{n+1}}$$

với C là đường tròn đủ tâm z có bán kính đủ nhỏ. Điều này cho ta những hệ quả là Định lý Morera, Ước lượng Cauchy và Định lý Liouville, ý toán và kĩ thuật chứng minh không có gì phức tạp.

Định lý 27. *(Định lý Morera) Nếu $f(z)$ xác định và liên tục trên Ω và $\oint_\gamma f(z)\,dz=0$ với mọi đường đóng γ trong Ω thì f là hàm giải tích. Hơn nữa, ta cũng chỉ cần*



Hình 3.3.1: Hình chữ nhật $M_nN_nP_nQ_n$ dần về hình $MNPQ$.

$\oint_R f(z)\,dz$ triệt tiêu với R là một hình vuông trong lưới chính tắc có khoảng cách $\frac{1}{2^n}$ là đủ.

Chứng minh. Với vế đầu tiên, vì tích phân của f là độc lập đường nên tồn tại hàm F giải tích trên Ω sao cho $F'(z) = f(z)$. Mặt khác, F giải tích nên có đạo hàm vô hạn lần, ta suy ra f cũng là hàm giải tích.

Với vế thứ 2, xét dĩa tròn $\overline{D(z_0, r)}$ chứa trong Ω, ta sẽ chứng minh rằng tích phân của f trên biên mọi hình chữ nhật trong $D(z_0, r)$ đều triệt tiêu để suy ra điều kiện của vế thứ nhất, và do đó f giải tích trong $D(z_0, r)$. Thật vậy, xét hình chữ nhật $\hat{R}$ bất kì có bao đóng chứa trong $D(z_0, r)$, với mọi $n \in \mathbb{N}$, ta gọi $\{R_k\}_{k \in I_n}$ là họ các hình vuông trong lưới chính tắc khoảng cách $\frac{1}{2^n}$ và chứa trong $\hat{R}$. Khi đó, đặt $\tilde{R} = \bigcup_{k \in I_n} R_k$ là hình chữ nhật thì khoảng cách giữa các điểm của $\partial\tilde{R}$ tới $\partial\hat{R}$ nhỏ hơn $\frac{1}{2^n}$.

Với các đỉnh của hình chữ nhật được đặt tên như Hình 3.3.1 , vì f liên tục trên $\overline{\hat{R}}$ nên liên tục đều và có modulus bị chặn bởi L. Do đó với mọi ε, tồn tại n đủ lớn để $|f(z_1) - f(z_2)| < \varepsilon$ với mọi z_1, z_2 trong $\hat{R}$ thỏa $|z_1 - z_2| < 2^{-n}$. Do đó ta có

$$\left| \int_B^A f(z)\,dz - \int_{N_m}^{M_n} f(z)\,dz \right| \le \varepsilon\,|A - B|\,, \quad \left| \int_M^A f(z)\,dz \right| < L\,|A - M| < \frac{L}{2^n}.$$

Thiết lập các đẳng thức tương tự cho các cạnh EF, CD, GH và ME, NB, NG, PH, PD, QC, QF, ta có

$$\left|\oint_{\partial\hat{R}} f(z)\,dz - \oint_{\partial\tilde{R}} f(z)\,dz\right| \leq \varepsilon l(R) + \frac{8L}{2^n}$$

trong đó $l(R)$ là chu vi của R. Bất đẳng thức này cho ta $\oint_{\partial\hat{R}} f(z)\,dz = 0$ vì

$$\oint_{\partial\tilde{R}} f(z)\,dz = \sum_{k\in I_n} \oint_{\partial R_k} f(z)\,dz = 0.$$

Định lý do đó được chứng minh. □

Định lý 28. *(Ước lượng Cauchy)*

Cho f là hàm giải tích trên quả cầu Δ tâm a bán kính r thỏa mãn $|f(z)| \leq M$ với mọi $z \in \Delta$. Khi đó ta có

$$f^{(n)}(a) \leq \frac{n!M}{r^n}.$$

Chứng minh. Kết quả được suy ra trực tiếp từ công thức Cauchy. □

Định lý 29. *(Định lý Liouville) Cho f là một hàm giải tích, xác định trên $\mathbb{C}$. Ta gọi hàm f như vậy là* hàm nguyên (entire function)*. Khi đó nếu f bị chặn thì f là hằng số.*

Chứng minh. Sử dụng ước lượng Cauchy cho $f'(z)$ và đường tròn tâm z bán kính r, ta có

$$f'(z) \leq \frac{M}{r}.$$

Cho r dần về ∞ ta suy ra được $f'(z) = 0$. Do đó ta có $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y} = 0$ và vì $\mathbb{C}$ liên thông nên ta suy ra f là hằng số. □

Cách lấy đạo hàm ở bổ đề 26 có thể được mở rộng bởi định lý sau. Định lý này cho ta tính khả tích của một hàm có dạng $g(z) = \int \varphi(z,t)\,dt$ đồng thời giúp ta tính được đạo hàm của nó. Ý tưởng của điều này là việc dùng công thức Cauchy và định lý Fubini để đưa hàm g về dạng ở bổ đề 26.

Định lý 30. *Cho $\varphi(z,t)$ là hàm phức xác định trên $\Omega \times [\alpha,\beta]$, liên tục theo cả 2 biến z,t và là hàm giải tích theo biến z khi t cố định. Khi đó ta có*

$$F(z) = \int_\alpha^\beta \varphi(z,t)\, dt$$

là hàm giải tích với $z \in \Omega$ và đạo hàm được tính bởi

$$F'(z) = \int_\alpha^\beta \frac{\partial \varphi(z,t)}{\partial z}\, dt.$$

Chứng minh. Ta sẽ dùng bổ đề 26 để chứng minh định lý này. Trước hết, xét tại điểm $z_0 \in \Omega$, ta có

$$\varphi(z,t) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{\varphi(\zeta,t)}{\zeta - z}\, d\zeta$$

với $C = \partial D(z_0,r)$ là một đường tròn định hướng dương với bán kính r đủ nhỏ để $\overline{D(z_0,r)}$ chứa hoàn toàn trong Ω và z nằm trong $D(z_0,r)$. Khi đó ta có

$$\begin{aligned} F(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_\alpha^\beta \left[\oint_C \frac{\varphi(\zeta,t)}{\zeta - z}\, d\zeta \right] dt \\ &= \frac{1}{2\pi i} \oint_C \left[\frac{\int_\alpha^\beta \varphi(\zeta,t)\, dt}{\zeta - z} \right] d\zeta \end{aligned}$$

Trên compact $\overline{D(z_0,r)} \times [\alpha,\beta]$, hàm φ liên tục đều, do đó ta có $\int_\alpha^\beta \varphi(\zeta,t)\, dt$ là liên tục theo ζ. Sử dụng bổ đề 26, với $z \in D(z_0,r)$, ta có

$$\begin{aligned} F'(z) &= \frac{1}{2\pi i} \oint_C \left[\frac{\int_\alpha^\beta \varphi(\zeta,t)\, dt}{(\zeta - z)^2} \right] d\zeta \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_\alpha^\beta \left[\oint_C \frac{\varphi(\zeta,t)}{(\zeta - z)^2}\, d\zeta \right] dt \end{aligned}$$

Lại sử dụng bổ đề 26, ta có

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{\varphi(\zeta,t)}{(\zeta-z)^2}\,d\zeta = \frac{\partial\varphi(z,t)}{\partial z},$$

do đó ta suy ra

$$F'(z) = \int_\alpha^\beta \frac{\partial\varphi(z,t)}{\partial z}\,dt$$

và do đó định lý được chứng minh. □

3.4 Các tính chất địa phương của hàm giải tích

3.4.1 Định lý Taylor.

Giả sử ta đã có một hàm giải tích f trên $\Omega\setminus\{a\}$ và f thỏa những điều kiện nhất định, khi đó, ta có thể mở rộng f thành một hàm giải tích trên Ω bằng cách gán cho f một giá trị thích hợp tại a. Điều này được cụ thể hóa bằng định lý sau đây.

Định lý 31. *Cho $f(z)$ là hàm giải tích trên miền Ω' nhận được bằng cách bỏ đi điểm a từ miền Ω. Khi đó điều kiện cần và đủ để tồn tại một mở rộng giải tích cho f trên Ω là*

$$\lim_{z\to a}(z-a)f(z) = 0.$$

Hơn nữa, hàm mở rộng này, nếu có, là duy nhất.

Chứng minh. Xét hàm $\hat f$ xác định trên lân cận bán kính ε của a như sau: $\hat f(z) = \oint_{C_\varepsilon}\frac{f(\xi)\,d\xi}{(\xi-z)}$ với mọi $|z-a|<\varepsilon$ và C_ε là đường tròn tâm a bán kính ε định hướng dương. Khi đó $\hat f$ là hàm giải tích trên $B(a,\varepsilon)$. Mặt khác nếu ta định nghĩa $\tilde f$ là hàm nhận mọi giá trị của f trên Ω' và nhận mọi giá trị của $\hat f$ trên $B(a,\varepsilon)$ thì $\tilde f$ hoàn toàn xác định (do 2 hàm này bằng nhau trên phần giao của 2 miền xác định). Hàm $\tilde f$ khi đó giải tích và là một mở rộng của f trên Ω.

Mở rộng này cũng là duy nhất theo tính liên tục tại a của $\tilde{f}$. Định lý được chứng minh. $\square$

Nếu khai triển Taylor sau cho giúp ta viết được hàm thực f dưới dạng một chuỗi lũy thừa thì Định lý Taylor sau đây cũng giúp ta viết f dưới dạng tổng các lũy thừa với bậc lớn tùy ý và các hệ số giống khai triển chuỗi, tuy nhiên phần dư được viết dưới dạng một hàm giải tích. Vì các hàm giải tích có nhiều tính chất quan trọng nên việc biểu diễn này cho nhiều hệ quả quan trọng hơn cả khai triển chuỗi.

Định lý 32. *(Định lý Taylor) Cho f là hàm giải tích trên miền Ω chứa điểm a. Khi đó ta có thể viết*

$$f(z) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(z-a) + \frac{f''(a)}{2!}(z-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(z-a)^{n-1} + f_n(z)(z-a)^n$$

với f_n là hàm giải tích trên Ω.

Ngoài ra hàm f_n cũng có thể được tính thông qua f bởi công thức

$$f_n(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(\xi)\, d\xi}{(\xi-a)^n(\xi-z)} \qquad \forall z:\ 0 < |z-a| < r \tag{3.4.1}$$

với C đường tròn định hướng dương tâm a với bán kính r đủ nhỏ để quả cầu tương ứng nằm trong Ω.

Chứng minh. Xét hàm giải tích $\frac{f(z)-f(a)}{z-a}$ trên $\Omega \setminus \{a\}$, vì $\lim_{z\to a}(z-a)\frac{f(z)-f(a)}{z-a} = 0$ nên tồn tại hàm giải tích mở rộng $F_1(z)$. Do đó ta có

$$f(z) = f(a) + (z-a)F_1(z), \qquad F_1(a) = f'(a).$$

Tiếp tục gọi F_{n+1} là mở rộng của hàm giải tích $\frac{F_n(z)-F_n(a)}{z-a}$, ta có F_{n+1} giải tích và

$$f(z) = f(a) + F_1(a)(z-a) + \cdots + F_n(a)(z-a)^n + F_{n+1}(z)(z-a)^{n+1}.$$

Lấy đạo hàm bậc $n+1$ tại a của 2 vế ta được $f^{(n+1)}(a) = (n+1)!F_{n+1}(a)$. Do đó ta có $F_{n+1}(a) = \frac{f^{(n+1)}(a)}{(n+1)!}$, hay một cách tương tự thì

$$F_k(a) = \frac{f^{(k)}(a)}{k!}.$$

Do đó với mọi $n \in \mathbb{N}$, ta có

$$f(z) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(z-a) + \frac{f''(a)}{2!}(z-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(z-a)^{n-1} + F_n(z)(z-a)^n.$$

Ta cũng có thể tính được F_n theo f. Ta có

$$\frac{F_n(\xi)}{\xi - z} = \frac{f(\xi)}{(\xi-a)^n(\xi-z)} - \frac{f(a)}{(\xi-a)^n(\xi-z)} - \sum_{j=1}^{n-1} \frac{F_j(a)}{(\xi-a)^{n-j}(\xi-z)}$$

Mặt khác ta có

$$h(a) = \oint_C \frac{d\xi}{(\xi-a)(\xi-z)} = \frac{1}{2\pi i(a-z)}\left[\operatorname{Ind}(C,a) - \operatorname{Ind}(C,z)\right] = 0$$

với mọi a thuộc hình tròn và do đó

$$h^{(k)}(a) = \frac{1}{k!}\oint_C \frac{d\xi}{(\xi-a)^{k+1}(\xi-z)} = 0.$$

nên ta suy ra được

$$\begin{aligned} F_n(z) &= \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{F_n(\xi)}{\xi-z}\,d\xi \\ &= \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(\xi)}{(\xi-a)^n(\xi-z)}\,d\xi \end{aligned}$$

Định lý được chứng minh. □

Khác với các hàm thực, khai triển Taylor cho hàm phức giải tích thường được sử dụng ở dạng tổng hữu hạn nhiều hơn ở dạng chuỗi hàm. Chính vì vậy, đánh giá (3.4.1) có một vai trò nhất định. Vai trò này sẽ được thấy rõ ở phần sau, khi ta chứng minh cấp của một không điểm đối với một hàm giải tích khác 0 là hữu hạn.

3.4.2 Không điểm và điểm kỳ dị.

Từ khai triển Taylor, ta có được bổ đề sau:

Bổ đề 33. *Cho f là hàm giải tích trên Ω và số phức a thỏa mãn $f(a)$ và $f^{(n)}(a)$ đều triệt tiêu với mọi $n \in \mathbb{N}$. Khi đó ta có f bị triệt tiêu trên toàn Ω.*

Chứng minh. Từ (3.4.1) ta có

$$f(z) = (z-a)^n \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(\xi)\, d\xi}{(\xi - a)^n (\xi - z)}.$$

Ký hiệu R là bán kính của C, ta được

$$|f(z)| \leq |z-a|^n \cdot \frac{M}{R^{n-1}(R - |a-z|)} \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

với M là giá trị lớn nhất của $|f(z)|$ trên compact C. Cho $n \to \infty$ ta thu được $f(z) = 0$ trên $B(a, R)$.

Tất nhiên điều này sẽ không đủ để ta kết luận f bị triệt tiêu trên Ω, tuy nhiên, nếu ta gọi A là tập các điểm a để $f(a)$ và đạo hàm mọi cấp theo a đều triệt tiêu thì ta sẽ có được A là tập mở. Mặt khác $\Omega \setminus A$ bao gồm những điểm b có $f(b)$ hoặc một đạo hàm bậc n nào đó tại b khác 0. Ta có thể viết

$$\Omega \setminus A = f^{-1}(\mathbb{C} \setminus \{0\}) \cup \bigcup_{n \in \mathbb{N}} f^{(n)-1}(\mathbb{C} \setminus \{0\})$$

và nhận thấy được $\Omega \setminus A$ là mở từ đẳng thức này. Điều này, kết hợp với việc Ω liên thông và A khác trống, cho ta f triệt tiêu trên Ω. $\square$

Ngoài ra, nhờ định lý sau, ta cũng xác định được các hàm giải tích bị triệt tiêu tại "quá nhiều" điểm. Thực chất chúng chính là các hàm đồng nhất 0. Nhờ vào Định lý Taylor, ta cũng chứng minh được một kết quả về bậc đại số của các không điểm và các điểm kỳ dị.

Định lý 34. *Một hàm giải tích nếu có sẽ xác định duy nhất một tập $A \subset \mathbb{C}$ chứa điểm tụ. Nói cách khác, nếu tồn tại f, g giải tích trên miền Ω chứa A và $f(z) = g(z)$ với mọi $z \in A$ thì f và g bằng nhau trên Ω.*

Chứng minh. Xét $h = f - g$, ta có h giải tích trên Ω và bằng 0 trên A. Gọi z_0 là một điểm tụ của A, ta có thể viết

$$h(z) = (z - z_0)^n \hat{h}(z)$$

với $\hat{h}(z_0) \neq 0$. Do đó, ta gọi $B(z_0, \varepsilon)$ là lân cận đủ nhỏ của z_0 để $\hat{h}(z) \neq 0$ trên $B(z_0, \varepsilon)$. Khi ấy ta có $h(z) \neq 0$ với mọi $z \in B(z_0, \varepsilon)$. Định lý được chứng minh. □

Định lý 35. *Cho f là hàm giải tích trên Ω ngoại trừ các cực. Gọi a là một điểm kì dị của f, ta xét 2 mệnh đề sau:*

$$\lim_{z \to a} |z - a|^{\alpha} |f(z)| = 0 \quad (3.4.2)$$

$$\lim_{z \to a} |z - a|^{\alpha} |f(z)| = \infty \quad (3.4.3)$$

Khi đó chỉ có đúng 1 trong 3 trường hợp sau xảy ra:

1. *(3.4.2) đúng với mọi α và f bị triệt tiêu.*
2. *Tồn tại $h \in \mathbb{Z}$ để (3.4.2) đúng với mọi $\alpha > h$ và (3.4.3) đúng với mọi $\alpha < h$.*
3. *(3.4.2) và (3.4.2) đều sai với mọi α.*

Số nguyên h được ta gọi là bậc đại số *(*algebraic degree*) của a đối với f. Rõ ràng bậc đại số âm nếu a là không điểm, dương nếu a là cực và bằng 0 nếu f giải tích và khác 0 tại a.*

Chứng minh. Ta có các trường hợp sau:

Nếu (3.4.2) đúng với mọi α, khi đó ta sẽ có a là không điểm có bậc vô cùng đối với f. Do đó ta suy ra $f(z)$ triệt tiêu trên Ω. Ngoài ra, nếu (3.4.2) đúng với $\alpha = \alpha_0$ thì nó cũng sẽ đúng với số tự nhiên $N > \alpha_0$. Xét $g(z) = (z-a)^N f(z)$, ta có g là giải tích và không đồng nhất 0, ta suy ra

$$g(z) = (z-a)^N f(z) = (z-a)^M \hat{g}(z)$$

với $\hat{g}(a) \neq 0$, do đó ta có $(z-a)^{N-M} f(z) = \hat{g}(z)$. Đặt $h = N - M$ ta có

$$\begin{aligned} \lim_{z\to a} (z-a)^\alpha f(z) &= 0 \qquad \forall \alpha > h \\ \lim_{z\to a} (z-a)^\alpha f(z) &= \infty \qquad \forall \alpha < h \end{aligned}$$

Tương tự, nếu (3.4.3) đúng với $\alpha = \alpha_0$ thì cũng sẽ đúng với số nguyên $N < \alpha$. Khi đó ta đặt hàm giải tích $(z-a)^{-N} \frac{1}{f(z)}$ có điểm kỳ dị bỏ được tại a và nếu đặt $p(z)$ là hàm mở rộng thì ta cũng có $p(a) = 0$. Do p không là hàm đồng nhất 0 nên ta có

$$p(z) = (z-a)^M \hat{p}(z) = (z-a)^{-N} \frac{1}{f(z)}$$

với $\hat{p}(a) \neq 0$, do đó tồn tại một lân cận đủ nhỏ của a để $(z-a)^{-M-N} f(z) = \frac{1}{\hat{p}(z)}$. Đặt $h = -M - N$ thì ta có

$$\begin{aligned} \lim_{z\to a} (z-a)^\alpha f(z) &= 0 \qquad \forall \alpha > h \\ \lim_{z\to a} (z-a)^\alpha f(z) &= \infty \qquad \forall \alpha < h \end{aligned}$$

Điểm h như vậy xác định duy nhất và do đó định lý được chứng minh. □

Các điểm mà tại đó cả (3.4.2) và (3.4.3) đều không xảy ra với mọi α được gọi là *điểm kì dị cốt yếu (essential singularity)* điểm này có tính chất khá đặc biệt được đề cập đến ở định lý sau:

Định lý 36. *(Định lý Casorati-Weierstrass) Giá trị của hàm giải tích f trong mọi lân cận của một điểm kỳ dị cốt yếu trù mật trên $\mathbb{C}$.*

Chứng minh. Gọi z_0 là điểm kỳ dị cốt yếu của f và giả sử tồn tại điểm a, lân cận $B(a,\delta)$ của a và lân cận $B(z_0,\varepsilon)$ của z_0 mà các giá trị sao cho

$$|f(z) - a| \geq \delta \qquad \forall z \in B(z_0,\varepsilon).$$

Ta có $\left|\frac{1}{f(z)-a}\right| < \frac{1}{\delta}$ trên $B(z_0,\varepsilon)$, do đó $\lim\limits_{z\to z_0}(z-z_0)\,g(z) = 0$, tức tồn tại hàm giải tích mở rộng $g(z)$ của $\frac{1}{f(z)-a}$ trên $B(z_0,\varepsilon)$.

Vì g là giải tích và khác 0 trên $B(z_0,\varepsilon)$ nên ta suy ra tồn tại M dương để $|g(z)| \geq M > 0$ trên $\overline{B}\left(z_0,\frac{\varepsilon}{2}\right)$. Suy ra

$$|f(z)| \leq |f(z) - a| + |a| \leq \frac{1}{M} + |a|,$$

nên ta có $\lim\limits_{z\to z_0}(z-z_0)\,f(z) = 0$, trái với giả thiết. Vậy định lý được chứng minh. □

3.4.3 Tính chất địa phương của hàm giải tích.

Giả sử ta có $f(z) = w_0$ có một nghiệm là z_0, trong phần này, ta khảo sát số nghiệm của phương trình $f(z) = w$ với w khá gần w_0 và các nghiệm z khá gần z_0. Điều này cho ta nhiều tính chất của hàm giải tích như ánh xạ mở hay khả nghịch (nếu hàm này bảo giác). Trước hết ta có định lý sau.

Định lý 37. *Cho z_j là các không điểm của hàm $f(z)$ giải tích trên quả cầu mở Δ và không bị triệt tiêu. Ở đây, mỗi không điểm được đếm lặp lại theo số lần đúng bằng bậc của nó. Khi đó với mọi đường cong kín γ trong Δ không đi qua các z_j, ta có*

$$\sum_j Ind(\gamma, z_j) = \frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz.$$

Trong đó tổng ở vế trái chỉ có hữu hạn phần tử khác 0.

Chứng minh. Khi f đồng nhất 0 thì kết luận hiển nhiên đúng. Trong trường hợp ngược lại, vì γ là compact nên nó bị chứa trong quả cầu đóng Δ' có cùng tâm với Δ và bán kính nhỏ hơn. Trong Δ', f chỉ có hữu hạn các không điểm (do tập các không điểm không có điểm tụ). Theo định lý Taylor, ta có thể viết

$$f(z) = g(z) \prod_i (z - z_j)$$

với g không bị triệt tiêu tại bất cứ điểm nào trong Δ'. Ta có

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \oint_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)} dz &= \frac{1}{2\pi i} \oint_\gamma \left[\frac{g'(z)}{g(z)} + \sum_j \frac{1}{z - z_j} \right] dz \\ &= \sum_j \operatorname{Ind}(\gamma, z_j) \end{aligned}$$

do hàm $\frac{g'}{g}$ giải tích trên Δ'. □

Nếu chọn γ là đường tròn thì định lý này cho ta thấy số nghiệm của f ở trong hình tròn chính là số lần mà đường $f(\gamma)$ xoay quanh điểm 0. Ngoài ra, tại z_0 bất kỳ, nếu ta xét $g(z) = f(z) - f(z_0)$ và áp dụng định lý với g thì ta cũng có được số tạo ảnh của $f(z_0)$ trong hình tròn chính là số lần $f(\gamma)$ xoay quanh điểm z_0. Vậy nếu chọn a tương đối gần $f(z_0)$, ta cũng có được số tạo ảnh của a trong hình tròn cũng chính là số tạo ảnh của $f(z_0)$. Điều này chính là ý tưởng của định lý sau:

Định lý 38. *Cho f là hàm giải tích trên Ω và $f(z_0) = w_0$ và $f(z) - w_0$ có không điểm bậc n tại z_0. Khi đó với mọi $\varepsilon > 0$ đủ nhỏ, tồn tại $\delta > 0$ sao cho: Với mọi a trong $B(w_0, \delta)$, phương trình $f(z) = a$ có đúng n nghiệm phân biệt trong $B(z_0, \varepsilon)$.*

Chứng minh. Ta có $f(z) - w_0 = (z - z_0)^n g(z)$ với $g(z_0) \neq 0$. Vậy với mọi $\varepsilon > 0$ đủ nhỏ để $g(z)$ khác 0 trong quả cầu $B(z_0, \varepsilon)$, ta có số tạo ảnh của w_0 là n, do đó, nếu xét γ là đường tròn tâm z_0, bán kính ε và gọi Γ là ảnh của đường đóng γ qua f , thì chỉ số của w_0 đối với Γ là n.

Mặt khác, tồn tại quả cầu $B(w_0, \delta)$ đủ nhỏ để chỉ số của mọi điểm trong quả cầu này với Γ đều là n, tức phương trình $f(z) = a$ có đúng n nghiệm (được tính theo số bội) trong $B(z_0, \varepsilon)$.

Tuy nhiên, nếu ta chọn $\varepsilon > 0$ đủ nhỏ để $f'(z) \neq 0$ trên $B(z_0, \varepsilon) \setminus \{z_0\}$ thì mọi nghiệm của phương trình $f(z) = a$ đều là nghiệm đơn và do đó phương trình này có đúng n nghiệm phân biệt trong $B(z_0, \varepsilon)$. □

Định lý trên cho ta nhiều hệ quả trực tiếp quan trọng sau, phần chứng minh hoàn toàn không có khó khăn gì đặc biệt.

Định lý 39. *(Định lý ánh xạ mở) Một hàm giải tích khác hằng số sẽ chuyển một tập mở thành một tập mở.*

Định lý 40. *(Định lý hàm ngược) Nếu f giải tích tại z_0 và $f'(z_0) \neq 0$ thì f là một đồng phôi bảo giác giữa một lân cận của z_0 với một lân cận của $f(z_0)$.*

Từ các định lý trên, ta có được Nguyên lý modulus cực đại sau đây. Định lý này, cùng với bản sao của nó cho các hàm điều hòa sẽ được khai thác nhiều hơn ở những chương sau.

Định lý 41. *(Nguyên lý Modulus cực đại) Cho $f(z)$ là hàm giải tích khác hằng trên miền Ω. Khi đó modulus $|f(z)|$ không đạt cực đại trên Ω.*

Chứng minh. Gọi z_0 là điểm mà $|f(z)|$ đạt cực đại. Vì f không là hằng số nên nó là ánh xạ mở, biến quả cầu $B(z_0, \varepsilon)$ thành tập mở chứa $B(f(z_0), \delta_\varepsilon)$. Hiển nhiên trong quả cầu $B(f(z_0), \delta_\varepsilon)$ có một điểm với modulus lớn hơn $|f(z_0)|$, điều này mâu thuẫn và kết thúc chứng minh. □

3.5 Định lý Cauchy tổng quát

Định lý 42. *(Định lý Cauchy tổng quát) Nếu $f(z)$ giải tích trên Ω thì*

$$\oint_\gamma f(z)\,dz = 0$$

với mọi chu trình $\gamma \sim 0$ (mod Ω).

Chứng minh. Ta chỉ cần chứng minh định lý trong trường hợp Ω bị chặn là đủ. Thật vậy, nếu Ω không bị chặn, khi đó tồn tại dĩa tròn $D(0,r)$ chứa γ^*. Xét $\Omega' = \Omega \cap D(0,r)$, hiển nhiên ta có $\operatorname{Ind}(\gamma,\alpha) = 0$ với mọi $\alpha \notin D(0,r)$ nên $\operatorname{Ind}(\gamma,\alpha) = 0$ với mọi $\alpha \notin \Omega'$. Áp dụng kết quả trong trường hợp Ω bị chặn, ta có ngay $\oint_\gamma f(z)\,dz = 0$. Vậy ta sẽ chỉ xét khi Ω bị chặn.

Ta chứng minh tồn tại khoảng cách giữa γ^* và $\partial\Omega$. Thật vậy, do γ^* là compact nên bị chặn trong $D(0,N)$, vì $\overline{D(0,N+1)} \cap \partial\Omega$ và γ^* là các compact nên tồn tại $\delta < 1$ sao cho khoảng cách giữa 2 điểm trong chúng không nhỏ hơn δ. Mặt khác, khoảng cách giữa các điểm trong $\partial\Omega \setminus \overline{D(0,N+1)}$ và γ^* luôn lớn hơn δ nên ta có thể kết luận

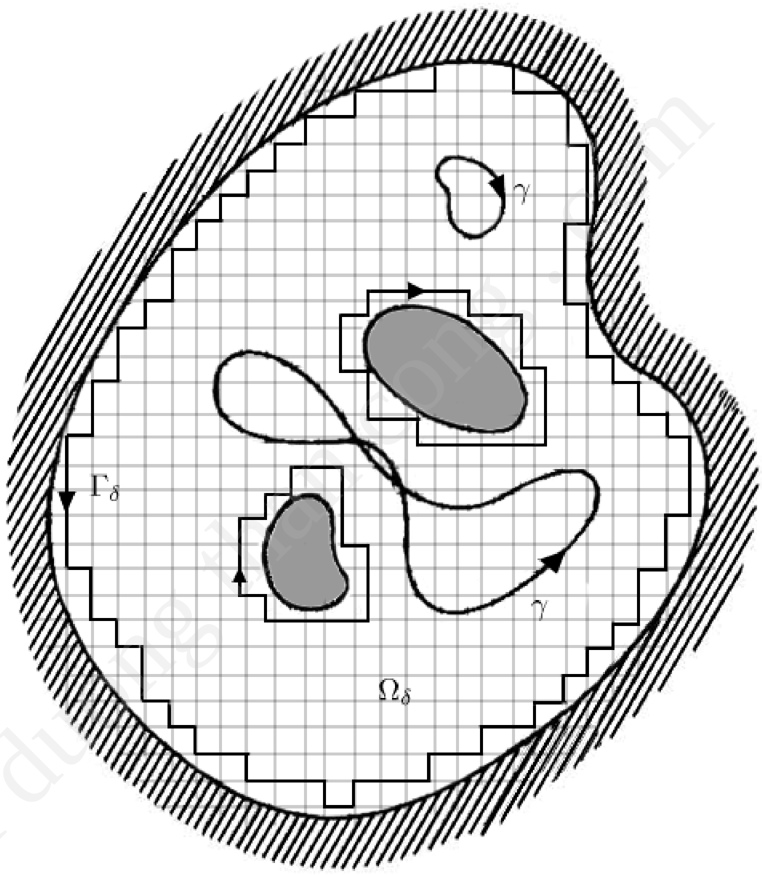
$$|x-y| < \delta \quad \forall x \in \partial\Omega,\ y \in \gamma^*.$$

Với mọi $n \in \mathbb{N}$, xét lưới tạo bởi các hình vuông cạnh $\frac{1}{n}$ và có tọa độ các đỉnh là $\left(\frac{a}{n}, \frac{b}{n}\right)$ $(a, b \in \mathbb{N})$ trên mặt phẳng phức. Gọi $\{R_i\}_{1\le i\le I_n}$ là các hình vuông trong lưới này nằm trong Ω. Gọi Ω_n là phần trong của $\bigcup_{i=1}^{I_n} R_i$ và định hướng theo chiều dương cho các ∂R_i. Ta có

$$\partial\Omega_n = \sum_{i=1}^{I_n} \partial R_i$$

và $\operatorname{Ind}(\partial\Omega_n, z) = \sum_{i=1}^{I_n} \operatorname{Ind}(\partial R_i, z) = 1$ với mọi $z \in \Omega_n$ do có đúng một hình vuông R_i chứa z.

Ta chọn n đủ lớn sao cho $\frac{1}{n} < \frac{\delta}{2}$, khi đó ta sẽ có $\gamma^* \subset \Omega_n$ và $\partial\Omega_n \cap \gamma^* = \emptyset$. Thật vậy,



Hình 3.5.1

với mọi $z \in \gamma^*$, khoảng cách từ z đến $\partial\Omega$ luôn lớn hơn δ. Ta gọi R_z là một trong số các hình vuông trong lưới có chứa z thì $R_z \in \{R_i\}_{1 \le i \le I_n}$. Mặt khác, khoảng cách từ mọi điểm trong z đến R_z đều nhỏ hơn $\frac{\sqrt{2}}{n} < \delta$ nên mọi điểm trong R_z đều thuộc Ω, vì nếu tồn tại $z_1 \in R_z \setminus \Omega$ thì trên đoạn thẳng nối z và z_1 sẽ có một điểm z_2 nằm trên biên của Ω, điểm z_2 này cũng thuộc R_z cho hình vuông này là tập lồi. Điều này mâu thuẫn và chứng tỏ $\gamma^* \subset \Omega_n$, do đó $\partial\Omega_n \cap \gamma^* = \emptyset$.

Với mọi $z \in \gamma^*$, do tồn tại duy nhất một hình chữ nhật trong $\{R_i\}_{1 \le i \le I_n}$ chứa z nên các tích phân

$$\frac{1}{2i\pi} \oint_{\partial R_i} \frac{f(\zeta)\, d\zeta}{\zeta - z}$$

có đúng một tích phân bằng $f(z)$ và các tích phân còn lại triệt tiêu. Suy ra

$$f(z) = \frac{1}{2i\pi} \oint_{\partial\Omega_n} \frac{f(\zeta)\, d\zeta}{\zeta - z},$$

do đó ta có

$$\begin{aligned}
\oint_\gamma f(z)\, dz &= \oint_\gamma \left(\frac{1}{2i\pi} \oint_{\partial\Omega_n} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta \right) dz \\
&= \oint_{\partial\Omega_n} \left(\frac{1}{2i\pi} \oint_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, dz \right) d\zeta \\
&= \oint_{\partial\Omega_n} f(\zeta) \operatorname{Ind}(\gamma, \zeta)\, d\zeta
\end{aligned}$$

Vậy ta chỉ cần chứng minh $\operatorname{Ind}(\gamma, \zeta) = 0$ với mọi $\zeta \in \partial\Omega_n$ là đủ. Xét điểm $\zeta \in \partial\Omega_n$, tồn tại hình vuông $\hat{R} \subset \Omega$ và hình vuông $\tilde{R} \cap \Omega \neq \emptyset$ cùng chứa ζ. Do $\gamma^* \cap \tilde{R} = \emptyset$ nên ζ có cùng chỉ số với các điểm trong $\tilde{R}$, nhưng vì $\gamma \sim 0 \pmod{\Omega}$ nên ta suy ra

$$\operatorname{Ind}(\gamma, \zeta) = 0 \quad \forall \zeta \in \partial\Omega_n.$$

Điều này kết thúc chứng minh của định lý. □

Hệ quả 43. *Nếu f giải tích trên một miền đơn liên thì*

$$\oint_{\gamma} f(z)\, dz = 0$$

với mọi chu trình kín γ.

Chứng minh. Kết luận là hiển nhiên do mọi đường γ trong miền đơn liên đều có tính chất $\gamma \sim 0$. □

Hệ quả 44. *Nếu f giải tích và khác 0 trên miền đơn liên Ω thì ta có thể xác định được các hàm giải tích $\log z$, $\sqrt[n]{f(z)}$ trên Ω.*

Chứng minh. Được suy ra trực tiếp từ việc tích phân trên mọi đường kín đều triệt tiêu. □

Chương 4

Chuỗi số phức và thặng dư tích phân

Mục lục

4.1 Chuỗi số phức

4.1.1 Định lý Weierstrass

Ở phần này, ta quan tâm đến sự hội tụ của một dãy các hàm giải tích $\{f_n\}$. Gọi f là giới hạn của chúng, ta thấy miền xác định Ω_n của các hàm f_n này và miền xác định Ω của f có thể không bằng nhau, thực ra chúng chỉ cần thỏa mãn tính chất: Với mọi $z \in \Omega$, tồn tại $N \in \mathbb{N}$ đủ lớn sao cho $z \in \Omega_n$ với mọi $n \geq N$. Vậy nên trong trường hợp $\Omega_1 \subset \Omega_2 \subset \cdots \subset \Omega_m \subset \ldots$ và $\Omega = \bigcup_{i=1}^{\infty} \Omega_j$ thì ta vẫn có thể kết luận được sự hội tụ. Ngoài ra, ta chỉ xét sự hội tụ này trên các tập đóng và bị chặn (tức compact) nào đó, điều này xảy ra đặc biệt nhiều khi ta quan tâm đến sự hội tụ của các chuỗi lũy thừa chẳng hạn. Ta có kết quả sau, qua đó cho thấy giới hạn của một dãy hàm giải tích cũng là một hàm giải tích.

Định lý 45. *(Định lý Weierstrass) Cho $\{f_n\}$ là một dãy các hàm giải tích trên miền Ω_n và dãy hàm này hội tụ đều về hàm f trên mọi compact chứa trong miền Ω. Khi đó f giải tích trên Ω và dãy đạo hàm $\{f_n'\}$ cũng hội tụ đều về f' trên mọi compact trong Ω.*

Chứng minh. Để chứng minh f giải tích tại một điểm $z_0 \in \Omega$, ta chứng minh nó giải tích trong đĩa $D(z_0, r)$ nào đó chứa trong Ω và các Ω_n. Sử dụng Định lý Morera, ta nhận thấy chỉ cần chứng minh

$$\oint_\gamma f(z)\, dz = 0$$

với mọi đường γ trong $D(z_0, r)$ là đủ. Mặt khác ta cũng có

$$\oint_\gamma f_n(z)\, dz = 0$$

nên khi cho n dần về vô cùng, vì γ^* là tập compact nên ta suy ra

$$\oint_\gamma f(z)\,dz = \lim_{n\to\infty} \oint_\gamma f_n(z)\,dz = 0.$$

Vậy f giải tích trên Ω. Để chứng minh sự hội tụ của đạo hàm, ta sử dụng Ước lượng Cauchy đối với đạo hàm cấp 1. Thật vậy, trên mọi z trong đĩa đóng $\overline{D(z_0, r)}$ chứa trong Ω, ta có

$$|f_n(z) - f(z)| \leq \frac{\|f_n - f\|}{r}$$

với $\|f_n - f\|$ là giá trị lớn nhất của $|f_n(z) - f(z)|$ trên $\overline{D(z_0, r)}$. Vậy $\{f_n\}$ hội tụ đều về f trên mọi đĩa $D(z_0, r)$. Vì mọi compact chứa trong Ω đều là hội của hữu hạn đĩa như thế nên ta cũng có điều phải chứng minh. $\square$

Như vậy, một chuỗi gồm các hàm giải tích

$$f(z) = f_1(z) + f_2(z) + \dots$$

hội tụ trên mọi compact trong miền Ω sẽ có tổng cũng là hàm giải tích và ta có thể lấy đạo hàm 2 vế một cách bình thường.

4.1.2 Khai triển Taylor

Để tìm khai triển lũy thừa của một hàm giải tích, một cách tự nhiên nhất, ta nghĩ đến việc sử dụng Định lý Taylor:

$$f(z) = f(z_0) + \frac{f'(z_0)}{1!}(z - z_0) + \dots + \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z - z_0)^n + f_{n+1}(z)(z - z_0)^{n+1}$$

với mọi z trong quả cầu $D(z_0, R)$ có bao đóng chứa trong Ω, f_{n+1} giải tích và

$$f_{n+1}(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial D(z_0,R)} \frac{f(\zeta)\,d\zeta}{(\zeta - z_0)^{n+1}(\zeta - z)}.$$

Khi đó ta có

$$\left|f_{n+1}(z)(z-z_0)^{n+1}\right| \leq \frac{M|z-z_0|^{n+1}}{R^n(R-|z-z_0|)} = \frac{M|z-z_0|}{R-|z-z_0|}\left(\frac{|z-z_0|}{R}\right)^n$$

Vì $|z-z_0| < R$ nên ta suy ra $f_{n+1}(z)(z-z_0)^{n+1}$ tiến về 0 khi n dần về vô cùng. Do đó ta có khai triển Taylor như sau:

Định lý 46. *(Khai triển Taylor) Cho $f(z)$ giải tích trên miền Ω chứa điểm z_0, khi đó ta có biểu diễn*

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}(z-z_0)^k$$

với mọi z thuộc đĩa $D(z_0, R)$ chứa trong Ω.

Ta có khai triển Taylor của một số hàm quen thuộc như sau:

$$\begin{aligned} e^z &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} \\ \cos z &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k z^{2k}}{(2k)!} \\ \sin z &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k z^{2k+1}}{(2k+1)!} \\ \frac{1}{1-z} &= \sum_{k=0}^{\infty} z^k \end{aligned}$$

4.1.3 Khai triển Laurent

Trong một số trường hợp, ta cần tìm khai triển lũy thừa với tâm là những điểm mà tại đó hàm chưa giải tích. Để làm được điều này, ta cần dùng khai triển Laurent. Ta hãy bắt đầu với hình vành khăn $A = \{z : R_1 < |z-a| < R_2\}$. Khi đó, ý tưởng được sử dụng ở đây là việc tách hàm f thành tổng của các hàm f_1, f_2 sao cho f_1 giải tích trong $\{z : |z-a| < R_2\}$ và f_2 giải tích trong $\{z : |z-a| > R_1\}$.

Với mọi $z \in A$ thỏa $|z-a| < R_2$, khi đó tồn tại r_2 thỏa $|z-a| < r_2 < R_2$, ta định

$$f_1(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|\zeta - a| = r_2} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta.$$

Nếu $|z-a| > R_1$, khi đó tồn tại r_1 thỏa $R_1 < r_1 < |z-a|$, ta định

$$f_2(z) = -\frac{1}{2\pi i} \oint_{|\zeta - a| = r_1} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta. \tag{4.1.1}$$

Cả hai tích phân trên đều không phụ thuộc vào cách chọn r_1, r_2 nên các hàm f_1, f_2 được xác định và giải tích. Mặt khác, theo định lý Cauchy, ta có được $f = f_1 + f_2$ giải tích trên A.

Sử dụng khai triển Taylor cho f_1, ta có

$$f_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n (z-a)^n$$

với $A_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}$ hoặc cũng được tính bởi

$$A_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|\zeta - a| = r_2} \frac{f(\zeta)\, d\zeta}{(\zeta - a)^{n+1}}.$$

Để tìm khai triển của f_2, ta thực hiện phép đổi biến

$$\begin{cases} z &= a + \frac{1}{z'} \\ \zeta &= a + \frac{1}{\zeta'} \end{cases},$$

khi đó (4.1.1) thành

$$f_2\left(a + \frac{1}{z'}\right) = -\frac{1}{2\pi i} \oint_{|\zeta'| = \frac{1}{r_1}} \frac{f\left(a + \frac{1}{\zeta'}\right)}{\frac{1}{\zeta'} - \frac{1}{z'}} d\left(a + \frac{1}{\zeta'}\right)$$

$$\begin{aligned} &= -\frac{z'}{2\pi i}\oint_{|\zeta'|=\frac{1}{r_1}} \frac{.f\left(a+\frac{1}{\zeta'}\right)}{\zeta'.\left(\zeta'-z'\right)}\,d\zeta' \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} B_n z'^n \end{aligned}$$

với

$$\begin{aligned} B_n &= -\frac{1}{2\pi i}\oint_{|\zeta'|=\frac{1}{r_1}} \frac{f\left(a+\frac{1}{\zeta'}\right)}{\zeta'^{n+1}}\,d\zeta' \\ &= \frac{1}{2\pi i}\oint_{|\zeta-a|=r_1} f\left(\zeta\right)\left(\zeta-a\right)^{n-1}\,d\zeta \end{aligned}$$

Vậy ta có thể viết f dưới dạng

$$f\left(z\right)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n\left(z-a\right)^n$$

với c_n được tính bởi

$$c_n=\frac{1}{2\pi i}\oint_{|\zeta-a|=r}\frac{f\left(\zeta\right)\,d\zeta}{\left(\zeta-a\right)^{n+1}}$$

Trong đó ta lưu ý đến $c_{-1}=\frac{1}{2\pi i}\oint_{|\zeta-a|=r} f\left(\zeta\right)\,d\zeta$, số này thường được gọi là thặng dư của f tại a và sẽ được tìm hiểu kỹ hơn ở phần sau. Như vậy ta có được khai triển Laurent của f như sau

Định lý 47. *(Khai triển Laurent) Cho $f\left(z\right)$ giải tích trên miền vành khăn $A=\{z : R_1<|z-a|<R_2\}$, khi đó ta có biểu diễn*

$$f\left(z\right)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n\left(z-z_0\right)^n$$

với c_n được cho bởi công thức

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|\zeta - a| = r} \frac{f(\zeta)\, d\zeta}{(\zeta - a)^{n+1}}.$$

4.2 Thặng dư tích phân và ứng dụng

Với Ω là một miền đa liên sao cho phần bù của nó có hữu hạn thành phần liên thông A_i $(1 \le i \le n)$, ta có thể giả sử A_n là thành phần liên thông chứa ∞. Khi đó tồn tại các đường γ_i $(1 \le i \le n-1)$ sao cho $\operatorname{Ind}(\gamma_i, a) = 1$ với mọi $a \in A_i$ và $\operatorname{Ind}(\gamma_i, a) = 0$ khi a ngoài Ω.

Thật vậy, ta xét lưới các hình vuông có độ dài cạnh là $\frac{1}{n}$ nhỏ hơn khoảng cách giữa 2 tập A_i bất kỳ (khoảng cách này tồn tại do A_i là compact với mọi $i = \overline{1, n-1}$). Khi đó với mỗi $i < n$, ta gọi $R_i(k)$ là các hình vuông trong lưới có phần giao với A_i khác rỗng. Lập luận hoàn toàn tương tự (và đơn giản hơn đôi chút) như ở Định lý Cauchy tổng quát, ta có $\operatorname{Ind}(\gamma_i, a)$ bằng 1 với mọi a trong A_i và triệt tiêu ngoài Ω.

Vậy với mọi đường γ, nếu gọi c_i là chỉ số của γ đối với các điểm trong A_i $(1 \le i \le n-1)$ (chỉ số này không đổi trên mỗi tập A_i), ta có

$$\gamma \sim c_1\gamma_1 + c_2\gamma_2 + \cdots + c_{n-1}\gamma_{n-1}$$

Vậy, một cách hình thức, ta có thể coi mỗi đường γ như một tổ hợp tuyến tính của các đường γ_i. Tổ hợp tuyến tính này là duy nhất vì $\sum_{i=1}^{n-1} c_i\gamma_i \sim 0$ khi và chỉ khi $c_i = 0$ với mọi $i = \overline{1, n}$. Vậy ta có

$$\oint_\gamma f\, dz = \sum_{i=1}^{n-1} c_i \oint_{\gamma_i} f\, dz.$$

Khi đó số $P_i = \oint_{\gamma_i} f\, dz$ chỉ phụ thuộc vào f và Ω được gọi là *module tuần hoàn* (*module of periodicity*) của vi phân $f\, dz$. Tên gọi này hợp lý khi ta xem xét sự thay đổi của $\oint_\gamma f\,dz$ theo γ.

Trên thực thế, ta thường gặp trường hợp hàm f giải tích trên miền Ω nhận được bằng cách bỏ đi hữu hạn điểm a_j từ $\mathbb{C}$. Với mọi điểm kỳ dị a_j của f trong Ω, xét đĩa tròn $\overline{D(a_j, r_j)}$ chứa trong Ω, khi đó ta đặt

$$R_j = \frac{1}{2\pi i} P_j = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial D(a_j, r_j)} f(z)\, dz,$$

thì hàm $f(z) - \frac{R_j}{z-a_j}$ có tích phân trên mọi đường γ nằm trong $D(a_j, r_j) \setminus \{a_j\}$ bằng 0 và do đó là đạo hàm của một hàm giải tích trên hình vành khăn $\{z : 0 < |z - a_j| < r_j\}$. Dễ nhận ra rằng R_j là số phức duy nhất thỏa mãn tính chất này, vậy ta có định nghĩa về thặng dư tích phân như sau

Định nghĩa 48. *Thặng dư tích phân* của $f(z)$ tại điểm kỳ dị cô lập a là số phức R duy nhất sao cho hàm

$$f(z) - \frac{R}{z-a}$$

là đạo hàm của một hàm giải tích trên hình vành khăn $\{z : 0 < |z - a| < \delta\}$. Khi đó ta ký hiệu $R = \operatorname{Res}(f(z), a)$.

Từ định nghĩa trên, ta có định lý sau đây

Định lý 49. *(Định lý Thặng dư) Cho $f(z)$ là hàm giải tích trên Ω ngoại trừ các điểm kì dị cô lập a_j trong Ω. Khi đó*

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_\gamma f(z)\, dz = \sum_j Ind(\gamma, a_j)\, Res(f(z), a_j)$$

với mọi đường $\gamma \sim 0 \ (mod\ \Omega)$ và không đi qua các điểm a_j.

Chứng minh. Ta sẽ chứng minh rằng thực sự chỉ có hữu hạn điểm kỳ dị cô lập có chỉ số khác 0 (đối với γ). Thật vậy, vì tập các điểm có chỉ số khác 0 là một tập mở bị chặn, do đó nếu chứa vô hạn điểm kì dị cô lập thì ta sẽ thiết lập được dãy b_n các điểm như thế hội tụ về b. Nếu $b \in \Omega$, ta suy ra b cũng là điểm kì dị cô lập và do đó mâu thuẫn phát sinh. Trong trường hợp $b \in \overline{\Omega}$, ta có được $\operatorname{Ind}(\gamma, b) = 0$ và do đó cũng mâu thuẫn vì chỉ số của các điểm trên một lân cận đủ nhỏ của b đều triệt tiêu. Vậy chuỗi ở vế phải thực chất là một tổng hữu hạn.

Gọi R_j là thặng dư tích phân của các điểm kì dị a_j, ta có

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma} f(z)\, dz = \sum_j \operatorname{Ind}(\gamma, a_j)\frac{P_j}{2\pi i} = \sum_j \operatorname{Ind}(\gamma, a_j) R_j.$$

Định lý được chứng minh. □

Việc sử dụng Định lý trên phụ thuộc gần như hoàn toàn vào việc tính toán được các giá trị thặng dư. Chính vì vậy việc áp dụng định lý này với các điểm kì dị cốt yếu gần như là không thể. Tuy nhiên với các cực, ta có

$$f(z) = \frac{c_{-h}}{(z-a)^h} + \cdots + \frac{c_{-1}}{z-a} + \varphi(z).$$

Ta nhận thấy rằng $f(z) - \frac{c_{-1}}{z-a}$ là đạo hàm của một hàm giải tích, do đó thặng dư tích phân của f tại a chính là c_{-1}, như đã giới thiệu ở phần trước. Trong trường hợp đã biết f, ta có thể tìm c_{-1} từ đẳng thức sau:

$$(z-a)^h f(z) \;=\; c_{-h} + \cdots + c_{-1}(z-a)^{h-1} + (z-a)^h \varphi(z)$$

Suy ra $\lim_{z\to a} \frac{d^h}{dz^h}(z-a)^h f(z) = (h-1)!c_{-1}$, tức là

$$c_{-1} = \frac{1}{(h-1)!}\lim_{z\to a}\frac{d^h}{dz^h}\left[(z-a)^h f(z)\right]$$

trong trường hợp a là cực cấp h của f.

Sử dụng thặng dư tích phân, ta có thể tính được một số dạng tích phân thực sau đây.

Dạng 1. Các tích phân $I = \int_0^{2\pi} f(\cos\theta, \sin\theta)\, d\theta$.

Đặt $z = e^{i\theta}$, ta có

$$\begin{cases} dz &= iz\, d\theta \\ \cos\theta &= \frac{z+\frac{1}{z}}{2} \\ \sin\theta &= \frac{z-\frac{1}{z}}{2i} \end{cases}$$

do đó tích phân cần tính thành

$$\begin{aligned} I &= \oint_{|z|=1} \frac{-i}{z} f\left(\frac{z+\frac{1}{z}}{2}, \frac{z-\frac{1}{z}}{2i}\right) dz \\ &= 2\pi \sum_j \operatorname{Res}\left(\frac{f\left(\frac{z+\frac{1}{z}}{2}, \frac{z-\frac{1}{z}}{2i}\right)}{z}, a_j\right) \end{aligned}$$

Dạng 2. Các tích phân $I = \int_{-\infty}^{\infty} R(x)\, dx$ với R là hàm phân thức có không điểm bậc lớn hơn 2 tại vô cùng.

Nhận xét rằng vì bậc của mẫu lớn hơn bậc của tử 2 đơn vị nên tích phân này luôn hội tụ. Vậy nếu gọi $l(X)$ là đường thẳng nối từ $-X$ đến X và C_X^+ là nửa trên đường tròn tâm 0, bán kính X và định hướng dương, thì với X đủ lớn, ta có

$$\begin{aligned} I &= \lim_{X\to\infty} \int_{l(X)} R(z)\, dz \\ &= 2\pi i \sum_{y>0} \operatorname{Res}(R(z), a_j) - \lim_{X\to\infty} \int_{-C_X^+} R(z)\, dz \end{aligned}$$

với a_j là các cực của R nằm trên nửa mặt phẳng trên. Mặt khác, ta cũng có

$$\left| \int_{-C_R^+} R(z)\, dz \right| \le \pi R \sup_{|z|=R} |R(z)|.$$

Vì $zR(z) \to 0$ khi $z \to \infty$ nên suy ra $\int_{-C_R^+} R(z)\, dz$ cũng dần về 0, do đó

$$I = 2\pi i \sum_{y>0} \operatorname{Res}(R(z), a_j)$$

Dạng 3. Các tích phân $I = \int_{-\infty}^{\infty} R(x)\, e^{ikx}\, dx$ hoặc $\int_{-\infty}^{\infty} R(x) \sin kx\, dx$, $\int_{-\infty}^{\infty} R(x) \cos kx\, dx$ với R là hàm phân thức có không điểm tại vô cùng.

Nếu R có không điểm bậc 2 tại vô cùng thì ta dễ dàng tính được tích phân này theo Dạng 2 vì $\left|e^{ikz}\right| < 1$. Trong trường hợp ∞ chỉ là không điểm bậc 1, ta không thể tính tích phân này bằng cách sử dụng nửa đường tròn C_X^+ như trên. Nguyên nhân của điều này là do ngay từ đầu, ta chưa có I hội tụ như ở Dạng 1, do đó ta cần chứng minh tích phân trên hội tụ khi hai đầu mút tiến về $+\infty$ và $-\infty$ một cách độc lập nên không thể lấy 2 đầu mút là X và $-X$.

Vậy vẫn giữ ý tưởng trên, ta sẽ thay C_X^+ bởi các đường $l(X_1, X_2, Y)$ theo thứ tự đi qua các điểm $-X_1$, $-X_1 + iY$, $X_2 + iY$, X_2. Ta chỉ cần chứng minh tích phân trên $l(X_1, X_2, Y)$ hội tụ về 0 khi (X_1, X_2) tiến về ∞. Thật vậy, chọn $X_1, X_2 \geq M$ với M đủ lớn sao cho $|R(z)| < \varepsilon$ với mọi $|z| \geq M$, ta có

$$\begin{aligned}
\left|\int_0^Y R(-X_1, y)\, e^{-ky-ikX_1} dy\right| &= \int_0^Y |R(-X_1, y)|\, e^{-ky} dy \leq \varepsilon \\
\left|\int_0^Y R(X_2, y)\, e^{-ky+ikX_2} dy\right| &= \int_0^Y |R(X_2, y)|\, e^{-ky} dy \leq \varepsilon
\end{aligned}$$

Mặt khác ta cũng có

$$\left|\int_{-X_1}^{X_2} R(x, Y)\, e^{-kY}\, dx\right| \leq e^{-Y}(X_1 + X_2) \sup_{x \in [-X_1, X_2]} |R(x, Y)| \leq \varepsilon$$

với Y được chọn đủ lớn sao cho $e^{-Y}(X_1 + X_2) < 1$ và $\sup_{x \in [-X_1, X_2]} |R(x, Y)| < \varepsilon$.

Vậy ta có

$$\left|\int_{l(X_1,X_2,Y)} R(z)\, e^{ikz}\, dz\right| \leq 3\varepsilon$$

và do đó ta có

$$I = 2\pi i \sum_{y>0} \operatorname{Res}\left(R(z)\, e^{ikz}, a_j\right).$$

Và vì $e^{ikz} = \cos kz + i \sin kz$, ta cũng tính được các tích phân

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} R(x) \sin kx\, dx &= \operatorname{Re}\left(\int_{-\infty}^{\infty} R(x)\, e^{ikx}\, dx\right), \\ \int_{-\infty}^{\infty} R(x) \cos kx\, dx &= \operatorname{Im}\left(\int_{-\infty}^{\infty} R(x)\, e^{ikx}\, dx\right), \end{aligned}$$

tuy nhiên chỉ trong trường hợp R không có cực bậc 1 trên trục thực. Thật vậy, các tích phân $\int_{-\infty}^{\infty} R(x) \sin kx\, dx$, $\int_{-\infty}^{\infty} R(x) \cos kx\, dx$ vẫn có thể tồn tại nếu như cực đơn của R rơi vào đúng nghiệm của các hàm sin và cos. Giả sử a là cực đơn của R trên trực thực, khi đó ta vẫn áp dụng ý tưởng trên, trong đó

$$R(z)\, e^{iz} = \frac{\operatorname{Res}\left(R(z)\, e^{ikz}, a\right)}{z-a} + R_0(z)$$

với R_0 là hàm giải tích và đường $l(-X_1, X_2)$ nối $-X_1$ và X_2 trên trục thực được thay bởi $l(-X_1, a-\delta) + C_\delta^- + l(a+\delta, X_2)$ với C_δ^- là nửa đường tròn dưới tâm a bán kính δ định hướng dương. Hiển nhiên tích phân trên $l(X_1, X_2, Y)$ vẫn hội tụ về 0, do đó ta có

$$\left(\int_{-\infty}^{a-\delta} + \int_{C_\delta^-} + \int_{a+\delta}^{\infty}\right) R(z)\, e^{iz}\, dz = 2\pi i \left[\sum_{y>0} \operatorname{Res}\left(R(z)\, e^{iz}, a_j\right) + \operatorname{Res}\left(R(z)\, e^{iz}, a\right)\right].$$

Mặt khác ta cũng có

$$\int_{C_\delta^-} R(z)\, e^{iz}\, dz \;=\; \int_{C_\delta^-} \left[\frac{\operatorname{Res}\left(R(z)\, e^{iz}, a\right)}{z-a} + R_0(z)\right] dz$$

$$= \frac{1}{2}\text{Res}\left(R(z)e^{iz}, a\right) + \int_{C_\delta^-} R_0(z)\, dz$$

Vì $R_0(z)$ liên tục trên một lân cận của a nên ta suy ra

$$\lim_{\delta\to 0}\int_{C_\delta^-} R(z)e^{iz}\, dz = \frac{1}{2}\text{Res}\left(R(z)e^{iz}, a\right),$$

do đó

$$I = \lim_{\delta\to 0}\left(\int_{-\infty}^{a-\delta} + \int_{a+\delta}^{\infty}\right) R(z)e^{iz}\, dz = 2\pi i\left[\sum_{y>0}\text{Res}\left(R(z)e^{iz}, a_j\right) + \frac{1}{2}\text{Res}\left(R(z)e^{iz}, a\right)\right].$$

Một cách đơn giản và dễ hình dung, ta vẫn sử dụng công thức cũ, nhưng với các cực nằm trên trục thực của R, ta sẽ chỉ tính một nửa thặng dư của nó vào công thức.

Dạng 4. Các tích phân $I = \int_0^\infty x^\alpha R(x)\, dx$ với R là hàm phân thức có không điểm ít nhất bậc 2 tại vô cùng và $0 < \alpha < 1$ và có tối đa cực đơn ở 0.

Nhận thấy tích phân trên hội tụ vì số bậc tại ∞ của hàm trong dấu tích phân lớn hơn 1. Mặt khác, với $0 < \alpha < 1$ thì hàm z^α không phải là hàm nguyên và không giải tích tại các điểm nằm trên một đường cắt nhánh của hàm $\arg z$ và việc này khiến ta phải xử lý khéo hơn. Tuy nhiên, trước hết ta sẽ đổi cận của tích phân thành từ $-\infty$ đến ∞ bằng cách đặt $x = t^2$, khi đó ta có

$$I = 2\int_0^\infty t^{2\alpha+1}R\left(t^2\right)\, dt.$$

Chọn đường cắt nhánh của hàm $z^{2\alpha+1}$ tại phần âm của trục ảo, tức ta sử dụng $\arg_{[-\pi,3\pi)}$, khi đó $z^{2\alpha+1}$ giải tích tại mọi điểm trừ đường cắt nhánh này. Ta có

$$\int_{-\infty}^{\infty} z^{2\alpha+1}R\left(z^2\right)\, dz = \int_0^\infty z^{2\alpha+1}R\left(z^2\right)\, dz + \int_0^\infty (-z)^{2\alpha+1}R\left(z^2\right)\, dz$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_0^\infty \left[z^{2\alpha+1} + \left(e^{i\pi}z\right)^{2\alpha+1}\right] R\left(z^2\right)\, dz \\
&= \left(1 - e^{2\pi i\alpha}\right) \int_0^\infty z^{2\alpha+1} R\left(z^2\right)\, dz
\end{aligned}
$$

Vậy ta chỉ cần tính $\int_\infty^\infty z^{2\alpha+1} R\left(z^2\right)\, dz$. Ta sử dụng đường thẳng $l\left(\delta, X\right)$ nối $\delta > 0$ với $X > 0$ và $l\left(-X, -\delta\right)$ nối $-X$ với $-\delta$ trên trục thực cùng với hai nửa trên đường tròn C_δ^+ và C_X^+ tâm 0, bán kính δ và X, với X đủ lớn và δ đủ nhỏ, ta có

$$
\left(\int_{l(-X,-\delta)} - \int_{C_\delta^+} + \int_{l(\delta,X)} + \int_{C_X^+}\right) z^{2\alpha+1} R\left(z^2\right)\, dz = 2\pi i \sum_{y>0} \operatorname{Res}\left(z^{2\alpha+1} R\left(z^2\right), a_j\right)\, dz
$$

Mặt khác, ta có

$$
\begin{aligned}
\left|\int_{C_\delta^+} z^{2\alpha+1} R\left(z^2\right)\, dz\right| &\le \pi\delta^{2\alpha+2} \sup_{|z|=\delta} \left|R\left(z^2\right)\right| \to 0 \quad \text{khi } \delta \to 0 \\
\left|\int_{C_X^+} z^{2\alpha+1} R\left(z^2\right)\, dz\right| &\le \pi X^{2\alpha+2} \sup_{|z|=X} \left|R\left(z^2\right)\right| \to 0 \quad \text{khi } X \to +\infty
\end{aligned}
$$

do R có tối đa cực đơn tại 0 và có không điểm ít nhất bậc 2 tại ∞. Vậy cho $X \to +\infty$ và $\delta \to 0$, ta có

$$
\int_{-\infty}^{+\infty} z^{2\alpha+1} R\left(z^2\right)\, dz = 2\pi i \sum_{y>0} \operatorname{Res}\left(z^{2\alpha+1} R\left(z^2\right), a_j\right)\, dz,
$$

do đó ta có

$$
\int_0^\infty z^{2\alpha+1} R\left(z^2\right)\, dz = \frac{2\pi i \sum_{y>0} \operatorname{Res}\left(z^{2\alpha+1} R\left(z^2\right), a_j\right)\, dz}{1 - e^{2\pi i\alpha}}.
$$

4.3 Nguyên lý Argument và ứng dụng

Với định lý Cauchy mở rộng, ta mở rộng cách đếm số nghiệm của một hàm giải tích f ở chương trước bằng định lý sau:

Định lý 50. *(Nguyên lý Argument) Cho f là hàm chỉnh hình trên Ω với $\{a_j\}$ là các không điểm và $\{b_k\}$ là các cực. Khi đó ta có*

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma}\frac{f'(z)}{f(z)}\,dz=\sum_{j}Ind\,(\gamma,a_j)-\sum_{k}Ind\,(\gamma,b_k)$$

với mọi chu trình $\gamma\sim 0$ (mod Ω) không đi qua các không điểm và các cực. Trong đó tổng ở vế phải được hiểu rằng cực và không điểm cấp h sẽ được tính h lần.

Chứng minh. Với mỗi không điểm a cấp h, ta có $f(z)=(z-a)^h f_h(z)$ với $f_h(a)\neq 0$. Khi đó ta tính được

$$\frac{f'(z)}{f(z)}=\frac{h}{z-a}+\frac{f_h'(z)}{f_h(z)}$$

tức a là một điểm kì dị của $\frac{f'}{f}$ có thặng dư bằng h. Ngược lại, nếu b là cực cấp h của f, ta có $f(z)=(z-a)^{-h}f_{-h}(z)$ và do đó

$$\frac{f'(z)}{f(z)}=\frac{-h}{z-b}+\frac{f_{-h}'(z)}{f_{-h}(z)},$$

tức b là điểm kì dị của $\frac{f'}{f}$ có thặng dư bằng $-h$. Mặt khác, ta thấy rằng kì dị của $\frac{f'}{f}$ chỉ có thể có những dạng trên nên theo Định lý thặng dư, ta có

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma}\frac{f'(z)}{f(z)}\,dz=\sum_{j}\mathrm{Ind}\,(\gamma,a_j)-\sum_{k}\mathrm{Ind}\,(\gamma,b_k)\,.$$

□

Từ định lý trên, ta có hệ quả là định lý Rouché sau đây, được ứng dụng nhiều để tìm số nghiệm của một phương trình.

Định lý 51. *(Định lý Rouché) Cho chu trình $\gamma \sim 0$ (mod Ω) sao cho $Ind(\gamma, z)$ nhận giá trị là 0 hoặc 1 với mọi $z \notin \gamma^*$. Giả sử rằng $f(z)$ và $g(z)$ giải tích trên Ω và thỏa mãn đẳng thức*

$$|f(z) - g(z)| < |f(z)|$$

trên γ^*. Khi đó $f(z)$ và $g(z)$ có cùng số nghiệm trên tập bao bởi γ, tức $\{z \in \mathbb{C} \setminus \gamma^* : Ind(\gamma, z) = 1\}$.

Chứng minh. Rõ ràng cả f và g đều khác 0 trên γ, từ đẳng thức đã cho, ta có

$$\left|\frac{g(z)}{f(z)} - 1\right| < 1$$

trên γ^*, do đó $\frac{g}{f}(\gamma^*)$ nằm toàn bộ trong dĩa tròn $D(0,1)$ nên có Ind $\left(\frac{g}{f}(\gamma^*), 0\right) = 0$, tức số nghiệm của $\frac{g}{f}$ cũng chính là số cực của $\frac{g}{f}$, do đó ta suy ra g và f có cùng số nghiệm. Định lý được chứng minh. □

Ta có một cách sử dụng Định lý Rouché như sau. Giả sử ta cần tìm nghiệm của f trên miền $D(0,R)$, sử dụng khai triển Taylor, ta tìm được đa thức P_n khá gần với f. Giả sử ta đã có $|f - P_n| < P_n$ hay $|f - P_n| < f$, khi đó số nghiệm trong $D(0,R)$ của f cũng chính là số nghiệm của P_n. Vậy ta đã đưa được bài toán tìm số nghiệm của f về bài toán tìm số nghiệm của một đa thức trên $D(0,R)$, vốn dĩ dễ hơn rất nhiều.

Ngoài ra Định lý trên có thể được mở rộng như sau:

Định lý 52. *Cho f là hàm chỉnh hình trên Ω với $\{a_j\}$ là các không điểm và $\{b_k\}$ là các cực. Khi đó ta có*

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma g(z)\frac{f'(z)}{f(z)}\,dz = \sum_j Ind(\gamma, a_j)\, g(a_j) - \sum_k Ind(\gamma, b_k)\, g(b_k)$$

với mọi chu trình $\gamma \sim 0$ (mod Ω) không đi qua các không điểm và các cực. Trong đó tổng ở vế phải được hiểu rằng cực và không điểm cấp h sẽ được tính h lần.

Chứng minh. Hoàn toàn tương tự ý tưởng cũ, nhưng ở đây ta có $hg(a)$ là thặng dư tại không điểm a bậc h và $-hg(b)$ là thặng dư tại không điểm b bậc h của hàm $g\frac{f'}{f}$. □

Định lý này cho ta thêm công cụ để khảo sát các hàm ngược. Chẳng hạn ta muốn khảo sát ảnh ngược của f tại một lân cận của một không điểm w_0 cấp n của f, ta giả sử $f(z_0) = w_0$. Khi đó phương trình $f(z) = w$ với w thuộc một lân cận $D(w_0, \delta)$ đủ nhỏ của w_0 sẽ có đúng n nghiệm trong $D(z_0, \varepsilon)$, áp dụng định lý với $g(z) = z$, ta có

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{|z-z_0|=\varepsilon} \frac{f'(z)}{f(z)-w} z\, dw = \sum_{j=1}^{n} z_j(w)$$

với $\{z_j(w)\}$ là các ảnh ngược của w. Ta tính được tổng các ảnh ngược tại điểm w bằng một tích phân cửa f. Thậm chí trong trường hợp phương trình có nghiệm duy nhất, ta cũng tính được nghiệm này bởi

$$f^{-1}(w) = \frac{1}{2\pi i}\oint_{|z-z_0|=\varepsilon} \frac{f'(z)}{f(z)-w} z\, dw.$$

Ngoài ra, khi áp dụng định lý với $g(z) = z^m$ với $m = \overline{1, m}$, ta có

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{|z-z_0|=\varepsilon} \frac{f'(z)}{f(z)-w} z\, dw = \sum_{j=1}^{n} z_j^m(w),$$

tức tổng các lũy thừa bậc m của các nghiệm là một hàm giải tích theo w. Mặt khác, một kết quả quan trọng trong lý thuyết đa thức cho ta: mọi đa thức đối xứng $P(z_1, z_2, \ldots, z_n)$ đều biểu diễn được dưới dạng đa thức $Q(S_1, S_2, \ldots, S_n)$ của các tổng lũy thừa $S_k = \sum_{i=1}^{n} z_i^k$. Do đó ta suy ra $z_1(w)$, $z_2(w)$,..., $z_n(w)$ là nghiệm của phương trình

$$z^n + a_{n-1}(w)\, z^{n-1} + \ldots a_0(w) = 0$$

với các hệ số $a_i(w)$ là hàm giải tích theo w.

Chương 5

Hàm điều hòa

Mục lục

5.1 Các định nghĩa và tính chất cơ bản.

Định nghĩa 53. Hàm thực $u\left(z\right)$ hay $u\left(x,y\right)$ xác định trên miền Ω được gọi là *điều hòa* trên Ω nếu nó khả vi liên tục cấp 2 và thỏa mãn *phương trình Laplace*:

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

Ngoài ra, toán tử Δ còn được gọi là *toán tử Laplace*.

Trong hệ tọa độ cực, ta nhắc lại một số công thức sau

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial r} &= \frac{\partial u}{\partial x}\cos\theta + \frac{\partial u}{\partial y}\sin\theta \\
\frac{\partial u}{\partial \theta} &= -\frac{\partial u}{\partial x}r\sin\theta + \frac{\partial u}{\partial y}r\cos\theta \\
\frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial u}{\partial r}\cos\theta - \frac{\partial u}{r\partial \theta}\sin\theta \\
\frac{\partial u}{\partial y} &= -\frac{\partial u}{\partial r}\sin\theta + \frac{\partial u}{r\partial \theta}\cos\theta \\
dx &= \cos\theta dr - r\sin\theta d\theta \\
dy &= \sin\theta dr + r\cos\theta d\theta \\
dr &= \cos\theta dx - \sin\theta dy \\
d\theta &= \frac{1}{r}\cos\theta dy - \sin\theta dx
\end{aligned}$$

Từ các công thức trên, bằng tính toán trực tiếp ta tìm được *phương trình Laplace trong tọa độ cực* là

$$r\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = 0.$$

Do đó các hàm số có dạng $u = a\log r + b$ đều là hàm giải tích. Ngoài ra, *đẳng thức Cauchy Riemann trong tọa độ cực* cho hàm điều hòa $f = u + iv$ là

$$\begin{aligned}
r\frac{\partial u}{\partial r} &= \frac{\partial v}{\partial \theta} \\
\frac{\partial u}{\partial \theta} &= -r\frac{\partial v}{\partial r}
\end{aligned}$$

Ta đã biết rằng phần thực và phần ảo của một hàm giải tích là các hàm điều hòa. Tuy nhiên điều ngược lại chưa hẳn đúng vì hàm liên hợp điều hòa của một hàm điều hòa u có thể đa trị. Để liên kết 2 khái niệm "giải tích" và "điều hòa", ta tận dụng tính giải tích của đạo hàm một hàm giải tích. Thật vậy với hàm điều hòa u, ta xét hàm f xác định bởi

$$f = \frac{\partial u}{\partial x} - i\frac{\partial u}{\partial y}$$

cũng là hàm điều hòa. Việc này có thể được kiểm chứng bằng tính toán cụ thể, tuy nhiên ta quan tâm đến nguồn gốc của nó hơn. Hàm f này bắt nguồn từ việc lấy đạo hàm của hàm $F = u + iv$, tuy nhiên hàm F không được đề cập vì nó có chứa liên hợp điều hòa v (có thể làm hàm đa trị) của u.

Tiếp tục khai thác các khái niệm vi phân, với "niềm tin" $dF = f\,dz = du + idv$, bằng tính toán cụ thể, ta có

$$\begin{aligned} f\,dz &= \left(\frac{\partial u}{\partial x}\,dx + \frac{\partial u}{\partial y}\,dy\right) + i\left(-\frac{\partial u}{\partial y}\,dx + \frac{\partial u}{\partial x}\,dy\right) \\ &= du + i\left(-\frac{\partial u}{\partial y}\,dx + \frac{\partial u}{\partial x}\,dy\right) \end{aligned}$$

Khi đó ta gọi $*du = -\frac{\partial u}{\partial y}dx + \frac{\partial u}{\partial x}dy$ là *vi phân liên hợp* của du thì sẽ có được $f\,dz = du + i * du$. Một cách khiến điều này trở nên dễ nhớ là sử dụng kí hiệu hình thức sau

$$*du = -\frac{\partial u}{\partial y}dx + \frac{\partial u}{\partial x}dy = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ dx & dy \end{vmatrix}.$$

Ta có tính chất cơ bản sau đây:

Mệnh đề 54. *Với mọi chu trình $\gamma \sim 0$ (mod Ω), ta có*

$$\oint_\gamma *du = 0.$$

Do đó các hàm điều hòa trên một miền đơn liên thì đều có liên hợp.

Chứng minh. Đẳng thức tích phân hoàn toàn hiển nhiên do

$$\oint_\gamma *du = \oint_\gamma f\,dz - \oint_\gamma du = 0.$$

Do trên một miền đơn liên Ω thì mọi đường γ đều có tính chất $\gamma \sim 0$ nên ta suy ra tích phân của $*du$ không phụ thuộc đường, do đó tồn tại v sao cho $dv = *du$. Ta suy ra v là liên hợp điều hòa của u. □

Định lý 55. *Cho u_1 và u_2 là các hàm điều hòa trên miền Ω và $\gamma \sim 0$ (mod Ω). Khi đó ta có*

$$\oint_{\gamma} (u_1 * du_2 - u_2 * du_1) = 0.$$

Chứng minh. Ta chỉ cần chứng minh điều này cho các hình chữ nhật. Vì các hình chữ nhật đều là đơn liên nên ta chỉ cần chứng minh

$$\oint_{\partial R} (u_1 dv_2 - u_2 dv_1) = 0.$$

với v_1, v_2 là các liên hợp điều hòa của u_1, u_2. Mặt khác do $u_1 dv_2 - u_2 dv_1 = u_1 dv_2 + v_1 du_2 - d(u_2 v_1)$ nên ta chỉ cần chứng minh

$$\oint_{\partial R} (u_1 dv_2 + v_1 du_2) = 0.$$

Tuy nhiên tích phân ở vế trái chính là phần ảo của tích phân sau đây

$$\oint_{\partial R} (u_1 + iv_1)(du_2 + idv_2),$$

Đây chính là tích phân của $(u_1 + iv_1)(u_2 + iv_2)'$ nên triệt tiêu. Do đó ta có điều phải chứng minh. □

Định lý 56. *Giá trị trung bình của hàm điều hòa u trên $B(0,R) \setminus \{0\}$ là hàm bậc nhất theo $\log r$. Cụ thể, ta có*

$$\frac{1}{2\pi} \oint_{|z|=r} u \, d\theta = \alpha \log r + \beta.$$

Ngoài ra, nếu u là hàm điều trên $B(0,R)$ thì $\alpha = 0$ và $\beta = u(0)$, tức giá trị trung bình này là hằng số. Khi đó, bằng một phép dời trục tọa độ, ta có

$$u(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u\left(z_0 + re^{i\theta}\right) d\theta.$$

Chứng minh. Xét C_1 và C_2 là đường tròn tâm 0 bán kính r_1, r_2 với $r_1 < r_2 < R$. Xét $\gamma = C_1 - C_2$, ta có $\gamma \sim 0$ nên

$$\oint_C u_1 * du_2 - u_2 * du_1 = \text{const}$$

với mọi đường tròn C tâm 0, bán kính $r < R$. Bằng các tính toán trực tiếp, ta có được:

$$\begin{aligned}
*du &= -\frac{\partial u}{\partial y}dx + \frac{\partial u}{\partial x}dy \\
&= -\left(-\frac{\partial u}{\partial r}\sin\theta + \frac{\partial u}{r\partial\theta}\cos\theta\right)(\cos\theta dr - r\sin\theta d\theta) + \left(\frac{\partial u}{\partial r}\cos\theta - \frac{\partial u}{r\partial\theta}\sin\theta\right)(\sin\theta dr + r\cos\theta d\theta) \\
&= \left(\frac{\partial u}{\partial r}\sin 2\theta - \frac{\partial u}{r\partial\theta}\right)dr + \left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right)d\theta
\end{aligned}$$

Trên đường tròn bán kính r, ta có $dr = 0$ nên suy có thể xem $*du = r\frac{\partial u}{\partial r}d\theta$. Giờ ta thế u_1 bởi u và u_2 bởi $\log r$, ta có

$$\frac{1}{2\pi}\left(\oint_C u\, d\theta - \log r * du\right) = \text{const} = \beta$$

Mặt khác ta cũng có $\frac{1}{2\pi}\oint_C *du = \text{const} = \alpha$ với mọi $0 < r < R$, suy ra

$$\frac{1}{2\pi}\oint_C u\, d\theta = \alpha \log r + \beta.$$

Trong trường hợp u điều hòa tại cả tâm 0, ta có $\alpha = 2\pi \oint_C *du = 0$, suy ra

$$\beta = \frac{1}{2\pi}\oint_C u\, d\theta = \lim_{r\to 0}\left[\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u\left(re^{i\theta}\right)\, d\theta\right] = u(0).$$

Bằng một phép dời trục, ta suy ra

$$u(z_0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u\left(z_0 + re^{i\theta}\right)d\theta.$$

□

Từ định lý trên, ta có được Nguyên lý cực đại cho hàm điều hòa sau đây:

Định lý 57. *(Nguyên lý cực đại cho hàm điều hòa) Hàm điều hòa u khác hằng số không đạt cực đại hoặc cực tiểu trên miền xác định. Do đó, điểm cực đại và cực tiểu của u trên một tập E đóng và bị chặn đạt được trên biên của E.*

Lưu ý. Nguyên lý module cực đại cho hàm giải tích là trường hợp đặc biệt của định lý trên khi ta xét $u(z) = \log|f(z)|$. Ngoài ra, sử dụng định lý này, ta có thể mở rộng nguyên lý trên thành Định lý 3 đường tròn Hadamard (sẽ được nói đến một cách chi tiết ở phần bài tập).

5.2 Công thức Poisson.

Ở phần trên, ta đã tìm được giá trị tại tâm của một hàm điều hòa u khi biết giá trị tại các điểm trên đường tròn. Trong phần này, ta sẽ tìm lại giá trị của u tại mọi điểm trong hình tròn. Để tính $u(z_0)$ khi biết $u(z)$ với $|z| = R$, ta dùng một đồng phôi S giữa hình tròn đơn vị và hình tròn bán kính R, biến gốc tọa độ thành z_0. Đồng phôi này là

$$S(\xi) = \frac{R^2\xi + Rz_0}{R + \overline{z_0}\xi}.$$

Một cách chặt chẽ, ta có định lý sau.

Định lý 58. *(Công thức Poisson) Cho $u(z)$ là hàm điều hòa với $|z| < R$ và liên tục với $|z| \leq R$. Khi đó ta có*

$$u(z_0) = \frac{1}{2\pi}\oint_{|z|=R} \frac{R^2 - |z_0|^2}{|z - z_0|^2}\, d\theta$$

Chứng minh. Xét hàm điều hòa $u_1(\xi) = u(S(\xi))$, ta có

$$u_1(0) = \frac{1}{2\pi} \oint_{|\xi|=1} u(S(\xi))\, d\arg \xi.$$

Để rút gọn biểu thức này, ta quy đổi tích phân của ξ về tích phân của điểm z trên đường tròn bán kính R (tương ứng qua S). Ta có

$$\xi = \frac{R(z - z_0)}{R^2 - \overline{z_0} z}, \quad d\arg\xi = \frac{d\xi}{i\xi} = \frac{1}{i}\left(\frac{1}{z - z_0} - \frac{\overline{z_0}}{R^2 - \overline{z_0} z}\right) dz = \left(\frac{z}{z - z_0} + \frac{z\overline{z_0}}{R^2 - \overline{z_0} z}\right) d\theta.$$

Mặt khác ta cũng có $R^2 = z\overline{z}$ nên ta có thể viết thành

$$\begin{aligned} d\arg\xi &= \left(\frac{z}{z - z_0} + \frac{\overline{z_0}}{\overline{z} - \overline{z_0}}\right) d\theta = \left(\frac{z_0}{z - z_0} + \frac{\overline{z}}{\overline{z} - \overline{z_0}}\right) d\theta = \mathrm{Re}\left(\frac{z + z_0}{z - z_0}\right) d\theta \\ &= \left(\frac{R^2 - |z_0|^2}{|z - z_0|^2}\right) d\theta \end{aligned}$$

Từ đây ta có được hai dạng của Công thức Poisson như sau:

$$u(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_{|z|=R} \frac{R^2 - |z_0|^2}{|z - z_0|^2} u(z)\, d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_{|z|=R} \mathrm{Re}\left(\frac{z + z_0}{z - z_0}\right) u(z)\, d\theta. \qquad (5.2.1)$$

Ngoài ra trong hệ tọa độ cực, ta có được

$$u\left(re^{i\varphi}\right) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{R^2 - r^2}{R^2 + r^2 - 2Rr\cos(\theta - \varphi)} u\left(Re^{i\theta}\right) d\theta.$$

trong đó đại lượng $R^2 + r^2 - 2Rr\cos(\theta - \varphi)$ có được từ Định lý cos. □

Ở công thức Poisson trên, ta sử dụng tính điều hòa của u trên hình tròn bán kính R (tức trên một tập mở chứa hình tròn này). Tuy nhiên công thức trên cũng đúng khi u liên tục trên hình tròn và giải tích ở bên trong. Thật vậy, ta áp dụng công thức cho các hình tròn bán kính $R\left(1 - \frac{1}{n}\right)$, sau đó tính liên tục đều của u sẽ kết thúc chứng minh khi ta cho n dần về vô cùng.

Lưu ý. Cho $u \equiv 1$, ta có đẳng thức quan trọng sau:

$$\oint_{|z|=R} \frac{R^2 - |z|^2}{|z - z_0|^2} \, d\theta = 2\pi.$$

Ngoài ra, từ (5.2.1), ta có được

$$\begin{aligned} u(z) &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{|\xi|=R} \mathrm{Re}\left(\frac{\xi + z}{\xi - z}\right) \frac{u(\xi)}{\xi} \, d\xi \\ &= \mathrm{Re}\left[\frac{1}{2\pi i} \oint_{|\xi|=R} \frac{\xi + z}{\xi - z} . \frac{u(\xi)}{\xi} \, d\xi\right] \end{aligned}$$

Do được lấy phần thực ở đẳng thức trên là giải tích nên ta suy ra hàm giải tích nhận u làm phần thực là

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|\xi|=R} \frac{\xi + z}{\xi - z} . \frac{u(\xi)}{\xi} \, d\xi + iC$$

với C là hằng số thực. Hằng số C này không phụ thuộc vào bán kính R vì khi thay $z = 0$, ta có $C = \mathrm{Im}(f(0))$. Ta đã chứng minh xong định lý sau:

Định lý 59. *(Công thức Schwarz) Cho $u(z)$ là hàm điều hòa trên $D(0, R)$ và liên tục với $|z| \leq R$. Khi đó hàm giải tích f trên $D(0, R)$ xác định như sau nhận u làm phần thực:*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|\xi|=R} \frac{\xi + z}{\xi - z} . \frac{u(\xi)}{\xi} \, d\xi + iIm(f(0)).$$

Công thức Poisson cũng cho định lý sau, khẳng định giới hạn (đều) của một dãy hàm điều hòa thì điều hòa.

Định lý 60. *(Định lý Harnack) Cho $\{u_n\}$ là một dãy các hàm điều hòa trên miền Ω. Khi đó ta có*

1. *Nếu u_n hội tụ đều về u trên mọi compact thì u là điều hòa.*

2. *Nếu $u_1 \leq u_2 \leq \dots$ thì hoặc $\{u_n\}$ hội tụ đều trên mọi compact hoặc $u_n(z) \to +\infty$ với mọi $z \in \Omega$.*

Chứng minh. Ta lần lượt chứng minh các khẳng định.

1. Ta có

$$u_n\left(a + re^{i\varphi}\right) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{R^2 - r^2}{R^2 + r^2 - 2Rr\cos(\varphi - \theta)} u_n\left(a + Re^{i\theta}\right) d\theta,$$

nên do tính hội tụ đều, ta có u cũng thỏa mãn đẳng thức này, điều đó chứng tỏ u là hàm điều hòa.

2. Ta có thể giả sử $u_1 \geq 0$, vì nếu không ta áp dụng kết quả với dãy $v_n = u_n - u_1$. Nhận thấy nếu $\{u_n(z)\}$ hội tụ với mọi z thì sự hội tụ này chắc chắn là đều, theo định lý Dini. Vậy nếu có $a \in \Omega$ để $\{u_n(a)\}$ hội tụ, ta chỉ cần chứng minh $\{u_n(z)\}$ hội tụ tại mọi điểm là đủ. Với mọi $z_0 \in \Omega$, tồn tại $r > 0$ sao cho dĩa $\overline{D(z_0, r)}$ chứa trong Ω, khi đó ta có

$$u_n\left(z_0 + re^{i\varphi}\right) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{R^2 - r^2}{R^2 + r^2 - 2Rr\cos(\varphi - \theta)} u_n\left(z_0 + Re^{i\theta}\right) d\theta,$$

suy ra

$$\frac{R - r}{R + r} u_n(z_0) \leq u_n\left(z_0 + re^{i\varphi}\right) \leq \frac{R + r}{R - r} u_n(z_0).$$

Điều này chứng tỏ dãy $\{u_n(z_0)\}$ hội tụ khi và chỉ khi các dãy $\{u_n(z)\}$ hội tụ với mọi $z \in D(z_0, r)$. Vậy nếu gọi

$$A = \left\{z \in \Omega : \{u_n(z)\} \text{ hội tụ}\right\},\ B = \left\{z \in \Omega : \{u_n(z)\} \to \infty\right\},$$

ta có $A \cap B = \emptyset$, $A \cup B = \Omega$ và A, B đều mở. Do đó ta có $A = \Omega$ hoặc $B = \Omega$, điều này kết thúc chứng minh.

$\square$

5.3 Định lý Schwarz.

Với một hàm $U(\theta)$ liên tục từng đoạn và xác định trên $[0, 2\pi]$, ta xác định tương ứng với nó một hàm điều hòa

$$P_U(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \mathrm{Re}\frac{e^{i\theta}+z}{e^{i\theta}-z}U(\theta)\, d\theta.$$

Hàm điều hòa này được gọi là *tích phân Poisson* của hàm U. Ý nghĩa hình học của tích phân Poisson có thể được hiểu như sau. Với z là một điểm thuộc miền trong hình tròn đơn vị và mỗi điểm $e^{i\theta}$ trên đường tròn, ta gọi $e^{i\theta^*}$ giao điểm còn lại của đường thẳng nối $e^{i\theta}$ và z với đường tròn. Rõ ràng quan hệ giữa θ và θ^* là một song ánh (thực chất nó là một phép vi đồng phôi trên đường tròn đơn vị). Dựa vào phương tích của z với đường tròn, ta có đẳng thức sau (tất nhiên nó có thể được kiểm chứng mà không dùng đến hình học sơ cấp):

$$1-|z|^2 = \left|e^{i\theta}-z\right|\left|e^{i\theta^*}-z\right| = -\left(e^{i\theta}-z\right)\left(e^{-i\theta^*}-\overline{z}\right).$$

Xem θ di động, z cố định và lấy vi phân 2 vế, ta có

$$\frac{e^{i\theta}d\theta}{e^{i\theta}-z} = \frac{e^{-i\theta^*}d\theta^*}{e^{-i\theta^*}-\overline{z}}$$

suy ra được

$$\frac{d\theta^*}{d\theta} = e^{i(\theta+\theta^*)}\frac{e^{-i\theta^*}-\overline{z}}{e^{i\theta}-z} = \frac{\left|e^{-i\theta^*}-\overline{z}\right|}{\left|e^{i\theta}-z\right|} \tag{5.3.1}$$

Đẳng thức (5.3.1) có thể được hiểu rằng tỉ lệ vận tốc giữa θ và θ^* khi chúng di chuyển cũng chính là tỉ lệ giữa 2 đoạn thẳng nối chúng với "điểm tựa" z. Tỉ lệ này, do đó, cũng chính là

$$\frac{d\theta^*}{d\theta} = \frac{\left|e^{-i\theta^*}-\overline{z}\right|}{\left|e^{i\theta}-z\right|} = \frac{1-|z|^2}{\left|e^{i\theta}-z\right|^2}.$$

Vậy ta có thể suy ra

$$P_U(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} U(\theta)\ d\theta^* = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} U(\theta^*)\ d\theta,$$

tức tích phân được lấy khi θ di động và thay $U(\theta)$ bởi giá trị của $U(\theta^*)$ đối xứng qua z, sau đó lấy giá trị trung bình.

Nếu như ở phần trên, ta xây dựng lại một hàm điều hòa u bằng cách tích phân Poisson hàm thu hẹp của chính nó trên biên thì giờ ta sẽ trả lời câu hỏi ngược lại: Với một hàm U xác định trên $[0, 2\pi]$, liệu có tồn tại hàm u giải tích trên $D(0,1)$ và liên tục trên $\overline{D(0,1)}$ sao cho các giá trị trên biên của nó chính là U, tức $u\left(e^{i\theta}\right) = U(\theta)$. Ở đây hiển nhiên ta chỉ xét các hàm U thỏa mãn $U(0) = U(2\pi)$ và khả tích trên $[0, 2\pi]$. Câu hỏi này được trả lời bằng định lý sau đây:

Định lý 61. *(Định lý Schwarz) Cho U là hàm liên tục từng khúc trên $[0, 2\pi]$ thỏa $U(0) = U(2\pi)$. Giả sử U liên tục tại θ_0, khi đó ta có P_U là hàm điều hòa và*

$$\lim_{z\to e^{i\theta_0}} P_U(z) = U(\theta_0).$$

Chứng minh. Hiển nhiên ta có P_U là phần thực của một hàm giải tích nên cũng là hàm điều hòa. Ta chỉ cần chứng minh vế còn lại của định lý. Từ đẳng thức

$$\int_0^{2\pi} \frac{1-|z|^2}{|e^{i\theta}-z|^2}\, d\theta = 2\pi$$

bên trên, ta có

$$P_U(z) - U(\theta_0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left[\frac{1-|z|^2}{|e^{i\theta}-z|^2}\right][U(\theta) - U(\theta_0)]\ d\theta.$$

Với $\varepsilon > 0$ cho trước, tồn tại δ đủ nhỏ để $|U(\theta) - U(\theta_0)| < \varepsilon$ với mọi $|\theta - \theta_0| < \delta$. Gọi C_1 là cung xác định bởi $|\theta - \theta_0| < \delta$ và C_2 là phần cung còn lại của đường tròn,

ta có

$$\left|\frac{1}{2\pi}\int_{C_1}\left[\frac{1-|z|^2}{|e^{i\theta}-z|^2}\right][U(\theta)-U(\theta_0)]\,d\theta\right| \le \varepsilon\left|\frac{1}{2\pi}\int_{C_1}\left[\frac{1-|z|^2}{|e^{i\theta}-z|^2}\right]\,d\theta\right| \le \varepsilon.$$

Mặt khác, ta chọn z đủ gần $e^{i\theta_0}$ sao cho

$$\begin{cases} 1-|z|^2 & < \varepsilon\left|e^{i\delta}-1\right|^2 \\ \left|e^{i\theta_0}-z\right| & < \frac{1}{2}\left|e^{i\delta}-1\right| \end{cases},$$

đặt $M=\sup_{\theta\in[0,2\pi]}|U(\theta)|$, ta có

$$\begin{aligned}
\left|\frac{1}{2\pi}\int_{C_2}\left[\frac{1-|z|^2}{|e^{i\theta}-z|^2}\right][U(\theta)-U(\theta_0)]\,d\theta\right| &\le \frac{M}{\pi}\left|\int_{C_2}\left[\frac{1-|z|^2}{|e^{i\theta}-z|^2}\right]\,d\theta\right| \\
&\le \frac{M}{\pi}\int_{C_2}\frac{\varepsilon\left|e^{i\delta}-1\right|^2}{\left(|e^{i\theta}-e^{i\theta_0}|-|e^{i\theta_0}-z|\right)^2}\,d\theta \\
&\le \frac{M}{\pi}\int_{C_2}\frac{4\varepsilon\left|e^{i\delta}-1\right|^2}{\left|e^{i\theta}-e^{i\theta_0}\right|^2}\,d\theta \\
&\le \frac{M}{\pi}\int_{C_2}\frac{4\varepsilon\left|e^{i\delta}-1\right|^2}{\left|e^{i\delta}-1\right|^2}\,d\theta \le 8M\varepsilon
\end{aligned}$$

Vậy ta suy ra

$$\begin{aligned}
|P_U(z)-U(\theta_0)| &\le \frac{1}{2\pi}\left(\left|\int_{C_1}\right|+\left|\int_{C_2}\right|\right)\left[\frac{1-|z|^2}{|e^{i\theta}-z|^2}\right][U(\theta)-U(\theta_0)]\,d\theta \\
&\le (8M+1)\,\varepsilon
\end{aligned}$$

Do đó ta có điều phải chứng minh. $\square$

Định lý Schwaz cho ta kết quả sau, khẳng định mọi hàm thỏa tính chất trung bình thì nó là hàm điều hòa. *Tính chất trung bình* ở đây được hiểu là tồn tại một dãy số thực dương $\{r_n\}$ hội tụ về 0 sao cho

$$u(z_0) = \frac{1}{2\pi}\oint_0^{2\pi} u\left(z_0 + r_n e^{i\theta}\right) d\theta.$$

Định lý 62. *Hàm liên tục u xác định trên miền Ω và thỏa tính chất trung bình thì là hàm điều hòa.*

Chứng minh. Với điểm $z_0 \in \Omega$, tồn tại $r > 0$ sao cho dĩa $\overline{D(z_0, r)}$ chứa trong Ω, và ta chỉ cần chứng minh u là hàm điều hòa trong $D(z_0, r)$ là đủ. Thật vậy, xét hàm P_u là tích phân Poisson của $u|_{\partial D(z_0,r)}$. Khi đó ta có P_u là hàm điều hòa, vậy nên hàm $u - P_u$ triệt tiêu trên $\partial D(z_0, r)$ và z_0, đồng thời cũng thỏa mãn tính chất trung bình.

Ta chứng minh $u - P_u \leq 0$, thật vậy, giả sử ngược lại, ta suy ra $u - P_u$ nhận giá trị cực đại là $M > 0$ tại một số điểm trong trong $D(z_0, r)$, do tập các điểm mà tại đó hàm nhận giá trị cực đại là compact, không chứa z_0, nên tồn tại điểm z_1 sao cho $u(z_1) - P_u(z_1) = M$ và z_1 ở gần z_0 nhất. Mặt khác, do $u - P_u$ thỏa tính chất trung bình nên tồn tại dĩa $D(z_1, r_1)$ đủ nhỏ để chứa trong $D(z_0, r)$ và không chứa z_0. Do giá trị của hàm tại z_1 là trung bình của các giá trị trên $\partial D(z_1, r_1)$ nên mọi điểm trên $\partial D(z_1, r_1)$ đều làm cực đại $u - P_u$ và trong số chúng có điểm

$$z_2 = z_1 + \frac{z_0 - z_1}{|z_0 - z_1|} r$$

gần z_0 hơn z_1. Điều này mâu thuẫn và chứng tỏ $u - P_u \leq 0$. Lập luận tương tự cho trường hợp còn lại, ta có $u = P_u$ và là hàm điều hòa. □

5.4 Nguyên lý đối xứng

Ở phần này, chúng ta quan tâm đến việc mở rộng một hàm điều hòa qua một miền đối xứng (với trục Ox). Cụ thể, xét miền Ω thỏa mãn tính chất $z \in \Omega$ khi và chỉ khi $\overline{z} \in \Omega$. Vì Ω mở và liên thông nên nó có giao với trục thực tại ít nhất một khoảng mở. Ta gọi Ω^+ là giao của Ω và nửa mặt phẳng trên và σ là giao của Ω với trục thực. Nguyên lý đối xứng phải biểu như sau:

Định lý 63. *(Nguyên lý đối xứng Schwarz) Giả sử $v(z)$ liên tục trên $\Omega^+ \cup \sigma$, điều hòa trên Ω^+ và bằng 0 trên σ. Khi đó v có mở rộng điều hòa V trên Ω thỏa mãn tính đối xứng*

$$V(\overline{z}) = -V(z).$$

Ngoài ra, nếu v là phần ảo của hàm giải tích f trên Ω^+ thì khi đó f có mở rộng giải tích F thỏa mãn

$$F(\overline{z}) = \overline{F(z)}.$$

Chứng minh. Xét hàm V xác định bởi $V(z) = \begin{cases} v(z) & \text{trên } \Omega^+ \cup \sigma \\ -v(\overline{z}) & \text{trên } \Omega^- \end{cases}$ với Ω^- là phần giao của Ω với nửa mặt phẳng dưới. Hiển nhiên ta có V đối xứng và liên tục trên Ω. Ta sẽ chứng minh V điều hòa. Thật vậy, rõ ràng V điều hòa trên Ω^+ và Ω^-. Ta chỉ việc chứng minh V điều hòa trên σ. Xét một điểm $z_0 \in \sigma$ và một đường tròn bán kính r đủ nhỏ để bao đóng của nó chứa trong Ω. Xét hàm liên tục $V\left(z_0 + re^{i\theta}\right)$ và tích phân Poisson P_V của nó là

$$P_V(z) = \frac{1}{2\pi} \oint_{|z-z_0|=r} \frac{1-|z|^2}{|z_0 + re^{i\theta} - z|^2} V(z)\, d\theta.$$

Theo định lý Schwarz, ta có P_V điều hòa ở miền trong $D(z_0, r)$ và liên tục trên biên. Đặt $V_1 = V - P_V$, ta cũng có V_1 điều hòa trên $D(z_0, r) \cap \Omega^+$, liên tục trên $\overline{D(z_0, r) \cap \Omega^+}$. Mặt khác V_1 triệt tiêu trên biên của $D(z_0, r) \cap \Omega^+$ (do trên $\sigma \cap D(z_0, r)$ thì $V = P_V = 0$), theo nguyên lý cực đại và cực tiểu, ta có $V_1 = 0$, tức $V = P_V$ và do đó V điều hòa trên σ. Vế đầu của định lý được chứng minh.

Ở vế thứ 2 của định lý, ta xét hàm U xác định bởi $U(z) = \begin{cases} u(z) & \text{trên } \Omega^+ \cup \sigma \\ -u(\overline{z}) & \text{trên } \Omega^- \end{cases}$, ta kiểm chứng được dễ dàng rằng

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\partial V}{\partial y}, \quad \frac{\partial U}{\partial y} = -\frac{\partial V}{\partial x} \qquad \text{trên } \Omega^+ \cup \Omega^-.$$

Do đó ta chỉ cần chứng minh U và V liên hợp điều hòa trên σ là đủ. Với $z_0 \in \sigma$, ta lại xét đường tròn bán kính r như trên, do ta có V điều hòa trên $D(z_0, r)$ nên tồn tại hàm điều hòa $-U_1$ liên hợp với V trên hình tròn này và bằng U trên $D(z_0, r) \cap \Omega^+$. Gọi $f(z) = U_1(z) - U_1(\overline{z})$ xác định trên $D(z_0, r)$, ta có f là điều hòa và

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(a,b) &= \frac{\partial U_1}{\partial x}(a,b) - \frac{\partial U_1}{\partial x}(a,-b) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(a,b) &= \frac{\partial U_1}{\partial y}(a,b) + \frac{\partial U_1}{\partial y}(a,-b) \end{aligned}$$

Do đó trên σ, ta có

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= 2\frac{\partial U_1}{\partial y} = 2\frac{\partial V}{\partial x} = 0 \end{aligned}$$

Suy ra được hàm điều hòa $g = \frac{\partial f}{\partial x} + i\frac{\partial f}{\partial y}$ bằng 0 trên σ, do đó đồng nhất 0 trên $D(z_0, r)$. Vì quả cầu mở là miền đơn liên nên ta có f là phần thực của một nguyên hàm của g, và do đó là hằng số thực. Ta cũng suy ra được hằng số này bằng 0 khi xét z chính bằng z_0. Vậy ta suy ra $U_1(z) = U_1(\overline{z})$, tức $U_1 = U$, hay U điều hòa tại z_0. Ta đã chứng minh được vế sau và kết thúc định lý. $\square$

Nguyên lý đối xứng của Schwarz cho phép ta mở rộng các hàm giải tích trên một tập mở thành một hàm giải tích trên tập mở lớn hơn. Điều này có ý nghĩa đặc biệt với các điểm trên biên vì sau khi mở rộng chúng có thể trở thành điểm trong, và do đó việc kết hợp nguyên lý này với các nguyên lý cực đại thường xuyên được sử dụng.

Mặc dù phát biểu cho trường hợp đoạn thẳng trên trục thực, tuy nhiên ta có thể sử dụng nguyên lý này cho các trường hợp phong phú hơn bằng cách dùng các ánh xạ bảo giác đưa về trường hợp cũ. Thật vậy, trường hợp sau đây hay được sử dụng, khi ta muốn mở rộng hàm giải tích trên dĩa tròn đơn vị.

Định lý 64. *Xét γ là một cung mở chứa hoàn toàn trong đường tròn đơn vị, f là hàm giải tích trên $D(0,1)$, liên tục trên $D(0,1)\cup\gamma$ và chỉ nhận giá trị thực trên γ. Khi đó tồn tại mở rộng giải tích F của f xác định trên $D(0,1)\cup\gamma\cup\{z:\ |z|>1\}$. Đặc biệt, trong trường hợp f bị chặn, ta cũng có $\|F\|=\|f\|$.*

Chứng minh. Ta xét hàm $\varphi(z)=\frac{iz+1}{z+i}$ biến nửa mặt phẳng trên thành $D(0,1)\setminus\{i\}$, trong đó i thành 0, và biến nửa mặt phẳng dưới (trừ $\{-i\}$) thành $\{z:\ |z|>1\}$. Ký hiệu Π^+ là nửa mặt phẳng trên, Π^- là nửa mặt phẳng dưới, $\sigma=\varphi(\gamma)$ là khoảng mở trên trục thực. Không mất tính tổng quát, ta có thể giả sử γ không chứa i, trường hợp ngược lại được giải quyết dễ dàng bằng cách thêm một phép xoay vào φ. Đặt $g(z)=f(\varphi(z))$, ta có g xác định và liên tục trên $\Pi^+\cup\sigma$ và giải tích trên Π^+. Theo Nguyên lý đối xứng, ta có thể mở rộng g thành hàm giải tích G trên $\Pi^+\cup\Pi^-\cup\sigma$.

Giờ ta xét hàm $F(z)=G(\varphi^{-1}(z))$ với mọi z thuộc $D(0,1)\cup\gamma\cup\{z:\ |z|>1\}$, ta có $F=f$ trên $D(0,1)\cup\gamma$, F giải tích trên miền xác định và

$$\|F\|=\|G\|=\|g\|=\|f\|.$$

Định lý được chứng minh. $\square$

Chương 6

Các nguyên lý cực đại

Các nguyên lý cực đại cho hàm giải tích và hàm điều hòa được sử dụng nhiều để đưa ra các ước lượng về giá trị toàn miền hoặc cục bộ của chúng. Trước hết, ta nhắc lại Nguyên lý cực đại cho hàm điều hòa như sau:

Định lý 65. *(Nguyên lý cực đại cho hàm điều hòa) Hàm điều hòa u khác hằng số không đạt cực đại hoặc cực tiểu trên miền xác định. Do đó, điểm cực đại và cực tiểu của u trên một tập E đóng và bị chặn đạt được trên biên của E.*

Với một hàm giải tích f, áp dụng Nguyên lý cực đại cho hàm điều hòa $u = \log|f|$, ta đã chứng minh lại, theo một con đường khác, Nguyên lý modulus cực đại ở chương trước:

Định lý 66. *(Nguyên lý Modulus cực đại) Cho $f(z)$ là hàm giải tích khác hằng trên miền Ω. Khi đó modulus $|f(z)|$ không đạt cực đại trên Ω.*

Đây là nguyên lý quan trọng và được ứng dụng đặc biệt nhiều. Ở chương này, ta sẽ đi qua một số ứng dụng của nó trong các trường hợp miền Ω bị chặn và không bị chặn cũng như liên hệ của nó với Nguyên lý cực đại của hàm điều hòa. Trước hết là một số hệ quả của nguyên lý này.

Định lý 67. *Nếu $f(z)$ được xác định và liên tục trên trên tập đóng bị chặn E và giải tích trên miền trong của E. Khi đó cực đại của $|f(z)|$ trên E có thể được giả sử là nằm tại biên.*

Chứng minh. Do f liên tục trên một compact nên $|f(z)|$ đạt được giá trị lớn nhất trên E. Nếu f là hàm hằng thì định lý hiển nhiên đúng. Trong trường hợp ngược lại, giá trị lớn nhất này không thể nằm ở miền trong của E, do đó ta có thể giả sử như $|f(z)|$ đạt cực đại tại biên. □

Bổ đề của Schwaz sau đây thường được sử dụng như hệ quả của Nguyên lý cực đại nhằm đưa ra đánh giá tốt hơn cho các hàm giải tích trên đường tròn và các miền có liên hệ với nó (như các nửa mặt phẳng, hình vành khăn,...).

Bổ đề 68. *(Bổ đề Schwarz) Cho $f(z)$ giải tích trên $|z| < 1$ thỏa mãn điều kiện $|f(z)| \le 1$, $f(0) = 0$. Khi đó ta có $|f(z)| \le |z|$ và $|f'(0)| \le 1$. Nếu tồn tại $z \ne 0$ để $|f(z)| = |z|$ hoặc nếu $|f'(0)| = 1$ thì $f(z) = cz$ với hằng số phức c có modulus bằng 1.*

Một cách tổng quát, nếu f giải tích trên $B(0,R)$, $|f(z)| \le M$ và $f(z_0) = w_0$ với $|w_0| < M$ thì ta có

$$\left|\frac{M(f(z) - w_0)}{M^2 - \overline{w_0} f(z)}\right| \le \left|\frac{R(z - z_0)}{R^2 - \overline{z_0} z}\right|.$$

Chứng minh. Sử dụng Định lý Taylor, ta có thể viết $f(z) = z\left[f'(0) + z\hat{f}(z)\right]$. Suy ra

$$\left|f'(0) + z\hat{f}(z)\right| \le \frac{1}{|z|}$$

Vì $f'(0) + z\hat{f}(z)$ là hàm giải tích trên $B\left(0, 1 - \frac{1}{n}\right)$ và liên tục trên $\overline{B}\left(0, 1 - \frac{1}{n}\right)$ nên ta có thể giả sử $\left|f'(0) + z\hat{f}(z)\right|$ đạt giá trị cực đại tại biên, nghĩa là

$$\left|f'(0) + z\hat{f}(z)\right| \le \frac{1}{1 - \frac{1}{n}} = 1 + \frac{1}{n-1} \qquad \forall z \in \overline{B}\left(0, 1 - \frac{1}{n}\right)$$

Do $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \overline{B}\left(0, 1-\frac{1}{n}\right) = B(0,1)$ nên với mọi $z \in B(0,1)$, ta có $\left|f'(0) + z\hat{f}(z)\right| \leq 1 + \frac{1}{n+1}$ với mọi n đủ lớn. Do đó ta suy ra $|f(z)| \leq |z|$.

Trong trường hợp tồn tại $z_1 \neq 0$ để dấu bằng xảy ra, ta có $\left|f'(0) + z\hat{f}(z)\right|$ đạt cực đại tại z_1 nên là hằng số, tức f là hàm tuyến tính. Mặt khác, khi $f'(0) = 1$, ta có $\left|f'(0) + z\hat{f}(z)\right|$ đạt cực đại tại 0, lý luận tương tự ta cũng có điều phải chứng minh.

Trong trường hợp tổng quát, ta sử dụng các đồng phôi giữa các quả cầu để đưa bài toán về trường hợp đặc biệt. Cụ thể, đồng phôi biến quả cầu $B(0,M)$ thành $B(0,1)$ và biến $b \in B(0,M)$ thành $0 \in B(0,1)$ là

$$f(z) = \frac{M(z-b)}{M^2 - \bar{b}z}.$$

Giả sử ta có $|f(z)| \leq M$ trên $B'(0,R)$ và $f(z_0) = w_0$ với $|w_0| < M$, ta xét các đồng phôi T giữa quả cầu $B'(0,R)$ thành $B'(0,1)$, z_0 thành 0 và S giữa $B'(0,M)$ thành $B'(0,1)$, biến w_0 thành 0. Đặt $g = S \circ f \circ T^{-1}$, ta có $|g(z)| \leq 1 \; \forall |z| \leq 1$ và $g(0) = 0$, ta suy ra $|g(z)| \leq |z|$ trên $B'(0,1)$, tức là

$$\left|S\left(f\left(T^{-1}(z)\right)\right)\right| \leq |z| \quad \forall |z| \leq 1.$$

Ta suy ra $|S(f(z))| \leq |T(z)| \quad \forall |z| \leq R$. Vậy ta có

$$\left|\frac{M(f(z) - w_0)}{M^2 - \overline{w_0}f(z)}\right| \leq \left|\frac{R(z-z_0)}{R^2 - \overline{z_0}z}\right|.$$

□

Đối với các miền không bị chặn, đôi lúc ta cũng có thể áp dụng Nguyên lý modulus cực đại. Kỹ thuật của Phragment và Lindelöf sau đây thường được sử dụng để đánh giá modulus của hàm giải tích. Giả sử ta đã có $|f(z)|$ bị chặn bởi một hàm $F: \mathbb{C} \to \mathbb{R}^+$ và muốn nhận được một đánh giá tốt hơn, ta có thể thực hiện như sau:

Bước 1. Tìm một hàm $G_\varepsilon : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ tăng nhanh hơn F, nói cách khác $\lim_{|z|\to\infty} \frac{F(z)}{G_\varepsilon(z)} = 0$ và $G_\varepsilon(z)$ giảm theo ε khi z cố định.

Bước 2. Xét $g(z) = f(z) . G_\varepsilon^{-1}(z)$, ta có $\lim_{|z|\to\infty} |g(z)| = 0$, tức tồn tại miền bị chặn Ω sao cho $g(z) \leq 1$ trên $\mathbb{C} \setminus \Omega$, sử dụng Nguyên lý modulus cực đại, ta có

$$|f(z)| \leq |G_\varepsilon(z)|$$

Bước 3. Cố định z và cho $\varepsilon \to 0$, ta nhận được một đánh giá mới.

Để thấy rõ hơn phương pháp này, ta lần lượt xem xét các định lý sau, khảo sát giá trị của $|f(z)|$ trên các miền giới hạn bởi hai đường thẳng song song. Định lý đầu tiên sẽ cho chúng ta thấy một hàm giải tích "tăng không đủ nhanh" thì sẽ bị chặn.

Định lý 69. *Xét miền*

$$\Omega = \left\{x + iy : |y| < \frac{\pi}{2}\right\}, \qquad \overline{\Omega} = \left\{x + iy : |y| \leq \frac{\pi}{2}\right\}$$

và hàm f liên tục trên $\overline{\Omega}$ và giải tích trên Ω. Giả sử

$$|f(z)| < \exp\left[A \exp(\alpha |x|)\right]$$

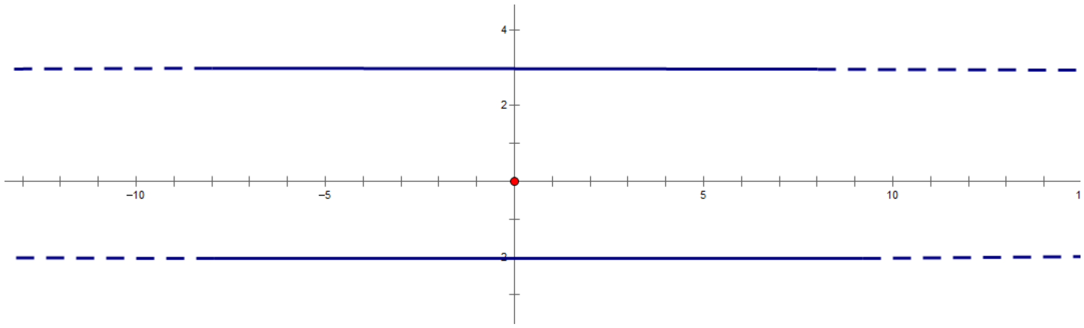
và $|f(z)| \leq 1$ trên $\partial\Omega$. Khi đó ta có $|f(z)| \leq 1$ với mọi $z \in \Omega$.

Chứng minh. Để chọn một hàm tăng nhanh hơn $|f(z)|$, ta nhận thấy kết quả chính là $\exp[\exp(z)]$ với nửa mặt phẳng bên phải và $\exp[\exp(z)]$ ở nửa mặt phẳng bên trái. Như vậy, để thuận tiện hơn, ta sẽ xét hàm số

$$h_\varepsilon(z) = \frac{f(z)}{\exp\left[\varepsilon\left(e^{\beta z} + e^{-\beta z}\right)\right]}$$

với $\alpha < \beta < 1$, tức

$$|h_\varepsilon(z)| = \frac{|f(z)|}{\exp\left[\varepsilon\left(e^{\beta x} + e^{-\beta x}\right)\cos\beta y\right]}.$$



Hình 6.0.1: Mô tả miền nằm ngang Ω.

Trong đó việc thêm β vào giúp ta giảm bớt sức lao động ở các trường hợp tại biên. Thật vậy, ta cần phần mẫu của h tăng nhanh hơn $\exp\left[A\exp\left(\alpha\left|x\right|\right)\right]$ khi $|z|$ dần ra vô cùng, điều này gặp rắc rối tại các điểm khá gần biên của Ω, bởi nếu không có sự xuất hiện của β, ta phải áp dụng Nguyên lý modulus cực đại cho một miền có hình dạng như sau (Các đường cong biểu diễn cho nghiệm của một phương trình siêu việt.

Trở lại bài toán, với hàm h_ε xác định như trên, ta có

$$\begin{aligned}\left|h_\varepsilon\left(z\right)\right| &\le \exp\left[Ae^{\alpha|x|}-\varepsilon\left(e^{\beta x}+e^{-\beta x}\right)\cos\beta y\right].\\ &\le \exp\left[Ae^{\alpha|x|}-\varepsilon\left(e^{\beta x}+e^{-\beta x}\right)\cos\beta\frac{\pi}{2}\right]\end{aligned}$$

Vì $\cos\beta\frac{\pi}{2}>0$ nên ta khi $|x|$ dần ra vô cùng thì $h_\varepsilon\left(z\right)$ sẽ dần về 0. Vậy tồn tại $B>0$ đủ lớn sao cho

$$\left|h_\varepsilon\left(z\right)\right|\le 1\quad \forall z\in\Omega \text{ sao cho } x\ge B$$

Mặt khác trên hình chữ nhật R có các cạnh là $\partial\Omega$ và các đường thẳng $x=\pm B$, ta đều có$\left|h_\varepsilon\left(z\right)\right|\le 1$ trên ∂R. Theo nguyên lý modulus cực đại, ta có $\left|h_\varepsilon\left(z\right)\right|\le 1$ trên Ω, nghĩa là

$$\left|f\left(z\right)\right|\le \exp\left[\varepsilon\left(e^{\beta x}+e^{-\beta x}\right)\cos\beta y\right]$$

với mọi $z\in\Omega$. Cố định z và cho ε dần về 0 ta có được kết quả của định lý. □

Tuy nhiên, không phải lúc nào việc tìm một hàm "tăng nhanh hơn $\left|f\left(z\right)\right|$" và thỏa mãn các tính chất cần thiết trên $\partial\Omega$. Định lý sau đây xét đến trường hợp $|f|$ đã bị chặn trên Ω sẽ cho ta thấy điều đó. Kết quả của định lý này cũng là một sự mở rộng của Định lý modulus cực đại khi Ω không còn là miền bị chặn.

Định lý 70. *Xét miền*

$$\Omega = \{x + iy : \ a < x < b\}, \qquad \overline{\Omega} = \{x + iy : \ a \le x \le b\}$$

và hàm f liên tục trên $\overline{\Omega}$, giải tích trên Ω. Giả sử rằng $|f(z)| < B < +\infty$ với mọi $z \in \Omega$. Gọi

$$M(x) = \sup\{|f(x+iy)| : \quad -\infty < y < +\infty\}$$

với $a \le x \le b$, khi đó nếu $M(a), M(b)$ khác 0, ta có

$$M(x)^{b-a} \le M(a)^{b-x} M(b)^{x-a}$$

Chứng minh. Ta cố gắng đưa bài toán về trường hợp $M(a) = M(b) = 1$. Thật vậy, giả sử đã giải quyết được bài toán trong trường hợp trên, ta đặt

$$g(z) = \frac{f(z)}{M(a)^{\frac{b-z}{b-a}} M(b)^{\frac{z-a}{b-a}}}$$

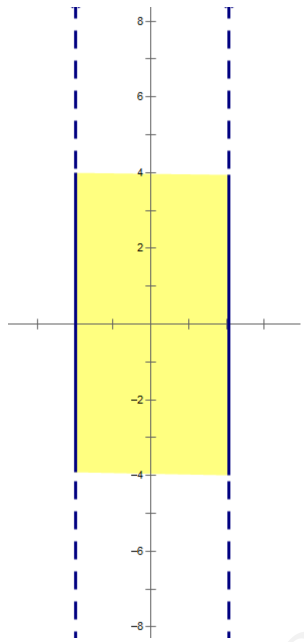
khi đó g là hàm giải tích thỏa mãn tính chất $|g(z)| = 1$ trên $\partial\Omega$. Áp dụng trường hợp đặc biệt của định lý với hàm g ta có ngay điều phải chứng minh. Vậy ta chỉ cần giải quyết bài toán khi $|f(z)| = 1$ trên biên, tức ta chỉ cần chứng minh

$$|f(z)| \le 1 \qquad \forall z \in \Omega.$$

Ta xét hàm h_ε xác định như sau

$$h_\varepsilon(z) = \frac{f(z)}{1 + \varepsilon(z-a)},$$

ta có h_ε xác định trên $\overline{\Omega}$ vì $1 + \varepsilon(z-a)$ có phần thực là $1 + x - a \ge 1 > 0$ nên luôn



Hình 6.0.2: Mô tả miền nằm dọc Ω.

khác 0. Do đó h_ε liên tục trên $\overline{\Omega}$ và giải tích trên Ω. Mặt khác ta cũng có

$$|h_\varepsilon(z)| = \frac{|f(z)|}{|1+\varepsilon(z-a)|} \leq \frac{B}{y}$$

nên tại $\Omega_1 = \{x+iy : \ |y| \geq B\}$, ta có $|h_\varepsilon(z)| \leq 1$. Nhận thấy $|h_\varepsilon| \leq 1$ trên $\partial\Omega$ nên ta suy ra

$$|h_\varepsilon(z)| \leq 1 \qquad \forall z \in \partial(\Omega \setminus \Omega_1)$$

Vậy nên theo Nguyên lý modulus cực đại, ta suy ra $|h_\varepsilon(z)| \leq 1$ với mọi $z \in \Omega$. Do đó ta có

$$|f(z)| \leq |1+\varepsilon(z-a)| \qquad \forall z \in \Omega.$$

Cố định z và cho ε tiến về 0, ta có $|f(z)| \leq 1$ với mọi $z \in \Omega$ và định lý được chứng minh. $\square$

Định lý trên được tổng quát hóa trong phần bài tập, khi miền Ω được cho bất kỳ.

Từ định lý trên, sử dụng ánh xạ e^z để biến Ω thành miền $\left\{z \in \mathbb{C}: \ e^a < |z| < e^b\right\}$, ta dễ dàng chứng minh được định lý sau. Phần chứng minh trong tài liệu sử dụng Nguyên lý cực đại cho hàm điều hòa nhằm cho thấy mối liên hệ giữa 2 định lý cực đại này.

Định lý 71. *(Định lý Ba đường tròn Hadamard) Cho $f(z)$ là hàm giải tích trên hình vành khăn $r_1 < |z| < r_2$ và liên tục trên bao đóng của miền này. Gọi $M(r)$ là giá trị lớn nhất của $|f(z)|$ trên đường tròn $\{z \in \mathbb{C}: \ |z| = r\}$, khi đó ta có*

$$M(r) \leq M(r_1)^{\alpha} M(r_2)^{1-\alpha}$$

với

$$\alpha = \frac{\log\left(\frac{r_2}{r}\right)}{\log\left(\frac{r_2}{r_1}\right)}.$$

Chứng minh. Ý tưởng của chúng ta là xét một hàm điều hòa

$$u(z) = a\log|z| + b\log|f(z)|$$

với các hệ số a, b thích hợp và áp dụng nguyên lý cực đại để dẫn đến kết luận của bài toán. Để phần giá trị của $|f(z)|$ trong u không bị triệt tiêu, ta cần có $b \neq 0$, tức ta có thể chọn cho $b = 1$. Theo Nguyên lý cực đại, ta có

$$u(z) \leq \max\{a\log r_1 + \log M(r_1), a\log r_2 + \log M(r_2)\}$$

Để hủy đi việc chọn số lớn nhất, ta sẽ chọn a sao cho cả 2 biểu thức bằng nhau, tức là

$$a\log r_1 + \log M(r_1) = a\log r_2 + \log M(r_2),$$

tức là

$$a = -\frac{\log M(r_2) - \log M(r_1)}{\log r_1 - \log r_2}.$$

Vậy, trên đường tròn $\{z \in \mathbb{C} : \ |z| = r\}$, ta có

$$\begin{aligned} \log|f(z)| &\leq a(\log r_1 - \log r) + \log M(r_1) \\ &= \frac{\log M(r_2) - \log M(r_1)}{\log r_2 - \log r_1}(\log r_1 - \log r) + \log M(r_1) \\ &= \frac{\log\frac{r_1}{r}}{\log\frac{r_2}{r_1}}[\log M(r_2) - \log M(r_1)] + \log M(r_1) \\ &= \left(1 - \frac{\log\frac{r_1}{r}}{\log\frac{r_2}{r_1}}\right)\log M(r_1) + \frac{\log\frac{r_1}{r}}{\log\frac{r_2}{r_1}}\log M(r_2) \\ &= \alpha\log M(r_1) + (1-\alpha)\log M(r_2) \end{aligned}$$

tức là

$$M(r) \leq M(r_1)^{\alpha} M(r_2)^{1-\alpha}.$$

Định lý do đó được chứng minh. $\square$

Chương 7

Phụ mục

7.1 Ánh xạ bảo giác và phép biến đổi tuyến tính

7.1.1 Các khái niệm cơ bản

Trước hết, ta đến với định nghĩa của phép biến đổi tuyến tính như sau.

Định nghĩa 72. Ta gọi các *phép biến đổi tuyến tính* (*linear transformation*) là các hàm S giải tích trên mặt phẳng phức mở rộng có dạng

$$S(z) = \frac{az+b}{cz+d}.$$

Thông thường ta chỉ xét trường hợp $ad - bc \neq 0$ vì nếu $ad - bc = 0$ thì S trở thành hàm hằng. Khi đó ta có

$$S(\infty) = \frac{a}{c}, \qquad S\left(-\frac{d}{c}\right) = \infty.$$

Cũng như các toán tử tuyến tính, ta thường kí hiệu Sz thay cho $S(z)$. Phép biến đổi S được gọi là *chuẩn tắc* (*normalized*) khi $ad - bc = 1$. Như thế, mỗi phép biến đổi tuyến tính có đúng 2 biểu diễn chuẩn tắc.

Trong một số trường hợp, chẳng hạn như khi ta cần tính hợp nối của 2 phép biến đổi tuyến tính, hoặc tính $S^n = \underbrace{S \circ S \circ \cdots \circ S}_{n \text{ lần}}$, các sau đây có thể rất hiệu quả. Viết $z = \frac{z_1}{z_2}$ và $w = Sz = \frac{w_1}{w_2}$, ta có

$$\frac{w_1}{w_2} = \frac{a\frac{z_1}{z_2} + b}{c\frac{z_1}{z_2} + d} = \frac{az_1 + bz_2}{cz_1 + dz_2}.$$

Xem

$$\begin{cases} w_1 &= az_1 + bz_2 \\ w_2 &= cz_1 + dz_2 \end{cases},$$

ta có thể xem phép biến đổi S như phép nhân ma trận

$$\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$$

với $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ là ma trận biểu diễn của S. Khi đó với $[S_1]$ và $[S_2]$ là các ma trận biểu diễn của S_1 và S_2, $w = S_1(S_2(z))$, ta có

$$\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = [S_1][S_2] \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}.$$

Do vậy hợp nối của các phép biến đổi tuyến tính cũng là một phép biến đổi tuyến tính với ma trận biểu diễn bằng tích các ma trận biểu diễn của các phép bnến đổi thành phần. Một số phép biến hình quen thuộc ở phổ thông được liệt kê ở bảng sau

Tên gọi	Phép biến đổi	Ma trận biểu diễn
Phép tính tiến theo vector α	$Sz = z + \alpha$	$\begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
Phép vị tự tâm 0, tỉ số $k \in \mathbb{R}$	$Sz = kz$	$\begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
Phép quay tâm 0 một góc θ	$Sz = e^{i\theta}z$	$\begin{pmatrix} e^{i\theta} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
Phép nghịch đảo tâm 0, phương sai 1[1]	$Sz = \frac{1}{z}$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

Với mọi phép biến đổi tuyến tính S, ta có thể viết

$$Sz = \frac{az+b}{cz+d} = \frac{bc-ad}{c^2\left(z+\frac{d}{c}\right)} + \frac{a}{c}.$$

Như vậy, mọi phép biến đổi tuyến tính đều là hợp nối của 4 phép biến đổi trên.

7.1.2 Tỉ số kép

Tỉ số kép được sử dụng nhiều trong hình học sơ cấp và trở nên rất quen thuộc với các bạn học sinh chuyên toán. Ở đây, chúng ta sẽ định nghĩa và chứng minh các tính chất của tỉ số kép một cách hệ thống và chặt chẽ hơn cách mà các công cụ hình học phẳng vẫn làm. Trước hết, ta định nghĩa tỉ số kép như sau

Định nghĩa 73. *Tỉ số kép* (*cross ratio*) giữa 4 điểm z_1, z_2, z_3, z_4, kí hiệu là (z_1, z_2, z_3, z_4) là ảnh Sz_1 của điểm z_1 qua phép biến đổi tuyến tính S biến z_2, z_3, z_4 thành $1, 0, \infty$.

Với 3 điểm z_2, z_3, z_4 cho trước, phép biến đổi tuyến tính đưa chúng lần lượt thành $1, 0, \infty$ là

$$Sz = \frac{z-z_3}{z-z_4} : \frac{z_2-z_3}{z_2-z_4},$$

nếu z_2, z_3 hay z_4 nhận giá trị là ∞, ta có Sz lận lượt là

$$\frac{z-z_3}{z-z_4}, \qquad \frac{z_2-z_4}{z-z_4}, \qquad \frac{z-z_3}{z_2-z_3}.$$

Phép biến đổi tuyến tính S như thế cũng là duy nhất. Thật vậy, giả sử tồn tại phép biến đổi tuyến tính T sao cho nó biến z_2, z_3, z_4 thành $1, 0, \infty$, ta có $T \circ S^{-1}$ có 3 điểm bất động là $1, 0, \infty$. Bằng các tính toán trực tiếp, ta có $T \circ S^{-1} \equiv \mathrm{Id}_{\mathbb{C}}$ và cho ta $S \equiv T$. Như thế, một cách đơn giản, ta có

$$(z_1, z_2, z_3, z_4) = \frac{z_1-z_3}{z_1-z_4} : \frac{z_2-z_3}{z_2-z_4}.$$

Tuy vậy, định nghĩa như trên sẽ giúp ta khai thác tốt hơn các tính chất của tỉ số kép, chẳng hạn với các định lý sau. Nếu như trong hình học sơ cấp, ta vẫn biết rằng các phép chiếu, tịnh tiến, nghịch đảo, quay bảo toàn tỉ số kép thì định lý sau là một phát biểu tổng quát cho các tính chất như vậy.

Định lý 74. *Nếu z_1, z_2, z_3, z_4 là các điểm phân biệt trên mặt phẳng phức mở rộng và T là một phép biến đổi tuyến tính bất kì, ta có T bảo toàn tỉ số kép của z_1, z_2, z_3, z_4, nghĩa là*

$$(Tz_1, Tz_2, Tz_3, Tz_4) = (z_1, z_2, z_3, z_4).$$

Chứng minh. Xét $Sz = (z, z_2, z_3, z_4)$, ta có $(z_1, z_2, z_3, z_4) = Sz_1$. Mặt khác $S \circ T^{-1}$ biến Tz_2, Tz_3, Tz_4 lần lượt thành $1, 0, \infty$ nên ta suy ra

$$Sz_1 = S \circ T^{-1}(Tz_1) = (Tz_1, Tz_2, Tz_3, Tz_4).$$

Ta suy ra $(Tz_1, Tz_2, Tz_3, Tz_4) = (z_1, z_2, z_3, z_4)$ và kết thúc chứng minh. □

Định lý trên cho ta một mẹo để tìm nhanh phép biến đổi tuyến tính T đưa z_1, z_2, z_3 thành w_1, w_2, w_3. Theo định lý, ta có

$$(Tz, w_1, w_2, w_3) = (z, z_1, z_2, z_3),$$

tức
$$\frac{Tz-w_2}{Tz-w_3}:\frac{w_1-w_2}{w_1-w_3}=\frac{z-z_2}{z-z_3}:\frac{z_1-z_2}{z_1-z_3}.$$
Khai triển đẳng thức trên, ta tìm được Tz theo z.

Định lý sau đây mô tả các tính chất quan trọng của tỉ số kép trong hình học sơ cấp mà ta đã biết.

Định lý 75. *Tỉ số kép (z_1, z_2, z_3, z_4) là số thực khi và chỉ khi bốn điểm z_1, z_2, z_3, z_4 nằm trên cùng một đường thẳng hoặc đường tròn. Nói cách khác, ảnh ngược của trục thực qua các phép biến đổi tuyến tính là đường thẳng hoặc đường tròn.*[2]

Chứng minh. Với phép biến đổi tuyến tính T, ta có $Tz \in \mathbb{R}$ khi và chỉ khi $Tz = \overline{Tz}$ nên nếu gọi ‘
$$Tz = \frac{az+b}{cz+d},$$
ta có $z \in T^{-1}(\mathbb{R})$ khi và chỉ khi
$$\frac{az+b}{cz+d}=\frac{\overline{az}+\overline{b}}{\overline{cz}+\overline{d}},$$
tương đương với
$$(a\overline{c}-\overline{a}c)\,|z|^2+\left(a\overline{d}-\overline{b}c\right)z+(b\overline{c}-\overline{a}d)\,\overline{z}+b\overline{d}-\overline{b}d=0.$$
Với $a\overline{c}=\overline{a}c$, phương trình trên trở thành phương trình đường thẳng trong mặt phẳng phức vì $a\overline{d}-\overline{b}c$ không thể bị triệt tiêu. Trong trường hợp $a\overline{c}\neq\overline{a}c$, phương trình trên

[2] Dưới ý tưởng hình học, ta có (z_1, z_2, z_3, z_4) là số thực khi và chỉ khi
$$\arg(z_1,z_2,z_3,z_4)=\arg\frac{z_1-z_3}{z_1-z_4}-\arg\frac{z_2-z_3}{z_2-z_4}=0,$$
khi đó ta có các cặp góc cùng chắn một cung bằng nhau nên tứ giác tạo bởi 4 điểm này nội tiếp (nếu cặp góc này khác 0) hoặc thẳng hàng (nếu cặp góc này bằng 0). Tuy nhiên, điều này chỉ dừng lại ở mặt ý tưởng hoặc nguồn gốc của định lý, chứ không được xem là một chứng minh chặt chẽ.

tương đương với

$$\left|z + \frac{a\overline{d} - \overline{b}c}{a\overline{c} - \overline{a}c}\right|^2 = \left|\frac{ad - bc}{a\overline{c} - \overline{a}c}\right|^2,$$

tức z thuộc đường tròn tâm $\frac{\overline{b}c - a\overline{d}}{a\overline{c} - \overline{a}c}$, bán kính $\left|\frac{bc-ad}{a\overline{c}-\overline{a}c}\right|$. Định lý được chứng minh. □

Như vậy, đối với các phép biến đổi tuyến tính, ta có thể xem các đường thẳng chính là các đường tròn có tâm ở vô cùng, vì thực chất, trên mặt phẳng mở rộng (tức mặt cầu Riemann), chúng đều là các đường tròn. Với việc xem các đường thẳng cũng là đường tròn, ta có

$$(Tz_1, Tz_2, Tz_3, Tz_4) = (z_1, z_2, z_3, z_4)$$

nên các điểm Tz_1, Tz_2, Tz_3, Tz_4 cùng thuộc một đường tròn khi và chỉ khi z_1, z_2, z_3, z_4 cùng thuộc một đường tròn. Do đó một phép biến đổi tuyến tính sẽ đưa một đường tròn thành đường tròn. Đó chính là nội dung của định lý sau

Định lý 76. *Một phép biến đổi tuyến tính thì đưa đường tròn thành đường tròn.*

Ngược lại, một định lý mà ta sắp nhắc đến đây sẽ cho thấy một song ánh giải tích giữa hai hình tròn thì phải là một phép biến đổi tuyến tính. Lưu ý rằng khái niệm hình tròn ở đây cũng có thể được hiểu là nửa mặt phẳng. Tuy nhiên, trước hết ta sẽ xem xét các phép biến đổi tuyến tính là song ánh giữa hình tròn nguồn (Ω_1) và đích (Ω_2), trong đó đưa điểm A của nguồn thành điểm B của đích.

Phép biến đổi S	Nguồn (Ω_1)	Đích (Ω_2)	A	B
$\dfrac{r(z-\alpha)}{r^2 - \overline{\alpha}z}$	$D(0,r)$	$D(0,1)$	α	0
$\dfrac{iz+1}{z+i}$	$\{x+iy:\ y>0\}$	$D(0,1)$	i	0
$\dfrac{z-1}{z+1}$	$\{x+iy:\ x>0\}$	$D(0,1)$	1	0

Như đã nói ở trên, ta kết thúc phần này bằng định lý sau.

Định lý 77. *Mọi song ánh giải tích giữa hai hình tròn (nửa mặt phẳng) đều là phép biến đổi tuyến tính.*

Chứng minh. Do hợp nối của các phép biến đổi tuyến tính cũng là các phép biến đổi tuyến tính nên không mất tính tổng quát, ta chỉ cần chứng minh mọi song ánh giải tích f từ $D(0,1)$ vào $D(0,1)$, trong đó biến 0 thành 0 đều là phép biến đổi tuyến tính. Thật vậy, theo bổ đề Schwarz, ta có $|f(z)| \le |z|$. Mặt khác f^{-1} cũng là hàm giải tích từ $D(0,1)$ vào $D(0,1)$ và giữ nguyên 0 nên ta suy ra $|f^{-1}(z)| \le |z|$. Kết hợp hai điều này, ta suy ra

$$|f(z)| = |z| \quad \forall z \in D(0,1).$$

Cũng theo bổ đề Schwarz, f phải là phép quay, nghĩa là tồn tại $\lambda \in \mathbb{C}$ có $|\lambda| = 1$ sao cho

$$f(z) = \lambda z.$$

Đây là phép biến đổi tuyến tính và do đó ta có điều phải chứng minh. □

7.2 Định lý cơ bản của đại số

Ta đã biết kết quả rất cơ bản sau, đúng như tên gọi của nó, định lý này đóng vai rất trò quan trọng trong các vấn đề liên quan đến vành đa thức. Tuy vậy, với các kiến thức về đại số thuần túy, việc chứng minh nó hoàn toàn không dễ. Ta sẽ tiếp cận định lý này bằng các công cụ của tích phân phức.

Định lý 78. *(Định lý cơ bản của đại số) Mọi đa thức $P(z)$ khác hằng với hệ số phức đều có nghiệm. Nói cách khác, mọi phần tử trên $\mathbb{C}[x]$ có bậc lớn hơn 1 đều khả quy. Do đó, mọi đa thức bậc n đều có đúng n nghiệm phức.*

Chứng minh. Ta có thể dùng định lý Louiville hoặc Rouché, từ đó có hai các chứng minh như sau.

Cách 1. Xét đa thức $P\left(z\right)$ có dạng

$$P\left(z\right)=a_0+a_1z+\cdots+a_nz^n,$$

không mất tính tổng quát, ta chỉ cần xét khi $a_n=1$. Khi đó, nếu P không có nghiệm, ta suy ra hàm

$$f\left(z\right)=\frac{1}{P\left(z\right)}=\frac{1}{a_0+a_1z+\ldots z^n}$$

là hàm nguyên. Mặt khác thì

$$\left|a_0+a_1z+\ldots z^n\right|\leq\left|z\right|^n-\left(\left|a_{n-1}\right|\left|z\right|^{n-1}+\cdots+\left|a_1\right|\left|z\right|+\left|a_0\right|\right)$$

nên

$$\lim_{|z|\to\infty}\left|a_0+a_1z+\ldots z^n\right|=+\infty,$$

tức

$$\lim_{|z|\to\infty}\left|f\left(z\right)\right|=0.$$

Do vậy, tồn tại $R>0$ sao cho

$$\left|f\left(z\right)\right|\leq1\quad\forall z\in\mathbb{C}:\ \left|z\right|>R.$$

Mặt khác ta cũng có $\left|f\left(z\right)\right|$ bị chặn trên $\overline{D\left(0,R\right)}$ nên f là hàm nguyên và bị chặn. Định lý Louiville, ta suy ra f là hàm hằng, chứng tỏ P cũng là đa thức hằng. Điều này dẫn đến kết quả của định lý.

Cách 2. Xét đa thức $P\left(z\right)$ có dạng

$$P\left(z\right)=a_0+a_1z+\ldots a_nz^n,\quad a_n\neq0.$$

Ta biết rằng đa thức $Q\left(z\right)=a_nz^n$ có đúng n nghiệm (tính cả bội) là 0 và sẽ chứng minh P,Q có cùng số nghiệm. Thật vậy, trên đường tròn C_R tâm 0 bán kính $R>0$

đủ lớn, ta có

$$\begin{aligned} |P(z) - Q(z)| &= \left|a_{n-1}z^{n-1} + \ldots a_1 z + a_0\right| \\ &\leq |a_{n-1}| \, |z|^{n-1} + |a_1| \, |z| + |a_0| \\ &\leq |a_n| \, |z|^n \left(\left|\frac{a_{n-1}}{a_n}\right| |z|^{-1} + \cdots + \left|\frac{a_1}{a_n}\right| |z|^{-n+1} + \left|\frac{a_0}{a_n}\right| |z|^{-n} \right) \\ &< |a_n z|^n \end{aligned}$$

với R đủ lớn để

$$\left|\frac{a_{n-1}}{a_n}\right| R^{-1} + \cdots + \left|\frac{a_1}{a_n}\right| R^{-n+1} + \left|\frac{a_0}{a_n}\right| R^{-n} < 1.$$

Khi đó trên các đường tròn bán kính $r > R$, ta đều có số nghiệm của P và Q trong $D(0, r)$ bằng nhau. Vì r có thể lớn tùy ý, ta suy ra P có đúng n nghiệm phức. □

Định lý trên cho ta thấy rằng những công cụ về tích phân phức không chỉ giải quyết được những vấn đề mà nó được nghĩ ra để giải quyết, mà còn dùng được vào nhiều việc khác nữa.

Phần II

Các bài tập tính toán cơ bản

Chương 1

Complex Numbers

Mục lục

1.1 Introduction

Bài 1.1.1 [1.1.1] Xét dãy tăng dần các tập: $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$. Trong mỗi phương trình dưới đây, tập nào nhỏ nhất trong bốn tập trên mà tồn tại nghiệm của phương trình nằm trong đó (Logarit cơ số e)

1. $4x + 3 = 0$

2. $x^2 - x - 1 = 0$

3. $x^2 + x + 1 = 0$

4. $\sin x = 0$

5. $\cos x = 0$

6. $x^2 + 3x + 2 = 0$

7. $\sin(\log(x)) = 0$

8. $z^4 - 16 = 0$

9. $z^4 + 16 = 0$

Giải.

1. $\mathbb{Q}$ $(x = -3/4)$

2. $\mathbb{R}$ $\left(x = \dfrac{(1 \pm \sqrt{5})}{2}\right)$

3. Phương trình vô nghiệm thực nên ta chọn $\mathbb{C}$

4. $\mathbb{Z}$ $(x = 0)$

5. $\mathbb{R}$ $\left(x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right)$

6. $\mathbb{Z}$ $(x = -1,\ x = -2)$

7. $\mathbb{Z}$ $(x = 1)$

8. $\mathbb{Z}$ $(x = \pm 2)$

9. Phương trình vô nghiệm thực nên ta chọn $\mathbb{C}$

Bài 1.1.2 [1.1.10] Một số thập phân vô hạn như $e = 2.71828...$ là một số vô tỉ vì không có phần lặp lại nào ở những chữ số nối tiếp nhau. Tuy nhiên, một số thập phân vô hạn như 23.232323...là một số hữu tỉ. Vì những chữ số được lặp lại một cách tuần hoàn, chúng ta có thể viết số này ở dạng tỉ số của hai số nguyên, như sau:

Trước tiên viết lại : $23(1.010101...) = 23(1 + 10^{-2} + 10^{-4} + 10^{-6} + ..)$

1. Sử dụng kiến thức về cấp số nhân vô hạn: $1/(1 - r) = 1 + r + r^2 + ...$với r là số thỏa $-1 < r < 1$, tính tổng chuỗi $[1 + 10^{-2} + 10^{-4} + 10^{-6} + ...]$
2. Sử dụng kết quả câu trên để chứng minh $23.232323... = 2300/99$. Thử lại bằng máy tính.
3. Tương tự, biểu diễn 376.376376... theo số hữu tỉ
4. Viết 3.04040404...theo số hữu tỉ
5. Chứng minh:$0.9999... = 1$

Giải.

1.

$$\begin{aligned} 1 + 10^{-2} + 10^{-4} + 10^{-6} + \dots &= 1/(1 - 1/100) \\ &= 100/99. \end{aligned}$$

2.

$$23\,(1.010101\dots) = 23 \cdot 100/99 = 2300/99.$$

3.

$$\begin{aligned} 376.376376... &= 376\left(1+10^{-3}+10^{-9}+\ldots\right) \\ &= 376\cdot 1/\left(1-1/1000\right) \\ &= 376\cdot 1000/999 \\ &= 376000/999. \end{aligned}$$

4.

$$\begin{aligned} 3.04040404... &= 3+\left(4\cdot 10^{-2}+4\cdot 10^{-4}+4\cdot 10^{-6}+4\cdot 10^{-8}+\ldots\right) \\ &= 3+4\cdot 10^{-2}\cdot 1/\left(1-10^{-2}\right) \\ &= 3+4/99 = 301/99. \end{aligned}$$

5.

$$\begin{aligned} 0.9999... &= 9\left(10^{-1}+10^{-2}+10^{-3}+\ldots\right). \\ &= 9\cdot 10^{-1}\cdot 1/\left(1-10^{-1}\right) = 1. \end{aligned}$$

Bài 1.1.3 [1.1.12]

1. Chứng minh rằng nếu một số nguyên là chính phương và chẵn thì có căn bậc hai cũng chẵn.

2. Giả sử $\sqrt{2}$ là số hữu tỉ. Khi đó nó phải được biểu diễn dưới dạng $\sqrt{2} = m/n$, với m và n là những số nguyên và m/n là phân số tối giản (m, n không có ước chung). Từ phương trình trên ta có $m^2 = 2n^2$. Giải thích tại sao m là số chẵn

3. Viết lại phương trình trên thành $n^2 = m^2/2$. Tại sao điều này chứng tỏ rằng n là số chẵn?

4. Điều gì mâu thuẫn với giả thiết $\sqrt{2}$ là số hữu tỉ? Mặc dù dễ chứng minh $\sqrt{2}$ là một số vô tỉ, không phải lúc nào cũng đơn giản để chứng tỏ những số khác là vô tỉ. Ví dụ như một chứng minh $2^{\sqrt{2}}$ là vô tỉ không được công bố cho tới tận thế kỉ 20. Chi tiết hơn về vấn đề này có trong "R. Courant and H. Robbins, *What is Mathematic? (Oxford, England: Oxford University Press, 1996), p.107*"

5. Theo trên, vì sao những số sau là vô tỉ: $n+\sqrt{2}, \sqrt{2n^2}, \sqrt{\sqrt{2}}$, với $n>0$ và là số nguyên?

Giải.

1. Đặt a là một số chính phương chẵn. Khi đó, tồn tại số nguyên p để $p^2 = a$. Ta chứng minh rằng p chẵn. Giả sử p lẻ, nghĩa là tồn tại số nguyên k để $p = 2k+1$ thì $a = (2k+1)^2 = 4k^2+4k+1$ lẻ. Vậy nếu a chẵn thì p chẵn.

2. Vì m nguyên nên m^2 là số chính phương. Mà $m^2 = 2n^2$ chẵn nên m chẵn (suy từ câu trên)

3. Vì m chẵn nên tồn tại số nguyên q để $m = 2q$. Suy ra $n^2 = m^2/2 = 2q^2$ là số chẵn. Mà n^2 là số chính phương nên n chẵn

4. Như vậy m, n có ước chung là 2, mâu thuẫn với giả thiết rằng m/n là phân số tối giản. Vậy $\sqrt{2}$ không phải là số hữu tỉ.

5. Giả sử $n+\sqrt{2}$ là số hữu tỉ thì $n+\sqrt{2} = \dfrac{c}{d}$, $c, d \in \mathbb{Z}$. Suy ra $\sqrt{2} = \dfrac{c}{d} - n = \dfrac{c-nd}{d}$ là số hữu tỉ (Vô lí). Tương tự, nếu $\sqrt{2n^2} = \frac{c}{d}$ thì $\sqrt{2} = \frac{c}{nd}$ $c, d \in \mathbb{Z}$ (với $n > 0$) là số hữu tỉ và $\sqrt{\sqrt{2}} = \frac{c}{d}$ $c, d \in \mathbb{Z}$ thì $\sqrt{2} = \frac{c^2}{d^2}$ là số hữu tỉ (Vô lí).

Bài 1.1.4 [1.1.13] Mọi số thực đều rơi vào một trong hai trường hợp: số đại số và số siêu việt. Số đại số thỏa phương trình ở dạng: $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_0 = 0$, $n \geqslant 1$ và hệ số a_k là những số hữu tỉ. Một ví dụ là số vô tỉ $\sqrt{8}$, thỏa phương trình $x^2 - 8 = 0$. Tất cả số nguyên và số hữu tỉ đều là những số đại số. Những số siêu việt vô hạn như π hay e không thỏa phương trình nào. Chúng cũng là những số vô tỉ, nhưng như chúng ta vừa thấy không phải tất cả số vô tỉ đều siêu việt. Để chứng minh e và π không phải là số đại số thì khó và trường hợp của π đã không được giải quyết cho tới cuối thế kỉ 19. Số $2^{\sqrt{2}}$cũng là số siêu việt

1. Biết rằng $1+\sqrt{2}$ là số vô tỉ đại số, tìm một phương trình nhận số này là nghiệm
2. Biết rằng $\sqrt{\sqrt{2}}$ là số vô tỉ đại số, tìm một phương trình nhận số này là nghiệm

Giải.

1. Ta có $1 + \sqrt{2}$ là nghiệm của phương trình $x^2 - 2x - 1 = 0$ do $\left(1+\sqrt{2}\right)^2 - 2\left(1+\sqrt{2}\right) - 1 = 3 + 2\sqrt{2} - 2 - 2\sqrt{2} - 1 = 0$.

2. Ta có $\sqrt{\sqrt{2}}$ là nghiệm của phương trình $x^4 - 2 = 0$ do $\left(\sqrt{\sqrt{2}}\right)^4 - 2 = 2 - 2 = 0$.

Bài 1.1.5 [1.14]

1. Một sinh viên nhìn thấy chữ số đầu tiên của số e là 2.718281828... và kết luận rằng bốn chữ số tiếp theo là 1828. Chứng minh điều này là sai bằng cách tính e với Matlab và sử dụng "long format", hoặc tìm e trong sổ tay.
2. Sử dụng máy tính bỏ túi hiển thị đầy đủ các chữ số, chứng tỏ rằng không có vòng lặp tuần hoàn nào của các chữ số ở trong biểu diễn thập phân của 201/26 nếu chúng ta chỉ sử dụng bảy chữ số đầu tiên. Bạn có thể tìm dạng lặp trong dãy số này không? Bạn có thể sử dụng Matlab.

Giải.

1. $e \approx 2.718281828459045235360287471 35.$

2. Ta có $201/26 \approx 7.730769$. Chúng ta không thấy được dạng lặp của số này nếu chỉ biết bảy chữ số đầu nhưng trong Matlab, ta biết rằng $201/26 = 7.730769(230769)$

Bài 1.1.6 [1.1.15] Trong các bài sau, tính và biểu diễn kết quả ở dạng $a + ib$, với a và b là những số thực.

1. $(-1 + 3i) + (5 - 7i)$
2. $(-1 + 3i)(5 - 7i)$
3. $(3 - 2i)(4 + 3i)(3 + 2i)$
4. $\mathrm{Im}\left[(1 + i)^3\right]$
5. $[\mathrm{Im}\,(1 + i)]^3$
6. $(x + iy)(u - iv)(x - iy)(u + iv)$ với x, y, u, v là những số thực.

Giải.

1. $(-1 + 3i) + (5 - 7i) = 4 - 4i$

2. $(-1 + 3i)(5 - 7i = 16 + 22i$

3. $(3 - 2i)(4 + 3i)(3 + 2i) = 52 + 39i$

4. $\mathrm{Im}\left[(1 + i)^3\right] = 2$

5. $[\mathrm{Im}\,(1+i)]^3 = 2^3 = 8$

6. $(x+iy)(u-iv)(x-iy)(u+iv) = (x^2+y^2)(u^2+v^2)$

Bài 1.1.9 [1.1.25] Nếu $n > 0$ là một số nguyên, bốn giá trị có thể của i^nlà gì? Chứng minh rằng $i^{n+4} = i^n$.Sử dụng kết quả này để $(1-i)^{2005}$ và thử lại bằng Matlab hoặc máy tính bỏ túi.

Giải. Số dư của n khi chia cho 4 có thể có 4 giá trị, xét các trường hợp:

- Nếu $n \equiv 1 \pmod 4$ thì $i^n = i$.
- Nếu $n \equiv 2 \pmod 4$ thì $i^n = -1$.
- Nếu $n \equiv 3 \pmod 4$ thì $i^n = -i$.
- Nếu $n \equiv 0 \pmod 4$ thì $i^n = 1$ và ta có: $i^{n+4} = i^n i^4 = i^n$.

Ta có $(1-i)^2 = -2i$ nên

$$\begin{aligned}(1-i)^{1025} &= \left((1-i)^2\right)^{512}(1-i).\\ &= (-2i)^{512}(1-i)\\ &= (-2)^{512}(1-i)\\ &= 2^{512}(1-i).\end{aligned}$$

Bài 1.1.10 [1.1.29] Trong những phương trình sau x, y là những số thực. Tìm x, y

1. $e^{x^2+y^2} + i2y = e^{-2xy} + i$
2. $\mathrm{Log}(x+y) + iy = 1 + ixy$
3. $(\mathrm{Log}(x) - 1)^2 = 1 + i(\mathrm{Log}(y) - 1)^2$
4. $\cos x + i\sin x = \cosh(y-1) + ixy$

Giải.

1. Ta có

$$\begin{cases} e^{x^2+y^2} &= e^{-2xy} \\ 2y &= 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+2xy+y^2 &= 0 \\ y &= \dfrac{1}{2} \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x &= -y \\ y &= \dfrac{1}{2} \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x &= \dfrac{1}{2} \\ y &= -\dfrac{1}{2} \end{cases}$$

2. Ta có

$$\begin{cases} \mathrm{Log}(x+y) &= 1 \\ y &= xy \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+y &= e \\ y(1-x) &= 0 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \left(\begin{cases} x &= e \\ y &= 0 \end{cases} \vee \begin{cases} x &= 1 \\ y &= e-1 \end{cases} \right).$$

Vậy nghiệm của phương trình là $(x, y) \in \{(e, 0), (1, e-1)\}$.

$a = b$ $\qquad cd \qquad ee$

3. Ta có

$$\begin{cases}(\text{Log}(x)-1)^2 &= 1\\ (\text{Log}(y)-1)^2 &= 0\end{cases} \Leftrightarrow \left(\begin{cases}\text{Log}(x) &= 2\\ \text{Log}(y) &= 1\end{cases} \vee \begin{cases}\text{Log}(x) &= 0\\ \text{Log}(y) &= 1\end{cases}\right)$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{cases}x &= e^2\\ y &= e\end{cases} \vee \begin{cases}x &= 1\\ y &= e\end{cases}\right).$$

Vậy nghiệm là: $(x, y) \in \{(e^2, e),\ (1, e)\}$

5. Ta có

$$\begin{cases}\cos x &= \cosh(y-1)\\ \sin x &= xy\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\cos x &= \frac{e^{y-1}+e^{1-y}}{2}\\ \sin x &= xy\end{cases}$$

Ta lại có:

$$\cos x \leqslant 1 \leqslant \left(\cosh(y-1) = \frac{e^{y-1}+e^{1-y}}{2}\right)$$

(BĐT Cauchy) nên hệ đã cho tương đương với:

$$\begin{cases}\cos x &= 1\\ \sin x &= xy\\ \cosh(y-1) &= 1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x &= k2\pi\\ y &= 1\\ \sin x &= xy\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x &= 0\\ y &= 1\end{cases}$$

Vậy ta hệ phương trình có nghiệm là $(x, y) = (0, 1)$.

1.2 More Properties of Complex Numbers

Bài 1.2.1 [1.2.1] Chúng ta đã chứng minh rằng $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$, với $z_1 = x_1 + iy_1$và $z_2 = x_2 + iy_2$. Chứng minh những điều sau:

1. $\overline{z_1 - z_2} = \overline{z_1} - \overline{z_2}$
2. $\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1}\,\overline{z_2}$
3. $\overline{\left(\frac{1}{z_1}\right)} = \frac{1}{\overline{z_1}}$
4. $\frac{z_1}{z_2} = z_1 \frac{1}{z_2}$
5. $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$
6. $\mathrm{Re}(z_1 z_2) = \mathrm{Re}(\overline{z_1}\,\overline{z_2})$
7. $\mathrm{Im}(z_1 z_2) = -\mathrm{Im}(\overline{z_1}\,\overline{z_2})$

Giải.

1.

$$\begin{aligned} \overline{z_1 - z_2} &= \overline{(x_1 - x_2) + i\,(y_1 - y_2)} = (x_1 - x_2) - i\,(y_1 - y_2) \\ &= (x_1 - iy_1) - (x_2 - iy_2) = \overline{z_1} - \overline{z_2} \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned} \overline{z_1 z_2} &= \overline{(x_1x_2 - y_1y_2) + i\,(x_1y_2 + y_1x_2)} \\ &= (x_1x_2 - y_1y_2) - i\,(x_1y_2 + y_1x_2) \\ &= (x_1 - iy_1)\,(x_2 - iy_2) = \overline{z_1}.\overline{z_2} \end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned}
\overline{\left(\frac{1}{z_1}\right)} &= \overline{\left(\frac{x_1 - iy_1}{x_1^2 + y_1^2}\right)} = \overline{\left(\frac{x_1}{x_1^2+y_1^2}\right) - i\left(\frac{y_1}{x_1^2+y_1^2}\right)} \\
&= \left(\frac{x_1}{x_1^2+y_1^2}\right) + i\left(\frac{y_1}{x_1^2+y_1^2}\right) = \frac{x_1 + iy_1}{x_1^2+y_1^2} \\
&= \frac{1}{x_1 - iy_1} = \frac{1}{\overline{z_1}}
\end{aligned}$$

4.

$$\begin{aligned}
\frac{z_1}{z_2} &= \frac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2} = \frac{(x_1+iy_1)(x_2-iy_2)}{(x_2+iy_2)(x_2-iy_2)} \\
&= \frac{(x_1x_2 + y_1y_2) + (x_2y_1 - x_1y_2)i}{x_2^2 + y_2^2} \\
&= (x_1 + iy_1)\,\frac{x_2 - iy_2}{x_2^2 + y_2^2} = z_1\frac{1}{z_2}
\end{aligned}$$

5.

$$\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \overline{(z_1)\left(\frac{1}{z_2}\right)} = \overline{z_1}\,\overline{\left(\frac{1}{z_2}\right)} = \overline{z_1}\,\frac{1}{\overline{z_2}} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$$

(Áp dụng 2 câu trên)

6.

$$\begin{aligned}
\mathrm{Re}(z_1z_2) &= \mathrm{Re}\left((x_1x_2 - y_1y_2) + i\,(x_1y_2 + y_1x_2)\right) \\
&= x_1x_2 - y_1y_2 = \mathrm{Re}(\overline{z_1}\,\overline{z_2})
\end{aligned}$$

7.

$$\begin{aligned}
\mathrm{Im}(z_1z_2) &= \mathrm{Im}\left((x_1x_2 - y_1y_2) + i\,(x_1y_2 + y_1x_2)\right) \\
&= x_1y_2 + y_1x_2 = -\mathrm{Im}(\overline{z_1}\,\overline{z_2})
\end{aligned}$$

Bài 1.2.2 [1.2.8] Tính những giá trị sau và viết về dạng $a + ib$ với a, b là những số thực.

1. $\left(\frac{4-4i}{2+2i}\right)^7$
2. $\left(\frac{4-4i}{2+2i}\right)^7 + \left(\frac{4+4i}{2-2i}\right)^7$

Giải.

1.

$$\begin{aligned}\left(\frac{4-4i}{2+2i}\right)^7 &= 2^7\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^7 = 2^7\left(\frac{(1-i)^2}{2}\right)^7\\ &= (1-i)^{14} = (-2i)^7 = -128i\end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}\left(\frac{4-4i}{2+2i}\right)^7 + \left(\frac{4+4i}{2-2i}\right)^7 &= \left(2\frac{1-i}{1+i}\right)^7 + \left(2\frac{1+i}{1-i}\right)^7\\ &= (1-i)^{14} + (1+i)^{14}\\ &= (-2i)^7 + (2i)^7 = 0\end{aligned}$$

Bài 1.2.3 [1.2.16] Cho $z_1, z_{2,} z_3$là số phức, phương trình nào sau đây là đúng?

1. $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2 z_3}\right)} = \overline{z_1}\left(\frac{1}{\overline{z_2}.z_3}\right)$
2. $\overline{z_1\overline{z_2}z_3} = \overline{z_1}z_2\overline{z_3}$
3. $\overline{i(z_1+z_2+z_3)} = i\left(\overline{z_1}+\overline{z_2}+\overline{z_3}\right)$

4. $\mathrm{Re}\,(z_1\overline{z_2}z_3) = \mathrm{Re}\,(\overline{z_1}z_2\overline{z_3})$
   $\mathrm{Im}\,(z_1\overline{z_2}z_3) = \mathrm{Im}\,(\overline{z_1}z_2\overline{z_3})$
   $\mathrm{Re}\,(z_1\overline{z_2}z_3) = \mathrm{Im}\,(i\overline{z_1}z_2\overline{z_3})$

Giải.

1. Với $z_1 = z_3 = 1$ và $z_2 = i$ thì ta có

$$\overline{\left(\frac{z_1}{z_2 z_3}\right)} = \overline{\left(\frac{1}{i.1}\right)} = i \neq -i = 1\left(\frac{1}{\bar{i}.1}\right) = \overline{z_1}\left(\frac{1}{\overline{z_2}.z_3}\right)$$

nên

$$\overline{\left(\frac{z_1}{z_2 z_3}\right)} \neq \overline{z_1}\left(\frac{1}{\overline{z_2}.z_3}\right).$$

2. Ta có

$$\overline{z_1\overline{z_2}z_3} = \overline{z_1}\,\overline{\overline{z_2}}\,\overline{z_3} = \overline{z_1}.z_2.\overline{z_3}$$

3. Ta có

$$\begin{aligned}\overline{i(z_1+z_2+z_3)} &= -i\overline{(z_1+z_2+z_3)}\\ &= -i\left(\overline{z_1}+\overline{z_2}+\overline{z_3}\right) \neq i\left(\overline{z_1}+\overline{z_2}+\overline{z_3}\right).\end{aligned}$$

4. Đặt $z := z_1\overline{z_2}z_3 = x + iy,\ x, y \in \mathbb{R}$ thì $\overline{z} = \overline{z_1}z_2\overline{z_3}$. Ta có

$$\begin{aligned}\mathrm{Re}\,(z_1\overline{z_2}z_3) &= \mathrm{Re}(z) = \mathrm{Re}\,(x+iy) = x = \mathrm{Re}(x-iy)\\ &= \mathrm{Re}(\overline{z}) = \mathrm{Re}\,(\overline{z_1}z_2\overline{z_3})\end{aligned}$$

và

$$\begin{aligned}\operatorname{Re}(z_1\overline{z_2}z_3) &= \operatorname{Re}(z) = x = \operatorname{Im}(y+ix) = \operatorname{Im}(i(x-iy)) \\ &= \operatorname{Im}(i\overline{z}) = \operatorname{Im}(i\overline{z_1}z_2\overline{z_3}).\end{aligned}$$

Với $z_1 = z_3 = 1$ và $z_2 = i$, ta có $z = -i$ và $\overline{z} = i$, ta có:

$$\operatorname{Im}(z_1\overline{z_2}z_3) = \operatorname{Im}(-i) = -1 \neq 1 = \operatorname{Im}(i) = \operatorname{Im}(\overline{z_1}z_2\overline{z_3})$$

nên

$$\operatorname{Im}(z_1\overline{z_2}z_3) \neq \operatorname{Im}(\overline{z_1}z_2\overline{z_3}).$$

Bài 1.2.4 [1.2.22] Xét trường hợp $(3^2+5^2)(2^2+7^2) = (p^2+q^2)$. Ẩn p, q là những số không âm. Trường hợp này có hai bộ nghiệm: $p = 29$, $q = 31$ và $p = 41$, $q = 11$. Ta thấy được ở đây một lời giải tổng quát: cho k, l, m, n là những số không âm, ta sẽ tìm hai bộ nghiệm nguyên không âm p và q mà: $(p^2+q^2) = (k^2+l^2)(m^2+n^2)$. Không dễ thấy rằng sẽ có nghiệm nguyên, nhưng số phức sẽ chứng minh cho ta thấy điều đó.

1. Phân tích thành nhân tử ta có: $(p+iq)(p-iq) = (k+il)(k-il)(m+in)(m-in)$. Giải thích tại sao nếu $(p+iq) = (k+il)(m+in)$ thì $(p-iq) = (k-il)(m-in)$. Chứng minh rằng ta có thể lấy $p = \mid km - nl \mid$ và $q = lm + kn$ là nghiệm

2. Chứng minh rằng cũng có thể lấy $p = km + ln$ và $q = \mid lm - kn \mid$ làm nghiệm

3. Giải phương trình sau để tìm hai bộ nghiệm $(p, q) : (p^2+q^2) = (122)(53)$

Giải.

1. Ta có

$$\begin{aligned} (p+iq) &= (k+il)(m+in) \\ \Leftrightarrow \overline{(p+iq)} &= \overline{(k+il)(m+in)} \\ \Leftrightarrow (p-iq) &= (k-il)(m-in). \end{aligned}$$

Vì vậy nếu

$$(p+iq) = (k+il)(m+in)$$

thì phương trình

$$\left(p^2+q^2\right) = \left(k^2+l^2\right)\left(m^2+n^2\right)$$

được thỏa. Tương tự ta có nếu

$$(p+iq) = (l+ik)(n+im)$$

thì

$$(p-iq) = (l-ik)(n-im)$$

nên phương trình

$$\left(p^2+q^2\right) = \left(k^2+l^2\right)\left(m^2+n^2\right)$$

cũng được thỏa. Trong hai trường hợp trên thì ta có thể chọn $p = \pm(km-nl)$ và $q = lm+kn$ là nghiệm của phương trình nên ta suy ra điều phải chứng minh.

2. Ta có

$$\begin{aligned} (p+iq) &= (k+il)(m-in) \\ \Leftrightarrow \overline{(p+iq)} &= \overline{(k+il)(m-in)} \\ \Leftrightarrow (p-iq) &= (k-il)(m+in). \end{aligned}$$

Vì vậy nếu
$$(p + iq) = (k + il)(m - in)$$
thì phương trình
$$\left(p^2 + q^2\right) = \left(k^2 + l^2\right)\left(m^2 + n^2\right)$$
được thỏa. Tương tự ta có nếu
$$(p + iq) = (l + ik)(n - im)$$
thì
$$(p - iq) = (l - ik)(n + im)$$
nên phương trình
$$\left(p^2 + q^2\right) = \left(k^2 + l^2\right)\left(m^2 + n^2\right)$$
cũng được thỏa. Trong hai trường hợp trên ta có thể chọn $p = km + ln$ và $q = \pm(lm - kn)$ là nghiệm của phương trình nên ta suy ra điều phải chứng minh.

3.
$$\left(p^2 + q^2\right) = (122)(53) \Leftrightarrow \left(p^2 + q^2\right) = \left(11^2 + 1^2\right)\left(7^2 + 2^2\right)$$
Tương tự như trên ta có thể suy ra hai bộ nghiệm của phương trình là $(p, q) = (75, 29)$ hoặc $(p, q) = (79, 15)$.

Bài 1.2.5 [1.2.23] Theo Hamilton, ta xét số phức như là một cặp số thực được xếp. Ta muốn có một định nghĩa của tỉ số $\dfrac{(c,d)}{(a,b)}$. Đặt $\dfrac{(c,d)}{(a,b)} = \dfrac{e}{f}$, *với* e và f là hai số thực xác định. Giả sử $(a, b) \neq (0, 0)$. Nếu định nghĩa hợp lí thì $(c, d) = (a, b) \cdot (e, f)$

1. Thực hiện phép nhân trên bằng cách dùng luật nhân cho cặp số.

2. Lập phương trình tương ứng giữa các thành phần (phần thực và phần ảo) ở hai phía của phương trình ở phần trên

3. Ta thu được một hệ phương trình . Giải và tìm e và f theo a, b, c, d. So sánh kết quả của lí thuyết đã học.

Giải.

1. Ứng dụng luật nhân cho cặp số phức, ta có:

$$(c, d) = (a, b) \cdot (e, f) \Leftrightarrow (c, d) = (ae - bf, af + be)$$

2. Theo câu trên, ta có:

$$\begin{cases} ae - bf & = c \\ be + af & = d \end{cases}$$

3. Ta có:

$$\Delta = \det \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} = a^2 + b^2,$$

$$\Delta_e = \det \begin{pmatrix} c & -b \\ d & a \end{pmatrix} = ac + bd,$$

$$\Delta_f = \det \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = ad - bc.$$

Vậy

$$e = \frac{\Delta_e}{\Delta} = \frac{ac + bd}{a^2 + b^2},$$
$$f = \frac{\Delta_f}{\Delta} = \frac{ad - bc}{a^2 + b^2}.$$

Kết quả đúng như phương trình

$$\frac{c+id}{a+ib} = \frac{ac+bd}{a^2+b^2} + i\frac{ad-bc}{a^2+b^2}.$$

.

Bài 1.2.6 [1.2.24] Trong biểu diễn Hamilton, hai số phức (a, b) và (c, d) bằng nhau khi và chỉ khi $a = c$ và $b = d$. Đây là điều kiện cần và đủ. Cho $\frac{p}{q}$ và $\frac{r}{s}$ với tử và mẫu số là những số phức. Tìm điều kiện cần và đủ để hai tỉ số này bằng nhau.

Giải. Ta có

$$\begin{aligned} \frac{p}{q} = \frac{r}{s} \Leftrightarrow \frac{p\overline{q}}{\mid q \mid^2} = \frac{r\overline{s}}{\mid s \mid^2} \quad &\Leftrightarrow \quad \mid s \mid^2 (p\overline{q}) = \mid q \mid^2 (r\overline{s}) \Leftrightarrow \overline{s}.\overline{q}\,(ps - qr) = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad ps = qr \ (q, s \neq 0) \end{aligned}$$

Vậy ta có điều kiện cần và đủ để hai tỉ số bằng nhau là $ps = qr$.

1.3 Complex Numbers and the Argand Plane

Bài 1.3.1 [1.3.1] Tìm modulus của các số phức sau:

1. $(2-3i)^2\,(3+3i)^3$
2. $\dfrac{(1+i)^5}{(2+3i)^5}$
3. $\dfrac{(1-i)^n}{(2+2i)^n}$, $n > 0$ là số nguyên
4. $\dfrac{1}{1-i} + \dfrac{1}{1+i} + \dfrac{5}{1+2i}$

Giải.

1.

$$\left|(2-3i)^2(3+3i)^3\right| = |918+378i| = 702\sqrt{2}$$

2.

$$\begin{aligned}\left|\frac{(1+i)^5}{(2+3i)^5}\right| &= \left|\left(\frac{1+i}{2+3i}\right)^5\right| = \left|\left(\frac{5-i}{13}\right)^5\right| \\ &= \left|\left(\frac{1900-2876i}{13^5}\right)\right| \\ &= \frac{1}{13^5}\sqrt{1900^2+2876^2} = \frac{4\sqrt{26}}{2197}\end{aligned}$$

3.

$$\left|\frac{(1-i)^n}{(2+2i)^n}\right| = \left|\left(-\frac{1}{2}i\right)^n\right| = \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

4.

$$\left|\frac{1}{1-i}+\frac{1}{1+i}+\frac{5}{1+2i}\right| = |2-2i| = 2\sqrt{2}$$

Bài 1.3.2 [**1.3.10**]

1. Tìm hai số phức là liên hợp của nhau có độ dài của tổng là a và tổng các độ dài là $\frac{1}{a}$ với $0 < a < 1$

2. Tìm hai số phức có tích là 2 và hiệu là i

Giải.

1. Đặt hai số phức đó là $z_1 = x + iy$ và $z_2 = x - iy,\ x, y \in \mathbb{R}$.Ta có

$$\begin{cases} 2x & = a \\ 2\sqrt{x^2+y^2} & = \dfrac{1}{a} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x & = \dfrac{a}{2} \\ y & = \pm\sqrt{\dfrac{1-a^4}{4a^2}} \end{cases}$$

Vậy hai số phức cần tìm là

$$z_1 = \frac{a}{2} + \sqrt{\frac{1-a^4}{4a^2}}$$

và

$$z_2 = \frac{a}{2} - \sqrt{\frac{1-a^4}{4a^2}}.$$

2. Đặt hai số phức đó là z_1 và z_2. Ta có :

$$\begin{cases} z_2 & = z_1 + i \\ z_1 z_2 & = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z_2 & = z_1 + i \\ z_1(z_1+i) & = 2 \end{cases} \tag{1}$$

Xét phương trình thứ hai của (1), ta có

$$\begin{aligned} z_1^2 + iz_1 - 2 = 0 &\Leftrightarrow \left(z_1 - \frac{-i+\sqrt{7}}{2}\right)\left(z_1 - \frac{-i-\sqrt{7}}{2}\right) = 0 \\ &\Leftrightarrow \left(z_1 = \frac{-i+\sqrt{7}}{2}\right) \vee \left(z_1 = \frac{-i-\sqrt{7}}{2}\right) \end{aligned}$$

nên hệ phương trình trở thành

$$\begin{aligned} (1) &\Leftrightarrow \left(\begin{cases} z_2 = \frac{-i+\sqrt{7}}{2} + i \\ z_1 = \frac{-i+\sqrt{7}}{2} \end{cases}\right) \vee \left(\begin{cases} z_2 = \frac{-i-\sqrt{7}}{2} + i \\ z_1 = \frac{-i-\sqrt{7}}{2} \end{cases}\right) \\ &\Leftrightarrow \left(\begin{cases} z_2 = \frac{i+\sqrt{7}}{2} \\ z_1 = \frac{-i+\sqrt{7}}{2} \end{cases}\right) \vee \left(\begin{cases} z_2 = \frac{i-\sqrt{7}}{2} \\ z_1 = \frac{-i-\sqrt{7}}{2} \end{cases}\right). \end{aligned}$$

Bài 1.3.3 [1.3.13] Những vector sau biểu diễn số phức. Biểu diễn những số này ở dạng $a + ib$

1. Vector có điểm cuối ở $(1, 2)$, có độ dài là 5 và tạo một góc $30°$với phần dương của trục x.

2. Vector bắt đầu ở gốc tọa độ và vuông góc với đường thẳng $x + 2y = 6$ tại điểm cuối

3. Vector có chiều dài $\frac{3}{2}$ bắt đầu ở gốc tọa độ và điểm cuối trong góc phần tư thứ nhất, trên đường tròn $(x-1)^2 + y^2 = 1$

Giải. Đặt số phức cần tìm là $z = x + iy$, $x, y \in \mathbb{R}$

1. Điểm gốc của vector nằm trên đường tròn

$$(x-1)^2 + (y-2)^2 = 5^2$$

và vector này nằm trên đường thẳng

$$y - 2 = \tan(30°)\,(\mathrm{x} - 1) \Leftrightarrow \mathrm{y} - 2 = \frac{1}{\sqrt{3}}(\mathrm{x} - 1).$$

Tọa độ điểm gốc thỏa hệ:

$$\begin{cases} (x-1)^2 + (y-2)^2 & = 5^2 \\ y - 2 & = \frac{1}{\sqrt{3}}(x-1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)^2 + \frac{1}{3}(x-1)^2 & = 5^2 \\ y - 2 & = \frac{1}{\sqrt{3}}(x-1) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)^2 & = 25 \cdot \frac{3}{4} \\ y - 2 & = \frac{1}{\sqrt{3}}(x-1) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-1 &= \pm\frac{5\sqrt{3}}{2} \\ y-2 &= \frac{1}{\sqrt{3}}(x-1) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{cases} x-1 = & \frac{5\sqrt{3}}{2} \\ y-2 = & \frac{5}{2} \end{cases} \vee \begin{cases} x-1 = -\frac{5\sqrt{3}}{2} \\ y-2 = -\frac{5}{2} \end{cases} \right)$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{cases} x = 1+\frac{5\sqrt{3}}{2} \\ y = \frac{9}{2} \end{cases} \vee \begin{cases} x = 1-\frac{5\sqrt{3}}{2} \\ y = -\frac{1}{2} \end{cases} \right).$$

Vì vector cần tìm tạo góc 30° với chiều dương của trục x nên ta lấy điểm cuối là

$$\left(1-\frac{5\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right).$$

Vậy

$$z = 1-\frac{5\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i.$$

2. Đường thẳng đi qua gốc tọa độ và vuông góc với đường thẳng $x+2y=6$ là $2x-y=0$. Giao điểm của chúng:

$$\begin{cases} x+2y &= 6 \\ 2x-y &= 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x &= \dfrac{6}{5} \\ y &= \dfrac{12}{5} \end{cases}$$

là điểm cuối của vector z có điểm đầu là $(0,0)$. Vậy $z = (6/5, 12/5)$

3. Tọa độ của vector (cũng là tọa độ điểm cuối) thỏa

$$\begin{cases} \sqrt{x^2+y^2} &= \dfrac{3}{2} \\ (x-1)^2+y^2 &= 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2 &= \dfrac{9}{4} \\ x^2-2x+y^2+1 &= 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2 &= \dfrac{9}{4} \\ 2x &= \dfrac{9}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x &= \dfrac{9}{8} \\ y &= \pm\sqrt{\frac{9}{4}-\left(\frac{9}{8}\right)^2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x &= \frac{9}{8} \\ y &= \pm\frac{3\sqrt{7}}{8} \end{cases}.$$

Nhưng điểm cuối nằm trong góc phần tư thứ nhất nên $x\,y > 0$, từ đó

$$z = \left(\frac{9}{8}, \frac{3\sqrt{7}}{8}\right).$$

Vậy

$$z = \frac{9}{8} + \frac{3\sqrt{7}}{8}i.$$

Bài 1.3.4 [1.3.18] Tìm argument chính (Argument) của những số sau theo radians.

1. $-4\text{cis}\,(73.7\pi)$
2. $3\text{cis}\,(1.1\pi) \times 4\text{cis}\,(1.2\pi)$
3. $\dfrac{3\angle 1.57}{3\angle -1.57}$

Giải. Gọi Argument của các số là θ thì $-\pi < \theta \le \pi$

1. Ta có:

$$-4\text{cis}\,(73.7\pi) = 4\text{cis}\,(73.7\pi + \pi).$$

Suy ra

$$-\pi \quad < \quad \theta = 73.7\pi + \pi + k2\pi \le \pi,\ k \in \mathbb{Z}$$

Do đó $k = -37$. Vậy

$$\theta = 73.7\pi + \pi - 37 \cdot 2\pi = 0.7\pi.$$

2. Ta có:

$$3\text{cis}\,(1.1\pi) \times 4\text{cis}\,(1.2\pi) = 12\text{cis}\,(2.3\pi)\,.$$

Suy ra

$$-\pi \quad < \quad \theta = 2.3\pi + k2\pi \leq \pi,\ k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow k = -1.$$

Vậy

$$\theta = 2.3\pi - 2\pi = 0.3\pi.$$

3. Ta có:

$$\arg\left(\frac{3\angle 1.57}{3\angle -1.57}\right) = \angle\,(2 \cdot 1.57) = \angle 3.14.$$

Suy ra

$$-\pi \quad < \quad \theta = 3.14 + k2\pi \leq \pi,\ k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow k = 0.$$

Vậy $\theta = 3.14 \simeq \pi$.

Bài 1.3.6 [1.3.29] Chuyển những biểu diễn sau về dạng $r\text{cis}\,(\theta)$ hoặc $r\angle\theta$. Biểu diễn giá trị chính của θ theo radians và đưa ra tất cả những giá trị có thể của θ

1. $(-1 - i)\left(-\sqrt{3} + i\right)^3$

2. $(-4 + 3i)^2$

Giải.

1. Do

$$
\begin{aligned}
(-1-i)\left(-\sqrt{3}+i\right)^3 &= (1+i)\left(\sqrt{3}-i\right)^3 = \left(\sqrt{2}\text{cis}\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)\left(2\text{cis}\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right)^3 \\
&= \left(\sqrt{2}\cdot 2^3\right)\text{cis}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{2}\right) \\
&= 8\sqrt{2}\text{cis}\left(-\frac{\pi}{4}\right)
\end{aligned}
$$

nên argument chính là $\theta = -\pi/4$ và tất cả các argument là:

$$-\frac{\pi}{4} + k2\pi,\ k \in \mathbb{Z}$$

2. Do

$$(-4+3i)^2 = (4-3i)^2 = (5\text{cis}\,(\alpha))^2 = 25\text{cis}\left(\alpha^2\right)$$

với

$$\alpha = -\arccos\left(\frac{4}{5}\right) \simeq -0.64$$

nên argument chính là

$$\theta = \left(-\arccos\left(\frac{4}{5}\right)\right)^2 = \left(\arccos\left(\frac{4}{5}\right)\right)^2$$

và tất cả các argument là:

$$\left(\arccos\left(\frac{4}{5}\right)\right)^2 + k2\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$$

Bài 1.3.7 [1.33] Trong MATLAB, hàm `angle` của một số phức z sẽ cho ra giá trị chính của $\arg(z)$. Cho $z_1 = -1+i,\ z_2 = \sqrt{3}+i,\ z_3 = 1+i\sqrt{3}$. Thử bằng MATLAB rằng: `angle` (z_1z_2) = `angle` (z_1) + `angle` (z_2) nhưng `angle` $(z_1z_3) \neq$ `angle` (z_1) + `angle` (z_3). Giải thích sự khác biệt này.

Giải. Ta có:

$$\mathrm{Arg}\,(-1+\mathrm{i}) = \frac{3\pi}{4},\ \mathrm{Arg}\left(\sqrt{3}+\mathrm{i}\right) = \frac{\pi}{6},\ \mathrm{Arg}\left(1+\mathrm{i}\sqrt{3}\right) = \frac{\pi}{3}$$

nên suy ra

$$\texttt{angle}\,(z_1) + \texttt{angle}\,(z_2) = \frac{3\pi}{4} + \frac{\pi}{6} = \frac{11\pi}{12} = \texttt{angle}\,(z_1 z_2)$$

và

$$\texttt{angle}\,(z_1) + \texttt{angle}\,(z_3) = \frac{3\pi}{4} + \frac{\pi}{3} = \frac{13\pi}{12}$$

Vậy

$$\mathrm{Arg}\,(z_1 z_3) = \texttt{angle}\,(z_1 z_3) = \frac{\pi}{12} \neq \texttt{angle}\,(z_1) + \texttt{angle}\,(z_3).$$

Sự khác biệt là do khi ta thực hiện phép toán cộng arg của 2 số phức thì số đó có thể không thuộc $[-\pi, \pi]$.

Bài 1.3.8 [1.34] Giản ước những biểu diễn sau về dạng $r\mathrm{cis}\theta$hoặc $r\angle\theta$, chỉ đưa ra argument chính

1. $\dfrac{(-1-i)\,\mathrm{cis}\left(\dfrac{\pi}{4}\right)}{\left(\sqrt{3}+i\right)^2}$

2. $\dfrac{\left(\mathrm{cis}\left(\dfrac{2\pi}{3}\right)\right)^3}{\left(\mathrm{cis}\left(\dfrac{-2\pi}{3}\right)\right)^2}$

Giải.

1.

$$\frac{(-1-i)\,\text{cis}\left(\frac{\pi}{4}\right)}{\left(\sqrt{3}+i\right)^2} = \frac{\left(\sqrt{2}\text{cis}\left(\frac{-3\pi}{4}\right)\right)\text{cis}\left(\frac{\pi}{4}\right)}{\left(2\text{cis}\left(\frac{\pi}{6}\right)\right)^2} = \frac{\sqrt{2}\text{cis}\left(\frac{-\pi}{2}\right)}{4\text{cis}\left(\frac{\pi}{3}\right)}$$
$$= \frac{\sqrt{2}}{4}\text{cis}\left(-\frac{5\pi}{6}\right)$$

2.

$$\frac{\left(\text{cis}\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right)^3}{\left(\text{cis}\left(\frac{-2\pi}{3}\right)\right)^2} = \frac{\text{cis}\,(2\pi)}{\text{cis}\left(-\frac{4\pi}{3}\right)} = \text{cis}\left(\frac{10\pi}{3}\right) = \text{cis}\left(-\frac{2\pi}{3}\right)$$

Bài 1.3.9. [1.3.37]

1. Trong bất đẳng thức tam giác $|z_1+z_2| \leq |z_1|+|z_2|$, z_1 và z_2 phải thỏa điều kiện gì để dấu bằng xảy ra?

2. Bằng cách thay z_2 là $-z_2$, chứng minh rằng: $|z_1-z_2| \leq |z_1|+|z_2|$. Giải thích điều này theo 3 cạnh của một tam giác. $z_1,\ z_2$ phải có quan hệ như thế nào để dấu bằng có thể xảy ra?

Giải.

1. Để dấu " = " xảy ra thì hai vector biểu diễn z_1 và z_2 phải cùng chiều với nhau, suy ra

$$\arg(z_1)-\arg(z_2) = k2\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$$

2. Thay z_2 bằng $-z_2$, ta có

$$|z_1+(-z_2)| \leq |z_1|+|-z_2| \Leftrightarrow |z_1-z_2| \leq |z_1|+|z_2|\,.$$

Để dấu " = " xảy ra, hai vector biểu diễn z_1 và z_2 phải ngược chiều nhau, suy ra

$$\arg(z_1) - \arg(z_2) = (2k+1)\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$$

.

Bài 1.3.13. [1.3.42] Tính $\dfrac{1+i}{\sqrt{3}+i}$ bằng cách sử dụng tọa độ cực cho các số phức và kết hợp chứng minh rằng $\arctan\dfrac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1} = \dfrac{\pi}{12}$

Giải. Ta có

$$\begin{aligned}
\frac{1+i}{\sqrt{3}+i} &= \frac{\sqrt{2}\text{cis}\left(\frac{\pi}{4}\right)}{2\text{cis}\left(\frac{\pi}{6}\right)} = \frac{1}{\sqrt{2}}\text{cis}\left(\frac{\pi}{12}\right) \\
&= \frac{(1+i)\left(\sqrt{3}-i\right)}{4} = \frac{1}{4}\left(\left(\sqrt{3}+1\right) + \left(\sqrt{3}-1\right)i\right)
\end{aligned}$$

Suy ra

$$\tan\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1} \text{ nên } \arctan\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1} = \frac{\pi}{12}.$$

Bài 1.3.14 [1.3.43]

1. Xét tích của $(1+ia)$ và $(1+ib)$, và argument của mỗi nhân tử, chứng minh rằng:

$$\arctan(\mathrm{a}) + \arctan(\mathrm{b}) = \arctan\left(\frac{\mathrm{a}+\mathrm{b}}{1-\mathrm{ab}}\right), \text{Với } a, b \text{là những số thực.}$$

2. Chứng minh rằng $\pi = 4\left(\arctan\left(\frac{1}{2}\right) + \arctan\left(\frac{1}{3}\right)\right)$

3. Mở rộng kĩ thuật ở câu 1. để tìm biểu diễn của $\arctan(\mathrm{a}) + \arctan(\mathrm{b}) + \arctan(\mathrm{c})$

Giải.

1. Ta có:

$$(1 + ia)(1 + ib) = (1 - ab) + (a + b)i$$

và

$$\arctan(a) = \arg(1 + ia), \ \arctan(b) = \arg(1 + ib),$$
$$\arctan\left(\frac{a+b}{1-ab}\right) = \arg((1 - ab) + (a + b)i).$$

Mặt khác

$$\arg(1 + ia) + \arg(1 + ib) = \arg((1 - ab) + (a + b)i)$$

$$\Leftrightarrow \arctan(a) + \arctan(b) = \arctan\left(\frac{a+b}{1-ab}\right).$$

Ta suy ra điều phải chứng minh. Ở đây ta cũng có thể hiểu dấu bằng ở đây là 2 tập hợp bằng nhau do hàm arctan trong $\mathbb{R}$ là hàm đa trị.

2. Ta có

$$\arctan\left(\frac{1}{2}\right) + \arctan\left(\frac{1}{3}\right) = \arctan\left(\frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}}\right) = \arctan(1) = \frac{\pi}{4}.$$

Suy ra

$$\pi = 4\left(\arctan\left(\frac{1}{2}\right) + \arctan\left(\frac{1}{3}\right)\right).$$

3. Ta có

$$\begin{aligned}
\arctan(a) + \arctan(b) + \arctan(c) &= \arctan\left(\frac{a+b}{1-ab}\right) + \arctan(c) \\
&= \arctan\left(\frac{\dfrac{a+b}{1-ab} + c}{1 - \dfrac{a+b}{1-ab}\cdot c}\right) \\
&= \arctan\left(\frac{a+b+c}{1-ab-bc-ca}\right).
\end{aligned}$$

Bài 1.3.15 [1.3.44]

1. Chứng minh bất đẳng thức $|z_1+z_2|^2 \le |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2|z_1||z_2|$bằng phương pháp đại số.

2. Chú ý rằng $|z_1|^2 + |z_2|^2 + 2|z_1||z_2| = (|z_1|+|z_2|)^2$. Chứng tỏ rằng bất đẳng thức trên sẽ dẫn tới bất đẳng thức tam giác $|z_1+z_2| \le |z_1| + |z_2|$

Giải.

1. Ta có:

$$\begin{aligned}
|z_1+z_2|^2 &= (z_1+z_2)(\overline{z_1}+\overline{z_2}) \\
&= |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2\mathrm{Re}(z_1\overline{z_2}) \\
&\le |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2|z_1\overline{z_2}| \\
&= |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2|z_1||z_2|
\end{aligned}$$

2. Áp dụng kết quả ở câu (1), ta có

$$\begin{aligned} |z_1+z_2|^2 &\le |z_1|^2+|z_2|^2+2|z_1||z_2| \\ \Leftrightarrow |z_1+z_2|^2 &\le (|z_1|+|z_2|)^2 \\ \Leftrightarrow |z_1+z_2| &\le |z_1|+|z_2|. \end{aligned}$$

Từ đó ta có điều phải chứng minh.

Bài 1.3.16 [1.3.45]

1. Bắt đầu với tích $(z_1-z_2)\left(\overline{z_1-z_2}\right)$, chứng minh rằng

$$|z_1-z_2|^2 = |z_1|^2+|z_2|^2-2\mathrm{Re}\left(z_1\overline{z_2}\right)$$

2. Nhắc lại về định lý cosines trong lượng giác sơ cấp: $a^2=b^2+c^2-2bc\cos\alpha$. Chứng minh định lý này có thể thu được từ đẳng thức đã suy ra ở phần trên

Giải.

1.

$$\begin{aligned} |z_1-z_2|^2 &= (z_1-z_2)\left(\overline{z_1-z_2}\right) \\ &= |z_1|^2+|z_2|^2-2\left(z_1\overline{z_2}+z_2\overline{z_1}\right) \\ &= |z_1|^2+|z_2|^2-2\mathrm{Re}\left(z_1\overline{z_2}\right). \end{aligned}$$

2. Gọi a, b, c lần lượt là độ dài của ba vector biểu diễn z_1-z_2, z_1, z_2 thì chúng là độ dài ba cạnh của một tam giác mà góc giữa b với c là α. Đặt $z_1=x_1+iy_1$, $z_2=x_2+iy_2$ $(x_1,x_2,y_1,y_2\in\mathbb{R})$. Suy ra $\mathrm{Re}\left(z_1\overline{z_2}\right)=x_1x_2+y_1y_2$, đó chính là tích vô hướng giữa hai vector biểu diễn z_1 và z_2, tức là $\mathrm{Re}\left(z_1\overline{z_2}\right)=bc\cos\alpha$. Từ điều đó, kết hợp với phương trình ở phần 1. ta có $a^2=b^2+c^2-2bc\cos\alpha$.

1.4 Integer and Fractional Powers of Complex Numbers

Bài 1.4.1 [1.4.1] Biểu diễn những biểu thức sau về dạng $a+ib$ và dạng cực $r\angle\theta$, với góc nhận giá trị chính.

1. $(1+i)^3\left(\sqrt{3}+i\right)^3$
2. $(3-4i)^6$
3. $\left(1-i\sqrt{3}\right)^{-7}$

Giải.

1.

$$\begin{aligned}(1+i)^3\left(\sqrt{3}+i\right)^3 &= \left(\sqrt{2}\mathrm{cis}\left(\frac{\pi}{4}\right)2\mathrm{cis}\left(\frac{\pi}{6}\right)\right)^3 = 16\sqrt{2}\mathrm{cis}\left(\frac{15\pi}{12}\right)\\ &= 16\sqrt{2}\cos\left(\frac{15\pi}{12}\right)+i16\sqrt{2}\sin\left(\frac{15\pi}{12}\right).\end{aligned}$$

2. Đặt $\alpha=-\arccos\left(\frac{3}{5}\right)$, ta có

$$(3-4i)^6=(5\mathrm{cis}\,(\alpha))^6=5^6\left(\cos\left(6\alpha\right)+i\sin\left(6\alpha\right)\right).$$

3. Ta có

$$\begin{aligned}\left(1-i\sqrt{3}\right)^{-7} &= \left(2\mathrm{cis}\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)^{-7}=\frac{1}{128}\mathrm{cis}\left(\frac{7\pi}{3}\right)\\ &= \frac{1}{128}\cos\left(\frac{7\pi}{3}\right)+i\frac{1}{128}\sin\left(\frac{7\pi}{3}\right).\end{aligned}$$

Bài 1.4.2 [1.4.6] Với định lý DeMoivre, biểu diễn $\sin(3\theta)$, $\cos(3\theta)$ ở dạng tổng chỉ bao gồm các hàm như $\cos^{m}\theta\sin^{n}\theta$, với m, n là những số nguyên

Giải. Ta có

$$\begin{aligned}\cos(3\theta) + i\sin(3\theta) &= (\cos\theta + i\sin\theta)^3\\ &= (\cos\theta + i\sin\theta)^2(\cos\theta + i\sin\theta)\\ &= (\cos2\theta + i\sin2\theta)(\cos\theta + i\sin\theta)\\ &= \cos2\theta\cos\theta - \sin2\theta\sin\theta + i(\cos2\theta\sin\theta + \sin2\theta\cos\theta)\ \ (1)\end{aligned}$$

Xét

$$\cos2\theta + i\sin2\theta = (\cos\theta + i\sin\theta)^2 = \left(\cos^2\theta - \sin^2\theta\right) + i2\sin\theta\cos\theta$$

nên ta có

$$\begin{cases}\cos 2\theta & = \cos^2\theta - \sin^2\theta\\ \sin 2\theta & = 2\sin\theta\cos\theta\end{cases}. \qquad (2)$$

Từ (1) và (2) ta có

$$\begin{aligned}&\begin{cases}\cos(3\theta) & = \cos2\theta\cos\theta - \sin2\theta\sin\theta\\ \sin(3\theta) & = \cos2\theta\sin\theta + \sin2\theta\cos\theta\end{cases}\\ \Leftrightarrow &\begin{cases}\cos(3\theta) & = (\cos^2\theta - \sin^2\theta)\cos\theta - 2\sin\theta\cos\theta\sin\theta\\ \sin(3\theta) & = (\cos^2\theta - \sin^2\theta)\sin\theta + 2\sin\theta\cos\theta\cos\theta\end{cases}\\ \Leftrightarrow &\begin{cases}\cos(3\theta) & = (\cos^2\theta - \sin^2\theta)\cos\theta - 2\sin\theta\cos\theta\sin\theta\\ \sin(3\theta) & = (\cos^2\theta - \sin^2\theta)\sin\theta + 2\sin\theta\cos\theta\cos\theta\end{cases}\end{aligned}$$

Bài 1.4.3 [1.4.7]

1. Sử dụng định lý DeMoivre, định lý nhị thức và đồng nhất thức lượng giác,

chứng minh rằng với số nguyên n

$$\cos n\theta = \left(\mathrm{Re}\sum_{k=0}^{n}\left(\cos^{n-k}\theta\right)\left(\sqrt{1-\cos^2\theta}\right)^k i^k \frac{n!}{(n-k)!k!}\right)$$

2. Chứng minh rằng biểu thức trên có thể được viết lại

$$\cos n\theta = \sum_{m=0}^{n/2} (\cos\theta)^{n-2m}\left(1-\cos^2\theta\right)^m (-1)^m \frac{n!}{(n-2m)!2m!}$$

nếu n chẵn và

$$\cos n\theta = \sum_{m=0}^{(n-1)/2} (\cos\theta)^{n-2m}\left(1-\cos^2\theta\right)^m (-1)^m \frac{n!}{(n-2m)!2m!}$$

nếu n lẻ.

3. Biểu thức trên thông dụng vì nó cho phép chúng ta biểu diễn $\cos n\theta$, với $n > 0$ là một số nguyên, bằng một chuỗi hữu hạn chỉ gồm các lũy thừa của $\cos\theta$ với số mũ cao nhất là n. Ví dụ, chứng minh $\cos 4\theta = 8\cos^4\theta - 8\cos^2\theta + 1$ bằng cách sử dụng một trong các biểu thức trên

4. Nếu ta thay $\cos\theta$ bằng x trong biểu thức ở phần 2. Chúng ta thu được một đa thức bậc n theo x. Người ta gọi đó là *đa thức Tchebyshev*, $T_n(x)$, sau khi nó được tìm ra bởi Pafnuty Tchebyshev (1821-1894), một nhà toán học người Nga nổi tiếng bởi những công trình về số nguyên tố. Chứng minh rằng:

$$T_5(x) = 16x^5 - 20x^3 + 5x$$

Giải.

1. Ta có:

$$\begin{aligned}\cos n\theta &= \mathrm{Re}\,(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \mathrm{Re}\left(\sum_{k=0}^{n}\left(\cos^{n-k}\theta\right)(i\sin\theta)^k\,\frac{n!}{(n-k)!k!}\right)\\ &= \mathrm{Re}\left(\sum_{k=0}^{n}\left(\cos^{n-k}\theta\right)\left(\sqrt{1-\cos^2\theta}\right)^k i^k\frac{n!}{(n-k)!k!}\right),\ \theta\in[0,\pi]\,.\end{aligned}$$

2. Trong tổng trên, nếu k lẻ thì

$$\mathrm{Re}\left(\left(\cos^{n-k}\theta\right)\left(\sqrt{1-\cos^2\theta}\right)^k i^k\frac{n!}{(n-k)!k!}\right) = 0.$$

Vì vậy, chỉ xét với những k chẵn, đặt $k = 2m$, m là số nguyên dương. Nếu n chẵn thì

$$\begin{aligned}\cos n\theta &= \mathrm{Re}\left(\sum_{k=0}^{n}\left(\cos^{n-k}\theta\right)(i\sin\theta)^k\,\frac{n!}{(n-k)!k!}\right)\\ &= \mathrm{Re}\left(\sum_{m=0}^{n/2}(\cos\theta)^{n-2m}\left(1-\cos^2\theta\right)^m(i)^{2m}\,\frac{n!}{(n-2m)!2m!}\right)\\ &= \sum_{m=0}^{n/2}(\cos\theta)^{n-2m}\left(1-\cos^2\theta\right)^m(-1)^m\,\frac{n!}{(n-2m)!2m!}.\end{aligned}$$

Nếu n lẻ thì $n-1$ chẵn, do đó

$$\begin{aligned}\cos n\theta &= \mathrm{Re}\left(\sum_{k=0}^{n}\left(\cos^{n-k}\theta\right)(i\sin\theta)^k\,\frac{n!}{(n-k)!k!}\right)\\ &= \mathrm{Re}\left(\sum_{m=0}^{\frac{(n-1)}{2}}(\cos\theta)^{n-2m}\left(1-\cos^2\theta\right)^m(i)^{2m}\,\frac{n!}{(n-2m)!2m!}\right)\\ &= \sum_{m=0}^{\frac{n-1}{2}}(\cos\theta)^{n-2m}\left(1-\cos^2\theta\right)^m(-1)^m\,\frac{n!}{(n-2m)!2m!}.\end{aligned}$$

3. Ta có

$$
\begin{aligned}
\cos 4\theta &= \sum_{m=0}^{2} (\cos\theta)^{4-2m}\left(1-\cos^2\theta\right)^m(-1)^m \frac{4!}{(4-2m)!2m!}\\
&= \frac{4!}{4!}(-1)^0\left(1-\cos^2\theta\right)^0(\cos\theta)^4\\
&\quad +\frac{4!}{(4-2)!2!}(-1)^1\left(1-\cos^2\theta\right)(\cos\theta)^2\\
&\quad +\frac{4!}{4!}(-1)^2\left(1-\cos^2\theta\right)^2(\cos\theta)^0\\
&= (\cos\theta)^4-6\left(1-\cos^2\theta\right)(\cos\theta)^2+\left(1-\cos^2\theta\right)^2\\
&= (\cos\theta)^4-6\left(\cos^2\theta-\cos^4\theta\right)+\left(1+\cos^4\theta-2\cos^2\theta\right)\\
&= 8\cos^4\theta-8\cos^2\theta+1.
\end{aligned}
$$

4. Ta có:

$$
\begin{cases}
T_n(x)=\sum_{m=0}^{n/2} x^{n-2m}\left(1-x^2\right)^m(-1)^m\frac{n!}{(n-2m)!2m!} & \text{Nếu } n \text{ chẵn}\\
T_n(x)=\sum_{m=0}^{(n-1)/2} x^{n-2m}\left(1-x^2\right)^m(-1)^m\frac{n!}{(n-2m)!2m!} & \text{Nếu } n \text{ lẻ}
\end{cases}
$$

và

$$
\begin{aligned}
T_5(x) &= \sum_{m=0}^{2} x^{5-2m}\left(1-x^2\right)^m(-1)^m\frac{5!}{(5-2m)!2m!}\\
&= \frac{5!}{5!}(-1)^0\left(1-x^2\right)^0x^5+\frac{5!}{3!2!}(-1)^1\left(1-x^2\right)^1x^3\\
&\quad +\frac{5!}{4!}(-1)^2\left(1-x^2\right)^2x\\
&= x^5-10x^3\left(1-x^2\right)+5x\left(1-x^2\right)^2\\
&= x^5-10x^3\left(1-x^2\right)+5x\left(1+x^4-2x^2\right)\\
&= 16x^5-20x^3+5x.
\end{aligned}
$$

Bài 1.4.5 [1.4.8] Chứng minh rằng:

$$\left(\frac{1+i\tan\theta}{1-i\tan\theta}\right)^n=\frac{1+i\tan n\theta}{1-i\tan n\theta}$$

với n là số nguyên dương và $\tan\theta, \tan n\theta$ phải xác định hay nói cách khác, $\tan\theta, \tan n\theta \neq 0$

Giải. Nhân cả tử và mẫu cho $\cos^n\theta$, ($\theta \neq \pi/2 + k\pi$ để $\tan\theta$ tồn tại), ta có:

$$\begin{aligned}\left(\frac{1+i\tan\theta}{1-i\tan\theta}\right)^n &= \left(\frac{\cos\theta+i\sin\theta}{\cos\theta-i\sin\theta}\right)^n=\frac{(\cos\theta+i\sin\theta)^n}{(\cos(-\theta)+i\sin(-\theta))^n}\\ &= \frac{\cos n\theta+i\sin n\theta}{\cos(-n\theta)+i\sin(-n\theta)}=\frac{\cos n\theta+i\sin n\theta}{\cos n\theta-i\sin n\theta}.\end{aligned}$$

Với $\cos n\theta$ khác không thì ta có:

$$\left(\frac{1+i\tan\theta}{1-i\tan\theta}\right)^n=\frac{\cos n\theta+i\sin n\theta}{\cos n\theta-i\sin n\theta}=\frac{1+i\dfrac{\sin n\theta}{\cos n\theta}}{1-i\dfrac{\sin n\theta}{\cos n\theta}}=\frac{1+i\tan n\theta}{1-i\tan n\theta}.$$

Từ đó ta có điều phải chứng minh.

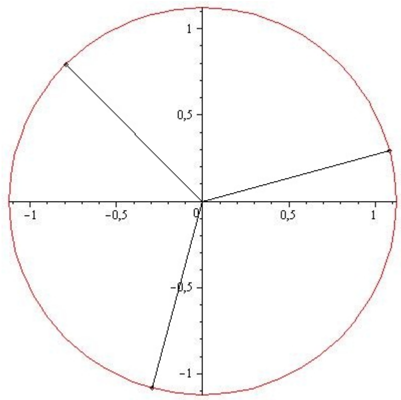
Bài 1.4.6 [1.4.9] Biểu diễn những biểu thức sau về dạng $a+ib$. Đưa ra tất cả giá trị và vẽ những điểm hoặc những vector biểu diễn kết quả trong tọa độ cực.

1. $(1+i)^{\frac{1}{3}}$

2. $(-64i)^{\frac{1}{4}}$

3. $\left(-\sqrt{3}+i\right)^{\frac{-1}{5}}$

Giải.



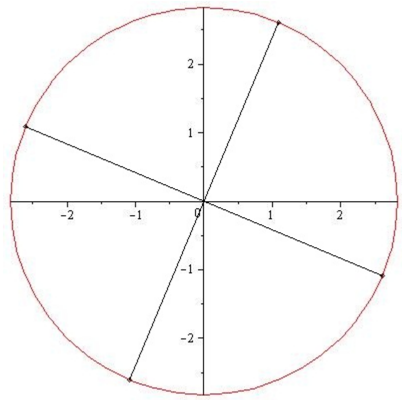
Hình 1.4.1

1.

$$
\begin{aligned}
(1+i)^{\frac{1}{3}} &= \sqrt[6]{2}\left(\mathrm{cis}\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[6]{2}\left(\mathrm{cis}\left(\frac{\pi}{12}+k\frac{2\pi}{3}\right)\right),\ k=0,1,2 \\
&= \begin{cases} \sqrt[6]{2}\mathrm{cis}\left(\frac{\pi}{12}\right) & (k=0) \\ \sqrt[6]{2}\mathrm{cis}\left(\frac{3\pi}{4}\right) & (k=1) \\ \sqrt[6]{2}\mathrm{cis}\left(\frac{-7\pi}{12}\right) & (k=2) \end{cases}
\end{aligned}
$$

2.

$$
\begin{aligned}
(-64i)^{\frac{1}{4}} &= 2\sqrt{2}\left(\mathrm{cis}\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right)^{\frac{1}{4}} = 2\sqrt{2}\mathrm{cis}\left(-\frac{\pi}{8}+k\frac{\pi}{2}\right),\ k=0,1,2,3 \\
&= \begin{cases} 2\sqrt{2}\mathrm{cis}\left(-\frac{\pi}{8}\right) & (k=0) \\ 2\sqrt{2}\mathrm{cis}\left(\frac{3\pi}{8}\right) & (k=1) \\ 2\sqrt{2}\mathrm{cis}\left(\frac{7\pi}{8}\right) & (k=2) \\ 2\sqrt{2}\mathrm{cis}\left(-\frac{5\pi}{8}\right) & (k=3) \end{cases}
\end{aligned}
$$

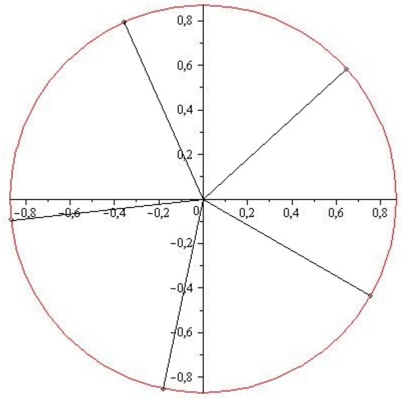


Hình 1.4.2

3.

$$
\begin{aligned}
\left(-\sqrt{3}+i\right)^{\frac{-1}{5}} &= 2^{\frac{-1}{5}}\left(\operatorname{cis}\left(\frac{5\pi}{6}\right)\right)^{\frac{-1}{5}} = 2^{\frac{-1}{5}}\operatorname{cis}\left(\frac{-\pi}{6}-k\frac{2\pi}{5}\right),\ k=0,1,2,3,4\\
&= \begin{cases}
2^{\frac{-1}{5}}\operatorname{cis}\left(\frac{-\pi}{6}\right) & (k=0)\\
2^{\frac{-1}{5}}\operatorname{cis}\left(\frac{-17\pi}{30}\right) & (k=1)\\
2^{\frac{-1}{5}}\operatorname{cis}\left(\frac{-29\pi}{30}\right) & (k=2)\\
2^{\frac{-1}{5}}\operatorname{cis}\left(\frac{19\pi}{30}\right) & (k=3)\\
2^{\frac{-1}{5}}\operatorname{cis}\left(\frac{7\pi}{30}\right) & (k=4)
\end{cases}
\end{aligned}
$$

Bài 1.4.8 [1.4.22] Xét phương trình bậc hai $az^2+bz+c=0$, với a, b và c là ba số phức. Chứng minh rằng $z=\dfrac{-b\pm(b^2-4ac)^{\frac{1}{2}}}{2a}$. Phương trình có bao nhiêu nghiệm trong trường hợp tổng quát?



Hình 1.4.3

Ở phổ thông bạn đã biết rằng nếu a, b và c là những số thực thì nghiệm của phương trình bậc hai hoặc là một cặp số thực hoặc là một cặp số phức liên hợp. Nếu a, b, c không nhất thiết là số thực thì kết quả trên có còn đúng không?

Giải. Với $a \neq 0$, ta có

$$\begin{array}{rrcl} & az^2 + bz + c & = & 0 \\ \Leftrightarrow & z^2 + \frac{b}{a}z + \frac{c}{a} & = & 0 \ (a \neq 0) \\ \Leftrightarrow & \left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 & = & \frac{b^2-4ac}{4a^2} \\ \Leftrightarrow & z & = & \frac{b \pm \left(b^2-4ac\right)^{\frac{1}{2}}}{2a} \end{array}$$

Vì $b^2 - 4ac$ là số phức nên $(b^2 - 4ac)^{1/2}$ có hai giá trị phức đối nhau, do đó phương trình đang xét có hai nghiệm. Ta chỉ cần lấy một trong hai giá trị của $(b^2 - 4ac)^{1/2}$ để thế vào phương trình nghiệm.

Nếu a, b, c là những số thực và phương trình vô nghiệm thực $(b^2 - 4ac < 0)$ thì $(b^2 - 4ac)^{1/2}$là số thuần ảo, cho nên

$$\frac{b \pm (b^2 - 4ac)^{\frac{1}{2}}}{2a}$$

là hai số phức liên hợp của nhau. Nhưng nếu a, b, c không nhất thiết là số thực, ta xét chúng như là những số phức. Khi đó gọi $\delta = \delta_1 + i\delta_2$ là một giá trị của $(b^2 - 4ac)^{1/2}$. Đặt $a = a_1 + ia_2$ và $b = b_1 + ib_2$, $a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{R}$. Ta có:

$$\overline{z_1} = \overline{\left(\frac{b + (b^2 - 4ac)^{\frac{1}{2}}}{2a}\right)} = \frac{b_1 - ib_2 + \delta_1 - i\delta_2}{2\,(a_1 - ia_2)} = \frac{b_1 + \delta_1 - i\,(b_2 + \delta_2)}{2\,(a_1 - ia_2)}$$

và

$$z_2 = \frac{b - (b^2 - 4ac)^{\frac{1}{2}}}{2a} = \frac{b_1 + ib_2 - \delta_1 - i\delta_2}{2\,(a_1 + ia_2)} = \frac{b_1 - \delta_1 + i\,(b_2 - \delta_2)}{2\,(a_1 + ia_2)}.$$

Nói chung $\overline{z_1} \neq z_2$.

Bài 1.4.9 [1.4.23] Sử dụng kết quả thu được trong bài tập 1.4.8 để tìm tất cả các nghiệm của những phương trình sau. Biểu diễn kết quả ở dạng $x + iy$

1. $w^2 + w + \frac{i}{4} = 0$
2. $w^4 + w^2 + 1 = 0$

Giải. Đặt $\Delta = b^2 - 4ac$ và $\delta = x + iy$, $x, y \in \mathbb{R}$ là một trong hai giá trị của $(b^2 - 4ac)^{1/2}$. Ta có:

1. Ta có $\Delta = 1 - i$,

$$\begin{aligned}
\delta^2 = \Delta \quad &\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 & = 1 \\ 2xy & = -1 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - \left(\frac{-1}{2x}\right)^2 & = 1 \\ 2xy & = -1 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} 4x^4 - 4x^2 - 1 & = 0 \\ 2xy & = -1 \end{cases}
\end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 &= \frac{1+\sqrt{2}}{2} \\ y &= -\frac{1}{x} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x &= \sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2}} \\ y &= -\sqrt{\frac{2}{1+\sqrt{2}}} \end{cases}$$

Vậy nghiệm là

$$\begin{cases} w_1 = \dfrac{-1+\left(\sqrt{\dfrac{1+\sqrt{2}}{2}}-\sqrt{\dfrac{2}{1+\sqrt{2}}}i\right)}{2} & = \frac{\sqrt{1+\sqrt{2}}-\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} - \frac{i}{\sqrt{2\left(1+\sqrt{2}\right)}} \\ w_2 = \dfrac{-1-\left(\sqrt{\dfrac{1+\sqrt{2}}{2}}-\sqrt{\dfrac{2}{1+\sqrt{2}}}i\right)}{2} & = \frac{-\sqrt{1+\sqrt{2}}-\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2\left(1+\sqrt{2}\right)}} \end{cases}$$

2. Ta có $\Delta = 1-4 = -3 \Rightarrow \delta = i\sqrt{3}$. Suy ra

$$w^2 = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2} = \text{cis}\left(\frac{2\pi}{3}\right) \vee w^2 = \frac{-1-i\sqrt{3}}{2} = \text{cis}\left(-\frac{2\pi}{3}\right)$$

hay

$$w = \text{cis}\left(\frac{\pi}{3}+k\pi\right) \vee w = \text{cis}\left(-\frac{\pi}{3}+k\pi\right),\ k = 0,1$$

Từ đó ta có các nghiệm của phương trình là

$$\begin{cases} w_1 = \text{cis}\left(\frac{\pi}{3}\right) \\ w_2 = \text{cis}\left(-\frac{2\pi}{3}\right) \\ w_3 = \text{cis}\left(-\frac{\pi}{3}\right) \\ w_4 = \text{cis}\left(\frac{2\pi}{3}\right) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} w_1 = \frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2} \\ w_2 = -\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2} \\ w_3 = \frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2} \\ w_4 = -\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

Bài 1.4.12 [1.4.29]

1. Giả sử rằng một số phức được biểu diễn ở dạng $z = r\angle\theta$. Nhắc lại rằng $\sin\frac{\theta}{2} = \pm\sqrt{\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos\theta}$ và $\cos\frac{\theta}{2} = \pm\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos\theta}$, chứng minh rằng

$$z^{\frac{1}{2}} = \pm\sqrt{r}\left(\sqrt{\frac{1+\cos\theta}{2}} + \sqrt{\frac{1-\cos\theta}{2}}i\right), \quad 0 \le \theta \le \pi$$

2. Giải thích tại sao công thức trên không đúng trên $-\pi < \theta < 0$ và tìm công thức đúng trên khoảng này.

3. Sử dụng công thức được suy ra ở 1. và 2. để tìm căn bậc hai của $2\text{cis}\left(\frac{\pi}{6}\right)$ và $2\text{cis}\left(-\frac{\pi}{6}\right)$

Giải.

1. Ta có

$$z^{\frac{1}{2}} = \sqrt{r}\text{cis}\left(\frac{\theta}{2} + k\pi\right), \quad k = 0, 1$$

hay

$$z^{\frac{1}{2}} = \sqrt{r}\text{cis}\left(\frac{\theta}{2}\right) \vee z^{\frac{1}{2}} = -\sqrt{r}\text{cis}\left(\frac{\theta}{2}\right).$$

Vì $0 \le \theta \le \pi$ nên $0 \le \theta/2 \le \pi/2$, suy ra $\sin(\theta/2) \ge 0$ và $\cos(\theta/2) \ge 0$. Do đó:

$$\begin{aligned} z^{\frac{1}{2}} &= \sqrt{r}\left(\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\right) \\ \vee z^{\frac{1}{2}} &= -\sqrt{r}\left(\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Leftrightarrow z^{\frac{1}{2}} &= \sqrt{r}\left(\sqrt{\frac{1+\cos\theta}{2}}+\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{2}}i\right)\\ \vee z^{\frac{1}{2}} &= -\sqrt{r}\left(\sqrt{\frac{1+\cos\theta}{2}}+\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{2}}i\right).\end{aligned}$$

2. Khi $-\pi < \theta < 0$ thì $-\pi/2 < \theta/2 < 0$, nên $\sin(\theta/2) < 0$ và $\cos(\theta/2) > 0$. Do đó:

$$\begin{aligned}z^{\frac{1}{2}} &= \sqrt{r}\left(\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)+i\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)\\ \vee z^{\frac{1}{2}} &= -\sqrt{r}\left(\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)+i\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Leftrightarrow z^{\frac{1}{2}} &= \sqrt{r}\left(\sqrt{\frac{1+\cos\theta}{2}}-\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{2}}i\right)\\ \vee z^{\frac{1}{2}} &= -\sqrt{r}\left(\sqrt{\frac{1+\cos\theta}{2}}-\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{2}}i\right)\end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow z^{\frac{1}{2}} = \pm\sqrt{r}\left(\sqrt{\frac{1+\cos\theta}{2}}-\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{2}}i\right).$$

3. Ta có $0 \le \pi/6 \le \pi$ và $-\pi < -\pi/6 < 0$ nên:

$$\begin{cases}\left(2\text{cis}\left(\frac{\pi}{6}\right)\right)^{\frac{1}{2}} &= \pm\sqrt{2}\left(\sqrt{\frac{1+\frac{\sqrt{3}}{2}}{2}}+\sqrt{\frac{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}{2}}i\right)\\ \left(2\text{cis}\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right)^{\frac{1}{2}} &= \pm\sqrt{2}\left(\sqrt{\frac{1+\frac{\sqrt{3}}{2}}{2}}-\sqrt{\frac{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}{2}}i\right)\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\left(2\text{cis}\left(\frac{\pi}{6}\right)\right)^{\frac{1}{2}} &= \pm\sqrt{2}\left(\sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{4}}+\sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{4}}i\right)\\ \left(2\text{cis}\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right)^{\frac{1}{2}} &= \pm\sqrt{2}\left(\sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{4}}-\sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{4}}i\right)\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} \left(2\text{cis}\left(\frac{\pi}{6}\right)\right)^{\frac{1}{2}} & = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}+\sqrt{2-\sqrt{3}}i\right) \\ \left(2\text{cis}\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right)^{\frac{1}{2}} & = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}-\sqrt{2-\sqrt{3}}i\right) \end{cases}$$

Bài 1.4.14 [1.4.31] Cho m là một số nguyên khác 0. Ta biết rằng $z^{\frac{1}{m}}$ có m giá trị và $z^{\frac{-1}{m}}$ cũng vậy. Cho trước một giá trị z và m ta tìm được một giá trị của $z^{\frac{1}{m}}$ và một giá trị của $z^{\frac{-1}{m}}$.

1. Tích của chúng có duy nhất không?

2. Có phải luôn tìm được một giá trị của $z^{\frac{-1}{m}}$ để với một giá trị cho trước $z^{\frac{1}{m}}$, ta sẽ có $z^{\frac{1}{m}}z^{-\frac{1}{m}}=1$?

Giải.

1. Ta sẽ chứng minh tích của nó là không duy nhất. Thật vậy, đặt $z=r\left(\cos\theta+i\sin\theta\right)$ thì ta có

$$\begin{cases} z^{\frac{1}{m}} & = r^{\frac{1}{m}}\left(\cos\left(\dfrac{\theta}{m}+\dfrac{k2\pi}{m}\right)+i\sin\left(\dfrac{\theta}{m}+\dfrac{k2\pi}{m}\right)\right) \\ z^{-\frac{1}{m}} & = r^{-\frac{1}{m}}\left(\cos\left(-\dfrac{\theta}{m}-\dfrac{k'2\pi}{m}\right)+i\sin\left(-\dfrac{\theta}{m}-\dfrac{k'2\pi}{m}\right)\right) \end{cases} \text{với } k,\ k'=0,1\ldots m-1 \qquad (1)$$

Do đó ta sẽ thấy tích $z^{1/m}$ và $z^{-1/m}$ là không duy nhất. Ví dụ với $z=1,\ m=3$. Ta suy ra

$$1^{\frac{1}{3}}.1^{-\frac{1}{3}}=\begin{cases} \left(\cos\left(0\right)+i\sin\left(0\right)\right)\left(\cos\left(0\right)+i\sin\left(0\right)\right) & =1 \quad \text{với } k=k'=0 \\ \left(\cos\left(\dfrac{2\pi}{3}\right)+i\sin\left(\dfrac{2\pi}{3}\right)\right)\left(\cos\left(0\right)+i\sin\left(0\right)\right) & =-\dfrac{1}{2}+i\dfrac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{với } k=1,\ k'=0 \end{cases}$$

từ đó ta kết luận rằng tích của $z^{1/m}$ và $z^{-1/m}$ không duy nhất.

2. Theo hệ đẳng thức(1) ở câu trên thì ứng với một giá trị của $z^{\frac{1}{m}}$ hay ứng với một số k cho trước, ta sẽ chọn $k' = k$ thì ta sẽ có một giá trị của $z^{-1/m}$ sao cho $z^{\frac{1}{m}}.z^{-\frac{1}{m}} = 1$.

(Thực chất như đã nhắc đến ở một số bài ở trên thì $z^{1/m}$ ta có thể hiểu như một tập hợp gồm m giá trị nên nội dung câu 1. có thể hiểu là "với mọi $a \in z^{1/m}$ và $b \in z^{-1/m}$ thì a.b có duy nhất hay không" và nội dung câu 2. là "với mọi $a \in z^{1/m}$,hỏi tồn tại $b \in z^{-1/m}$ để $a.b = 1$")

Bài 1.4.15 [1.4.32]

1. Chứng minh rằng nếu m và n là những số nguyên dương với $m \neq 0$ và nếu $\dfrac{n}{m}$ là một phân số tối giản thì tập hợp các giá trị của $z^{\frac{n}{m}}$ (định nghĩa bởi $\left(z^{\frac{1}{m}}\right)^n$), bằng với tập hợp các giá trị của $(z^n)^{\frac{1}{m}}$

2. Nếu $\dfrac{n}{m}$ chưa tối giản, thì $\left(z^{\frac{1}{m}}\right)^n$ và $(z^n)^{\frac{1}{m}}$ không có cùng tập giá trị. Hãy so sánh tất cả giá trị của $\left(1^{\frac{1}{4}}\right)^2$ và tất cả giá trị của $(1^2)^{\frac{1}{4}}$ để thấy điều đó.

Giải.

1. Đặt $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ với $\theta \in [-\pi, \pi]$ thì ta có

$$\begin{aligned}\left(z^{\frac{1}{m}}\right)^n &= r^{\frac{n}{m}}\left(\cos\left(\frac{\theta + k2\pi}{m}\right) + i\sin\left(\frac{\theta + k2\pi}{m}\right)\right)^n \\ &= r^{\frac{n}{m}}\left(\cos\left(\frac{n}{m}\theta + \frac{nk2\pi}{m}\right) + i\sin\left(\frac{n}{m}\theta + \frac{nk2\pi}{m}\right)\right) \quad k = 0, 1 \ldots m-1.\end{aligned}$$

và

$$\begin{aligned}(z^n)^{\frac{1}{m}} &= \left[r^n(\cos(n\theta) + i\sin(n\theta))\right]^{\frac{1}{m}} \\ &= r^{\frac{n}{m}}\left(\cos\left(\frac{n}{m}\theta + \frac{k'2\pi}{m}\right) + i\sin\left(\frac{n}{m}\theta + \frac{k'2\pi}{m}\right)\right) \quad k' = 0, 1 \ldots m-1.\end{aligned}$$

Ta dễ thấy được tập giá trị của $z^{n/m} \subset (z^n)^{1/m}$. Ta sẽ chứng minh $(z^n)^{1/m} \subset z^{n/m}$. Thật vậy, cho k' bất kì thuộc $\{0, 1 \ldots m-1\}$ ta sẽ tìm k sao cho

$$\left(\frac{n}{m}\theta + \frac{nk2\pi}{m}\right) - \left(\frac{n}{m}\theta + \frac{k'2\pi}{m}\right) = p2\pi \quad \left(\text{với } p \in \mathbb{Z}\right),$$

tức $nk - k' \vdots m$. Ta lại có do n/m là phân số tối giản nên tồn tại hai số nguyên u, v sao cho

$$un + vm = 1 \Rightarrow n\,(uk') - k' = vmk'$$

Từ đó ta sẽ chọn $k \equiv uk' \,(\text{mod} m)$ và $0 \le k < m$ thì ta sẽ có

$$\left(\frac{n}{m}\theta + \frac{nk2\pi}{m}\right) - \left(\frac{n}{m}\theta + \frac{k'2\pi}{m}\right) = p2\pi \quad \left(\text{với } p \in \mathbb{Z}\right).$$

Vậy ta kết luận

$$\left(z^{\frac{1}{m}}\right)^n = (z^n)^{\frac{1}{m}}$$

khi n/m tối giản.

2. Ta có

$$\begin{aligned}\left(1^{\frac{1}{4}}\right)^2 &= \left[\cos\left(\frac{k\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{k\pi}{2}\right)\right]^2 \left(\text{với } k = 0, 1, 2, 3\right) \\ &= \begin{cases} [\cos(0) + i\sin(0)]^2 & = 1 \\ \left[\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right]^2 & = -1 \\ [\cos(\pi) + i\sin(\pi)]^2 & = 1 \\ \left[\cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right)\right]^2 & = -1 \end{cases}\end{aligned}$$

và

$$\begin{aligned}\left(1^2\right)^{\frac{1}{4}} &= 1^{\frac{1}{4}} = \cos\left(\frac{k\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{k\pi}{2}\right) \ (\text{với } k = 0,1,2,3) \\ &= \begin{cases}\cos(0) + i\sin(0) & = 1 \\ \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) & = i \\ \cos(\pi) + i\sin(\pi) & = -1 \\ \cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right) & = -i\end{cases}.\end{aligned}$$

Vậy

$$\left(1^{\frac{1}{4}}\right)^2 \neq \left(1^2\right)^{\frac{1}{4}}.$$

Từ đó ta có nếu n/m chưa tối giản, thì $\left(z^{1/m}\right)^n$ và $\left(z^n\right)^{1/m}$ không có cùng tập giá trị.

Bài 1.4.16 [1.4.33]

1. Xét biểu thức đa trị thực sau $\left|1^{\frac{1}{m}} - i^{\frac{1}{m}}\right|$, với $m \geq 1$ là một số nguyên. Chứng minh rằng giá trị nhỏ nhất của biểu thức trên là $2\sin\left(\frac{\pi}{4m}\right)$.
2. Tìm biểu thức của giá trị lớn nhất của $\left|1^{\frac{1}{m}} - i^{\frac{1}{m}}\right|$.

Giải.

1. Ta có

$$\begin{aligned}\left|1^{\frac{1}{m}} - i^{\frac{1}{m}}\right| &= \left|\left(\cos\frac{2k\pi}{2} + i\sin\frac{2k\pi}{2}\right) - \left(\cos\left(\frac{\pi}{2m} + \frac{2k'\pi}{m}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2m} + \frac{2k'\pi}{m}\right)\right)\right| \\ &= \sqrt{\left[\cos\frac{2k\pi}{2} + \cos\left(\frac{\pi}{2m} + \frac{2k'\pi}{m}\right)\right]^2 + \left[\sin\frac{2k\pi}{2} + \sin\left(\frac{\pi}{2m} + \frac{2k'\pi}{m}\right)\right]^2} \\ &= \sqrt{2 - 2\left(\cos\frac{2k\pi}{2}\cos\left(\frac{\pi}{2m} + \frac{2k'\pi}{m}\right) + \sin\frac{2k\pi}{2}\sin\left(\frac{\pi}{2m} + \frac{2k'\pi}{m}\right)\right)}\end{aligned}$$

$$= \sqrt{2 - 2\cos\left(\frac{2k\pi}{2} - \frac{\pi}{2m} - \frac{2k'\pi}{m}\right)} = 2\left|\sin\left(\frac{\pi}{4m} + p\frac{\pi}{m}\right)\right|$$

với p là số nguyên trong đoạn $[1-m, m-1]$. Ta thấy

$$\begin{cases} \pi - \dfrac{\pi}{4m} \geq \dfrac{\pi}{4m} + p\dfrac{\pi}{m} \geq \dfrac{\pi}{4m} & \text{với } p \geq 0 \\ \dfrac{\pi}{4m} - \pi \leq \dfrac{\pi}{4m} + p\dfrac{\pi}{m} \leq -\dfrac{\pi}{4m} & \text{với } p < 0 \end{cases}$$

nên ta suy ra

$$2\left|\sin\left(\frac{\pi}{4m} + p\frac{\pi}{m}\right)\right| \geq 2\sin\left(\frac{\pi}{4m}\right).$$

Với $k = k'$ thì ta có đẳng thức xảy ra. Vậy giá trị nhỏ nhất của

$$\left|1^{\frac{1}{m}} - i^{\frac{1}{m}}\right|$$

là

$$2\sin\left(\frac{\pi}{4m}\right).$$

2.

Bài 1.4.17 [1.4.34] Sử dụng tổng của chuỗi hình học và định lý DeMoivre để suy ra những biểu thức sau với $0 < \theta < 2\pi$.

$$\begin{aligned} 1 + \cos\theta + \cos 2\theta + \ldots + \cos n\theta &= \frac{\cos\left(\dfrac{n\theta}{2}\right)\sin\left(\dfrac{(n+1)\theta}{2}\right)}{\sin\left(\dfrac{\theta}{2}\right)} \\ \sin\theta + \sin 2\theta + \sin 3\theta \ldots + \sin n\theta &= \frac{\sin\left(\dfrac{n\theta}{2}\right)\sin\left(\dfrac{(n+1)\theta}{2}\right)}{\sin\left(\dfrac{\theta}{2}\right)} \end{aligned}$$

Giải. Ta có

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n}(\text{cis}\,(\theta))^k &= \frac{1-(\text{cis}\,(\theta))^{n+1}}{1-\text{cis}\,(\theta)} = \frac{1-\cos{(n+1)\,\theta}-i\sin{(n+1)\,\theta}}{1-\cos\theta-i\sin\theta}\\
&= \frac{2\sin\dfrac{(n+1)\,\theta}{2}}{2\sin\dfrac{\theta}{2}}\cdot\frac{\sin\dfrac{(n+1)\,\theta}{2}-i\cos\dfrac{(n+1)\,\theta}{2}}{\sin\dfrac{\theta}{2}-i\cos\dfrac{\theta}{2}}\\
&= \frac{\sin\dfrac{(n+1)\,\theta}{2}}{\sin\dfrac{\theta}{2}}\cdot\frac{\cos\left(\dfrac{(n+1)\,\theta}{2}-\dfrac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(\dfrac{(n+1)\,\theta}{2}-\dfrac{\pi}{2}\right)}{\cos\left(\dfrac{\theta}{2}-\dfrac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(\dfrac{\theta}{2}-\dfrac{\pi}{2}\right)}\\
&= \frac{\sin\dfrac{(n+1)\,\theta}{2}}{\sin\dfrac{\theta}{2}}\cdot\left(\cos\left(\frac{n\theta}{2}\right)+i\sin\left(\frac{n\theta}{2}\right)\right).
\end{aligned}$$

Mặt khác

$$\begin{aligned}
\text{Re}\left(\sum_{k=0}^{n}(\text{cis}\,(\theta))^k\right) &= 1+\cos\theta+\cos2\theta+\ldots+\cos n\theta,\\
\text{Im}\left(\sum_{k=0}^{n}(\text{cis}\,(\theta))^k\right) &= \sin\theta+\sin2\theta+\sin3\theta\ldots+\sin n\theta.
\end{aligned}$$

Suy ra

$$\begin{aligned}
1+\cos\theta+\cos2\theta+\ldots+\cos n\theta &= \frac{\cos\left(\dfrac{n\theta}{2}\right)\sin\left(\dfrac{(n+1)\,\theta}{2}\right)}{\sin\left(\dfrac{\theta}{2}\right)},\\
\sin\theta+\sin2\theta+\sin3\theta\ldots+\sin n\theta &= \frac{\sin\left(\dfrac{n\theta}{2}\right)\sin\left(\dfrac{(n+1)\,\theta}{2}\right)}{\sin\left(\dfrac{\theta}{2}\right)}.
\end{aligned}$$

Bài 1.4.18.[1.4.35] Nếu n là một số nguyên không nhỏ hơn 2. Chứng minh rằng:

$$\begin{cases} \cos\left(\frac{2\pi}{n}\right) + \cos\left(\frac{4\pi}{n}\right) + \cdots + \cos\left[\frac{2(n-1)\pi}{n}\right] & = -1 \\ \sin\left(\frac{2\pi}{n}\right) + \sin\left(\frac{4\pi}{n}\right) + \cdots + \sin\left[\frac{2(n-1)\pi}{n}\right] & = 0 \end{cases}$$

Giải. Đặt $\omega = e^{2\pi/n}$. Ta có

$$\sum_{k=0}^{n-1}\left[\cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{2k\pi}{n}\right)\right] = \sum_{k=0}^{n-1}\omega^k = \frac{1-\omega^n}{1-\omega} = 0$$

nên

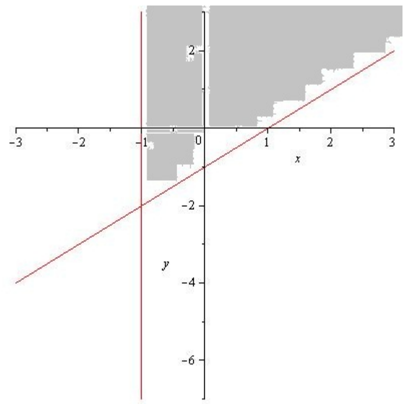
$$\begin{cases} \cos(0) + \cos\left(\frac{2\pi}{n}\right) + \cos\left(\frac{4\pi}{n}\right) + \cdots + \cos\left[\frac{2(n-1)\pi}{n}\right] & = 0 \\ \sin\left(\frac{2\pi}{n}\right) + \sin\left(\frac{4\pi}{n}\right) + \cdots + \sin\left[\frac{2(n-1)\pi}{n}\right] & = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos\left(\frac{2\pi}{n}\right) + \cos\left(\frac{4\pi}{n}\right) + \cdots + \cos\left[\frac{2(n-1)\pi}{n}\right] & = -1 \\ \sin\left(\frac{2\pi}{n}\right) + \sin\left(\frac{4\pi}{n}\right) + \cdots + \sin\left[\frac{2(n-1)\pi}{n}\right] & = 0 \end{cases}$$

1.5 Points, Sets, Loci, and Regions in the Complex Plane

Bài 1.5.1 [1.5.1] Dùng lời hoặc một bảng tóm tắt miêu tả một phần của mặt phẳng phức tương ứng với những phương trình hoặc bất đẳng thức sau. Trường hợp không có lời giải là trường hợp chỉ được thỏa mãn bởi tập rỗng.

1. $\mathrm{Re}(z) = -\dfrac{1}{2}$
2. $\mathrm{Re}(z) > \mathrm{Im}(z+i)$
3. $-1 < \mathrm{Re}(z) \le \mathrm{Im}(z+i)$



Hình 1.5.1

4. $z\overline{z} = 1 + i$

5. $\mathrm{Re}\,(z) = \mathrm{Im}\,(z^2)$

6. $1 < e^{|z|} \leq 2$

Giải. Đặt $z = x + iy$

1. $\mathrm{Re}\,(z) = -\dfrac{1}{2} \Leftrightarrow x = -\dfrac{1}{2}$. Đây là đường thẳng $x = -\dfrac{1}{2}$ trong mặt phẳng phức.

2. $\mathrm{Re}\,(z) > \mathrm{Im}\,(z+i) \Leftrightarrow x > y + 1$. Đây là một nửa mặt phẳng phức nằm phía dưới bên phải đường thẳng $x = y + 1$, không tính đường thẳng này.

3. $-1 < \mathrm{Re}\,(z) \leq \mathrm{Im}\,(z+i) \Leftrightarrow -1 < x \leq y + 1$

4. $z\overline{z} = 1 + i \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 1 + i$. Phương trình vô nghiệm. Chỉ có tập $\emptyset$ tương ứng với phương trình này.

5. $\mathrm{Re}\,(z) = \mathrm{Im}\,(z^2) \Leftrightarrow x = 2xy$. Tập hợp những số phức z thỏa điều kiện này được biểu diễn bởi đường thẳng $x = 0$ và $y = \dfrac{1}{2}$ trong mặt phẳng phức.

6. $1 < e^{|z|} \leq 2 \Leftrightarrow 0 < |z| < \log 2 \Leftrightarrow 0 < \sqrt{x^2+y^2} < \log 2$. Đây là hình tròn xung quanh gốc tọa độ, trừ đi tâm, không tính biên, có bán kính log2.

Bài 1.5.5 [1.5.19] Giả sử cho trước hai tập A và B. Hai tập này có thể có hoặc không có điểm chung. Hợp của hai tập A và B, kí hiệu bởi $A \cup B$ là tập hợp tất cả các điểm thuộc A hoặc thuộc B. Và phần giao của A và B kí hiệu bởi $A \cap B$ là tập hợp tất cả các điểm thuộc cả A và B. Trong những tập sau đây, tập nào là liên thông? Tập nào là một miền mở liên thông?

1. Tập $A \cup B$, $A \cap B$ với A gồm tất cả các điểm $|z - i| < 1$ và B là tập hợp tất cả các điểm $|z - 1| < 1$

2. Tập hợp $A \cap B$ với A gồm tất cả các điểm $|z| \leq 1$ và B là tập tất cả các điểm có $\mathrm{Re}\,(z) \geq 1$

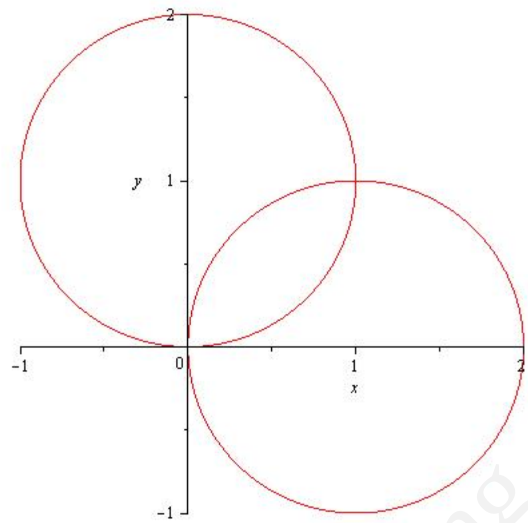
3. Tập hợp $A \cap B$ với A gồm tất cả các điểm $|z| < 1$ và B là tập tất cả các điểm có $\mathrm{Re}\,(z) > 1$

Giải. Đặt $z = x + iy$

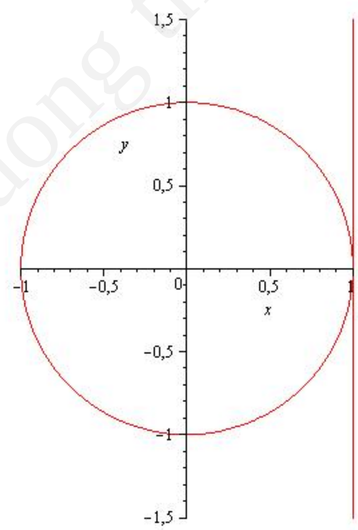
1. $A \cup B$, $A \cap B$ đều là những tập mở liên thông.

2. A là hình tròn tâm 0, bán kính 1 và B là nửa mặt phẳng kể cả bờ ở bên phải đường thẳng $x = 1$. $A \cap B = (0, 1)$ là tập có duy nhất một phần tử. Đây là một tập không mở.

3. $A \cap B = \emptyset$. Đây là một tập mở nhưng không liên thông.



Hình 1.5.2



Hình 1.5.3

Bài 1.5.8 [1.5.33] Theo định lý Bolzano-Weierstrass, một tập bị chặn có vô hạn điểm phải có ít nhất một điểm tụ. Xét tập hợp các nghiệm của $y = 0$ và $\sin\left(\frac{\pi}{x}\right) = 0$ nằm trong miền $0 < |z| < 1$. Tập hợp này có điểm tụ nào? Chứng minh kết quả một cách chính xác rằng mọi lân cận của điểm này phải chứa ít nhất một điểm nằm trong tập hợp đã cho.

Giải. Ta có

$$A = \left\{ \left(\frac{1}{k}, 0\right) | k = 2, 3, 4, \ldots \right\} \cup \left\{ \left(\frac{1}{k}, 0\right) | k = -2, -3, -4, \ldots \right\}$$

Ta chứng minh rằng $\mathrm{O} = (0, 0)$ là điểm tụ, tức

$$\forall r > 0, \exists m \in \mathbb{Z} \setminus \{-1, 0, 1\} : \quad \left|\frac{1}{m}\right| < r.$$

Đặt $z_0 = 1/m$ thì

$$z_0 \in A \cap (\mathrm{D}(0, r) \setminus \{0\}).$$

Vì vậy,

$$\forall r > 0, (\mathrm{D}(0, r) \setminus \{0\}) \cap A \neq \emptyset.$$

Nghĩa là $\mathrm{O} = (0, 0)$là điểm tụ của A.

Bài 1.5.9 [1.5.34]

1. Khi tất cả các điểm trên đường tròn đơn vị $|z| = 1$ chiếu lập thể lên trên hình cầu số Riemann, chúng nằm ở đâu?
2. Khi tất cả các điểm nằm trong hình tròn được chiếu lên thì chúng nằm ở đâu?
3. Khi tất cả các điểm nằm ngoài hình tròn được chiếu lên thì chúng nằm ở đâu?

Giải.

1. Khi chiếu các điểm trên đường tròn đơn vị lên hình cầu số Riemann, ta sẽ nhận được một đường tròn nằm trên hình cầu này có mặt song song với mặt chứa hình tròn đơn vị và các đường thẳng sẽ quét thành một mặt nón có trục là trục ζ và đáy là hình tròn đơn vị. Gọi θ là góc giữa mặt nón và mặt đáy, r là bán kính của hình chiếu. Ta sẽ tính r. Ta có $\tan\theta/2 = 1/2$ nên

$$\sin\theta = \frac{2\tan\dfrac{\theta}{2}}{1+\left(\tan\dfrac{\theta}{2}\right)^2} = \frac{4}{5}$$

và

$$\cos\theta = \frac{1-\left(\tan\dfrac{\theta}{2}\right)^2}{1+\left(\tan\dfrac{\theta}{2}\right)^2} = \frac{3}{5}.$$

Suy ra

$$\zeta = \sin\theta = \frac{4}{5}$$

và

$$r = 1 - \cos\theta = \frac{2}{5}.$$

Tức là hình chiếu của đường tròn đơn vị nằm ở cao độ $\zeta = 4/5$ và có bán kính là $2/5$.

2. Nếu tất cả các điểm nằm trên đường tròn được chiếu lên thì tập hợp ảnh là một phần của hình cầu tính từ dưới lên, được giới hạn bởi đường tròn hình chiếu ta vừa tìm được ở trên.

3. Nếu tất cả các điểm nằm trên đường tròn được chiếu lên thì tập hợp ảnh là một phần của hình cầu tính từ trên xuống, được giới hạn bởi đường tròn hình chiếu ta vừa tìm được ở trên.

Bài 1.5.10 [1.5.35] Sử dụng phép chiếu lập thể để xác minh mệnh đề sau: hai nửa đường thẳng vô hạn $y = x$, $x \geq 0$ và $y = -x$, $x \leq 0$, cắt nhau hai lần, một ở gốc tọa độ và một ở vô hạn. Hình chiếu của hai đường thẳng này lên hình cầu số Riemann là gì?

Giải. Hai nửa đường thẳng này hiển nhiên là cắt nhau tại gốc tọa độ. Khi các điểm trên hai nửa đường thẳng tiến về vô cực, hình chiếu của chúng lên trục ζ sẽ tiến về đỉnh N của hình cầu Riemann. Và hình chiếu ở vô cực của cả hai nửa đường thẳng này đều là N. Vì vậy, chúng giao nhau ở vô cực. Toàn bộ hình chiếu của cả hai đường thẳng này lên hình cầu Riemann là hai đương kinh tuyến mà có hai mặt phẳng kinh tuyến tương ứng vuông góc với nhau.

Bài 1.5.11 [1.5.36](không biết sai chỗ nào)

1. Nếu $z = x_1 + iy_1$và nếu z' (hình chiếu của z lên hình cầu Riemann) có tọa độ x', y', ζ'. Chứng minh bằng đại số rằng:

$$\zeta' = \frac{x_1^2 + y_1^2}{x_1^2 + y_1^2 + 1}, \quad x' = x_1\left(1 - \frac{x_1^2 + y_1^2}{x_1^2 + y_1^2 + 1}\right), \quad y' = y_1\left(1 - \frac{x_1^2 + y_1^2}{x_1^2 + y_1^2 + 1}\right)$$

2. Xét hình tròn bán kính r nằm trong mặt phẳng xy. Hình tròn có tâm là gốc tọa độ. Hình chiếu lập thể của đường tròn này lên hình cầu số là một đường tròn khác. Tìm bán kính của đường tròn này bằng cách sử dụng những phương trình trên, kiểm tra kết quả bằng hình học.

Giải.

1. Để chiếu z lên hình cầu số, ta vẽ đường thẳng đi qua z , cắt trục ζ tại M và tiếp xúc với hình cầu số tại z'. Lúc đó z' là hình chiếu của z. Gọi $r_0 = 1/2$ là bán kính của hình cầu số và θ là góc giữa đường thẳng qua z và mặt phẳng xy. Khi đó $\zeta' = |z| \sin\theta$.

Khoảng cách của z đến gốc tọa độ là $|z| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2}$. Ta có, $\tan(\theta/2) = r_0/|z|$, suy ra

$$\sin\theta = \frac{2\tan\frac{\theta}{2}}{1+\left(\tan\frac{\theta}{2}\right)^2} = \frac{2\cdot\frac{r_0}{|z|}}{1+\left(\frac{r_0}{|z|}\right)^2} = \frac{2|z|r_0}{|z|^2+r_0^2}.$$

Vậy

$$\zeta' = |z|\sin\theta = \frac{2|z|^2 r_0}{|z|^2+r_0^2} = \frac{|z|^2}{|z|^2+\frac{1}{4}} = \frac{x_1^2+y_1^2}{x_1^2+y_1^2+\frac{1}{4}}.$$

Sử dụng định lý Thales trong không gian, ta suy ra:

$$\frac{x'}{x_1} = \frac{y'}{y_1} = \frac{|z|-|z|\cos\theta}{|z|} = 1-\cos\theta.$$

Vậy

$$\begin{cases} x' = x_1(1-\cos\theta) = x_1\left(\frac{2r_0^2}{|z|^2+r_0^2}\right) & = x_1\left(\frac{1}{2\left(x^2+y^2+\frac{1}{4}\right)}\right) \\ y' = y_1(1-\cos\theta) = y_1\left(\frac{2r_0^2}{|z|^2+r_0^2}\right) & = y_1\left(\frac{1}{2\left(x^2+y^2+\frac{1}{4}\right)}\right) \end{cases}$$

2. Đặt r' là bán kính của đường tròn thì

$$\begin{aligned} r' &= r(1-\cos\theta) = r\left(1-\frac{1-\left(\tan\frac{\theta}{2}\right)^2}{1+\left(\tan\frac{\theta}{2}\right)^2}\right) = r\left(1-\frac{r^2-r_0^2}{r^2+r_0^2}\right) \\ &= r\left(\frac{2r_0^2}{r^2+r_0^2}\right) = \frac{2r}{4r^2+1}. \end{aligned}$$

Chương 2

The Complex Function and Its Derivative

Mục lục

2.1 Introduction

Bài 2.1.1. Giả sử $z = x + iy$. Đặt $f(z) = \dfrac{(z-i)(z-2)}{(z^2+1)\cos x}$. Tại những nơi nào trong những miền sau, hàm này không xác định.

1. $|z| < 1$
2. $|z| < 1.1$
3. $|z| < 2$
4. $\left|z - (1+i)\dfrac{\pi}{2}\right| < \dfrac{\pi}{2}$

Giải. Hàm này không xác định khi $z^2 + 1 = 0$ hoặc $\cos x = 0$, tức là $z_0 = \pm i$ hoặc $z_0 = \pm\dfrac{\pi}{2} + iy$.

1.

- Nếu $z_0 = \pm i$ thì $|z_0| = 1$ nên $z_0 \notin \{z : |z| < 1\}$.
- Nếu $z_0 = \pm\dfrac{\pi}{2} + iy$ thì $|z_0| = \sqrt{\left(\dfrac{\pi}{2}\right)^2 + y^2} \geq \dfrac{\pi}{2} > 1$ nên $z_0 \notin \{z : |z| < 1\}$.

Vậy hàm này không nơi nào mà không xác định trong miền $|z| < 1$.

2.

- Nếu $z_0 = \pm i$ thì $|z_0| = 1 < 1.1$ nên $z_0 \in \{z : |z| < 1.1\}$.
- Nếu $z_0 = \pm\dfrac{\pi}{2} + iy$ thì $|z_0| = \sqrt{\left(\dfrac{\pi}{2}\right)^2 + y^2} \geq \dfrac{\pi}{2} > 1.1$ nên $z_0 \notin \{z : |z| < 1.1\}$.

Vậy hàm này không xác định tại $z = \pm i$.

3.

- Nếu $z_0 = \pm i$ thì $|z_0| = 1 < 2$ nên $z_0 \in \{z : |z| < 2\}$.
- Nếu $z_0 = \pm\dfrac{\pi}{2} + iy$ thì $|z_0| = \sqrt{\left(\dfrac{\pi}{2}\right)^2 + y^2} < 2 \Leftrightarrow -\sqrt{4 - \dfrac{\pi^2}{4}} < y < \sqrt{4 - \dfrac{\pi^2}{4}}$.

Vậy hàm này không xác định tại $z = \pm i$ hoặc trên đường thẳng $x = \pm\dfrac{\pi}{2}, -\sqrt{4 - \dfrac{\pi^2}{4}} < y < \sqrt{4 - \dfrac{\pi^2}{4}}$.

4.

- Nếu $z_0 = i$ thì $\left|z_0 - (1+i)\dfrac{\pi}{2}\right| = \sqrt{1 + \left(1 - \dfrac{\pi}{2}\right)^2} = \sqrt{(2-\pi) + \left(\dfrac{\pi}{2}\right)^2} < \dfrac{\pi}{2}$ nên $z_0 \in \left\{z : \left|z - (1+i)\dfrac{\pi}{2}\right| < \dfrac{\pi}{2}\right\}$.
- Nếu $z_0 = -i$ thì $\left|z_0 - (1+i)\dfrac{\pi}{2}\right| = \sqrt{1 + \left(1 + \dfrac{\pi}{2}\right)^2} = \sqrt{(2+\pi) + \left(\dfrac{\pi}{2}\right)^2} > \dfrac{\pi}{2}$ nên $z_0 \notin \left\{z : \left|z - (1+i)\dfrac{\pi}{2}\right| < \dfrac{\pi}{2}\right\}$.
- Nếu $z_0 = \dfrac{\pi}{2} + iy$ thì $\left|z_0 - (1+i)\dfrac{\pi}{2}\right| = \sqrt{\left(y - \dfrac{\pi}{2}\right)^2} < \dfrac{\pi}{2} \Leftrightarrow 0 < y < \pi$.
- Nếu $z_0 = -\dfrac{\pi}{2} + iy$ thì $\left|z_0 - (1+i)\dfrac{\pi}{2}\right| = \sqrt{(\pi)^2 + \left(y - \dfrac{\pi}{2}\right)^2} \geq \pi > \dfrac{\pi}{2}$. nên $z_0 \notin \left\{z : \left|z - (1+i)\dfrac{\pi}{2}\right| < \dfrac{\pi}{2}\right\}$.

Vậy hàm này không xác định tại $z = i$ hoặc trên đường thẳng $x = \dfrac{\pi}{2}, 0 < y < \pi$.

Bài 2.1.2. Với mỗi hàm sau đây, tìm $f(1+2i)$ ở dạng $a + ib$. Nếu hàm không xác định tại $1 + 2i$, chỉ ra hàm đó

1. $z^2 + 1$

2. $\dfrac{1}{z\overline{z}-5}$

3. $z+\dfrac{1}{z}+\mathrm{Im}(z)$

4. $\dfrac{z}{\cos x+i\sin y}$

Giải.

1. $f(1+2i)=(1+2i)^2+1=-2+4i.$

2. Hàm này không xác định tại $1+2i$ vì $(1+2i)(1-2i)-5=0.$

3. $f(1+2i)=1+2i+\frac{1}{1+2i}+\mathrm{Im}(1+2i)=1+2i+\frac{1-2i}{5}+2=\frac{16}{5}+\frac{8}{5}.$

4. $f(1+2i)=\frac{1+2i}{\cos 1+i\sin 2}=\frac{1+2i}{0.5403+i.9093}=2.1085+0.1531i.$

Bài 2.1.3. Viết những hàm theo z sau thành dạng $u(x,y)+iv(x,y)$, với $u(x,y)$ và $v(x,y)$ là những hàm thực của x và y.

1. $\dfrac{1}{z+i}$

2. $\dfrac{1}{z}+i$

3. $z+\dfrac{1}{z}$

4. z^3+z

5. $\overline{z}^3+\overline{z}$

Giải.

1. $\frac{1}{z+i} = \frac{1}{x+i(1+y)} = \frac{x-i(1+y)}{x^2+(1+y)^2} = \frac{x}{x^2+(1+y)^2} - i\frac{1+y}{x^2+(1+y)^2}.$

2. $\frac{1}{z} + i = \frac{1}{x+iy} + i = \frac{x-iy}{x^2+y^2} + i = \frac{x}{x^2+y^2} + i\left(1 - \frac{y}{x^2+y^2}\right).$

3. $z + \frac{1}{z} = x + iy + \frac{1}{x+iy} = x + iy + \frac{x-iy}{x^2+y^2} = \left(x + \frac{x}{x^2+y^2}\right) + i\left(y - \frac{y}{x^2+y^2}\right).$

4. $z^3 + z = (x+iy)^3 + x + iy = (x^3 - 3xy^2 + x) + i\,(3x^2y - y^3 + y).$

5. $\overline{z}^3 + \overline{z} = (x-iy)^3 + x - iy = (x^3 - 3xy^2 + x) + i\,(-3x^2y + y^3 - y).$

Bài 2.1.4. Viết những hàm sau theo z và nếu cần thiết $\overline{z}$ như là hằng. Như thế thì x và y không được xuất hiện. Đơn giản hóa câu trả lời đến mức có thể

1. $x + i2y$
2. $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{iy}$
3. $ix^2 + y^2$
4. $x + \dfrac{x}{x^2+y^2} + iy + \dfrac{iy}{x^2+y^2}$

Giải. Thay $x = \frac{z+\overline{z}}{2}$ và $y = \frac{z-\overline{z}}{2i}$, ta có

1. $x + i2y = \frac{z+\overline{z}}{2} + i2\frac{z-\overline{z}}{2i} = \frac{3}{2}z - \frac{1}{2}\overline{z}.$

2. $\frac{1}{x} + \frac{1}{iy} = \frac{2}{z+\overline{z}} + \frac{2i}{i(z-\overline{z})} = \frac{2}{z+\overline{z}} + \frac{2}{z-\overline{z}} = \frac{4z}{z^2-\overline{z}^2}.$

3. $ix^2 + y^2 = i\left(\frac{z+\overline{z}}{2}\right)^2 + \left(\frac{z-\overline{z}}{2i}\right)^2 = \frac{i(z+\overline{z})^2}{4} - \frac{(z-\overline{z})^2}{4}.$

4. $x + \frac{x}{x^2+y^2} + iy + \frac{iy}{x^2+y^2} = \frac{z+\overline{z}}{2} + \frac{\frac{z+\overline{z}}{2}}{z\overline{z}} + i\frac{z-\overline{z}}{2i} + \frac{i\frac{z-\overline{z}}{2i}}{z\overline{z}} = z + \frac{1}{z}$.

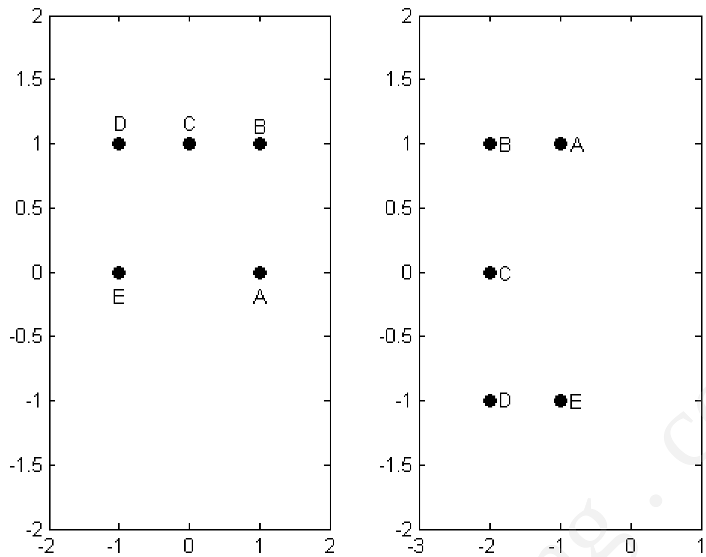
Bài 2.1.5. Với mỗi hàm sau, lập bảng giá trị của hàm với những giá trị của z : 1, $1+i$, i, $-1+i$, -1. Chỉ ra bằng đồ thị sự phù hợp giữa những giá trị của w và những giá trị của z bởi biểu đồ giống Fig. 2.1-2.

1. $w = i\,(z+i)$
2. $w = i/z$
3. $w = \arg z$ giá trị chính
4. $w = z^3$

Giải.

1.

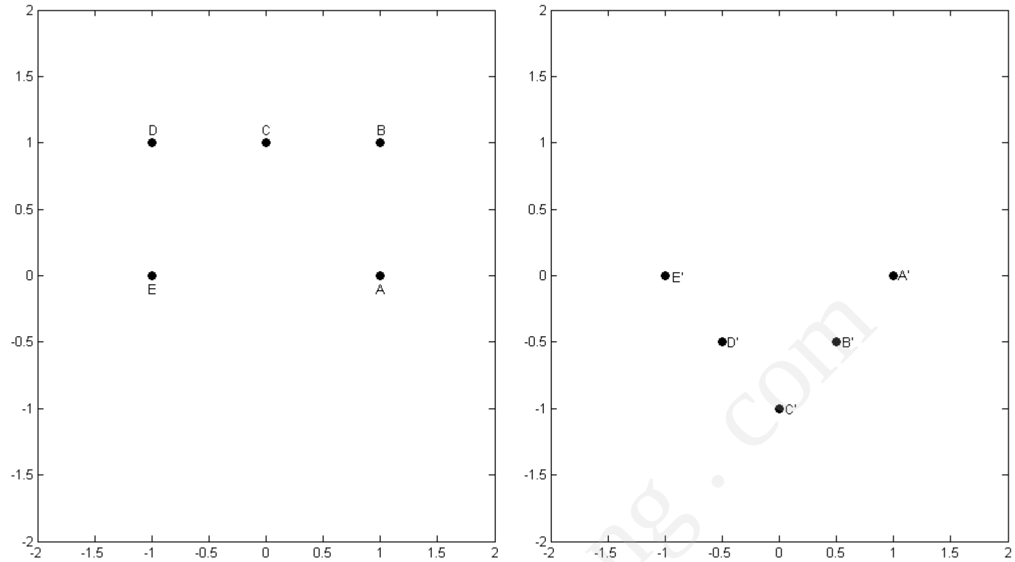
z	$w = i\,(z+i)$
1	$-1+i$
$1+i$	$-2+i$
i	-2
$-1+i$	$-2-i$
-1	$-1-i$



Hình 2.1.1

2.

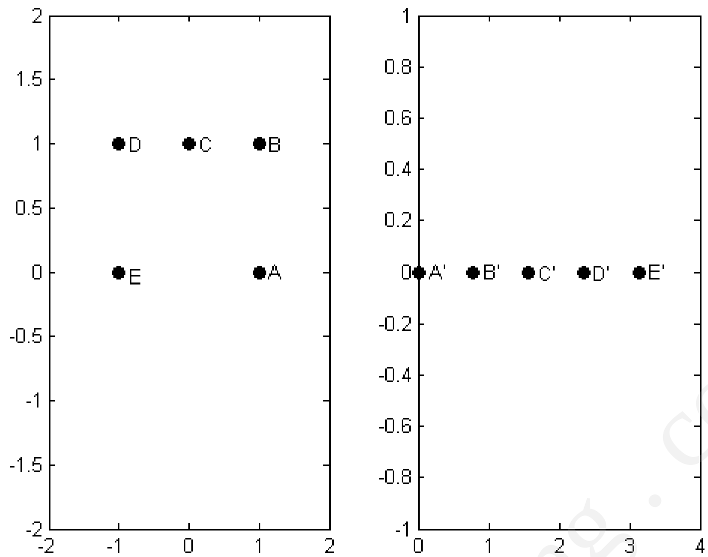
z	$w = \frac{i}{z}$
1	i
$1+i$	$\frac{1}{2}+\frac{i}{2}$
i	1
$-1+i$	$\frac{1}{2}-\frac{i}{2}$
-1	$-i$



Hình 2.1.2

3.

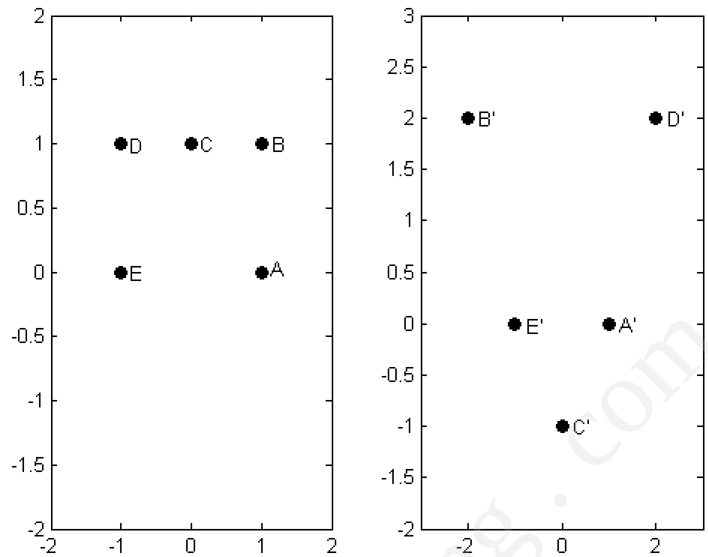
z	$w = \arg z$ giá trị chính
1	0
$1+i$	$\dfrac{\pi}{4}$
i	$\dfrac{\pi}{2}$
$-1+i$	$\dfrac{3\pi}{4}$
-1	π



Hình 2.1.3

4.

z	$w = z^3$
1	1
$1+i$	$-2+2i$
i	$-i$
$-1+i$	$2+2i$
-1	-1



Hình 2.1.4

Bài 2.1.6. Cho $f(z) = \dfrac{1}{z+i}$. Tìm

1. $f\left(\dfrac{1}{z}\right)$
2. $f(f(z))$
3. $f\left(\dfrac{1}{f(z)}\right)$
4. $f(z+i)$ theo dạng $u(x,y) + iv(x,y)$

Giải.

1. $f\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{1}{\frac{1}{z}+i} = \frac{z}{1+iz}$.

2. $f(f(z)) = f\left(\frac{1}{z+i}\right) = \frac{1}{\frac{1}{z+i}+i} = \frac{z+i}{iz}$.

3. $f\left(\frac{1}{f(z)}\right) = f(z+i) = \frac{1}{z+i+i} = \frac{1}{z+2i}$.

4. $f(z+i) = \frac{1}{z+i+i} = \frac{1}{x+i(y+2)} = \frac{x-i(y+2)}{x^2+(y+2)^2} = \frac{x}{x^2+(y+2)^2} - i\frac{y+2}{x^2+(y+2)^2}$.

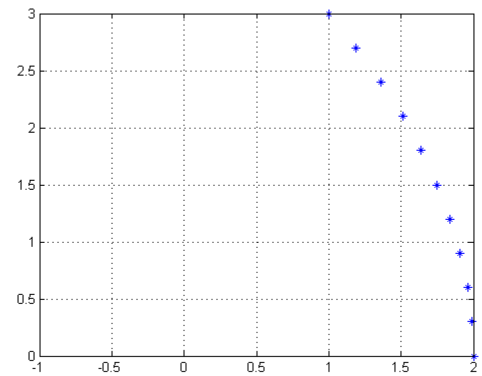
Bài 2.1.7. Xem Fig.2.1-2. Nếu chúng ta đã tìm ảnh của nhiều điểm dưới ánh xạ, thay vì bốn điểm đã dùng ở đây, chúng ta phải viết chương trình máy tính đơn giản trong MATLAB, hoặc một ngôn ngữ có thể so sánh được, không chỉ để tìm ảnh mà còn vẽ chúng trong mặt phẳng w.

1. Xem 10 điểm này nằm dọc theo một đường thẳng nối điểm B và C trong Fig.2.1-2: $1+0.1i, 1+0.2i, 1+0.3i, \ldots, 1+i$. Dùng chương trình máy tính, thu được ảnh của những điểm này, dùng lại $w = z^2 + z$, và vẽ chúng. Dùng tập tương tự của trục tọa độ đã dùng trong mặt phẳng w trong Fig.2.1-2.
2. Làm lại phần (1) nhưng dùng những điểm $i, 0.1+i, 0.2+i, 0.2+i, \ldots, 1+i$, những điểm nằm trên đường thẳng nối điểm D và C.

Giải.

1. Ta dùng đoạn lệnh:

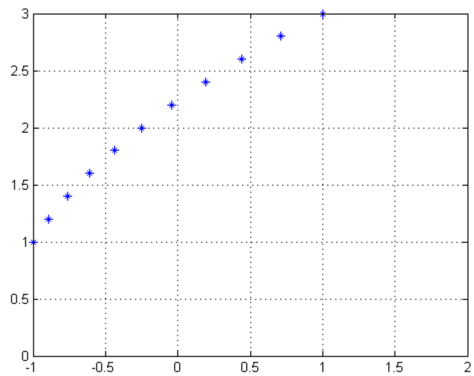
```
>> syms t
>> t=[0:0.1:1]*i;
>> z=1+t;
>> w=z.^2+z;
>> u=real(w);
>> v=imag(w);
>> plot(u,v,'*')
>> grid
>> axis([-1 2 0 3])
```



Hình 2.1.5

2. Ta dùng đoạn lệnh:

```
>> syms t
>> t=[0:0.1:1]*i;
>> z=i+t;
>> w=z.^2+z;
>> u=real(w);
>> v=imag(w);
>> plot(u,v,'*')
>> grid
>> axis([-1 2 0 3])
```



Hình 2.1.6

Bài 2.1.8. Dùng MATLAB thu được đồ thị ba chiều so sánh với Fig.2.1-3(a)-(c) nhưng dùng hàm $f(z) = \dfrac{1}{z - \frac{3i}{2}}$ và cho z những giá trị trên lưới trong miền của mặt phẳng phức định bởi $-1 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 1$.

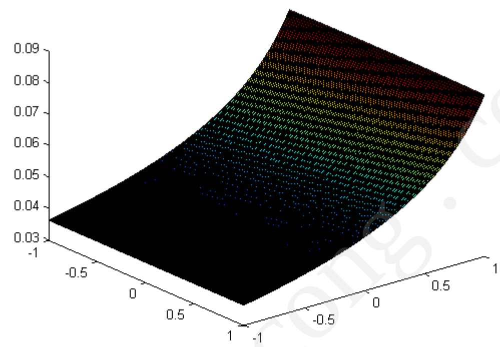
Giải. Ta có

$$f(z) = \frac{1}{x + i\left(y - \frac{3}{2}\right)} = \frac{x - i\left(y - \dfrac{3}{2}\right)}{x^2 + \left(y - \dfrac{3}{2}\right)^2} = \frac{x}{x^2 + \left(y - \dfrac{3}{2}\right)^2} - i\frac{y - \dfrac{3}{2}}{x^2 + \left(y - \dfrac{3}{2}\right)^2}.$$

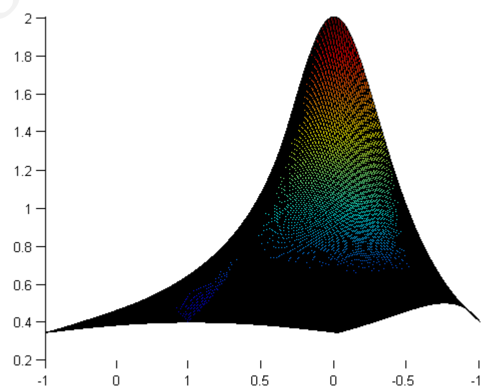
Vì thế

$$\left|\frac{1}{z - \dfrac{3i}{z}}\right| = \frac{1}{\sqrt{x^2 + \left(y - \dfrac{3}{2}\right)^2}},$$

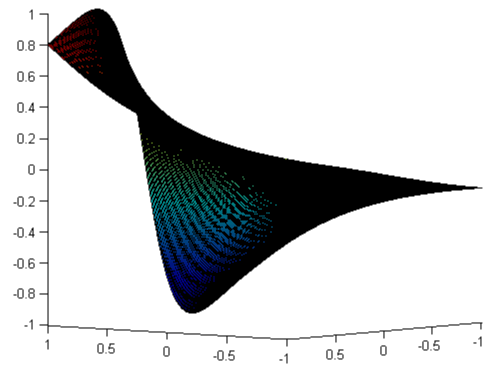
$$\mathrm{Re}\frac{1}{z-\dfrac{3i}{z}}=\frac{x}{x^2+\left(y-\frac{3}{2}\right)^2},\quad \mathrm{Im}\frac{1}{z-\dfrac{3i}{z}}=-\frac{y-\dfrac{3}{2}}{x^2+\left(y-\dfrac{3}{2}\right)^2}.$$



Hình 2.1.7: $\left|\dfrac{1}{z-\frac{3i}{2}}\right|$



Hình 2.1.8: $\mathrm{Im}\dfrac{1}{z-\frac{3i}{2}}$



Hình 2.1.9: $\mathrm{Re}\dfrac{1}{z-\frac{3i}{2}}$

2.2 Limits and Continuity

Bài 2.2.1.

1. Cho $f(z) = z$. Chứng minh giống như ví dụ 1 rằng $\lim_{z\to z_0} = z_0$, với z_0 là một số phức bất kì.

2. Dùng định nghĩa tính liên tục, giải thích tại sao $f(z)$ liên tục tại z_0.

Giải.

1. Ta có $f(z) = z$, $f_0 = z_0$. Với mọi $\varepsilon > 0$, thì tồn tại $\delta = \varepsilon$ sao cho

$$|f(z) - f_0| = |z - z_0| < \varepsilon$$

với mọi z thỏa $|z - z_0| < \varepsilon$. Vậy $\lim_{z\to z_0} = z_0$.

2. Với mọi $\varepsilon > 0$, thì tồn tại $\delta = \varepsilon$ sao cho

$$|f(z) - f(z_0)| = |z - z_0| < \varepsilon$$

với mọi z thỏa $|z - z_0| < \varepsilon$. Vậy $f(z)$ liên tục tại z_0.

Bài 2.2.2. Cho $f(z) = c$ với c là hằng số bất kì. Dùng định nghĩa giới hạn và liên tục, chứng minh rằng $f(z)$ liên tục với mọi z.

Giải. Với mọi$\varepsilon > 0$, thì tồn tại $\delta = \varepsilon$ sao cho

$$|f(z_1) - f(z_2)| = |c - c| = 0 < \varepsilon$$

với mọi $z_1,\ z_2$ thỏa $|z_1 - z_2| < \varepsilon$. Vậy $f(z)$ liên tục tại mọi z.

Bài 2.2.3. Giả định tính liên tục của hàm $f(z) = z$ và $f(z) = c$ với c là hằng số (đã chứng minh trong bài tập 1 và 2), dùng định lý 2 để chứng minh tính liên tục của những hàm sau. Cho $z = x + iy$.

1. $f(z) = iz^3 + i$, với mọi z
2. $f(z) = \dfrac{1+i}{z^2+9}$, với mọi $z \neq \pm 3i$
3. $f(z) = z^4 + \dfrac{1+i}{z^2+3z+2}$
4. $f(z) = |z+i| + (1+i)\,z$, với mọi z
5. $f(z) = z^2 + x^2 - y^2$, với mọi z
6. $f(z) = \dfrac{z-i}{\overline{z}-1}$, với mọi $z \neq -i$

Giải.

1. Do $iz^3 = izzz$ là tích của những hàm liên tục nên liên tục, i là hàm liên tục, nên $iz^3 + i$ là tổng của hai hàm liên tục nên là hàm liên tục với mọi z.

2. Do $1 + i$ là tổng của hai hàm liên tục nên liên tục, $z^2 + 9$ là tổng của những hàm liên tục nên liên tục ngoại trừ $z = \pm 3i$. Do đó

$$\frac{1+i}{z^2+9}$$

là tỉ số của hai hàm liên tục nên là hàm liên tục với mọi $z \neq \pm 3i$.

3. Do $z^4 = zzzz$ là tích của những hàm liên tục nên liên tục, $1 + i$ là tổng của hai hàm liên tục nên liên tục, $z^2 + 3z + 2$ là tổng của những hàm liên tục nên là hàm liên tục trên $\mathbb{C} \setminus \{-1, -2\}$,

$$\frac{1+i}{z^2+3z+2}$$

là tỉ số của hai hàm liên tục nên là hàm liên tục, là tổng của hai hàm liên tục nên

$$z^4 + \frac{1+i}{z^2+3z+2}$$

là hàm liên tục với mọi $z \neq -1, -2$.

4. Ta có $|z + i|$ là hàm hằng nên là hàm liên tục, $(1 + i)\, z$ là tích của hai hàm liên tục nên là hàm liên tục. Do đó$|z + i| + (1 + i)\, z$ là tổng của hai hàm liên tục nên là hàm liên tục với mọi z.

5. Ta có $z^2 = zz$ là tích của hai hàm liên tục nên là hàm liên tục, $x^2 - y^2$ là hàm hằng nên là hàm liên tục. Do đó $z^2 + x^2 - y^2$ là tổng của hai hàm liên tục nên là hàm liên tục với mọi z.

6. Ta có $z - i$ là tổng của hai hàm liên tục nên là hàm liên tục, $\overline{z} - i$ là tổng của hai làm liên tục nên là hàm liên tục ngoại trừ $z = -i$. Do đó $\dfrac{z-i}{\overline{z}-1}$ là tỉ số của hai hàm liên tục nên là hàm liên tục với mọi $z \neq -i$

Bài 2.2.4. Hàm $\dfrac{\sin x + i \sin y}{x - iy}$ rõ ràng không xác định tại $z = 0$. Chứng minh rằng nó không có giới hạn khi $z \to 0$ bằng cách so sánh những giá trị giả định bởi hàm này khi gốc tọa độ xấp xỉ ba đường: $y = 0, x > 0; x = 0, y > 0; x = y, x > 0$.

Giải.

- Xét $y = 0,\ x > 0$ thì

$$\frac{\sin x + i \sin y}{x - iy} = \frac{\sin x}{x}$$

và $\lim_{x \to 0^+} \dfrac{\sin x}{x} = 1$.

- Khi $x = 0,\ y > 0$ thì

$$\frac{\sin x + i \sin y}{x - iy} = -\frac{\sin y}{y}$$

và $\lim_{y \to 0^+} -\dfrac{\sin y}{y} = -1$.

- Tại $x = y,\ x > 0$ thì

$$\frac{\sin x + i \sin y}{x - iy} = \frac{(1+i)\sin x}{(1-i)\,x} = i\frac{\sin x}{x}$$

và $\lim_{x \to 0^+} i\dfrac{\sin x}{x} = i$.

Vì các giá trị giới hạn trên không bằng nhau nên hàm này không có giới hạn khi $z \to 0$.

Bài 2.2.5. Chứng minh rằng hàm sau liên tục tại $z = i$. Giải thích giống ví dụ 4.

$$f(z) = \frac{z-i}{z^2 - 3zi - 2}, z \neq i \text{ và } f(i) = i.$$

Giải. Ta thấy $f(i)$ xác định và bằng i. Ta có

$$f(z) = \frac{z-i}{(z-i)(z-2i)} = \frac{1}{z-2i} \longrightarrow \frac{1}{i-2i} = i = f(i)$$

khi $z \to i$. Vậy $f(z)$ liên tục tại $z = i$.

Bài 2.2.6.

1. Hàm $f(z) = \dfrac{z^2 - 5z + 6}{z^2 - 4}$ xác định với $z \neq \pm 2$. Hàm này nên định nghĩa như thế nào tại $z = 2$ để $f(z)$ liên tục tại 2.
2. Hàm $f(z) = \dfrac{z^4 + 10z^2 + 9}{z^2 - 4iz - 3}$ xác định với $z \neq 3i$ và $z \neq i$. Hàm này nên định nghĩa như thế nào tại $z = 3i$ và $z = i$ để $f(z)$ liên tục tại mọi nơi.

Giải.

1. Để hàm này liên tục tại 2 thì $f(z) \to f(2)$ khi $z \to 2$. Ta có

$$f(x) = \frac{z^2 - 5z + 6}{z^2 - 4} = \frac{(z-2)(z-3)}{(z-2)(z+2)} = \frac{z-3}{z+2} \to \frac{-1}{4}.$$

Vậy $f(2) = -1/4$ thì $f(z)$ liên tục tại 2.

2. Đầu tiên ta có $f(z)$ liên tục trên $\mathbb{C} \setminus \{i, 3i\}$. Mặt khác, ta có

$$f(z) = \frac{z^4 + 10z^2 + 9}{z^2 - 4iz - 3} = \frac{(z-i)(z+i)(z-3i)(z+3i)}{(z-i)(z-3i)} = (z+i)(z+3i).$$

Như vậy khi $z \to 3i$ thì $f(z) \to -24$, và khi $z \to i$ thì $f(z) \to -8$. Vậy $f(3i) = -24$ và $f(i) = -8$ thì $f(z)$ liên tục tại mọi nơi.

Bài 2.2.7. Trong bài này chúng ta chứng minh chính xác, dùng định nghĩa của giới giạn tại vô cùng, rằng

$$\lim_{z\to\infty} \frac{z}{1+z} = 1$$

1. Giải thích tại sao, cho $\varepsilon > 0$, chúng ta phải tìm một hàm $r(\varepsilon)$ sao cho $\left|\frac{1}{z+1}\right| < \varepsilon$ với mọi $|z| > r$.

2. Dùng một bất đẳng thức tam giác, chứng minh rằng bất đẳng thức này thỏa nếu ta cho $r > 1 + \frac{1}{\varepsilon}$.

Giải.

1. Theo định nghĩa, nếu

$$\lim_{z\to\infty} \frac{z}{1+z} = 1$$

với mọi $\varepsilon > 0$ cho trước, tồn tại $r(\varepsilon)$ sao cho

$$|f(z) - 1| = \left|\frac{z}{1+z} - 1\right| = \left|\frac{1}{z+1}\right| < \varepsilon$$

với mọi $|z| > r$. Vậy với mọi ε nếu ta tìm được một hàm $r(\varepsilon)$ sao cho $|1/(z+1)| < \varepsilon$ với mọi $|z| > r$ thì ta có điều phải chứng minh.

2. Theo bất đẳng thức tam giác, ta có

$$\left|\frac{1}{z+1}\right| = \frac{1}{|z+1|} < \frac{1}{|z| - |1|} < \frac{1}{r-1}$$

với $z \neq -1$. Do đó ra cần chọn sao cho $1/\left(r-1\right) < \varepsilon$ hay $r > 1/\varepsilon + 1$.

Bài 2.2.8. Bài toán sau dựa vào định lý 2(d). Cho $f\left(z\right) = z - i$.

1. Trong miền R cho bởi $|z| \leq 1$, ta có $|f\left(z\right)| \leq M$. Tìm M sao cho tồn tại z trong R sao cho$|f\left(z\right)| = M$. Nơi nào trong miền đóng này $|f\left(z\right)| = M$.
2. Làm lại câu (a) nhưng R là $|z-1| \leq 1$.
3. Làm lại câu (a) nhưng dùng hàm $\dfrac{1}{z-i}$ và miền R định nghĩa trong câu (b).

Giải.

1. Đặt $z = x + iy$. Ta có

$$\begin{aligned}
|f\left(z\right)| &= |x + \left(y-1\right)i| \\
&= \sqrt{x^2 + \left(y-1\right)^2} \\
&= \sqrt{x^2 + y^2 - 2y + 1} \\
&\leq \sqrt{1 + 2\sqrt{x^2+y^2} + 1} \\
&\leq 2
\end{aligned}$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = 0,\ y = -1$. Vậy $M = 2$, và khi $z = -i$ thì $f\left(z\right) = 2$.

2. Ta có

$$|z-1| \leq 1 \Leftrightarrow \sqrt{\left(x-1\right)^2 + y^2} \leq 1,$$

nên

$$1 \geq \frac{\left(x-1-y\right)^2}{2} \Rightarrow x - y \leq \sqrt{2} + 1,$$

do đó

$$\begin{aligned} |f(z)| &= \sqrt{x^2 + (y-1)^2} \\ &= \sqrt{(x-1)^2 + y^2 + 2(x-y)} \\ &\le \sqrt{1 + 2\left(\sqrt{2}+1\right)} \\ &= \sqrt{2} + 1. \end{aligned}$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi

$$x = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}},\ y = \frac{-1}{\sqrt{2}}.$$

Vậy $M = \sqrt{2} + 1$, và khi

$$z = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{-i}{\sqrt{2}}$$

thì $|f(z)| = M$.

3. Ta có

$$|z-1| \le \Leftrightarrow \sqrt{(x-1)^2 + y^2} \le 1.$$

Mặt khác,

$$\sqrt{(x-1)^2 + y^2} + \sqrt{x^2 + (y-1)^2} \ge \sqrt{(x-1-x)^2 + (y-y+1)^2} = \sqrt{2},$$

nên

$$\sqrt{x^2 + (y-1)^2} \ge \sqrt{2} - \sqrt{(x-1)^2 + y^2} \ge \sqrt{2} - 1,$$

suy ra

$$|f(z)| = \frac{1}{\sqrt{x^2 + (y-1)^2}} \le \frac{1}{\sqrt{2}-1}.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi

$$x = 1 - \frac{1}{\sqrt{2}},\ y = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Vậy $M = \dfrac{1}{\sqrt{2}-1}$, và khi

$$z = 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}}$$

thì $f(z) = M$.

Bài 2.2.9.

1. Biết rằng $f(z) = z^2$ liên tục mọi nơi, dùng định lý 2(c) để giải thích tại sao hàm thực xy liên tục mọi nơi.
2. Giải thích tại sao hàm$g(x, y) = xy + i(x + y)$ liên tục mọi nơi.

Giải.

1. Đặt $z = x + iy$ thì $f(z) = (x + iy)^2 = x^2 - y^2 + 2ixy$. Vì $f(z)$ liên tục mọi nơi nên theo định lý 2(c) thì hàm $2xy$ cũng liên tục mọi nơi. Vậy hàm xy liên tục mọi nơi.

2. Vì hàm xy và $x + y$ liên tục mọi nơi nên theo định lý 2(c) thì hàm $xy + i(x + y)$ liên tục mọi nơi.

Bài 2.2.10. Chứng minh bằng phản thí dụ, rằng tổng của hai hàm không có giới hạn tại điểm z_0, có thể có giới hạn tại điểm đó.

Giải. Xét hai hàm $f(z) = 1 + \dfrac{1}{z}$ và $g(z) = 1 - \dfrac{1}{z}$, thì $f(z)$ và $g(z)$ không có giới hạn tại $z_0 = 0$. Nhưng hàm $f(z) + g(z) = 2$ là hàm hằng, có giới hạn tại $z_0 = 0$.

Bài 2.2.11. Chứng minh bằng phản thí dụ, rằng tích của hai hàm không có giới hạn tại điểm z_0, có thể có giới hạn tại điểm đó.

Giải. Đặt

$$\begin{cases} g(z) = 1 & \text{, nếu } x \geq 0 \\ g(z) = -1 & \text{, nếu } x < 0 \end{cases}$$

Và

$$\begin{cases} h(z) = -1 & \text{, nếu } x \geq 0 \\ h(z) = 1 & \text{, nếu } x < 0 \end{cases}.$$

Ta thấy $g(z)$ và $h(z)$ không có giới hạn khi z dần về $z_0 = 0$. Mặt khác $g(z)\,h(z) = -1$ là hàm hằng với mọi z. Vậy đã đã đưa ra phản thí dụ, rằng tích của hai hàm không có giới hạn tại điểm z_0, có thể có giới hạn tại điểm đó.

Bài 2.2.12 Chứng minh rằng, trong trường hợp tổng quát, nếu $g(z)$có giới hạn khi z dần tới z_0 nhưng $h(z)$ không có giới hạn, thì $f(z) = g(z) + h(z)$ không có giới hạn khi z dần tới z_0.

Giải. Giả sử $f(z)$ có giới hạn khi z dần tới z_0, thì do $g(z)$ cũng có giới hạn khi z dần tới z_0, nên $f(z) - g(z)$ cũng có giới hạn khi z dần tới z_0. Mà $f(z) - g(z) = h(z)$. Do đó $h(z)$ cũng có giới hạn khi z dần tới z_0. Điều này mâu thuẫn với giả thiết $h(z)$ không có giới hạn. Vậy $f(z)$ không có giới hạn khi z dần tới z_0.

Bài 2.2.13. Bài toán này đối với những hàm biến phức có giới hạn của vô cùng (hoặc ∞). Chúng ta nói rằng $\lim_{z\to z_0} f(z) = \infty$ nếu, cho $\rho > 0$, tồn tại một $\delta > 0$ sao cho $|f(z)| > \rho$ với mọi $0 < |z - z_0| < \delta$. Nói cách khác, ta có thể làm độ lớn của $f(z)$ vượt quá số thực ρ cho trước nếu phần dư bất kì nơi đâu trong lân cận bị bỏ đi của z_0. Bán kính của lân cận này, δ, đặc trưng phụ thuộc vào ρ và co lại khi ρ tăng.

1. Dùng định nghĩa, chứng minh rằng $\lim_{z\to 0}\dfrac{1}{z} = \infty$. Chúng ta nên chọn δ là gì?

2. Làm lại bài toán trước, nhưng ở đây là $\dfrac{1}{(z-i)^2}$ khi $z \to i$.

3. Xem lại giải tích thực và giải thích tại sao ta không nói rằng $\lim_{x\to 0}\dfrac{1}{x} = \infty$. Tuyên bố chính xác là gì? Trái ngược điều này đến kết quả câu (a).

4. Định nghĩa dùng ở trên và trong câu (a) và (b) không thể dùng cho những hàm mà giới hạn tại vô cùng là vô cùng. Ở đây chúng ta thay đổi định nghĩa như sau: ta nói rằng $\lim_{z\to\infty} = \infty$ nếu, cho $\rho > 0$, có $r > 0$ sao cho $|f(z)| > \rho$ với mọi $r < |z|$. Nói cách khác, ta có thể làm cho độ lớn của $f(z)$ vượt quá số thực ρ cho trước nếu tại điểm ít nhất một khoảng cách r từ gốc tọa độ. Dùng định nghĩa, chứng minh rằng $\lim_{z\to\infty} z^2 = \infty$. Ta nên chọn r như thế nào?.

Giải.

1. Cho $\rho > 0$, tìm $\delta > 0$ sao cho $|f(z)| > \rho$ với mọi $0 < |z - 0| = |z| < \delta$. Ta có

$$|f(z)| = \left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{|z|} > \frac{1}{\delta},$$

như vậy ra chọn δ sao cho $1/\delta > \rho$, hay $\delta < 1/\rho$. Lúc đó, theo định nghĩa thì $\lim_{z\to 0} 1/z = \infty$.

2. Cho $\rho > 0$, tìm $\delta > 0$ sao cho $|f(z)| > \rho$ với mọi $0 < |z - i| < \delta$. Ta có

$$|f(z)| = \left|\frac{1}{(z-i)^2}\right| = \frac{1}{|z-i|^2} > \frac{1}{\delta^2},$$

như vậy ra chọn δ sao cho $1/\delta^2 > \rho$, hay $\delta < 1/\sqrt{\rho}$. Lúc đó, theo định nghĩa thì

$$\lim_{z\to i} \frac{1}{(z-i)^2} = \infty.$$

3. Trong giải tích thực, giới hạn của một hàm xác định phát biểu rằng nếu giới hạn trái và giới hạn phải tồn tại, và hai giới hạn này bằng nhau. Ta không thể khẳng định $\lim_{x\to 0} 1/x = \infty$ vì ta không biết chính xác x tiến về lân cận trái hay lân cận phải của 0, vì

$$\begin{cases} \lim_{x\to 0^+} \dfrac{1}{x} & = +\infty \\ \lim_{x\to 0^-} \dfrac{1}{x} & = -\infty \end{cases}.$$

4. Cho $\rho > 0$, ta đi tìm $r > 0$ sao cho $|f(z)| > \rho$ với mọi $|z| > r$. Ta có

$$|f(z)| = \left|z^2\right| = |z|^2 > r^2,$$

như vậy ta chọn r sao cho $r^2 > \rho$, hay $r > \sqrt{\rho}$. Lúc đó, theo định nghĩa thì $\lim_{z\to\infty} z^2 = \infty$.

2.3 The Complex Derivative

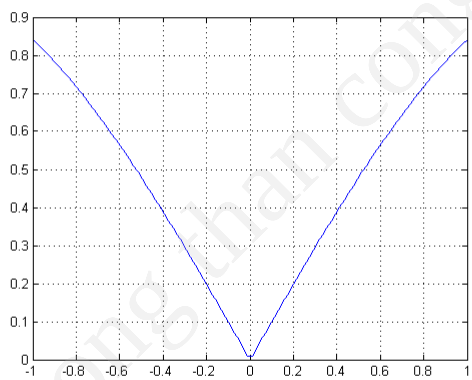
Bài 2.3.1. Vẽ hàm thực $f(x)$ sau trên khoảng xác định. Nên vẽ đồ thị bằng MATLAB hoặc một phần mềm vẽ hình khác. Trong mỗi trường hợp, tìm một giá trị của x nơi mà đạo hàm tại x không tồn tại. Hàm có liên tục tại điểm đó không. Không cần thiết chứng minh.

1. $f(x) = \sin|x|, -1 \le x \le 1$
2. $f(x) = (x-1)^{2/3}$ (dùng căn thực) cho $0 \le x \le 2$

Giải.

1. Hàm $f(x)$ ở đây không có đạo hàm tại 0, liên tục tại 0. Ta sử dụng đoạn lệnh:

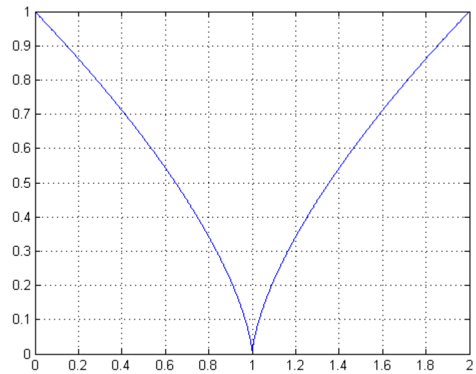
```
>> syms x
>> x=linspace(-1,1,100);
>> y=sin(abs(x));
>> plot(x,y)
>> grid
```



Hình 2.3.1: $f(x) = \sin|x|$

2. Hàm $f(x)$ ở đây không có đạo hàm tại 1, liên tục tại 1. Ta sử dụng đoạn lệnh:

```
>> syms x
>> x=linspace(0,2,1000);
>> y=(abs(x-1)).^(2/3);
>> plot(x,y)
>> grid
```



Hình 2.3.2: $f(x) = (x-1)^{2/3}$

Bài 2.3.2. Trong ví dụ 1, ta đã chứng minh rằng $f(z) = \overline{z}$ thì không có đạo hàm. Thu được kết quả này bằng cách dùng định nghĩa trong Eq. (2.3-3) và chứng minh rằng kết quả này phải tính $\lim_{\Delta z \to 0} \text{cis}{-2} \arg \Delta z$. Tại sao giới hạn này không tồn tại.

Giải. Ta có

$$\begin{aligned}
\lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z+\Delta z) - f(z)}{\Delta z} &= \frac{\overline{z+\Delta z} - \overline{z}}{\Delta z} \\
&= \frac{\overline{\Delta z}}{\Delta z} \\
&= \frac{|\Delta z| \,\text{cis}(-\arg \Delta z)}{|\Delta z| \,\text{cis}(\arg \Delta z)} \\
&= \text{cis}(-2\arg \Delta z).
\end{aligned}$$

Vì giới hạn$\arg \Delta z$ không xác định khi $\Delta z \to 0$.Vậy $f(z) = \overline{z}$ không tồn tại.

Bài 2.3.3. Với những giá trị nào của số phức z thì những hàm sau có đạo hàm.

1. c (const)

2. $1 + iy$

3. z^6

4. z^{-5}

5. $y + ix$

6. $xy\,(1+i)$

7. $x^2 + iy$

8. $x + i\,|y|$

9. $e^x + ie^{2y}$

10. $y - 2xy + i\,(-x + x^2 - y^2)$

11. $(x-1)^2 + iy^2 + z^2$

12. $f(z) = \cos x - i \sinh y$

13. $f(z) = \dfrac{1}{z}$ với $|z| > 1$ và $f(z) = z$ với $|z| \le 1$

Giải. Đặt $f = u + iv$, với u, v là hàm thực.

1. Ở đây

$$u = c,\ \ v = c.$$

Ta có

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0 = \frac{\partial v}{\partial y},\quad \frac{\partial v}{\partial x} = 0 = -\frac{\partial u}{\partial y}.$$

Hàm này thỏa hệ thức Cauchy-Riemann, nên đạo hàm tồn tại mọi nơi.

2. Ở đây

$$u = 1,\ v = y.$$

Ta có

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0 \neq \frac{\partial v}{\partial y} = 1, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = 0 = -\frac{\partial u}{\partial y}.$$

Hàm này không thỏa hệ thức Cauchy-Riemann tại mọi nơi, nên đạo hàm không tồn tại mọi nơi.

3. Ta có z^6 là tích của hàm z có đạo hàm khắp nơi. Vậy hàm này có đạo hàm tại mọi nơi.

4. Ta có z^{-5} là tích của các hàm z^{-1} có đạo hàm khắp nơi trong miền xác định. Vậy hàm này có đạo hàm tồn tại mọi nơi trừ $z = 0$.

5. Ở đây

$$u = y,\ v = x.$$

Ta có

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0 = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = 1 \neq -\frac{\partial u}{\partial y} = -1$$

Hàm này không thỏa hệ thức Cauchy-Riemann, nên đạo hàm không tồn tại mọi nơi.

6. Ở đây

$$u = xy,\ v = xy.$$

Ta có

$$\frac{\partial u}{\partial x} = y, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = x, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = y, \quad -\frac{\partial u}{\partial y} = -x.$$

Hàm này thỏa hệ thức Cauchy-Riemann khi và chỉ khi $x = y = 0$, nên đạo hàm tồn tại tại $z = 0$.

7. Ở đây

$$u = x^2,\ v = y.$$

Ta có

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = 1, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = 0 = -\frac{\partial u}{\partial y}.$$

Hàm này thỏa hệ thức Cauchy-Riemann khi và chỉ khi $x = \dfrac{1}{2}$, vậy đạo hàm tồn tại tại $\mathrm{Re}z = \dfrac{1}{2}$.

8.

- Nếu $y > 0$ thì $z = x + iy$. Đặt $u = x,\ v = y$. Ta có

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 1 = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = 0 = -\frac{\partial u}{\partial y}.$$

  Hàm này thỏa hệ thức Cauchy-Riemann, vậy đạo hàm tồn tại mọi $y > 0$ hay $\mathrm{Im}z > 0$.

- Nếu $y < 0$ thì $z = x - iy$. Đặt $u = x,\ v = -y$. Ta có

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 1 \neq \frac{\partial v}{\partial y} = 1, \frac{\partial v}{\partial x} = 0 = -\frac{\partial u}{\partial y}.$$

  Hàm này không thỏa hệ thức Cauchy-Riemann, vậy đạo hàm không tồn tại mọi nơi.

- Nếu $y = 0$ thì $z = x$, $\Delta z = i\Delta y$. Ta có

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{x + i\,|\Delta y| - x}{i\Delta y} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{|\Delta y|}{\Delta y}.$$

  Vì

$$\begin{cases} \frac{|\Delta y|}{\Delta y} = 1 & ,\ \text{nếu } \Delta y > 0 \\ \frac{|\Delta y|}{\Delta y} = -1 & ,\ \text{nếu } \Delta y < 0 \end{cases}$$

nên giới hạn này không tồn tại nếu $y = 0$. Vậy hàm này có đạo hàm tại những nơi mà $\mathrm{Im}z > 0$.

9. Ở đây

$$u = e^x,\ v = e^{2y}.$$

Ta có

$$\frac{\partial u}{\partial x} = e^x, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = 2e^{2y}, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = 0 = -\frac{\partial u}{\partial y}.$$

Hàm này thỏa hệ thức Cauchy-Riemann khi $e^x = 2e^{2y}$, vậy đạo hàm tồn tại trên đường $y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\ln 2$.

10. Ở đây

$$u = y - 2xy,\ v = -x + x^2 - y^2.$$

Ta có

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -2y = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = -1 + 2x = -\frac{\partial u}{\partial y}.$$

Hàm này thỏa hệ thức Cauchy-Riemann, vậy đạo hàm tồn tại mọi nơi.

11. Vì z^2 có đạo hàm tại mọi nơi nên ta cần tìm những nơi mà $(x-1)^2 + iy^2$ có đạo hàm. Đặt $u = (x-1)^2,\ v = y^2$. Ta có

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x - 2, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = 2y, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = 0 = -\frac{\partial u}{\partial y}.$$

Hàm này thỏa hệ thức Cauchy-Riemann khi $2x - 2 = y$, vậy đạo hàm tồn tại trên đường $y = x - 1$.

12. Ở đây

$$u = \cos x,\ v = \sinh y.$$

Ta có
$$\frac{\partial u}{\partial x} = \sin x, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = -\cosh y, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = 0 = -\frac{\partial u}{\partial y}.$$
Hàm này thỏa hệ thức Cauchy-Riemann khi $\sin x = \cosh y$, vậy đạo hàm tồn tại tại những điểm mà $\sin x = \cosh y$.

13.

- Nếu $f(z) = \frac{1}{z}, |z| > 1$ thì $f'(z) = \frac{-1}{z^2}$
- Nếu $f(z) = z, |z| < 1$ thì $f'(z) = 1$

Do $1/z = z$ chỉ khi $z = \pm 1$, nên trên đường tròn $|z| = 1$ thì hàm $f(z)$ không liên tục ngoại trừ tại $z = \pm 1$, nên không có đạo hàm trên đường tròn $|z| = 1$ ngoại trừ tại $z = \pm 1$. Bây giờ ta tính $f'(z)$ tại 1. Ta có

$$\frac{f(1+\Delta x) - f(1)}{\Delta x} \to \begin{cases} 1 & , \text{ nếu } \Delta x \to 0^- \\ -1 & , \text{ nếu } \Delta x > 0^+ \end{cases},$$

giới hạn này không tồn tại, nên hàm không có đạo hàm tại $z = 1$.Tương tự, hàm không có đạo hàm tại $z = -1$. Vậy $f(z)$ có đạo hàm tại mọi z ngoại trừ trên đường tròn $|z| = 1$.

Bài 2.3.4. Tìm hai hàm theo z, không có đạo hàm mọi nơi trong mặt phẳng phức, nhưng tổng của chúng không là hằng số có đạo hàm mọi nơi.

Giải. Đặt $f(z) = z + \overline{z}$ và $g(z) = z - \overline{z}$. Ta thấy z có đạo hàm tại mọi nơi nhưng $\overline{z}$ không có đạo hàm tại mọi nơi, vì thế $f(z)$ và $g(z)$ không có đạo hàm tại mọi nơi, nhưng $f(z) + g(z) = 2z$ có đạo hàm tại mọi nơi.

Bài 2.2.5. Đặt $f(z) = u(x,y) + v(x,y)$. Giả sử đạo hàm cấp hai $f''(z)$ tồn tại. Chứng minh rằng

$$f''(z) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + i\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \text{ và } f''(x) = -\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - i\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}$$

Giải. Nếu d^2f/dz^2 tồn tại thì df/dz phải tồn tại. Ta có

$$\frac{df}{dz} = \frac{\partial u}{\partial x}(x,y) + i\frac{\partial v}{\partial x}(x,y).$$

Do đó

$$\begin{aligned}
\frac{d^2 f}{dz^2} &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\frac{\partial u}{\partial x}(x+\Delta x, y) + i\frac{\partial v}{\partial x}(x+\Delta x, y) - \frac{\partial u}{\partial x}(x,y) - i\frac{\partial v}{\partial x}(x,y)}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\frac{\partial u}{\partial x}(x+\Delta x, y) - \frac{\partial u}{\partial x}(x,y)}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{i\frac{\partial v}{\partial x}(x+\Delta x, y) - i\frac{\partial v}{\partial x}(x,y)}{\Delta x} \\
&= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + i\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}.
\end{aligned}$$

Tương tự, ta có

$$\frac{df}{dz} = \frac{\partial v}{\partial y}(x,y) - i\frac{\partial u}{\partial y}(x,y).$$

Do đó

$$\begin{aligned}
\frac{d^2 f}{dz^2} &= \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\frac{\partial v}{\partial y}(x, y+\Delta y) - i\frac{\partial u}{\partial y}(x, y+\Delta y) - \frac{\partial v}{\partial y}(x,y) + i\frac{\partial u}{\partial y}(x,y)}{i\Delta y} \\
&= \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\frac{\partial v}{\partial y}(x, y+\Delta y) - \frac{\partial v}{\partial y}(x,y)}{i\Delta y} - \lim_{\Delta y \to 0} \frac{i\frac{\partial u}{\partial y}(x, y+\Delta y) - i\frac{\partial u}{\partial y}(x,y)}{i\Delta y} \\
&= -\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - i\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}.
\end{aligned}$$

Bài 2.3.6. Chứng minh rằng nếu $f'(z_0)$ tồn tại, thì $f(z)$ phải liên tục tại z_0.

Giải. Ta chứng minh

$$\lim_{\Delta z \to 0} f\left(z_0 + \Delta z\right) = f\left(z_0\right).$$

Ta có

$$\lim_{\Delta z \to 0} \left[\frac{f\left(z_0 + \Delta z\right) - f\left(z_0\right)}{\Delta z}\right] \cdot \lim_{\Delta z \to 0} \Delta z = f'\left(z_0\right) \lim_{\Delta z \to 0} \Delta z = 0,$$

và

$$\lim_{\Delta z \to 0} \left[\frac{f\left(z_0 + \Delta z\right) - f\left(z_0\right)}{\Delta z}\right] \lim_{\Delta z \to 0} \Delta z = \lim_{\Delta z \to 0} \left[f\left(z_0 + \Delta z\right) - f\left(z_0\right)\right].$$

Do đó

$$\lim_{\Delta z \to 0} \left[f\left(z_0 + \Delta z\right) - f\left(z_0\right)\right] = 0$$

hay

$$\lim_{\Delta z \to 0} f\left(z_0 + \Delta z\right) = f\left(z_0\right).$$

Ta có điều phải chứng minh.

2.4 The Derivative and Analyticity

Bài 2.4.1. Chứng tỏ rằng hàm $f(z) = xy + i(xy + x)$ có đạo hàm tại chính xác một điểm. Sau khi xác định được điểm này, tìm đạo hàm tại đó và cho biết giá trị này. Hàm này có giải tích tại điểm đó không.

Giải. Đặt

$$u = xy,\ v = xy + x,$$

ta có

$$\frac{\partial u}{\partial x} = y, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = x, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = y + 1, \quad -\frac{\partial u}{\partial y} = -x.$$

Hàm này thỏa điều kiện Cauchy-Riemann khi

$$\begin{cases} y & = x \\ y+1 & = -x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x & = \frac{-1}{2} \\ y & = \frac{-1}{2} \end{cases}$$

Vậy hàm này có đạo hàm tại duy nhất $z_0 = -1/2 - i/2$, và

$$f'(z_0) = \frac{\partial u}{\partial x}\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right) + i\frac{\partial v}{\partial x}\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2} + \frac{i}{2}.$$

Hàm này không giải tích tại z_0 vì đạo hàm của nó không tồn tại trong lân cận của z_0.

Bài 2.4.2.

1. Tìm đạo hàm của $f(z) = \dfrac{1}{z} + (x-1)^2 + ixy$ tại những điểm mà đạo hàm tồn tại. Cho biết các giá trị này.

2. Nơi nào hàm này giải tích?

Giải.

1. Ta thấy $1/z$ có đạo hàm bằng $-1/z^2$ tại mọi $z \neq 0$. Ta tìm đạo hàm của $(x-1)^2 + ixy$. Đặt

$$u = (x-1)^2, \ v = xy$$

Ta có

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x - 2, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = x, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = y, \quad -\frac{\partial u}{\partial y} = 0.$$

Hàm này thỏa điều kiện Cauchy-Riemann khi

$$\begin{cases} 2x-2 & = x \\ y & = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x & = 2 \\ y & = 0 \end{cases}.$$

Do đó hàm $f(z)$ có đạo hàm tại duy nhất $z_0 = 2$, và

$$f'(z_0) \quad = \quad -\frac{1}{z^2} + \frac{\partial u}{\partial x}(2,0) + i\frac{\partial v}{\partial x}(2,0) = -\frac{1}{4} + 2 + i.0 = \frac{3}{4}.$$

2. Hàm đã cho không giải tích tại mọi nơi vì đạo hàm của nó không tồn tại trong lân cận của z_0.

Bài 2.4.3.

1. Nơi nào hàm $f(z) = z^3 + z^2 + 1$ giải tích?.
2. Tìm biểu thức $f'(z)$ và tính đạo hàm tại $1 + i$.

Giải.

1. Hàm $f(z) = z^3 + z^2 + 1$ là tổng của những hàm nguyên và giải tích tại mọi nơi.

2. Ta có $f'(z) = 3z^2 + 2z$, và $f'(1+i) = 3(1+i)^2 + 2(1+i) = 2 + 8i$.

Bài 2.4.4.

1. Nơi nào hàm $f(z) = z^2 + (x-1)^2 + i(y-1)^2$ có đạo hàm.
2. Nơi nào hàm này giải tích? Giải thích.
3. Tìm công thức đạo hàm của biểu thức này tại những điểm đạo hàm tồn tại, và dùng công thức này để tìm giá trị của đạo hàm tại điểm $z = 1 + i$.

Giải.

1. Ta thấy z^2 có đạo hàm tại mọi nơi. Xét hàm

$$(x-1)^2 + i\,(y-1)^2\,.$$

Đặt

$$u = (x-1)^2\,,\ v = (y-1)^2\,,$$

ta có

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x-2, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = 2y-2, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = 0 = \frac{\partial u}{\partial y}.$$

Hàm này thỏa điều kiện Cauchy-Riemann khi $2x-2 = 2y-2$, hay $x = y$. Do đó $f\,(z)$ có đạo hàm trên đường thẳng $x = y$.

2. Hàm này không giải tích tại mọi nơi, vì với mỗi z_0 nằm trên đường thẳng $x = y$ thì hàm không có đạo hàm tại mỗi lân cận của z_0.

3. Ta có

$$f'\,(z) = 2z + \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = 2z + 2x - 2 + i.0 = 2z + 2x - 2,$$

và

$$f'\,(1+i) = 2\,(1+i) + 2.1 - 2 = 2 + 2i.$$

Bài 2.4.5.

1. Chứng minh rằng $f\,(z) = \dfrac{1}{e^{2x}\cos 2y + ie^{2x}\sin 2y}$ là hàm nguyên. Chú ý tới khả năng mẫu số triệt tiêu.
2. Tìm biểu thức đạo hàm của hàm này và cho biết giá trị của đạo hàm tại $1 + i\dfrac{\pi}{4}$.

Giải.

1. Ta có

$$\begin{aligned}\frac{1}{e^{2x}\cos 2y + ie^{2x}\sin 2y} &= \frac{1}{e^{2x}}\frac{\cos 2y - i\sin 2y}{(\cos 2y + i\sin 2y)(\cos 2y - i\sin 2y)}\\ &= e^{-2x}\cos 2y - ie^{-2x}\sin 2y.\end{aligned}$$

Đặt

$$u = e^{-2x}\cos 2y,\ v = -e^{-2x}\sin 2y,$$

ta có

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -2e^{-2x}\cos 2y = \frac{\partial v}{\partial y},\quad \frac{\partial v}{\partial x} = 2e^{-2x}\sin 2y = -\frac{\partial u}{\partial y}.$$

Hàm này thỏa hệ thức Cauchy-Riemann tại mọi nơi nên là hàm nguyên.

2. Ta có

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = -2e^{-2x}\cos 2y + 2ie^{-2x}\sin 2y,$$

và

$$f'\left(1 + i\frac{\pi}{4}\right) = -2e^{-2}\cos\frac{\pi}{2} + 2ie^{-2}\sin\frac{\pi}{2} = 2ie^{-2}.$$

Bài 2.4.6.

1. Chứng minh rằng $z[\cos x\cosh y - i\sin x\sinh y]$ là hàm nguyên.

2. Tìm biểu thức đạo hàm của hàm này và cho biết giá trị của đạo hàm tại i.

Giải.

1. Vì z là hàm nguyên, nên ta chỉ cần chứng minh $\cos x \cosh y - i \sin x \sinh y$ là hàm nguyên. Đặt

$$u = \cos x \cosh y, \; v = -\sin x \sinh y$$

Ta có

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\sin x \cosh y = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = -\cos x \sinh y = -\frac{\partial u}{\partial y}.$$

Hàm này thỏa hệ thức Cauchy-Riemann tại mọi nơi nên là hàm nguyên, vậy

$$z \left[\cos x \cosh y - i \sin x \sinh y\right]$$

là hàm nguyên.

2. Ta có

$$\begin{aligned} f'(z) &= \left[\cos x \cosh y - i \sin x \sinh y\right] + z \frac{d}{dz} \left[\cos x \cosh y - i \sin x \sinh y\right] \\ &= \left[\cos x \cosh y - i \sin x \sinh y\right] + z \left(\frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x}\right) \\ &= \left[\cos x \cosh y - i \sin x \sinh y\right] + z \left(-\sin x \cosh y - i \cos x \sinh y\right), \end{aligned}$$

và

$$\begin{aligned} f'(i) &= \left[\cos 0 \cosh 1 - i \sin 0 \sinh 1\right] + i \left(-\sin 0 \cosh 1 - i \cos 0 \sinh 1\right) \\ &= \frac{e + e^{-1}}{2} + \frac{e - e^{-1}}{2} = e. \end{aligned}$$

Bài 2.4.7. Tìm đạo hàm tại $z = \pi + 2i$ của $\left[\sin x \cosh y + i \cos x \sinh y\right]^5$.

Giải. Đặt

$$u = \sin x \cosh y, \; v = \cos x \sinh y.$$

Ta có
$$\frac{\partial u}{\partial x} = \cos x \cosh y = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = -\sin x \sinh y = -\frac{\partial u}{\partial y}.$$
Hàm $\sin x \cosh y + i \cos x \sinh y$ thỏa hệ thức Cauchy-Riemann tại mọi nơi nên là hàm nguyên, suy ra $[\sin x \cosh y + i \cos x \sinh y]^5$ là hàm nguyên. Ta có

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dz}\left[\sin x \cosh y + i \cos x \sinh y\right]^5 \\
&= 5\left[\sin x \cosh y + i \cos x \sinh y\right]^4 \cdot \frac{d}{dz}\left[\sin x \cosh y + i \cos x \sinh y\right] \\
&= 5\left[\sin x \cosh y + i \cos x \sinh y\right]^4 \cdot \left(\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}\right) \\
&\qquad = 5\left[\sin x \cosh y + i \cos x \sinh y\right]^4 . \left(\cos x \cosh y - i \sin x \sinh y\right) \qquad ,
\end{aligned}$$

nên

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dz}\left[\sin \pi \cosh 2 + i \cos \pi \sinh 2\right]^5 \\
&\qquad = 5\left[\sin \pi \cosh 2 + i \cos \pi \sinh 2\right]^4 . \left(\cos \pi \cosh 2 - i \sin \pi \sinh 2\right) \\
&\qquad\quad = 5\left(\sinh 2\right)^4\left(-\cosh 2\right) \qquad .
\end{aligned}$$

Bài 2.4.8.

1. Nơi nào hàm $f(z) = \dfrac{z}{(1+iz)^4}$ giải tích?.

2. Tìm $f'(-i)$.

Giải.

1. Ta thấy z là hàm nguyên và $1 + iz$ là tổng của những hàm nguyên nên cũng là hàm nguyên, vậy $f(z)$ giải tích tại mọi nơi trừ $z = -i$ (nơi hàm không xác định).

2. Ta có

$$f'(z) = \frac{(1+iz)^4 - z.4(1+iz)^3.i}{(1+iz)^8},$$

và

$$f'(-i) \quad = \quad \frac{2^4 + i^2.4.2^3}{2^8} = \frac{-1}{16}.$$

Bài 2.4.9. Dùng quy tắc L'hopital để tính các giới hạn sau

1. $\dfrac{(z-i)+(z^2+1)}{z^2-3iz-2}$ khi $z \to i$
2. $\dfrac{(z^3+i)}{(z^2+1)z}$ khi $z \to i$

Giải.

1. $\lim_{z\to i} \dfrac{(z-i)+(z^2+1)}{z^2-3iz-2} = \lim_{z\to i} \frac{1+2z}{2z-3i} = \frac{1+2i}{-i} = i-2.$

2. $\lim_{z\to i} \dfrac{(z^3+i)}{(z^2+1)z} = \lim_{z\to i} \frac{3z^2}{3z^2+1} = \frac{-3}{-3+1} = \frac{3}{2}.$

Bài 2.4.10. Nếu $g(z)$ có đạo hàm tại $z_0$và $h(z)$ không có đạo hàm tại z_0, giải tích tại sao $g(z)+h(z)$ không thể có đạo hàm tại z_0.

Giải. Đặt $f(z) = g(z) + h(z)$. Giả sử $f(z)$ có đạo hàm tại z_0. Vì $f(z)$ và $g(z)$ có đạo hàm tại z_0 nên $f(z) - g(z)$ có đạo hàm tại tại z_0. Nhưng $f(z_0) - g(z_0) = h(z_0)$, có nghĩa là $h(z)$ có đạo hàm tại z_0. Điều này mâu thuẫn với giả thiết, vậy $g(z)+h(z)$ không thể có đạo hàm tại z_0.

Bài 2.4.11. Tìm hai hàm, mỗi hàm không giải tích tại mọi nơi, những tổng của chúng là một hàm nguyên. Vì vậy tổng của hai hàm không giải tích có thể giải tích.

Giải. Đặt $g(z) = x + 2iy$ và $h(z) = -iy$, ta thấy $g(z)$ và $h(z)$ không thỏa điều kiện Cauchy-Riemann nên không có đạo hàm tại mọi nơi, và không giải tích tại mọi nơi. Nhưng $g(z) + h(z) = x + iy$ có đạo hàm tại mọi nơi nên là hàm nguyên.

Bài 2.4.12. Giả sử $g(z)$ là hàm giải tích và không bằng 0 tại z_0 , và $h(z)$ là hàm không giải tích tại z_0. Chứng minh rằng $f(z) = g(z)h(z)$ không thể là hàm giải tích tại điểm này.

Giải. Giả sử $f(z)$ là hàm giải tích tại z_0, vì $g(z)$ cũng là hàm giải tích tại z_0. Nên $h(z) = f(z)/g(z)$ cùng là hàm giải tích tại z_0. Điều này mâu thuẫn với giả thiết, vậy $f(z)$ không thể là hàm giải tích tại z_0.

Bài 2.4.13. Tìm $g(z)$ và $h(z)$ không giải tích tại mọi nơi trong mặt phẳng phức sao cho tích của chúng là hàm nguyên.

Giải. Cho $g(z) = z/x = 1 + iy/x$, với $x \neq 0$ và $h(z) = x$. Ta thấy $g(z)$ và $h(z)$ không thỏa điều kiện Cauchy-Riemann nên không có đạo hàm tại mọi nơi, và không giải tích tại mọi nơi. Nhưng $g(z)h(z) = x + iy$ có đạo hàm tại mọi nơi nên là hàm nguyên.

Bài 2.4.14.

1. Cho $\phi(x, y)$ là hàm có đạo hàm riêng theo x và y tồn tại trong miền D. Giả sử $\dfrac{\partial \phi}{\partial x} = 0$, $\dfrac{\partial \phi}{\partial y} = 0$ trong D. Chứng minh rằng $\phi(x, y)$ là hằng trong D.
2. Dùng tiêu chuẩn Cauchy–Riemann chứng minh rằng nếu hàm $f(z)$ giải tích và $\mathrm{Im}(f(z)) \equiv 0$ hoặc $\mathrm{Re}(f(z)) \equiv 0$ trong miền mở D thì f là hàm hằng trong D.

Giải.

1. Đầu tiên ta sẽ chứng minh rằng $\phi(x,y)$ hằng trong mọi quả cầu mở trong D. Giả sử B là quả cầu mở trong D. Vì $\dfrac{\partial \phi}{\partial x}=0$ và $\dfrac{\partial \phi}{\partial y}=0$ trong B nên ϕ với hai điểm (x_1,y_1) và (x_2,y_2) trong B, ta có

$$\phi(x_1,y_1)=\phi(x_2,y_1)=\phi(x_2,y_2).$$

Bây giờ giả sử (x_1,y_1) và (x_2,y_2) nằm trong D, lúc đó có một đường đi liên tục $\gamma(t)$, $t\in[0,1]$ trong D nối hai điểm đó lại. Ta có $\{B(\gamma(t),r_t)\}_{t\in[0,1]}$, là một họ quả cầu mở trong D và $\{\gamma^{-1}(B(\gamma(t),r_t))\}_{t\in[0,1]}$, là một họ phủ mở của $[0,1]$, lúc đó có một số $\delta>0$ sao cho với mọi $a\in[0,1-\delta]$ thì có một $t\in[0,1]$ sao cho

$$[a,a+\delta]\subset\gamma^{-1}(B(\gamma(t),r_t)).$$

Thật vậy nếu có một dãy $\delta_n<1/n$, với mọi $n\in\mathbb{N}$ và a_n sao cho $[a_n,a_n+\delta_n]$ không nằm trong một tập nào của phủ mở trên. Do $[0,1]$ compact nên có dãy con a_{n_k} hội tụ về $a\in[0,1]$. Do $a\in[0,1]$ nên có một số $r>0$ sao cho

$$(a-r,a+r)\cap[0,1]\subset\gamma^{-1}(B(\gamma(a),r_a)).$$

Lúc này có một số n_k đủ lớn sao cho $a_{n_k}\in\left(a-\frac{r}{2},a+\frac{r}{2}\right)$ và $\delta_{n_k}<r/2$. Khi đó với mọi $t\in[a_{n_k},a_{n_k}+\delta_{n_k}]$ thì

$$|t-a|\le|t-a_{n_k}|+|a_{n_k}-a|<\frac{r}{2}+\frac{r}{2}=r,$$

điều này mẫu thuẫn với điều giả sử phía trên. Do đó ta phải có một phân hoạch của $[0,1]$ là $\{t_{0,}t_1,,\dots t_m\}$với $t_{i+1}-t_i<\delta$ với mọi $i\in\{0,m-1\}$. Khi đó ta có

$$\phi(x_{1,}x_2)=\phi(\gamma(t_0))=\phi(\gamma(t_1))=\ldots=\phi(\gamma(t_m))=\phi(x_2,y_2).$$

Như vậy ta đã chứng minh xong.

2. Giả sử $\mathrm{Im} f(z) \equiv 0$, đặt $f = u + iv$, ta có

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

nên ta cũng có

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

với mọi (x, y) trong D. Theo câu 1 thì u hằng trong D, vậy ta có f hằng trong D. Trường hợp $\mathrm{Re} f(z) \equiv 0$ tương tự.

Bài 2.4.15. Giả sử $f(z) = u + iv$ là giải tích. Khi nào $g(z) = u - iv$ là giải tích.

Giải. Giả sử $g(z)$ cũng giải tích, thì g phải thỏa mãn điều kiện Cauchy–Riemann, tức là

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y}.$$

Suy ra

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y} = 0.$$

Theo Bài 2.4.14. thì u và v là những hàm hằng, nên f và g cũng là những hàm hằng.

Bài 2.4.16. Cho hàm giải tích $f(z) = u + iv$ có modulus $|f(z)|$ bằng hằng số k. Chứng minh rằng điều này xảy ra nếu $f(z)$ là hằng.

Giải. Trường hợp $k = 0$ thì $u = v = 0$ nên $f = 0$ là hằng số. Trường hợp $k \neq 0$ thì $u^2 + v^2 = k^2$, suy ra

$$\frac{k^2}{(u + iv)(u - iv)} = 1 \Rightarrow \frac{k^2}{u + iv} = u - iv.$$

Vì
$$\frac{k^2}{u+iv} = \frac{k^2}{f}$$
giải tích, suy ra $u - iv$ cũng là hàm giải tích. Theo Bài 2.4.15. thì f là hàm hằng.

Bài 2.4.17.

1. Giả sử cả $f(z)$ và $f(\overline{z})$ xác định trong miền D và $f(z)$ là giải tích trong D. Giả sử $f(\overline{z}) = \overline{f(z)}$ trong D. Chứng minh rằng $f(\overline{z})$ không thể giải tích trong D trừ khi $f(z)$ là hằng.

2. Dùng kết quả trên để chứng tỏ trong một vài đường thì $(\overline{z})^3 + \overline{z}$ không giải tích mọi nơi.

Giải.

1. Đặt
$$f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$$
thì
$$f(\overline{z}) = \overline{f(z)} = u(x,y) - iv(x,y).$$
Theo bài Bài 2.4.15. $f(\overline{z})$ không thể giải tích trong D trừ khi $f(z)$ hằng.

2. Vì $f(z) = z^3 + z$ là tổng của những hàm nguyên nên là hàm nguyên, và
$$f(\overline{z}) = \overline{z}^3 + \overline{z} = \overline{z^3 + z} = \overline{f(z)},$$
nên theo câu trên thì $(\overline{z})^3 + \overline{z}$ không giải tích tại mọi nơi trong mặt phẳng phức.

Bài 2.4.18. Làm như ví dụ 7, chúng minh rằng những hàm sau không giải tích mọi nơi:

1. $(\overline{z}+1)^2$

2. $\overline{z}^3$

Giải.

1. Giả sử $(\overline{z}+1)^2$ có đạo hàm, thì

$$\frac{d}{dz}(\overline{z}+1)^2 = \frac{d}{dz}(z+1)^2\bigg|_{z=\overline{z}} \cdot \frac{d}{dz}\overline{z} = 2(\overline{z}+1)\frac{d\overline{z}}{dz}.$$

Nhưng $d\overline{z}/dz$ không tồn tại. Tuy nhiên nếu $\overline{z}+1=0$ hay $z=-1$ thì đạo hàm vẫn tồn tại, nhưng không có đạo hàm trong lận cận của điểm đó. Tóm lại hàm này không giải tích tại mọi nơi.

2. Giả sử $\overline{z}^3$ có đạo hàm, thì

$$\frac{d}{dz}\overline{z}^3 = \frac{d}{dz}z^3\bigg|_{z=\overline{z}} . \frac{d}{dz}\overline{z} = 3\overline{z}^2\frac{d\overline{z}}{dz}$$

Nhưng $d\overline{z}/dz$ không tồn tại. Tuy nhiên nếu $\overline{z}^3=0$ hay $z=0$ thì đạo hàm vẫn tồn tại, nhưng không có đạo hàm trong lận cận của điểm đó. Tóm lại hàm này không giải tích tại mọi nơi.

Bài 2.4.19. Bài toán này giới thiệu chúng ta hàm phức của một biến thực, $f(t) = u(t) + iv(t)$, với u và v là những hàm thực của biến thực t. Quy tắc lấy vi phân $f(t)$ giống trong tính toán thực. Chúng ra dùng Eq. (2.3-1), viết lại ở đây $f'(t_0) = \lim_{\Delta t\to 0}\dfrac{f(t_0+\Delta t) - f(t_0)}{\Delta t}$. Ở đây, hàm $f(t)$ xác định với biến thực, ta không xét đến khái niệm giải tích. Tất cả quy tắc đã học trong tính toán cơ bản cho đạo hàm một hàm thực của biến thực áp dụng cho $f(t)$, với thêm vào đó phát biểu rõ ràng rằng $f'(t) = u'(t) + iv'(t)$. Chúng ta có thể vẽ trong mặt phẳng phức quỹ tích bởi $f(t)$ như tham số hóa t qua một khoảng.

1. Cho $f(t) = \cos t + i \sin t$. Vẽ quỹ tích trong mặt phẳng phức miêu tả $f(t)$ với t từ 0 đến 2π.

2. Cho hàm như câu (1), tìm $f'(t)$ và chứng minh rằng với t biểu diễn vector của $f'(t)$ vuông góc với $f(t)$.

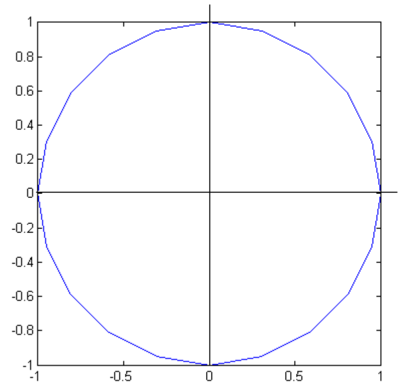
3. Chúng ta có thể nghĩ vector của $f(t)$ như hàm thời gian khi hạt di chuyển, và vector của $f'(t)$ như tốc độ (đạo hàm thời gian của vị trí). Giải thích bằng hình trong câu (1) tại sao vector vị trí và tốc độ là góc cho bởi hàm thời gian, cho hàm riêng biệt này. Chứng minh rằng vector của gia tốc $f"(x)$ thì vuông góc với vận tốc.

4. Nếu đường biểu diễn bởi $f(t)$ trong mặt phẳng phức, như biến t, thì phức tạp, chúng ta muốn dùng máy tính để vẽ quỹ tích này. Dùng MATLAB hoặc phần mềm khác, biểu diễn quỹ tích trong mặt phẳng phức hàm $f(t) = \dfrac{\cos t}{1 + 0.5(\cos t + i \sin t)}$ khi t đi từ 0 đến 2π. Đường với đủ số của giá trị của t nên bạn có thể dễ dàng vẽ đường với sự tăng t.

5. Nếu chúng ta xem $f(t)$ ở trên như là vị trí của của hạt như hàm theo thời gian, tìm biểu thức tương ứng của hạt và vẽ tốc độ này trên khoảng thời gian dùng trong câu (4), chỉ rõ thời gian trên đồ thị. Kiểm tra bằng mắt trong câu này và câu (4) rằng vector tốc độ tiếp xúc đường cho bởi hạt tại một vài thời gian, kết quả này có đúng chính xác trong trường hợp tổng quát.

Giải.

1. Đồ thị của $f(t)$ là dường tròn đơn vị.



Hình 2.4.1: $f(t) = \cos t + i \sin t$

2. Ta có

$$f'(t) = -\sin t + i\cos t = \cos\left(t + \frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(t + \frac{\pi}{2}\right) = \mathrm{cis}\big(t + \tfrac{\pi}{2}\big),$$

và $f(t) = \mathrm{cis}(t)$. Vì thế $f'(t)$ vuông góc với $f(t)$.

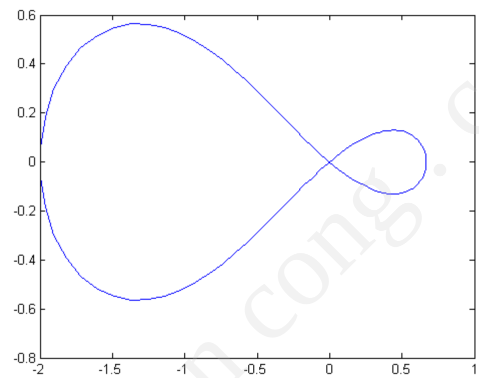
3. Vector vị trí và vận tốc vuông góc bởi vì chuyển động dọc theo đường tròn. Vector vận tốc tiếp xúc với đường tròn tại mọi điểm.

$$\begin{aligned} f'(t) &= -\sin t + i\cos t = \cos\left(t + \frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(t + \frac{\pi}{2}\right) = \mathrm{cis}\big(t + \tfrac{\pi}{2}\big), \\ f''(t) &= -\cos t - i\sin t = \cos(t + \pi) + i\sin(t + \pi) = \mathrm{cis}(t + \pi). \end{aligned}$$

Vì hai góc khác nhau bởi $\dfrac{\pi}{2}$ nên vector của chúng vuông góc với nhau.

4. Đoạn lệnh

```
>> syms t
>> t=linspace(0,2*pi,100);
>> f=cos(t)./(1+0.5*(cos(t)+i*sin(t)));
>> x=real(f);
>> y=imag(f);
>> plot(x,y,)
```



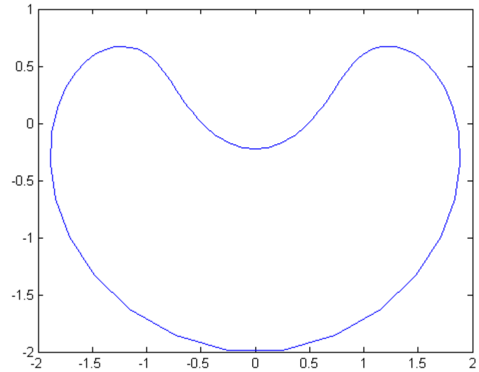
Hình 2.4.2: $f(t) = \dfrac{\cos t}{1 + 0.5\,(\cos t + i \sin t)}$

5.

$$f'(t) = \frac{\left[-\sin t - \frac{1}{2} i\right]}{\left[1 + \frac{1}{2}(\cos t + i \sin t)\right]^2}$$

Đoạn lệnh:

```
>> syms t
>> t=linspace(0,2*pi,100);
>> f=(-sin(t)-0.5*i)./(1+0.5*(cos(t)+i*sin(t))).^2;
>> x=real(f);
>> y=imag(f);
>> plot(x,y)
```



Hình 2.4.3: $f'(t) = \dfrac{\left[-\sin t - \frac{1}{2}i\right]}{\left[1 + \frac{1}{2}(\cos t + i\sin t)\right]^2}$

Bài 2.4.20. Nơi nào trong mặt phẳng phức hàm sau không giải tích? Không cần nhắc đến gốc tọa độ.

1. $r\cos\theta + ir$
2. $r^4\sin 4\theta - ir^4\cos 4\theta$

Giải.

1. $u = r\cos\theta,\ v = r$. Ta có

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \cos\theta, \quad \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial\theta} = 0, \quad -\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial\theta} = \frac{-r\sin\theta}{r} = \sin\theta, \quad \frac{\partial v}{\partial r} = 1.$$

Hàm này thỏa hệ thức Cauchy-Riemann khi

$$\begin{cases} \cos\theta & = 0 \\ \sin\theta & = 1 \end{cases} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{2}.$$

Đạo hàm chỉ tồn tại trên nữa đường thẳng $\theta = \dfrac{\pi}{2}, 0 < r < \infty$. Trên đường thẳng này hàm cũng không giải tích. Vậy hàm này không giải tích mọi nơi.

2. $u = r^4 \sin 4\theta, v = -r^4 \cos 4\theta$. Ta có

$$\frac{\partial u}{\partial r} = 4r^3 \sin 4\theta = \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta}, \quad \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta} = 4r^3 \cos 4\theta = -\frac{\partial v}{\partial r}.$$

Hàm này luôn thỏa hệ thức Cauchy-Riemann với $r \neq 0$ hay $z \neq 0$. Vậy hàm này giải tích mọi nơi.

Bài 2.4.21.

1. Dạng cực của phương trình Cauchy-Riemann.
   Giả sử, cho hàm giải tích $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, chúng ta nói rõ x và y trong điều kiện của biến cực r và θ, $x = r\cos\theta$ và $y = r\sin\theta \left(r = \sqrt{x^2 + y^2}, \theta = \tan^{-1}\left(\dfrac{y}{x}\right)\right)$.
   Thế thì $f(z) = u(r, \theta) + iv(r, \theta)$. Chúng ta cần viết lại phương trình Cauchy-Riemann trong biến cực. Từ chuỗi quy tắc của đạo hàm riêng, ta có

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)_\theta \left(\frac{\partial r}{\partial x}\right)_y + \left(\frac{\partial u}{\partial \theta}\right)_r \left(\frac{\partial \theta}{\partial x}\right)_y.$$

   Hãy cho biết biểu thức của $\dfrac{\partial u}{\partial y}, \dfrac{\partial v}{\partial x}, \dfrac{\partial v}{\partial y}$.

2. Chứng minh rằng

$$
\begin{aligned}
\left(\frac{\partial r}{\partial x}\right)_y &= \cos\theta,\\
\left(\frac{\partial \theta}{\partial x}\right)_y &= \frac{-\sin\theta}{r},
\end{aligned}
$$

và tìm biểu thức cho $\left(\frac{\partial r}{\partial y}\right)_x$ và $\left(\frac{\partial \theta}{\partial y}\right)_x$. Dùng bốn biểu thức này trong phương trình cho $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}$ đã làm trong câu (1). Chứng minh rằng u và v thỏa phương trình

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial h}{\partial x} &= \frac{\partial h}{\partial r}\cos\theta - \frac{1}{r}\frac{\partial h}{\partial \theta}\sin\theta,\\
\frac{\partial h}{\partial y} &= \frac{\partial h}{\partial r}\sin\theta + \frac{1}{r}\frac{\partial h}{\partial \theta}\cos\theta,
\end{aligned}
$$

với h có thể bằng u hoặc v.

3. Viết lại hệ thức Cauchy-Riemann (2.3-10a,b) dùng hai phương trình ở phần (2) của bài tập này. Nhân phương trình Cauchy-Riemann đầu tiên với θ, nhân phương trình thứ hai với $\cos\theta$, và thêm chứng minh rằng
$$\frac{\partial u}{\partial r}=\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta}.$$
Bây giờ nhân phương trình Cauchy-Riemann thứ nhất với $-\sin\theta$, phương trình thứ hai với $\cos\theta$, và thêm chứng minh rằng
$$\frac{\partial v}{\partial r}=\frac{-1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta}.$$
Quan hệ của hai phương trình trên là dạng cực của hệ thức Cauchy-Riemann. Nếu đạo hàm riêng đầu tiên của u và v liên tục tại những điểm tọa độ cực là $r,\theta\,(r\neq 0)$, thì hai phương trình trên là điều kiện cần và đủ cho sự tồn tại của đạo hàm tại điểm này.

4. Dùng Eq. (2.3-6) và hệ thức Cauchy-Riemann dạng cực để chứng minh rằng nếu đạo hàm của $f\,(r,\theta)$ tồn tại, nó có thể tìm dưới dạng
$$f'(z)=\left[\frac{\partial u}{\partial r}+i\frac{\partial v}{\partial r}\right][\cos\theta-i\sin\theta]$$
hoặc dạng
$$f'(z)=\left[\frac{\partial u}{\partial \theta}+i\frac{\partial v}{\partial \theta}\right]\left(\frac{-i}{r}\right)[\cos\theta-i\sin\theta].$$

Giải.

1. Ta có
$$\begin{aligned}u &= u\left(r\left(x,y\right),\theta\left(x,y\right)\right),\\ \frac{\partial u}{\partial x} &= \left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)_{\theta}\left(\frac{\partial r}{\partial x}\right)_{y}+\left(\frac{\partial u}{\partial \theta}\right)_{r}\left(\frac{\partial \theta}{\partial x}\right)_{y},\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial y} &= \left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)_\theta \left(\frac{\partial r}{\partial y}\right)_x + \left(\frac{\partial u}{\partial \theta}\right)_r \left(\frac{\partial \theta}{\partial y}\right)_x, \\
v &= v\left(r\left(x,y\right), \theta\left(x,y\right)\right), \\
\frac{\partial v}{\partial x} &= \left(\frac{\partial v}{\partial r}\right)_\theta \left(\frac{\partial r}{\partial x}\right)_y + \left(\frac{\partial v}{\partial \theta}\right)_r \left(\frac{\partial \theta}{\partial x}\right)_y, \\
\frac{\partial v}{\partial y} &= \left(\frac{\partial v}{\partial r}\right)_\theta \left(\frac{\partial r}{\partial y}\right)_x + \left(\frac{\partial v}{\partial \theta}\right)_r \left(\frac{\partial \theta}{\partial y}\right)_x.
\end{aligned}
$$

2. Ta có

$$
\begin{aligned}
r &= \sqrt{x^2+y^2}, \quad \left(\frac{\partial r}{\partial x}\right)_y = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} = \cos\theta, \\
\theta &= \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right), \quad \left(\frac{\partial \theta}{\partial x}\right)_y = \frac{1}{1+\frac{y^2}{x^2}}\frac{-y}{x^2+y^2} = \frac{-y}{\sqrt{x^2+y^2}}\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{-\sin\theta}{r},
\end{aligned}
$$

và

$$
\begin{aligned}
\left(\frac{\partial r}{\partial y}\right)_x &= \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} = \sin\theta, \\
\left(\frac{\partial \theta}{\partial y}\right)_x &= \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{\cos\theta}{r}.
\end{aligned}
$$

Dùng những phương trình thu được trong câu (1), ta có

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial u}{\partial r}\cos\theta - \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta}\sin\theta, \\
\frac{\partial u}{\partial y} &= \frac{\partial u}{\partial r}\sin\theta + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta}\cos\theta, \\
\frac{\partial v}{\partial x} &= \frac{\partial v}{\partial r}\cos\theta - \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta}\sin\theta, \\
\frac{\partial v}{\partial y} &= \frac{\partial v}{\partial r}\sin\theta + \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta}\cos\theta.
\end{aligned}
$$

3. Theo hệ thức Cauchy-Riemann, ta có

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial v}{\partial y},\\ \frac{\partial v}{\partial x} &= -\frac{\partial u}{\partial y}.\end{aligned}$$

Thay các biểu thức đã tìm được ở câu (2), ta được

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial r}\cos\theta - \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta}\sin\theta &= \frac{\partial v}{\partial r}\sin\theta + \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta}\cos\theta,\\ \frac{\partial v}{\partial r}\cos\theta - \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta}\sin\theta &= -\frac{\partial u}{\partial r}\sin\theta - \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta}\cos\theta.\end{aligned}$$

Nhân phương trình đầu với $\cos\theta$ và phương trình sau cho $\sin\theta$ rồi cộng với nhau vế theo vế, ta được

$$\frac{\partial u}{\partial r}\cos^2\theta - \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta}\sin^2\theta = -\frac{\partial u}{\partial r}\sin^2\theta + \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta}\cos^2\theta.$$

hay

$$\frac{\partial u}{\partial r}\left[\sin^2\theta + \cos^2\theta\right] = \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta}\left[\sin^2\theta + \cos^2\theta\right]$$

hay

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta}.$$

Tương tự, nhân phương trình đầu với $-\sin\theta$ và phương trình sau cho $\cos\theta$ rồi cộng với nhau vế theo vế, ta được

$$\frac{\partial v}{\partial r} = \frac{-1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta}.$$

4. Ta có

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial r}\cos\theta - \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta}\sin\theta + i\left[\frac{\partial v}{\partial r}\cos\theta - \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta}\sin\theta\right]$$

Nhưng

$$\frac{-1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta} = \frac{\partial v}{\partial r}$$

và

$$\frac{-1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta} = \frac{-\partial u}{\partial r},$$

Nên

$$\begin{aligned} f'(z) &= \frac{\partial u}{\partial r}\cos\theta + \frac{\partial v}{\partial r}\sin\theta + i\left[\frac{\partial v}{\partial r}\cos\theta - \frac{-\partial u}{\partial r}\sin\theta\right] \\ &= \left(\frac{\partial u}{\partial r} + i\frac{\partial v}{\partial r}\right)(\cos\theta - i\sin\theta). \end{aligned}$$

Ngược lại, nếu thay

$$\frac{\partial v}{\partial r} = \frac{-1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta}$$

và

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta}$$

thì

$$\begin{aligned} f'(z) &= \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta}\cos\theta - \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta}\sin\theta + i\left[\frac{-1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta}\cos\theta - \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta}\sin\theta\right] \\ &= \left[\frac{\partial u}{\partial \theta} + i\frac{\partial v}{\partial \theta}\right]\left(\frac{-i}{r}\right)[\cos\theta - i\sin\theta]. \end{aligned}$$

2.5 Harmonic Functions

Bài 2.5.1. Nơi nào trong mặt phẳng phức hàm $\phi(x, y) = x^2 - y^4$ thỏa phương trình Laplace?. Tại sao hàm này không điều hòa.

Giải. Ta có

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = 2x, \quad \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = 2, \quad \frac{\partial \phi}{\partial y} = -4y^3, \quad \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = -12y^2.$$

Nên
$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}=0\Leftrightarrow 2-12y^2=0\Leftrightarrow y=\pm\sqrt{\frac{1}{6}}.$$

Vậy, hàm này thỏa phương trình Laplace trên đường $y=\pm\sqrt{\frac{1}{6}}$. Tuy nhiên tập những điểm này không phải là một miền, nên hàm không điều hòa.

Bài 2.5.2. Nơi nào trong mặt phẳng phức hàm $\phi(x,y)=\sin(xy)$ thỏa phương trình Laplace? Hàm này có điều hòa không?

Giải. Ta có
$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}=-x^2\sin(xy)\,,\quad \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}=-y^2\sin(xy)\,,$$
nên
$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}=-\left(x^2+y^2\right)\sin(xy)\,.$$

Hàm này thỏa phương trình Laplace tại gốc tọa độ $x=0,\ y=0$ hoặc trên hypebol $xy=n\pi\,(n=-,\pm1,\pm2,\ldots)$. Tuy nhiên tập những điểm này không là một miền, nên hàm không điều hòa.

Bài 2.5.3. Cho hàm $\phi(x,y)=e^{ky}\sin(mx)$. Giả sử hàm này không điều hòa trong mặt phẳng phức, tìm quan hệ giữa số thực k và m?. Giả sử rằng $m\neq 0$.

Giải. Ta có
$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}=-m^2e^{ky}\sin(mx)\,,\quad \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}=k^2e^{ky}\sin(mx)\,,$$
nên
$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}=\left(k^2-m^2\right)e^{ky}\sin(mx)\equiv 0\Leftrightarrow k=\pm m.$$

Bài 2.5.4. Tìm giá trị số nguyên n nếu $x^n - y^n$ là hàm điều hòa.

Giải. Ta có

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} = n(n-1)x^{n-2}, \quad \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} = -n(n-1)y^{n-2},$$

nên

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} = n(n-1)\left(x^{n-2} - y^{n-2}\right) \equiv 0 \Leftrightarrow n = 0, 1, 2.$$

Bài 2.5.5. Đặt $z = x + iy$, bằng tính toán trực tiếp, chứng minh những điều sau

1. $\mathrm{Im}\left(\dfrac{1}{z}\right)$ là hàm điều hòa trong miền không bao gồm $z = 0$.

2. $\mathrm{Re}\left(z^3\right)$ là hàm điều hòa.

Giải.

1. Ta có

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{x+iy} = \frac{x-iy}{x^2+y^2},$$

nên

$$\mathrm{Im}\frac{1}{z} = \frac{-y}{x^2+y^2} = \phi(x, y).$$

Ta có

$$\begin{aligned}
\frac{\partial\phi}{\partial y} &= -\left[\frac{(x^2+y^2) - 2y^2}{(x^2+y^2)^2}\right] = -\left[\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\right] \\
\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} &= -\left[\frac{-2y\left(x^2+y^2\right)^2 - \left(x^2-y^2\right)2\left(x^2+y^2\right)2y}{\left(x^2+y^2\right)^4}\right] \\
&= \frac{-2y^3 + 6xy^2}{\left(x^2+y^2\right)^3}.
\end{aligned}$$

Tương tự, ta tính được

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} = \frac{2y^3 - 6xy^2}{\left(x^2+y^2\right)^3},$$

do đó

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} = 0.$$

2. Ta có $z^3 = (x+iy)^3 = x^3 + 2x^2 iy + 3x\,(iy)^2 - iy^3$, nên đặt $\operatorname{Re}\left(z^3\right) = x^3 - 3xy^2 = \phi\,(x,y)$ .Ta có

$$\begin{cases} \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} = 6x \\ \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} = -6x \end{cases}$$

do đó

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} = 0.$$

Bài 2.5.6. Tìm hai giá trị của k sao cho $\cos x\left[e^y + e^{ky}\right]$ là hàm điều hòa.

Giải. Đặt $\phi\,(x,y) = \cos x\left[e^y + e^{ky}\right]$, ta có

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} = -\cos x\left[e^y + e^{ky}\right], \quad \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} = \cos x\left[e^y + k^2 e^{ky}\right].$$

Do đó

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} \;=\; e^{ky}\left(k^2-1\right)\cos x \equiv 0 \Leftrightarrow k = \pm 1.$$

Bài 2.5.7. Nếu $g\,(x)\left[e^{2y} - e^{-2y}\right]$ là hàm điều hòa, thỏa mãn $g\,(0) = 0,\; g'\,(0) = 1$, tìm $g\,(x)$.

Giải. Ta có

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}=\frac{d^2g}{dx^2}\left[e^{2y}-e^{-2y}\right],\quad \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}=g(x).4\left[e^{2y}-e^{-2y}\right].$$

Do đó

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} = \left(\frac{d^2g}{dx^2}+4g(x)\right)\left[e^{2y}-e^{-2y}\right]\equiv 0 \Leftrightarrow \frac{d^2g}{dx^2}+4g(x)=0,$$

suy ra $g(x)=A\cos 2x+B\sin 2x$. Vì $g(0)=0$ nên $A=0$. Ta có

$$\begin{aligned} g'(0) &= -2A\sin(2\cdot 0)+2B\cos(2\cdot 0) \\ &= 2B \end{aligned}$$

Vậy $g(x)=\frac{1}{2}\sin 2x$.

Bài 2.5.8.

1. Cho $\phi(x,y)=x^3y-y^3x+y^2-x^2+x$. Chứng minh rằng hàm này có thể là phần thực hoặc phần ảo của một hàm giải tích.

2. Giả sử hàm ở trên là phần thực của một hàm giải tích, tìm phần ảo.

3. Giả sử rằng $\phi(x,y)$ là phần ảo của một hàm giải tích, tìm phần thực.

4. Nếu $\phi(x,y)+iv(x,y)$ là một hàm giải tích và nếu $u(x,y)+i\phi(x,y)$ cũng giải tích, với $\phi(x,y)$ là một hàm điều hòa tùy ý, chứng minh rằng, bỏ qua những hằng số, $u(x,y)$ và $v(x,y)$ phải trái dấu nhau. Điều này có đúng cho kết quả câu (2) và (3)?

Giải.

1. Ta có

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} = 6xy - 2, \quad \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} = -6xy + 2.$$

Nên

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} = 0.$$

Vậy, hàm này có thể là phần thực hoặc phần ảo của một hàm giải tích.

2. Giả sử $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ giải tích, trong đó $u = \phi$, ta có

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 3x^2y - y^3 - 2x + 1 = \frac{\partial v}{\partial y},$$

suy ra

$$v(x,y) = \frac{3}{2}x^2y^2 - \frac{1}{4}y^4 - 2xy + y + c(x).$$

Mặt khác

$$\frac{\partial v}{\partial x} = 3xy^2 - 2y + c'(x) = -\frac{\partial u}{\partial y} = -x^3 + 3xy^2 - 2y,$$

suy ra $c'(x) = -x^3$, nên $c(x) = -x^4/4 + D$. Vậy

$$v(x,y) = \frac{3}{2}x^2y^2 - \frac{y^4}{4} - 2xy + y - \frac{x^4}{4} + D$$

3. Giả sử $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ giải tích, trong đó $v = \phi$, ta có

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = x^3 - 3y^2x + 2y,$$

suy ra

$$u(x,y) = \frac{x^4}{4} - \frac{3}{2}x^2y^2 + 2xy + c(y).$$

Mặt khác

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -3x^2y + 2x + c'(y) = -\frac{\partial v}{\partial x} = -3x^2y + y^3 + 2x - 1,$$

suy ra $c'(y) = y^3 - 1$, nên $c(y) = y^4/4 - y + D$. Vậy

$$u(x,y) = \frac{x^4}{4} - \frac{3}{2}x^2y^2 + 2xy + \frac{y^4}{4} - y + D.$$

4. Ta có $\phi + iv$ là hàm giải tích, nên $i(\phi + iv) = -v + i\phi$ cũng giải tích. Do đó $u + v = (u + i\phi) - i(\phi + iv)$ cũng giải tích, theo Bài 2.4.14. thì $u + v \equiv \text{const}$. Nếu bỏ qua hằng số thì $u = -v$, và điều này có thể thấy ở câu (2) và (3).

Bài 2.5.9. Giả sử $f(z) = u + iv$ và $g(z) = v + iu$ là hàm giải tích. Chứng minh rằng v và u phải là những hằng số.

Giải. Ta có $f(z) = u + iv$ là hàm giải tích nên $-if(z) = -i(u + iv) = v - iu$ cũng là hàm giải tích, và $g(z) = v + iu$ cũng là hàm giải tích, nên theo Bài 2.4.15. thì u và v là hằng số.

Bài 2.5.10. Tìm liên hợp điều hòa của $e^x \cos y + e^y \cos x + xy$.

Giải. Đặt

$$u(x,y) = e^x \cos y + e^y \cos x + xy,$$

ta có

$$\frac{\partial u}{\partial x} = e^x \cos y - e^y \sin x + y = \frac{\partial v}{\partial y}$$

nên

$$v(x,y) = e^x \sin y - e^y \sin x + \frac{y^2}{2} + c(x).$$

Mặt khác

$$\frac{\partial v}{\partial x} = e^x \sin y - e^y \cos x + c'(x) = -\frac{\partial u}{\partial y} = e^x \sin y - e^y \cos x - x,$$

nên $c'(x) = -x$, suy ra $c(x) = -x^2/2 + D$. Vậy

$$v(x, y) = e^x \sin y - e^y \sin x + \frac{y^2}{2} + \frac{-x^2}{2} + D.$$

Bài 2.5.11. Tìm liên hợp điều hòa của $\tan^{-1}\left(\frac{x}{y}\right)$ với $-\pi < \tan^{-1}\left(\frac{x}{y}\right) \leq \pi$.

Giải. Đặt $u = \tan^{-1}(x/y)$, ta có

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\frac{1}{y}}{1 + \frac{x^2}{y^2}} = \frac{y}{x^2 + y^2} = \frac{\partial v}{\partial y},$$

nên

$$v = \frac{1}{2}\text{Log}\left(x^2 + y^2\right) + c(x).$$

Mặt khác

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{x}{x^2 + y^2} + c'(x) = -\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\frac{x}{y^2}}{1 + \frac{x^2}{y^2}} = \frac{x}{x^2 + y^2}$$

nên $c'(x) = 0$, suy ra $c(x) = D$.

Vậy

$$v(x, y) = \frac{1}{2}\text{Log}\left(x^2 + y^2\right) + D.$$

Bài 2.5.12. Chứng minh rằng nếu $u(x, y)$ và $v(x, y)$ là hàm điều hòa, thì $u + v$ cũng là hàm điều hòa nhưng uv không phải là hàm điều hòa. $e^u e^v$ có phải là hàm điều hòa không?.

Giải.

- Đặt $\phi = u + v$, vì u và v là hàm điều hòa nên ta có

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} &= \frac{\partial^2(u+v)}{\partial x^2}+\frac{\partial^2(u+v)}{\partial y^2}\\ &= \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)+\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right)\\ &= 0.\end{aligned}$$

Vậy $u + v$ là hàm điều hòa.

- Đặt $\Phi = uv$, ta có

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}=\frac{\partial^2(uv)}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}v+\frac{\partial v}{\partial x}u\right)=v\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x}+u\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}.$$

Tương tự

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}=v\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+2\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y}+u\frac{\partial^2 v}{\partial y^2},$$

suy ra

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} &= v\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)+u\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right)\\ &\quad +2\left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y}\right)\\ &= 2\left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y}\right)\end{aligned}$$

(vì u và v là hàm điều hòa). Nhưng trong trường hợp tổng quát, không chắc rằng

$$\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y}=0$$

nên hàm uv cũng không chắc là hàm điều hòa, chẳng hạn khi $u = v = x + y$.

- $e^{u+v} = e^u e^v = \phi$, ta có

$$\begin{aligned}\frac{\partial\phi}{\partial x} &= e^{u+v}\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial x}\right),\\ \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} &= e^{u+v}\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + e^{u+v}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right).\end{aligned}$$

Tương tự

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} = e^{u+v}\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 + e^{u+v}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right),$$

nên ta có

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} = e^{u+v}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2\right]$$

(vì u và v là hàm điều hòa). Nhưng trong trường hợp tổng quát, không chắc rằng

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2$$

nên hàm $e^u e^v$ cũng không chắc là hàm điều hòa, chẳng hạn khi $u = v = x + y$.

Bài 2.5.13. Nếu $v(x,y)$ là liên hợp điều hòa của $u(x,y)$, chứng minh rằng các hàm sau là hàm điều hòa.

1. uv
2. $e^u \cos v$
3. $\sin u \cosh v$

Giải.

1. Theo Bài 2.5.12. ta đã tính được

$$\frac{\partial^2 (uv)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 (uv)}{\partial y^2} = 2\left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y}\right).$$

Mặt khác, theo hệ thức Cauchy-Riemann

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y},$$

nên

$$\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

Do đó

$$\frac{\partial^2 (uv)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 (uv)}{\partial y^2} = 0.$$

Vậy uv là hàm điều hòa.

2. Đặt $\phi = e^u \cos v$, ta có

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \phi}{\partial x} &= \phi\frac{\partial u}{\partial x} - e^u\frac{\partial v}{\partial x}\sin v,\\
\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} &= \frac{\partial \phi}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial x} + \phi\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - e^u\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x}\sin v - e^u\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\sin v - e^u\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2\cos v\\
&= \frac{\partial \phi}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial x} + \phi\left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2\right] - e^u\sin v\left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right),
\end{aligned}$$

tương tự

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = \frac{\partial \phi}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial y} + \phi\left[\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2\right] - e^u\sin v\left(\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right).$$

Do đó

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} &= \frac{\partial\phi}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial\phi}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial y}+\phi\left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2-\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2\right]\\ &\quad -e^u\sin v\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y}\right)\\ &= \frac{\partial\phi}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial\phi}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial y}-\phi\left[\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2\right]\end{aligned}$$

(vì u và v là hàm điều hòa, và theo hệ thức Cauchy-Riemann $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{\partial u}{\partial y}$).
Mặt khác

$$\begin{aligned}\frac{\partial\phi}{\partial x} &= \phi\frac{\partial u}{\partial x}-e^u\frac{\partial v}{\partial x}\sin v,\\ \frac{\partial\phi}{\partial y} &= \phi\frac{\partial u}{\partial y}-e^u\frac{\partial v}{\partial y}\sin v,\end{aligned}$$

nên

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} &= \frac{\partial\phi}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial\phi}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial y}-\phi\left[\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2\right]\\ &= \phi\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\phi\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2-\phi\left[\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2\right]\\ &\quad -e^u\sin v\left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y}\right)\\ &= 0\end{aligned}$$

Vậy $e^u\cos v$ là hàm điều hòa.

3. Đặt $\phi=\sin u\cosh v$, ta có

$$\frac{\partial\phi}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos u\cosh v+\frac{\partial v}{\partial x}\sin u\sinh v,$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\cos u\cosh v - \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 \sin u\cosh v + \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x}\cos u\sinh v \\
&\quad + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\sin u\sinh v + \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x}\cos u\sinh v + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 \sin u\cosh v \\
&= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\cos u\cosh v + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\sin u\sinh v \\
&\quad + \left[\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 - \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2\right]\sin u\cosh v + 2\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x}\cos u\sinh v,
\end{aligned}$$

tương tự

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} &= \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\cos u\cosh v + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\sin u\sinh v \\
&\quad + \left[\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 - \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right]\sin u\cosh v + 2\frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial y}\cos u\sinh v.
\end{aligned}$$

Do đó

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} = + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)\cos u\cosh v + \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right)\sin u\sinh v \\
&\quad + \left[\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 - \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 - \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2\right] + 2\cos u\sinh v\left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y}\right) \\
&= 0
\end{aligned}$$

(vì u và v là hàm điều hòa, và theo hệ thức Cauchy-Riemann $\dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y}, \dfrac{\partial v}{\partial x} = -\dfrac{\partial u}{\partial y}$).

Có cách khác để kiểm chứng các hàm trên là hàm điều hòa, đó là tìm các hàm phức giải tích có phần thực và phần ảo là các hàm điều hòa đó. Cụ thể là uv là phần ảo của $(u - iv)^2/2$, $e^u \cos v$ là phần thực của e^{u+iv} và $\sin u\cosh v$ là phần ảo của $\left(e^{v+iu} + e^{-v+iu}\right)/2$.

Bài 2.5.14. Cho $f(z) = z^2 = u + iv$.

1. Tìm phương trình biểu diễn đường cong với $u = 1$ trong mặt phẳng Oxy. Làm lại với $v = 2$.

2. Tìm điểm giao nhau, trong góc phần tư thứ nhất, của hai đường tìm được trong câu (1).

3. Tìm giá trị của độ nghiêng của mỗi đường cong tại điểm giao, đã tìm thấy trong câu (2), và kiểm tra rằng những độ nghiêng trái dấu nhau.

Giải.

1. Đặt $z = x + iy$, ta có

$$(x+iy)^2 = u + iv,$$

suy ra

$$u = x^2 - y^2,\ v = 2xy,$$

Ta phải có

$$\begin{cases} u & = 1 \\ v & = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 & = 1 \\ xy & = 1 \end{cases}.$$

2. Ta có

$$\begin{cases} x^2 - y^2 & = 1 \\ xy & = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 & = 1 \\ y & = \frac{1}{x} \end{cases} \Rightarrow x^2 - \frac{1}{x^2} = 1 \Rightarrow x^2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

Trong góc phần tư thứ nhất, ta chọn

$$x = \sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{2}},\ y = \sqrt{x^2 - 1} = \sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}.$$

3. Tại điểm giao nhau ta có

- $x^2 - y^2 = 1$, suy ra $2xdx - 2ydy = 0$, nên

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x}{y} = \sqrt{\frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{5}-1}} \approx 1.62.$$

- $xy = 1$, suy ra $xdy + ydx = 0$, nên

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x} \approx \frac{-1}{1.62}.$$

Hai giá trị này trái dấu nhau.

Bài 2.5.15.

1. Chứng minh rằng $f(z) = e^x \cos y + ie^x \sin y = u + iv$ là hàm nguyên.
2. Cho đường cong trong mặt phẳng xy cới $u = 1$. Dùng MATLAB, vẽ một phần của đường này trên góc phần tư thứ nhất. Hạn chế x và y thỏa $0 \leq x, y \leq \pi/2$. Làm lại với điều kiện $u = \dfrac{1}{2}$. Vẽ hai đồ thị trên cùng hệ trục tọa độ cực.
3. Làm lại câu (2) nhưng vẽ đường với $v = 1$ và $\dfrac{1}{2}$. Vẽ đồ thị trên cùng hệ trục tọa độ của phần (2) sao cho tính trực giao của sự giao nhau được thấy rõ.
4. Tìm điểm giao nhau của đường $u = 1$ và $v = \dfrac{1}{2}$. Kiểm tra từ hình vẽ.
5. Tính đạo hàm, tìm độ nghiêng của đường cong $u = 1$ và $v = \dfrac{1}{2}$ tại điểm giao nhau của chúng và kiểm tra rằng chúng trái dấu nhau. Xác nhận kết quả này bằng hình vẽ. Chú ý rằng những đường cong trong đồ thị sẽ không xuất hiện tính trực giao trừ khi bạn dùng cùng thành cho trục hoành và trục tung.

Giải.

1. Ta có

$$u = e^x \cos y,\ v = e^x \sin y,$$

và

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x} &= e^x \cos y = \frac{\partial v}{\partial y},\\ \frac{\partial v}{\partial x} &= e^x \sin y = -\frac{\partial u}{\partial y}.\end{aligned}$$

đúng với mọi $x,\ y$. Vậy

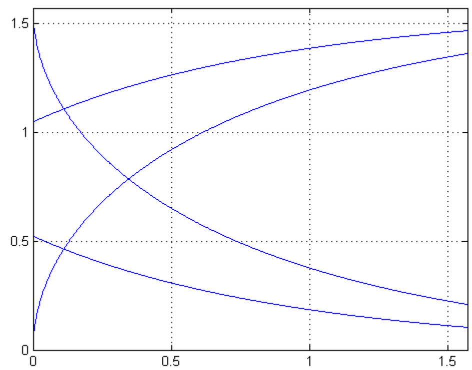
$$f(z) = e^x \cos y + ie^x \sin y$$

là hàm nguyên.

2-3. Ta dùng đoạn lệnh

```
>> k=[1/2 1];
>> for m=1:2
x=linspace(0,pi/2,1000);
y=acos(k(m)*exp(-x));
plot(x,y);
axis([0 pi/2 0 pi/2]);
hold on
end
>> for m=1:2
x=linspace(0,pi/2,1000);
y=asin(k(m)*exp(-x));
plot(x,y);
axis([0 pi/2 0 pi/2]);
hold on
end
```

```
>> grid
```



Hình 2.5.1

4. Ta có

$$\begin{cases} u &= 1 \\ v &= \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} e^x \cos y &= 1 \\ e^x \sin y &= \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \tan y = \frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} y = \arctan \frac{1}{2} \approx 0.4636 \\ x = \log \frac{1}{\cos y} \approx 0.1116 \end{cases}$$

5. Tại điểm giao nhau $u = 1,\ v = \dfrac{1}{2}$, ta có

- $u = e^x \cos y = 1$, suy ra $e^x dx \cos y - e^x \sin y dy = 0$, nên

$$\frac{dy}{dx} = \cot y = 2.$$

- $v = e^x \sin y = \dfrac{1}{2}$, suy ra $e^x dx \sin y + e^x \cos dy = 0$, nên

$$\frac{dy}{dx} = -\tan y = -\frac{1}{2}.$$

Hai giá trị này trái dấu nhau.

Bài 2.5.16. Cho $f(z) = z^3 = u + iv$

1. Tìm phương trình biểu diễn đường cong với $u = 1$ trong mặt phẳng Oxy, làm lại với $v = 1$. Trong mỗi trường hợp, vẽ hình trong góc phần tư thứ nhất của hai đường cong.

2. Tìm điểm giao nhau (x_0, y_0) trong góc phần tư thứ nhất của hai đường cong. Dễ dàng nhất nếu bạn đặt $z = r\text{cis}\theta$. Đầu tiên tìm giao điểm trong tọa độ cực.

3. Tìm độ nghiêng của mỗi đường tại điểm giao nhau. Kiểm tra rằng chúng trái dấu nhau.

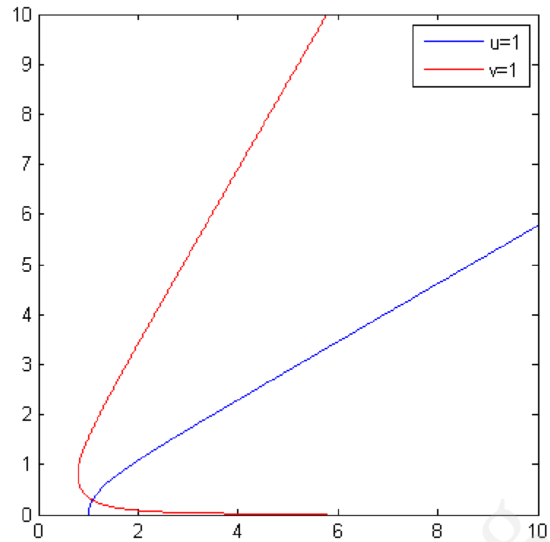
Giải.

1. Đặt $z = x + iy$, ta có

$$z^3 = (x+iy)^3 = x^3 - 3xy^2 + i\left(3x^2y - y^3\right),$$

suy ra $u = x^3 - 3xy^2,\ v = 3x^2y - y^3$. Lúc đó

$$\begin{cases} u &= 1 \\ v &= 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 - 3xy^2 &= 1 \\ 3x^2y - y^3 &= 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2 &= \frac{x^3-1}{3x} \\ x^2 &= \frac{y^3+1}{3y} \end{cases}.$$



Hình 2.5.2

2. Đặt $z = x + iy = r\text{cis}\,(\theta)$ thì

$$f\,(z) = z^3 = r^3\,(\cos 3\theta + i\sin 3\theta) = u + iv,$$

suy ra

$$u = r^3\cos 3\theta, v = r^3\sin 3\theta.$$

Ta có

$$\begin{cases} u & = 1 \\ v & = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r^3\cos 3\theta & = 1 \\ r^3\sin 3\theta & = 1 \end{cases} \Rightarrow \tan 3\theta = 1 \Rightarrow \theta = \frac{pi}{12} \Rightarrow r = \sqrt[3]{\frac{1}{\sin 3\theta}} = \sqrt[6]{2}.$$

Vậy

$$x_0 = r\cos\frac{\pi}{12} \approx 1.083, y_0 = r\sin\frac{\pi}{12} \approx 0.29.$$

3. Tại điểm giao nhau $u = 1,\ v = 1$ thì $x \approx 1.083,\ y \approx 0.29$

- $u = x^3 - 3xy^2 = 1$, suy ra $(3x^2 - 3y^2)\,dx - 6xydy = 0$, nên

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2 - y^2}{2xy} \approx 1.73.$$

- $v = 3x^2y - y^3 = 1$, suy ra $6xydx + (3x^2 - 3y)^2\,dy = 0$, nên

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-2xy}{x^2 - y^2} \approx \frac{-1}{1.73} \approx -0.58.$$

Hai giá trị này trái dấu nhau.

Bài 2.5.17.

1. Cho $x = r\cos\theta$ và $y = r\sin\theta$, với r và θ là biến tọa độ cực. Đặt $f(z) = u(r,\theta) + iv(r,\theta)$ là một hàm giải tích trong miền không bao gồm $z = 0$. Dùng Eqs. (2.4-5a,b) và giả sử tính liên tục đạo hàm riêng cấp hai để chứng minh rằng trong miền này u và v thỏa phương trình đạo hàm

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial\theta^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial r} = 0$$

   Đây là phương trình Laplace trong tọa độ cực biến r và θ.

2. Chứng minh rằng $u(r,\theta) = r^2\cos 2\theta$ là hàm điều hòa.

3. Tìm $v(r,\theta)$, liên hợp điều hòa của $u(r,\theta)$, và chứng minh rằng nó cũng thỏa phương trình Laplace mọi nơi.

Giải.

1. Theo bài Bài 2.4.21. ta đã chứng minh được

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial r} &= \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta},\\ \frac{\partial v}{\partial r} &= -\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta}\end{aligned}$$

- Từ phương trình đầu ta được

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} = -\frac{1}{r^2}\frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{1}{r}\frac{\partial^2 v}{\partial \theta \partial r}.$$

Từ phương trình sau ta được

$$\frac{\partial^2 v}{\partial r \partial \theta} = -\frac{1}{r}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} \Rightarrow -\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = -\frac{1}{r}\frac{\partial^2 v}{\partial r \partial \theta}.$$

Cộng hai đẳng thức trên, vế theo vế ta được

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = -\frac{1}{r^2}\frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{1}{r}\frac{\partial^2 v}{\partial \theta \partial r} - \frac{1}{r}\frac{\partial^2 v}{\partial \theta \partial r} = -\frac{1}{r^2}\frac{\partial v}{\partial \theta}.$$

Mặt khác từ phương trình đầu thì

$$-\frac{1}{r^2}\frac{\partial v}{\partial \theta} = -\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r},$$

thay vào đẳng thức trên ta được

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = -\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} \Leftrightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} = 0.$$

- Từ phương trình đầu ta được

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r \partial \theta} = \frac{1}{r}\frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} \Rightarrow \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} = \frac{1}{r}\frac{\partial^2 u}{\partial r \partial \theta}.$$

Từ phương trình sau ta được

$$\frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial u}{\partial \theta} - \frac{1}{r}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta \partial r}.$$

Cộng hai đẳng thức trên, vế theo vế ta được

$$\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial u}{\partial \theta} - \frac{1}{r}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta \partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial^2 u}{\partial r \partial \theta} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial u}{\partial \theta}.$$

Mặt khác từ phương trình sau thì

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial u}{\partial \theta} = -\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial r},$$

thay vào đẳng thức trên ta được

$$\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} = -\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial r} \Leftrightarrow \frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial v^2}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial r} = 0$$

2. Ta có

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial r} &= 2r\cos 2\theta, \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} = 2\cos 2\theta, \\ \frac{\partial u}{\partial \theta} &= -2r^2 \sin 2\theta, \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = -4r^2\cos 2\theta, \end{aligned}$$

suy ra

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} = 2\cos 2\theta - 4\cos 2\theta + 2\cos 2\theta = 0.$$

Vậy theo câu (1) thì $u(r,\theta) = r^2\cos 2\theta$ là hàm điều hòa.

3. Ta có

$$\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta} = \frac{\partial u}{\partial r} = 2r\cos 2\theta,$$

từ đó

$$\begin{aligned} v &= r^2 \sin 2\theta + c(r), \\ \frac{\partial v}{\partial r} &= 2r \sin 2\theta + c'(r) = -\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta} = 2r \sin 2\theta, \end{aligned}$$

suy ra $c'(r) = 0$, nên $c(r) = D$.

Vậy $v = r^2 \sin 2\theta + D$. Ta có

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial r} &= 2r \sin 2\theta, \frac{\partial^2 v}{\partial r^2} = 2 \sin 2\theta, \\ \frac{\partial v}{\partial \theta} &= 2r^2 \cos 2\theta, \frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} = -4r^2 \sin 2\theta, \end{aligned}$$

suy ra

$$\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial v^2}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial r} = 2 \sin 2\theta - 4 \sin 2\theta + 2 \sin 2\theta = 0.$$

Vậy v cũng thỏa phương trình Laplace mọi nơi.

2.6 Some Physical Applications of Harmonic Functions

Bài 2.6.1. Giả sử mọi nơi trong vật liệu hợp thành của vector mật độ thông lượng nhiệt Q là $Q_x = 3, Q_y = -4$ calo trên một cm^2 trên một giây.

1. Bắt đầu với Eqs (2.6-4a,b) tìm nhiệt độ $\phi(x, y)$ trong độ. Giả sử $\phi(0, 0) = 0$ và độ dẫn k của vật liệu bằng 0.1 calo trên một cm^2.
2. Tìm hàm dòng chảy $\psi(x, y)$. Giả sử $\psi(0, 0) = 0$.
3. Phác họa đẳng thế mà ϕ bằng $0, 40, -40$.
4. Phác họa dòng chảy $\psi = 0, 40, -40$. Kiểm tra rằng những đường này song song với Q.

Giải.

1. Ta có

$$Q_x = -k\frac{\partial\phi}{\partial x} = -0.1\frac{\partial\phi}{\partial x} = 3 \Rightarrow \phi = -30x + c(y)$$

suy ra

$$\frac{\partial\phi}{\partial y} = \frac{-4}{-0.1} = 40 = c'(y) \Rightarrow c(y) = 40y + d$$

Vậy $\phi(x, y) = -30x + 40y$.

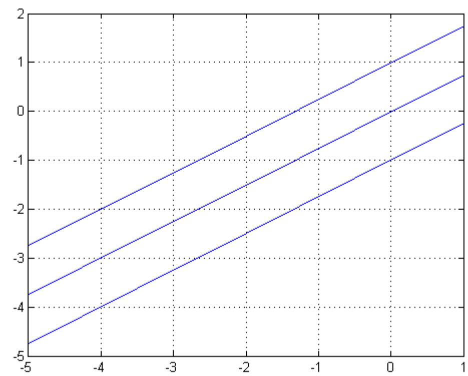
2. Ta có

$$\phi = -30x + 40y,$$
$$\frac{\partial\phi}{\partial x} = \frac{\partial\psi}{\partial y} \Leftrightarrow -30 = \frac{\partial\psi}{\partial y} \Rightarrow \psi = -30y + c(x),$$
$$\frac{\partial\phi}{\partial y} = -\frac{\partial\psi}{\partial x} \Leftrightarrow 40 = -c'(x) \Rightarrow c(x) = -40x + d,$$

Vậy $\psi = -40x - 30y$.

3. Ta có

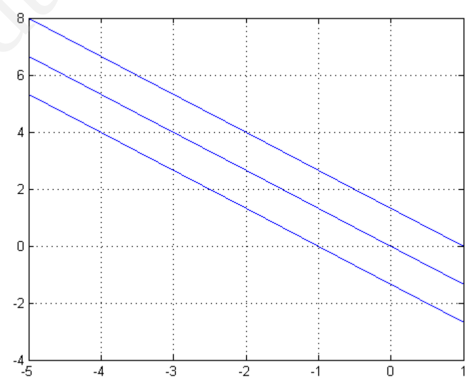
$$\begin{cases} \phi & = 0 \\ \phi & = 40 \\ \phi & = -40 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -30x + 40y & = 0 \\ -30x + 40y & = 40 \\ -30x + 40y & = -40 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y & = \frac{3}{4}x \\ y & = 1 + \frac{3}{4}x \\ y & = -1 + \frac{3}{4}x \end{cases}$$



Hình 2.6.1

4. Ta có

$$\begin{cases} \psi &= 0 \\ \psi &= 40 \\ \psi &= -40 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -40x - 30y &= 0 \\ -40x - 30y &= 40 \\ -40x - 30y &= -40 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y &= -\frac{4}{3}x \\ y &= -\frac{4}{3} - \frac{4}{3}x \\ y &= \frac{4}{3} - \frac{4}{3}x \end{cases}$$



Hình 2.6.2

Bài 2.6.2. Giả sử điện thế phức mô tả một dòng chất lỏng nhất định cho bởi $\Phi(z) = \frac{1}{z}(m^2/s)$ cho $z \neq 0$.

1. Tìm tốc độ chất lỏng phức tại $x = 1, y = 1\,(m)$ bằng đạo hàm điện thế phức. Tại V_x và V_y.

2. Tìm thành phần V_x và V_y tại điểm giống như trên, bằng cách tìm và dùng vận tốc điện thế $\phi(x, y)$.

3. Chứng minh rằng phương trình đẳng thế thông qua $x = 1, y = 1$ là $(x-1)^2 + y^2 = 1$. Vẽ đường này.

4. Tìm phương trình của dòng chảy thông qua $x = 1, y = 1$. Vẽ đường này.

Giải.

1. Ta có

$$\begin{aligned} v = \overline{\left(\frac{d\Phi}{dz}\right)} = \overline{-\frac{1}{z^2}} = \overline{-\frac{1}{x^2 - y^2 + 2ixy}} &= \overline{-\frac{x^2 - y^2 - 2ixy}{(x^2 - y^2)^2 + 4x^2y^2}} \\ &= -\frac{x^2 - y^2 + 2ixy}{(x^2 + y^2)^2} = V_x + iV_y. \end{aligned}$$

Nếu $x = 1,\ y = 1$ thì $V_x = 0,\ V_y = \frac{-2}{4} = \frac{-1}{2}$.

2. Ta có

$$\phi = \operatorname{Re}\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{x}{x^2 + y^2}, V_x = \frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}, V_y = \frac{\partial \phi}{\partial y} = \frac{-2xy}{(x^2 + y^2)^2}.$$

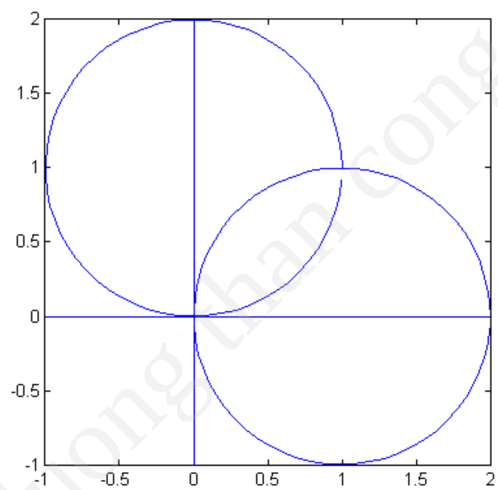
Tại $x = 1,\ y = 1$ thì $V_x = 0,\ V_y = \frac{-1}{2}$

3. Tại $x = 1,\ y = 1$ thì

$$\phi = \frac{x}{x^2 + y^2} = \frac{1}{2} \Rightarrow (x-1)^2 + y^2 = 1.$$

4. Tại $x = 1,\ y = 1$ thì

$$\phi = \mathrm{Im}\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{-y}{x^2 + y^2} = \frac{-1}{2} \Rightarrow x^2 + (y-1)^2 = 1.$$



Hình 2.6.3: 3-4

Bài 2.6.3. Giả sử rằng $\Phi(z) = e^x \cos y + ie^x \sin y$ tương ứng điện thế phức, trong vôn, cho hình dạng tĩnh điện.

1. Dùng điện thế phức để tìm điện trường phức tại $x = 1, y = \frac{1}{2}\,(m)$.
2. Điện trường phức thu được tại điểm như trên bằng cách đầu tiên tìm và dùng điện trường $\phi(x, y)$.

3. Giả sử hình dạng nằm trong chân không, tìm thành phần D_x và D_y của vector mật độ thông lượng điện tại $x = 1, y = \frac{1}{2}$. Trong đơn vị $m.k.s$, $\varepsilon = 8.85 \times 10^{-12}$ cho chân không.

4. Giá trị của ϕ tại $x = 1,\ y = \frac{1}{2}$ là gì?. Dùng MATLAB, vẽ mặt đẳng thế thông qua điểm này.

5. Giá trị của ψ tại $x = 1,\ y = \frac{1}{2}$ là gì?. Dùng MATLAB, vẽ dòng chảy thông qua điểm này.

Giải.

1. $\Phi(z) = e^x \cos y + ie^x \sin y = \phi + i\psi$, ta có

$$\frac{d\Phi}{dz} = \frac{\partial \phi}{\partial x} + i\frac{\partial \psi}{\partial x} = e^x \cos y + ie^x \sin y.$$

Điện trường phức tại $x = 1, y = \frac{1}{2}$ là

$$\begin{aligned} e = -\overline{\left(\frac{d\Phi}{dz}\right)} = -\left(e^x \cos y - ie^x \sin y\right) &= -\left(e \cos \frac{1}{2} - ie \sin \frac{1}{2}\right) \\ &= -2.39 + 1.30i = E_x + iE_y. \end{aligned}$$

2. Ta có

$$\phi = e^x \cos y,$$

$$\begin{aligned} E_x &= -\frac{\partial \phi}{\partial x} = -e^x \cos y = -e \cos \frac{1}{2}, \\ E_y &= -\frac{\partial \phi}{\partial y} = e^x \sin y = e \sin \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

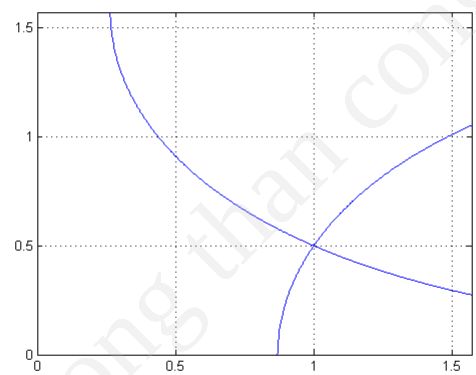
Vậy $e = E_x + iE_y$ giống câu trên.

3. Ta có

$$D_x = -8.85 \times 10^{-12} e \cos \frac{1}{2} = -21.1 \times 10^{-12},$$
$$D_y = 8.85 \times 10^{-12} e \sin \frac{1}{2} = 11.5 \times 10^{-12}.$$

4-5. Ta có

$$\phi = e^x \cos y = e \cos \frac{1}{2} \Rightarrow y = \cos^{-1}\left(e^{-x} e \cos \frac{1}{2}\right),$$
$$\psi = e^x \sin y = e \sin \frac{1}{2} \Rightarrow y = \sin^{-1}\left(e^{-x} e \cos \frac{1}{2}\right).$$



Hình 2.6.4

Bài 2.6.4.

1. Giải thích tại sao $d(x, y) = y + ix$ có thể là mật độ thông lượng điện phức trong miền, nhưng $d(x, y) = x + iy$ không thể.

2. Giả sử rằng mật độ thông lượng điện phức $y + ix$ tồn tại trong một môi trường mà $\varepsilon = 9 \times 10^{-12}$. Tìm điện thế $\phi(x, y)$. Giả sử $\phi(0, 0) = 0$. Phác thảo đẳng thế $\phi(x, y) = 0, \phi(x, y) = \dfrac{1}{\varepsilon}$.

3. Tìm hàm dòng chảy $\psi(x, y)$. Giả sử $\psi(0,0) = 0$

4. Tìm điện thế phức Φ và nói rõ điều kiện của z.

5. Tìm thành phần của điện trường tại $x = 1,\ y = 1$ bằng ba cách khác nhau: từ d, từ $\Phi(z)$, và từ $\phi(x, y)$. Chứng minh với một phác thảo vector cho trường này và đẳng thế thông qua $x = 1, y = 1$.

Giải.

1.

- Nếu $d = y + ix$ thì $D_x = y,\ D_y = x$, nên
$$\frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} = 0.$$

- Nếu $d = y + iy$ thì $D_x = x,\ D_y = y$, nên
$$\frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} = 2 \neq 0.$$

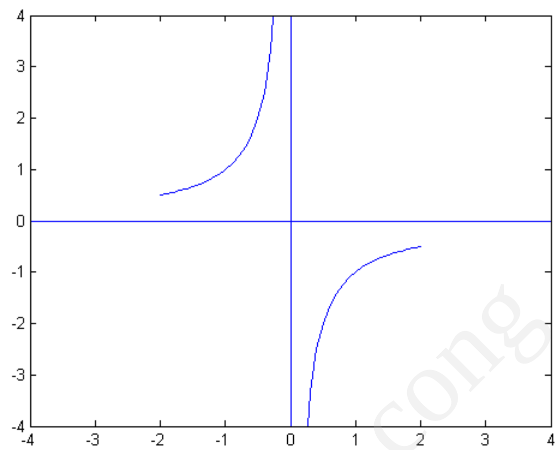
Vậy $d(x, y) = y + ix$ có thể là mật độ thông lượng điện phức trong miền, nhưng $d(x, y) = x + iy$ không thể.

2. Ta có
$$d = y + ix, D_x = y, D_y = x, -\varepsilon\frac{\partial \phi}{\partial x} = D_x = y \Rightarrow \phi = \frac{-xy}{\varepsilon} + c(y).$$

Lại có
$$-\varepsilon\frac{\partial \phi}{\partial y} = D_y = x \Rightarrow x - \varepsilon c'(y) = x \Rightarrow c(y) = d.$$

Vậy $\phi = \dfrac{-xy}{\varepsilon} + d$. Vì $\phi(0,0) = 0$ nên $\phi = \dfrac{-xy}{\varepsilon}$.

- Nếu $\phi = 0$ thì $x = 0$ hoặc $y = 0$.
- Nếu $\phi = \dfrac{1}{\varepsilon}$ thì $xy = -1$.



Hình 2.6.5

3. Ta có

$$\phi = \frac{-xy}{\varepsilon},$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial x} = \frac{\partial\psi}{\partial y} \Leftrightarrow \frac{-y}{\varepsilon} = \frac{\partial\psi}{\partial y} \Rightarrow \psi = \frac{-y^2}{2\varepsilon} + c\left(x\right),$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial x} = -\frac{\partial\phi}{\partial y} \Leftrightarrow c'\left(x\right) = \frac{x}{\varepsilon} \Rightarrow c\left(x\right) = \frac{x^2}{2\varepsilon} + d.$$

Vậy $\psi = \dfrac{x^2 - y^2}{2\varepsilon} + d$. Vì $\psi\left(0, 0\right) = 0$ nên $\psi = \dfrac{x^2 - y^2}{2\varepsilon}$.

4. $\Phi = \phi + i\psi = \dfrac{-xy}{\varepsilon} + i\dfrac{x^2 - y^2}{2\varepsilon} = \frac{i}{2\varepsilon}z^2$.

5. Cách 1,

$$e = \frac{d}{\varepsilon},$$

$$E_x = \frac{D_x}{\varepsilon} = \frac{y}{\varepsilon} = \frac{1}{\varepsilon}, \quad E_y = \frac{D_y}{\varepsilon} = \frac{x}{\varepsilon} = \frac{1}{\varepsilon}.$$

Cách 2.

$$E_x + iE_y = -\overline{\left(\frac{d\Phi}{dz}\right)} = \frac{i\overline{z}}{\varepsilon} = \frac{i}{\varepsilon}(x - iy) = \frac{y + ix}{\varepsilon} = \frac{1+i}{\varepsilon},$$

nên

$$E_x = \frac{1}{\varepsilon}, \quad E_y = \frac{1}{\varepsilon}.$$

Cách 3.

$$\phi = \frac{-1}{\varepsilon}xy, \quad E_x = -\frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{y}{\varepsilon} = \frac{1}{\varepsilon}, \quad E_x = -\frac{\partial \phi}{\partial y} = \frac{x}{\varepsilon} = \frac{1}{\varepsilon}.$$

Bài 2.6.5.

1. Lưu lượng chất lỏng được mô tả bởi điện thế phức $\Phi(z) = (\cos\alpha - i\sin\alpha)z,\ \alpha > 0$. Phác thảo đẳng thế liên kết và cho phương trình của chúng.

2. Phác thảo dòng chảy và cho phương trình của chúng.

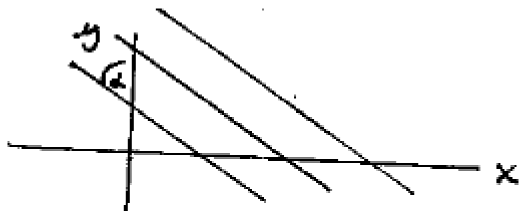
3. Tìm thành phần $V_x$và V_y của vector vận tốc tại (x, y). Góc mà vector vận tốc tạo với trục dương x là gì?

Giải.

1. Ta có

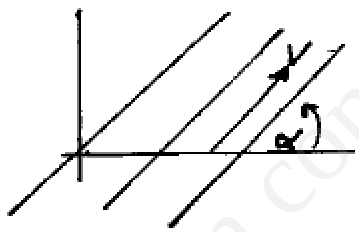
$$\Phi = (\cos\alpha - i\sin\alpha)(x + iy) = x\cos\alpha + y\sin\alpha + i(y\cos\alpha - x\sin\alpha) = \phi + i\psi$$

nên $\phi = x\cos\alpha + y\sin\alpha$. Đẳng thế: $x\cos\alpha + y\sin\alpha = \text{constant}$. Suy ra $dx\cos\alpha + dy\sin\alpha = 0$, nên $\frac{dy}{dx} = -\cot\alpha$.



Hình 2.6.6

2. Ta có $\psi = y\cos\alpha - x\sin\alpha$. Dòng chảy: $y\cos\alpha - x\sin\alpha =$ constant. Suy ra $dy\cos\alpha - dx\sin\alpha = 0$, nên $\frac{dy}{dx} = \tan\alpha$.



Hình 2.6.7

3. Ta có

$$v = V_x + iV_y = \overline{\left(\frac{d\Phi}{dz}\right)} = \cos\alpha + i\sin\alpha.$$

Vector tạo một góc α với trục dương x.

Chương 3

The Basic Transcendental Functions

Mục lục

3.1 The Exponential Function

Bài 3.1.1.[1.1] Chứng minh $\overline{e^{\overline{z}}} = e^z$

Giải. Đặt $z = x + iy$, ta có

$$\overline{e^{\overline{z}}} = \overline{e^{x-iy}} = \overline{e^{x}\left(\cos y - i\sin y\right)} = e^{x}\left(\cos y + i\sin y\right) = e^{z}.$$

Vậy ta có điều phải chứng minh.

Bài 3.1.2.[**1.2**] Hãy biến đổi các số phức sau thành dạng $a + ib$ với $a, b \in \mathbb{R}$. Nếu nó có nhiều giá trị, hãy chỉ ra tất cả các giá trị đó

1. $e^{1/2+2i}$
2. $e^{1/2-2i}$
3. e^{-i}
4. $e^{1/2+2i}.e^{-1/2-2i}$
5. $\left(e^{-i}\right)^{7}$
6. $e^{1/(1+i)}$
7. $e^{e^{-i}}$
8. $e^{i.\arctan 1}$
9. $e^{(-2)^{-1/2}}$

Giải.

1.

$e^{1/2+2i} = e^{\frac{1}{2}}\cos 2 + i.e^{\frac{1}{2}}\sin 2$

Bài 3.1.3.[1.13] Tìm tất cả các nghiệm của phương trình $e^z = e$

Giải. Đặt $z = x + iy$ với $x, y \in \mathbb{R}$, ta có $e^z = e^x (\cos y + i \sin y)$. Từ đó, phương trình cần giải tương đương với:

$$\begin{cases} e^x \cos y & = e \\ \sin y & = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x & = 1 \\ y & = k2\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

Vậy nghiệm của phương trình là $z = 1 + i.k2\pi$ với $(k \in \mathbb{Z})$

Bài 3.1.4[1.14] Tìm các phần thực và phần ảo của các hàm phức sau, kiểm tra điều kiện phương trình Cauchy-Riemann được thỏa và tìm $f'(z)$

1. $f(z) = e^{iz}$
2. $f(z) = e^{1/z}$
3. $f(z) = e^{e^z}$

Giải.

1. Với $z = x + iy$, ta có

$$f(z) = e^{iz} = e^{-y+ix} = e^{-y} \cos x + ie^{-y} \sin x.$$

Từ đó ta suy ra:

$$u(x, y) = e^{-y} \cos x$$

và

$$v(x, y) = e^{-y} \sin x.$$

Vậy

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial x} &= -e^{y}\sin x,\\
\frac{\partial u}{\partial y} &= -e^{-y}\cos x,\\
\frac{\partial v}{\partial x} &= e^{-y}\cos x,\\
\frac{\partial v}{\partial y} &= -e^{-y}\sin x
\end{aligned}$$

đều là hàm liên tục trên $\mathbb{R}^2$ và

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= -\frac{\partial v}{\partial x} \end{cases} \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

Ta suy ra f khả vi với mọi z hay nói cách khác f là hàm nguyên và

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = -e^{y}\sin x + ie^{-y}\cos x.$$

2. Với $z = x + iy$, ta có

$$f(z) = e^{1/z} = e^{\frac{x-iy}{x^2+y^2}} = e^{\frac{x}{x^2+y^2}}\cos\frac{y}{x^2+y^2} - ie^{\frac{x}{x^2+y^2}}\sin\frac{y}{x^2+y^2}$$

Từ đó ta suy ra:

$$u(x,y) = e^{\frac{x}{x^2+y^2}}\cos\frac{y}{x^2+y^2}$$

và

$$v(x,y) = -e^{\frac{x}{x^2+y^2}}\sin\frac{y}{x^2+y^2}.$$

Suy ra

$$\frac{\partial u}{\partial x} = e^{\frac{x}{x^2+y^2}}.\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}\cos\frac{y}{x^2+y^2} + e^{\frac{x}{x^2+y^2}}.\sin\frac{y}{x^2+y^2}.\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2},$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial y} &= -e^{\frac{x}{x^2+y^2}}.\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}\cos\frac{y}{x^2+y^2} + e^{\frac{x}{x^2+y^2}}\sin\frac{y}{x^2+y^2}.\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2},\\
\frac{\partial v}{\partial x} &= -e^{\frac{x}{x^2+y^2}}.\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}\sin\frac{y}{x^2+y^2} + e^{\frac{x}{x^2+y^2}}.\cos\frac{y}{x^2+y^2}.\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2},\\
\frac{\partial v}{\partial y} &= e^{\frac{x}{x^2+y^2}}.\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}\sin\frac{y}{x^2+y^2} + e^{\frac{x}{x^2+y^2}}\cos\frac{x}{x^2+y^2}.\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}
\end{aligned}$$

đều là các hàm liên tục trên $\mathbb{R}\backslash\{(0,0)\}$ và

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= -\frac{\partial v}{\partial x} \end{cases} \quad (x,y)\in\mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\}$$

nên f khả vi trên $\mathbb{C}^*$ và:

$$\begin{aligned}
f'(z) &= e^{\frac{x}{x^2+y^2}}.\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}\cos\frac{y}{x^2+y^2} + e^{\frac{x}{x^2+y^2}}.\sin\frac{y}{x^2+y^2}.\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}\\
&\quad +i\left[e^{\frac{x}{x^2+y^2}}.\cos\frac{y}{x^2+y^2}.\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2} - e^{\frac{x}{x^2+y^2}}.\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}\sin\frac{y}{x^2+y^2}\right]
\end{aligned}$$

3. Với $z = x + iy$, ta có

$$f(z) = e^{e^z} = e^{e^{x+iy}} = e^{e^x\cos y + ie^x\sin y} = e^{e^x\cos y}.\cos\left(e^x\sin y\right) + ie^{e^x\cos y}\sin\left(e^x\sin y\right)$$

Từ đó suy ra

$$u\left(x,y\right) = e^{e^x\cos y}.\cos\left(e^x\sin y\right)$$

và

$$v\left(x,y\right) = e^{e^x\cos y}\sin\left(e^x\sin y\right).$$

Suy ra

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial x} &= e^{e^x\cos y}.e^x\cos y\cos\left(e^x\sin y\right) - e^{e^x\cos y}\sin\left(e^x\sin y\right)e^x\sin y,\\
\frac{\partial u}{\partial y} &= -e^{e^x\cos y}e^x\sin y\cos\left(e^x\sin y\right) - e^{e^x\cos y}\sin\left(e^x\sin y\right)e^x\cos y,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial v}{\partial x} &= e^{e^x\cos y}.e^x\cos y\sin\left(e^x\sin y\right)+e^{e^x\cos y}\cos\left(e^x\sin y\right)e^x\sin y,\\ \frac{\partial v}{\partial y} &= -e^{e^x\cos y}\sin y\sin\left(e^x\sin y\right)+e^{e^x\cos y}\cos\left(e^x\sin y\right)e^x\cos y\end{aligned}$$

đều là các hàm liên tục trên $\mathbb{R}^2$ và

$$\begin{cases}\frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial v}{\partial y}\\ \frac{\partial u}{\partial y} &= -\frac{\partial v}{\partial x}\end{cases}\quad (x,y)\in\mathbb{R}^2$$

nên f khả vi trên $\mathbb{R}^2$ và

$$\begin{aligned}f'(z) &= \frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}=e^{e^x\cos y}.e^x\cos y\cos\left(e^x\sin y\right)-e^{e^x\cos y}\sin\left(e^x\sin y\right)e^x\sin y\\ &\quad +i\left[e^{e^x\cos y}.e^x\cos y\sin\left(e^x\sin y\right)+e^{e^x\cos y}\cos\left(e^x\sin y\right)e^x\sin y\right]\end{aligned}$$

Bài 3.1.5.[1.17] Dùng định lí L'Hopital, tính:

1. $\lim\limits_{z\to i}\dfrac{z-i}{e^z-e^i}$
2. $\lim\limits_{\theta\to\pi}\dfrac{1+e^{i\theta}}{1-e^{2i\theta}}$ với $\theta\in\mathbb{R}$

Giải.

1. Do $\lim\limits_{z\to i}(z-i)=\lim\limits_{z\to i}\left(e^z-e^i\right)=0$ nên áp dụng định lí L'Hopital, ta có:

$$\lim_{z\to i}\frac{z-i}{e^z-e^i}=\lim_{z\to i}\frac{(z-i)'}{\left(e^z-e^i\right)'}=\lim_{z\to i}\frac{1}{e^z}=\frac{1}{e^i}$$

2. Do

$$\lim_{\theta\to\pi}(1+\cos\theta+i\sin\theta)=\lim_{\theta\to\pi}(1-\cos 2\theta-i\sin 2\theta)=0$$

nên áp dụng định lí L'Hopital, ta có

$$\lim_{\theta\to\pi}\frac{1+e^{i\theta}}{1-e^{2i\theta}}=\lim_{\theta\to\pi}\frac{(1+\cos\theta+i\sin\theta)'}{(1-\cos2\theta-i\sin2\theta)'}=\lim_{\theta\to\pi}\frac{-\sin\theta+i\cos\theta}{2\sin2\theta-2i\cos2\theta}=\frac{-i}{-2i}=\frac{1}{2}.$$

Bài 3.1.6.[**1.19**]

1. Cho a là hằng số, chứng minh $\dfrac{d\left(e^ze^{a-z}\right)}{dz}=0$ bằng cách sử dụng những tính chất của đạo hàm, như là đạo hàm của e^z và đạo hàm hợp. Chú ý không được dùng công thức $e^{z_1+z_2}=e^{z_1}.e^{z_2}$.
2. Sau khi chứng minh e^ze^{a-z}là hằng số, gọi là k. Tính k bằng cách sử dụng công thức $e^0=1$.
3. Với $k=e^ze^{a-z}$ đã tính ở trên, cho $z=z_1, a=z_1+z_2$, chứng minh công thức $e^{z_1}.e^{z_2}=e^{z_1+z_2}$.

Giải.

1. Ta có

$$\frac{d\left(e^ze^{a-z}\right)}{dz}=(e^z)'e^{a-z}+e^z.(e^{a-z})'=e^ze^{a-z}-e^ze^{a-z}=0.$$

2. Do

$$\frac{d\left(e^ze^{a-z}\right)}{dz}=0$$

nên ta suy ra $e^ze^{a-z}=C \quad \forall z$. Chọn $z=0$, ta suy ra $e^0.e^{a-0}=e^a=C$.

3. Ta có $k=e^a=e^z.e^{a-z}$. Đặt $z=z_1,\ a=z_1+z_2$, ta suy ra $e^{z_1}.e^{z_2}=e^{z_1+z_2}$

Bài 3.1.7.[**1.20**] Dùng công thức như trong ví dụ 1, tìm đạo hàm cấp 5 của hàm $e^t\sin t$.

Giải. Ta nhận thấy

$$e^t \sin t = \operatorname{Im}\left(e^{t+it}\right).$$

Đặt $z(t) = t + it$. Ta có:

$$\left(e^{z(t)}\right)' = z'(t)\, e^z \Rightarrow \left(e^{z(t)}\right)^{(5)} = \left(z'(t)\right)^5 e^z,$$

$$\begin{aligned}\left(e^{t+it}\right)^{(5)} &= (1+i)^5 e^{t+it} = -4\,(1+i)\,.e^t(\cos t + i\sin t)\\ &= -4e^t(\cos t - \sin t) - 4ie^t(\cos t + \sin t)\end{aligned}$$

Vậy ta suy ra

$$(e^t \sin t)^{(5)} = -4e^t(\cos t + \sin t)$$

.

Bài 3.1.8.[1.21] Trong ví dụ 1, ta đã tính được đạo hàm cấp 7 của hàm thực $e^{2t}\cos 2t$. Dùng hàm $diff$ trong Matlab để kiểm tra kết quả.

Giải. Trong Matlab, dùng hàm $diff$, ta có

$$\left(e^{2t}\cos 2t\right)^{(7)} = e^{10}e^{2t}\left(\sin 2t + \cos 2t\right).$$

Bài 3.1.9.[1.22] Tìm giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của $|f(z)|$ trên các tập R đóng sau:

1. $R = \{z : |z - 1 - i| \le 2\}$ và $f(z) = e^z$
2. $R = \{z : |z| \le 1\}$ và $f(z) = e^{z^2}$

Giải.

1. Ta có

$$(x, y) \in R \Leftrightarrow \sqrt{(x-1)^{2}+(y-1)^{2}} \leq 2 \Leftrightarrow (x-1)^{2}+(y-1)^{2} \leq 4$$

và

$$|f(z)| = |e^{z}| = |e^{x}(\cos y + i \sin y)| = e^{x}.$$

Từ điều kiện

$$(x-1)^{2}+(y-1)^{2} \leq 4$$

ta suy ra $x \in [-1, 3]$ nên hàm liên tục tăng$|f(z)| = e^{x}$ đạt giá trị nhỏ nhất là e^{-1} tại $z = (-1, 1)$ và đạt giá trị lớn nhất e^{3}tại $z = (3, 1)$.

Bài 3.1.10.[**1.24**]

1. Giả sử ta muốn tính đạo hàm cấp n theo biến t của hàm $f(t) = 1/(t^2+1)$. Chú ý rằng $f(t) = \mathrm{Re}\big((t-1)^{-1}\big)$. Dùng phương pháp ở ví dụ 1, như là nhị thức Newton để chứng minh:

$$\begin{cases} f^{(n)}(t) & = \frac{(-1)n!(n+1)!}{(t^2+1)^{n+1}} \displaystyle\sum_{k=0}^{\frac{n+1}{2}} \frac{(-1)^{k} t^{n+1-2k}}{(2k)!(n+1-2k)!} \quad n \text{ lẻ} \\ f^{(n)}(t) & = \frac{n!(n+1)!}{(t^2+1)^{n+1}} \displaystyle\sum_{k=0}^{\frac{n}{2}} \frac{(-1)^{k} t^{n+1-2k}}{(2k)!(n+1-2k)!} \quad n \text{ chẵn} \end{cases}$$

2. Dùng phương pháp ở câu 1, tìm đạo hàm cấp n của $\dfrac{1}{t^2+1}$. Chú ý rằng $\dfrac{1}{t^2+1} = \mathrm{Im}\dfrac{1}{t-i}$

Giải.

1. Dùng quy nạp, ta sẽ chứng minh

$$\left(\frac{1}{t-i}\right)^{(n)} = \frac{(-1)^n n!}{(t-i)^{n+1}}.$$

Ta có:

$$n=1, \quad \left(\frac{1}{t-i}\right)' = \frac{-1}{(t-i)^2}.$$

Giả sử đúng với $n = k$, tức

$$\left(\frac{1}{t-i}\right)^{(k)} = \frac{(-1)^k k!}{(t-i)^{k+1}},$$

ta sẽ chứng minh đúng với $n = k+1$. Thật vậy, ta có

$$\begin{aligned}
(\frac{1}{t-i})^{(k+1)} &= [(\frac{1}{t-i})^{(k)}]' = [\frac{(-1)^k k!}{(t-i)^{k+1}}]' \\
&= \frac{(-1)^{k+1} k!(k+1).(t-i)^k}{(t-i)^{2k+2}} \\
&= \frac{(-1)^{k+1}(k+1)!}{(t-i)^{k+2}}.
\end{aligned}$$

Vậy ta có

$$\begin{aligned}
(\frac{1}{t-i})^{(n)} &= \frac{(-1)^n n!}{(t-i)^{n+1}} = \frac{(-1)^n n!}{(t^2+1)^{n+1}}(t+i)^{n+1} \\
&= \frac{(-1)^n n!}{(t^2+1)^{n+1}} \sum_{k=0}^{n+1} t^{n+1-k} i^k \frac{(n+1)!}{k!(n-k)!}.
\end{aligned}$$

Do $i^2 = -1$ nên ta suy ra

- n lẻ thì

$$
\begin{aligned}
(\frac{1}{t-i})^{(n)} &= \frac{(-1)n!(n+1)!}{(t^2+1)^{n+1}}\sum_{k=0}^{\frac{n+1}{2}}\frac{(-1)^k t^{n+1-2k}}{(2k)!(n+1-2k)!} \\
&+ \frac{(-1)n!(n+1)!}{(t^2+1)^{n+1}}\sum_{k=0}^{\frac{n+1}{2}}\frac{(-1)^{k+1} t^{n-2k}}{(2k-1)!(n+1-2k)!}
\end{aligned}
$$

- n chẵn thì

$$
\begin{aligned}
(\frac{1}{t-i})^{(n)} &= \frac{n!(n+1)!}{(t^2+1)^{n+1}}\sum_{k=0}^{\frac{n}{2}}\frac{(-1)^k t^{n+1-2k}}{(2k)!(n+1-2k)!} \\
&+ i\frac{n!(n+1)!}{(t^2+1)^{n+1}}\sum_{k=0}^{\frac{n}{2}+1}\frac{(-1)^{k+1} t^{n+1-2k}}{(2k-1)!(n+1-2k)!}
\end{aligned}
$$

Từ đó ta suy ra điều phải chứng minh.

2. Dùng kết quả câu trên, ta suy ra:

- n là số lẻ thì

$$\left(\frac{1}{t^2+1}\right)^n = \frac{(-1)n!(n+1)!}{(t^2+1)^{n+1}}\sum_{k=0}^{\frac{n+1}{2}}\frac{(-1)^{k+1} t^{n-2k}}{(2k-1)!(n+1-2k)!}.$$

- n là số chẵn thì

$$\left(\frac{1}{t^2+1}\right)^n = \frac{n!(n+1)!}{(t^2+1)^{n+1}}\sum_{k=0}^{\frac{n}{2}+1}\frac{(-1)^{k+1} t^{n+1-2k}}{(2k-1)!(n+1-2k)!}.$$

Bài 3.1.11.[1.25] Độ lớn của biểu diễn sau:

$$P = 1 + e^{i\psi} + e^{i2\psi} + \cdots + e^{i(N-1)\psi} = \sum_{n=0}^{N-1} e^{in\psi}$$

được áp dụng trong nhiều vấn đề kể cả sự bức xạ từ N phần tử vật lí đồng nhất (ví dụ như ăng-ten, loa phóng thanh). Ở đây ψ là một số thực phụ thuộc vào sự phân chia của những phần tử và vị trí của đối tượng bức xạ. $|P|$cho chúng ta biết độ mạnh của đối tượng bức xạ

1. Sử dụng tổng của chuỗi hình học hữu hạn, chứng minh rằng:

$$|P(\psi)| = \left|\frac{\sin\frac{N\psi}{2}}{\sin\frac{\psi}{2}}\right|$$

2. Tìm

$$\lim_{\psi\to 0} |P(\psi)|$$

3. Sử dụng máy tính để vẽ $|P(\psi)|$ với $0 \leq \psi \leq 2\pi$ khi $N = 3$

Giải.

1. Ta có

$$\begin{aligned}
P &= 1 + e^{i\psi} + e^{i2\psi} + \cdots + e^{i(N-1)\psi} = \sum_{n=0}^{N-1} e^{in\psi} \\
&= 1 + (\cos(\psi) + \cos(2\psi) + \cdots + \cos((N-1)\psi)) \\
&\quad + i(\sin(\psi) + \sin(2\psi) + \cdots + \sin((N-1)\psi)) \\
&= \frac{\cos\left(\frac{(N-1)\psi}{2}\right)\sin\left(\frac{N\psi}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\psi}{2}\right)} + i\left(\frac{\sin\left(\frac{(N-1)\psi}{2}\right)\sin\left(\frac{N\psi}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\psi}{2}\right)}\right).
\end{aligned}$$

Suy ra

$$\begin{aligned}|P|^2 &= \left(\frac{\cos\left(\frac{(N-1)\psi}{2}\right)\sin\left(\frac{N\psi}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\psi}{2}\right)}\right)^2 + \left(\left(\frac{\sin\left(\frac{(N-1)\psi}{2}\right)\sin\left(\frac{N\psi}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\psi}{2}\right)}\right)\right)^2\\ &= \left(\frac{\sin\frac{N\psi}{2}}{\sin\frac{\psi}{2}}\right)^2.\end{aligned}$$

nên

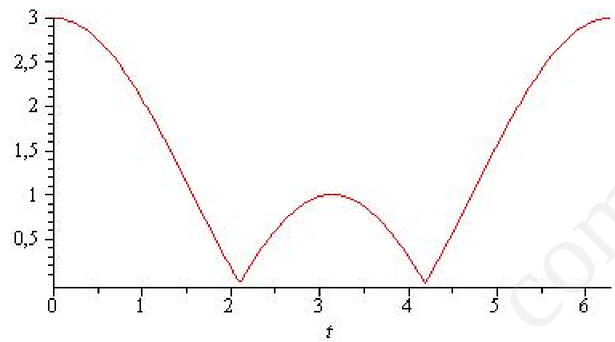
$$|P(\psi)| = \left|\frac{\sin\frac{N\psi}{2}}{\sin\frac{\psi}{2}}\right|.$$

2. Ta có:

$$\lim_{\psi\to 0}|P(\psi)| = \lim_{\psi\to 0}\left|N\cdot\frac{\sin\frac{N\psi}{2}}{\frac{N\psi}{2}}\left(\frac{\sin\frac{\psi}{2}}{\frac{\psi}{2}}\right)^{-1}\right| = N.$$

3. Đoạn lệnh:

```
>> t=linspace(0,2*pi,100);
>> f=abs(sin(3.*t.*(1./2))./sin((1./2).*t));
>> plot(t,f)
```



Hình 3.1.1: Hình 3.1.11

Bài 3.1.12.[1.26] Cho $z = re^{i\theta}$ với r, θ là các biến trong tọa độ cực.

1. Chứng minh $\mathrm{Re}[(1+z)\,/\,(1-z)] = (1-r^2)\,/\,(1+r^2-2r\cos\theta)$. Tại sao hàm số thỏa phương trình (2.5-14) trên miền $z \neq 1$

2. Tìm $\mathrm{Im}[(1+z)\,/\,(1-z)] = (1-r^2)\,/\,(1+r^2-2r\cos\theta)]$ bằng kết quả câu trên.

Giải.

1. Ta có

$$\begin{aligned}\frac{1+z}{1-z} &= \frac{(1+r\cos\theta)+r\sin\theta}{(1-r\cos\theta)-r\sin\theta} = \frac{(1-r^2)+i2\sin\theta}{(1-r\cos\theta)^2+r^2\sin^2\theta}\\ &= \frac{1-r^2}{1+r^2-2r\cos\theta}+i\frac{2\sin\theta}{1+r^2-2r\cos\theta}\end{aligned}$$

Từ đó ta suy ra

$$\mathrm{Re}[(1+z)\,/\,(1-z)] = \left(1-r^2\right)\,/\,\left(1+r^2-2r\cos\theta\right).$$

Đặt

$$\left(1-r^2\right)\,/\,\left(1+r^2-2r\cos\theta\right) = \phi\,(r,\theta)\,,$$

ta sẽ chứng minh

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial r^2}(z) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial\theta^2}(z) + \frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial r}(z) = 0 \quad \forall z \neq 1.$$

Thật vậy, ta có

$$\begin{aligned}
\frac{\partial\phi}{\partial r}(z) &= \frac{2r^2\cos\theta + 2\cos\theta - 4r}{(1+r^2-2r\cos\theta)^2} \\
\Rightarrow \frac{\partial^2\phi}{\partial r^2}(z) &= \frac{-4r^3\cos\theta - 12r\cos\theta + 8\cos^2\theta + 12r^2 - 4}{(1+r^2-2r\cos\theta)^3} \\
\frac{\partial\phi}{\partial\theta}(z) &= \frac{(4r^3-4r)\sin\theta}{(1+r^2-2r\cos\theta)^2} \\
\Rightarrow \frac{\partial^2\phi}{\partial\theta^2}(z) &= \frac{(4r^3-4r)\left(\cos\theta + r^2\cos\theta - 2r\cos^2\theta - 8r\sin^2\theta\right)}{(1+r^2-2r\cos\theta)^3} \\
\frac{\partial\phi}{\partial\theta}(z) &= \frac{(4r^3-4r)\sin\theta}{(1+r^2-2r\cos\theta)^2} \\
\Rightarrow \frac{\partial^2\phi}{\partial\theta^2}(z) &= \frac{(4r^3-4r)\left(\cos\theta + r^2\cos\theta - 2r\cos^2\theta - 8r\sin^2\theta\right)}{(1+r^2-2r\cos\theta)^3}
\end{aligned}$$

Từ đó ta suy ra

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial r^2}(z) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial\theta^2}(z) + \frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial r}(z) = 0 \quad \forall z \neq 1.$$

2. Ta có

$$\mathrm{Im}[(1+z)\,/\,(1-z)] = \left(1-r^2\right)\,/\,\left(1+r^2-2r\cos\theta\right)] = \frac{2\sin\theta}{1+r^2-2r\cos\theta}.$$

3.2 Trigonometric Functions

Bài 3.2.1.[2.1] Dùng các phương trình 3.2-9 và 3.2-10 để đưa các số phức sau về dạng $a+ib$ với $a, b \in \mathbb{R}$. Nếu có nhiều hơn một giá trị, hãy chỉ ra tất cả. Sau đó dùng Matlab để kiểm tra kết quả, lưu ý rằng Matlab chỉ cho ra một giá trị.

1. $\sin(2+3i)$
2. $\cos(-2+3i)$
3. $\tan(2+3i)$
4. $(\sin i)^{1/2}$
5. $\sin(i^{1/2})$
6. $\sin(e^i)$
7. $\cos(2i.\arg(2i))$
8. $\sin(\cos(1+i))$
9. $\tan(i\arg(1+\sqrt{3}i)$
10. $\arg(\tan i)$
11. $e^{i\cos i} + e^{-1\cos i}$

Giải

1.

$$\sin(2+3i) = \sin 2\cosh 3 + i\cos 2\sinh 3$$

Bài 3.2.2.[2.12] Chứng minh $\sin^2 z + \cos^2 z = 1$ bằng hai cách

1. Dùng định nghĩa về cos và sin trong phần 3.2-5, 3.2-6
2. Dùng công thức $\sin^2 z + \cos^2 z = (\cos z + i\sin z)(\cos z - i\sin z)$ và công thức Euler về số phức.

Giải.

1.

$$\begin{aligned}
\sin^2 z + \cos^2 z &= \frac{(e^{iz} + e^{-iz})^2}{4} + \frac{(e^{iz} - e^{-iz})^2}{-4} \\
&= \frac{e^{2iz} + e^{-2iz} + 2 - e^{2iz} - e^{-2iz} + 2}{4} \\
&= 1
\end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}
\sin^2 z + \cos^2 z &= (\cos z + i\sin z)(\cos z - i\sin z) \\
&= e^{iz}.e^{-iz} = e^0 = 1
\end{aligned}$$

Bài 3.2.3.[2.13] Dùng định nghĩa của hàm sin và cos, chứng minh:

1. $\dfrac{d}{dz}\sin z = \cos z$
2. $\dfrac{d}{dz}\cos z = -\sin z$
3. $\cos^2 z = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}\cos 2z$
4. $\sin(z + 2\pi) = \sin z$
5. $\cos(z + 2\pi) = \cos z$

Giải.

1.

$$\begin{aligned}\frac{d}{dz}\sin z &= \frac{d}{dz}\left(\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}\right)=\frac{ie^{iz}+ie^{-iz}}{2i}\\ &= \frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}=\cos z\end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}\frac{d}{dz}\cos z &= \frac{d}{dz}\left(\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}\right)=\frac{ie^{iz}-ie^{-iz}}{2}\\ &= \frac{-e^{iz}+e^{-iz}}{2i}=-\sin z\end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned}\cos^2 z &= \left(\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}\right)^2=\frac{e^{2iz}+e^{-2iz}+2}{4}\\ &= \frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos 2z\end{aligned}$$

4.

$$\begin{aligned}\sin(z+2\pi) &= \frac{e^{iz+2i\pi}-e^{-iz-2i\pi}}{2i}\\ &= \frac{e^{iz}.(\cos 2\pi+i\sin 2\pi)-e^{-iz}(\cos 2\pi-i\sin 2\pi)}{2i}\\ &= \frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}=\sin z\end{aligned}$$

5.

$$\begin{aligned}
\cos(z+2\pi) &= \frac{e^{iz+2i\pi}+e^{-iz-2i\pi}}{2}\\
&= \frac{e^{iz}.(\cos 2\pi + i\sin 2\pi) + e(\cos 2\pi + i\sin 2\pi)}{2}\\
&= \frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2} = \cos z
\end{aligned}$$

Bài 3.2.4.[2.16] Chứng minh nghiệm của phương trình $\sin z = 0$ trong mặt phẳng phức là $z = n\pi$ với $n = 0, \pm 1, \pm 2\ldots$

Giải. Ta có

$$\sin z = 0 \Leftrightarrow \frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i} = 0 \Leftrightarrow e^{iz} = e^{-iz} \Leftrightarrow iz = -iz + ik2\pi \Leftrightarrow z = k\pi$$

với $k = 0, \pm 1, \pm 2\ldots$. Ta có điều phải chứng minh.

Bài 3.2.5.[2.17] Chứng minh phương trình $\sin z - \cos z = 0$ không có nghiệm phức. Giải phương trình đó.

Giải. Ta có

$$\sin z - \cos z = 0 \Leftrightarrow \frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i} - \frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2} = e^{iz} - e^{-iz} - ie^{iz} - ie^{-iz} = 0 \Leftrightarrow e^{2iz} = \frac{1+i}{1-i} = i = e^{i\pi/2}.$$

Từ đó ta suy ra phương trình trên tương đương với

$$2iz = i\frac{\pi}{2} + ik2\pi \Leftrightarrow z = \frac{\pi}{4} + k\pi với k = 0, \pm 1, \pm 2\ldots$$

Vậy ta có điều phải chứng minh.

Bài 3.2.6.[2.18] Tại miền nào trong mặt phẳng phức mà các hàm số sau không giải tích

1. $f(z) = \tan z$
2. $f(z) = \dfrac{1}{\cos(iz)}$
3. $f(z) = \dfrac{1}{\sin z \sin[(1+i)z]}$
4. $f(z) = \dfrac{1}{\sqrt{3}\sin z - \cos z}$

Giải.

1. Ta có f không xác định tại $z = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$. Ta lại có hàm $\sin z$ và $\cos z$ là hàm nguyên nên

$$f(z) = \tan z = \frac{\sin z}{\cos z}$$

khả tích trên tập mở

$$D = \mathbb{R}^2 \backslash \left\{ z = \frac{\pi}{2} + k\pi \right\}.$$

2. Ta có

$$\cos(iz) = 0 \Leftrightarrow iz = \frac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow z = -\frac{\pi}{2} + k'\pi$$

với $k' = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ và hàm $\cos(iz)$ là hàm nguyên nên hàm $f(z)$ khả tích trên tập mở

$$D = \mathbb{R}^2 \backslash \{z = -\frac{\pi}{2} + k\pi\}.$$

3. Ta có

$$\sin z \sin[(1+i)z] \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sin z & \neq 0 \\ \sin[(1+i)z] & \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z & \neq k\pi \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2 \ldots) \\ z & \neq \dfrac{k'\pi}{(1+i)} \quad (k' = 0, \pm 1, \pm 2 \ldots) \end{cases}$$

Ta lại có $\sin z \sin[(1+i)z]$ là hàm nguyên nên f giải tích trên tập mở

$$D = \mathbb{R}^2 \backslash \left\{ z = k\pi \wedge z = \frac{k'\pi}{(1+i)} \right\}.$$

4. $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{3}\sin z - \cos z}$. Ta có $\sqrt{3}\sin z - \cos z = 0 \Leftrightarrow \sin\left(z - \dfrac{\pi}{6}\right) = 0 \Leftrightarrow z - \dfrac{\pi}{6} = k\pi \Leftrightarrow z = \dfrac{\pi}{6} + k\pi$ với $k = 0, \pm 1, \pm 2 \ldots$. Ta lại có $\sqrt{3}\sin z - \cos z$ là hàm nguyên nên f giải tích trên tập mở $D = \mathbb{R}^2 \backslash \left\{ z = \dfrac{\pi}{6} + k\pi \right\}$.

Bài 3.2.7.[2.22] Cho hàm số $f(z) = \sin\left(\dfrac{1}{z}\right)$

1. Biến đổi hàm về dạng $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ với u, v là các hàm thực. Tìm miền D để f giải tích.
2. Tính đạo hàm của $f(z)$, tìm miềm D' để f' giải tích.

Giải

1. Đặt $z = x + iy$, ta có

$$\frac{1}{z} = \frac{x - iy}{x^2 + y^2}.$$

Do đó

$$\begin{aligned} \sin\left(\frac{1}{z}\right) &= \sin\left(\frac{x}{x^2+y^2} - i\frac{y}{x^2+y^2}\right) \\ &= \underbrace{\sin\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right)\cosh\left(\frac{y}{x^2+y^2}\right)}_{u(x,y)} - i\underbrace{\cos\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right)\sinh\left(\frac{y}{x^2+y^2}\right)}_{v(x,y)} \end{aligned}$$

Ta có $f(z) = \sin(z^{-1})$ có đạo hàm với mọi $z \neq 0$ nên ta có f giải tích trên miền mở $D = \mathbb{R} \backslash \{z = 0\}$

2.

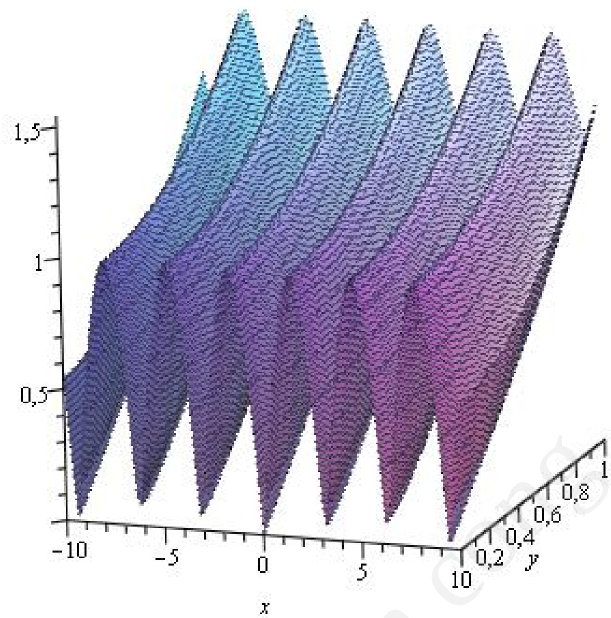
$$f'(z) = -\cos\left(\frac{1}{z}\right)\frac{1}{z^2}$$

Tương tự như trên, ta có f' giải tích trên miền mở $D' = \mathbb{R}\backslash\{z = 0\}$.

Bài 3.2.8.[2.23] Vẽ đồ thị ba chiều cho $\sin|z|$. Xác minh rằng đồ thị cho thấy $\sin|z| = 0$ với $z = k\pi, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, ..$

Giải. Nhập đoạn lệnh

```
>> x=[-2*pi:0.05:2*pi];
>> y=[0:0.05:1];
>> [X,Y]=meshgrid(x,y);
>> z=X+i*Y;
>> w=abs(sin(z));
>> meshz(X,Y,w)
```



Hình 3.2.1

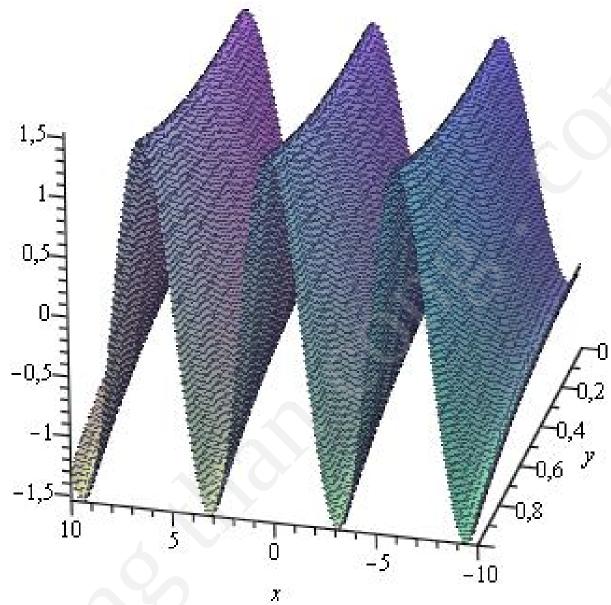
Ta thấy tại các điểm được ước lượng trên đồ thị là $z = \pm\pi$ $(x = \pm\pi,\ y = 0)$ và $z = \pm 2\pi$, $(x = \pm 2\pi,\ y = 0)$, $\sin(|z|) = 0$.

Bài 3.2.9.[2.24] Vẽ đồ thị ba chiều cho phần thực và phần ảo của $\cos z$. Xác minh rằng đồ thị cho thấy $\mathrm{Re}\,(\cos z) = 0$ và $\mathrm{Im}\,(\cos z) = 0$ với $z = \pm\frac{\pi}{2}, \pm\frac{3\pi}{2}, \ldots$

Giải. Nhập đoạn lệnh:

```
>> x=[-2*pi:0.05:2*pi];
>> y=[0:0.05:1];
>> [X,Y]=meshgrid(x,y);
>> z=X+i*Y;
```

```
>> w=real(cos(z));
>> meshz(X,Y,w)
```



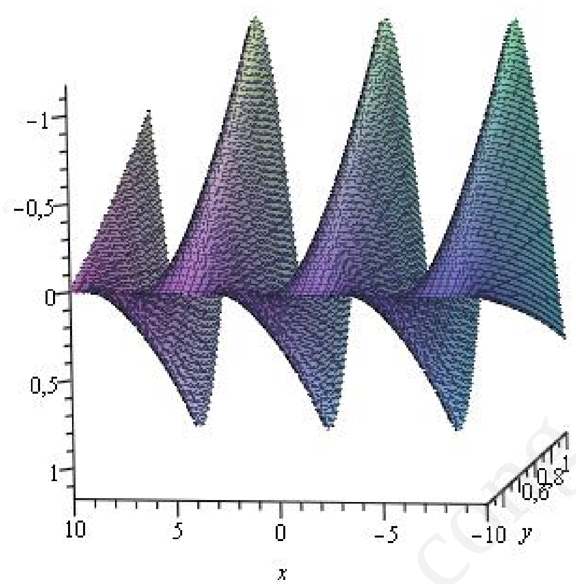
Hình 3.2.2: $\mathrm{Re}\,(\cos z)$

Tại các điểm mà $z = \pm\frac{\pi}{2}\left(x = \pm\frac{\pi}{2},\, y = 0\right),\ z = \pm\frac{3\pi}{2}\left(x = \pm\frac{3\pi}{2},\, y = 0\right)$, trên đồ thị, ta thấy $\mathrm{Re}\,(\cos z) = 0$.

Tiếp tục nhập:

```
>> u=imag(cos(z));
>> meshz(X,Y,u)
```

Ta thấy đồ thị sau:



Hình 3.2.3: $\mathrm{Im}\,(\cos z)$

Tại các điểm mà $z = \pm\frac{\pi}{2}\left(x = \pm\frac{\pi}{2},\, y = 0\right)$, $z = \pm\frac{3\pi}{2}\left(x = \pm\frac{3\pi}{2},\, y = 0\right)$, trên đồ thị, ta thấy $\mathrm{Im}\,(\cos z) = 0$

Bài 3.2.10.[2.25]

1. Chứng minh $|\cos z| = \sqrt{\sinh^2 y + \cos^2 x}$
2. Chứng minh $|\sin z| = \sqrt{\sinh^2 y + \sin^2 x}$
3. Chứng minh $|\cos z|^2 + |\sin z|^2 = \cosh^2 y + \sinh^2 y$
4. Chứng minh
$$\tan z = \frac{\sin(2x) + i\sinh(2y)}{\cos(2x) + \cosh(2y)}$$

5. Chứng minh
$$\cot z = \frac{\sin(2x) - i\sinh(2y)}{\cosh(2y) - \cos(2x)}$$

Giải.

1. Ta có $\cos z = \cos x \cosh y - i \sin x \sinh y$, từ đó suy ra

$$\begin{aligned} |\cos z| &= \sqrt{(\cos x \cosh y)^2 + (\sin x \sinh y)^2} \\ &= \sqrt{\cos^2 x(1 + \sinh^2 y) + \sin^2 x \sinh^2 y} \\ &= \sqrt{\sinh^2 y + \cos^2 x} \end{aligned}$$

Vậy ta có điều phải chứng minh.

Bài 3.2.11.[2.30]

1. Ta đã có $\sin z = \sin x \cosh y + i \cos x \sinh y$ và $|\sinh y| \le \cosh y$. Hãy chứng minh $|\sinh y| \le |\sin z| \le \cosh y$

2. Suy ra bất đẳng thức tương tự cho $|\cos z|$

Giải.

1. Ta có

$$|\sin z| = \sqrt{\sin^2 x \cosh^2 y + \cos^2 x \sinh^2 y} \ge \sqrt{\sin^2 x \sinh^2 y + \cos^2 x \sinh^2 y} = |\sinh y|$$

và

$$|\sin z| = \sqrt{\sin^2 x \cosh^2 y + \cos^2 x \sinh^2 y} \le \sqrt{\sin^2 x \cosh^2 y + \cos^2 x \cosh^2 y} = \cosh y$$

Từ đó ta có điều phải chứng minh.

2. Tương tự, ta có

$$\begin{aligned}|\cos z| &= \sqrt{\cos^2 x\cosh^2 y + \sin^2 x\sinh^2 y}\\ &\geq \sqrt{\cos^2 x\sinh^2 y + \sin^2 x\sinh^2 y} = |\sinh y|\end{aligned}$$

và

$$\begin{aligned}|\cos z| &= \sqrt{\cos^2 x\cosh^2 y + \sin^2 x\sinh^2 y}\\ &\leq \sqrt{\cos^2 x\cosh^2 y + \sin^2 x\cosh^2 y} = \cosh y\end{aligned}$$

3.3 Hyperbolic Functions

Bài 3.3.1.[3.1] Dùng các kết quả (3.3-1) và (3.3-2) để chứng minh:

1. $\sinh z = \sinh x\cos y + i\cosh x\sin y$
2. $\cosh z = \cosh x\cos y + i\sinh x\sin y$
3. $\cosh^2 z - \sinh^2 z = 1$
4. $\sinh(z + 2\pi i) = \sinh z$ và $\cosh(z + 2\pi i) = \cosh z$
5. $\sinh(i\theta) = i\sin\theta$ và $\cosh(i\theta) = \cos\theta$. Từ đó ta kết luận sinh của số thuần ảo là số thuần ảo và cosh của số thuần ảo là số thực.

Giải. Với $z = x + iy$, ta có:

1.

$$\begin{aligned}\sinh z &= \frac{e^z - e^{-z}}{2} = \frac{e^x(\cos y + i\sin y) - e^{-x}(\cos y - i\sin y)}{2}\\ &= \cos y\left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right) + i\sin y\left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)\\ &= \sinh x\cos y + i\cosh x\sin y\end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}\cosh z &= \frac{e^z + e^{-z}}{2} = \frac{e^x(\cos y + i\sin y) + e^{-x}(\cos y - i\sin y)}{2}\\ &= \cos y\left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right) + i\sin y\left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)\\ &= \cosh x\cos y + i\sinh x\sin y\end{aligned}$$

3.

$$\cosh^2 z - \sinh^2 z = \frac{e^{2z} + e^{-2z} + 2}{4} - \frac{e^{2z} + e^{-2z} - 2}{4} = 1$$

4.

$$\begin{aligned}\sinh(z + 2\pi i) &= \sinh x\cos(y + 2\pi) + i\cosh x\sin(y + 2\pi)\\ &= \sinh x\cos y + i\cosh x\sin y = \sinh z\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\cosh(z + 2\pi i) &= \cosh x\cos(y + 2\pi)) + i\sinh x\sin(y + 2\pi)\\ &= \cosh x\cos y + i\sinh x\sin y = \cosh z\end{aligned}$$

5.

$$\sinh(i\theta) = \sinh 0\cos\theta + i\cosh 0\sin\theta = i\sin\theta$$

$$\cosh(i\theta) = \cosh 0\cos\theta + i\sinh 0\sin\theta = \cos\theta$$

(Do $\sinh 0 = 0$ và $\cosh 0 = 1$)

Bài 3.3.2.[3.6] Với các kết quả (3.3-6) và (3.3-7), viết các số sau thành dạng $a+ib$ với $a, b \in \mathbb{R}$. Dùng Matlab để kiểm tra kết quả.

1. $\sinh(1+2i)$
2. $\sinh(1+i\dfrac{\pi}{2})$
3. $\tanh(\exp(i\dfrac{\pi}{4}))$
4. $\cosh(i\log n)$ (log tự nhiên)

Giải.

3. Ta có

$$\begin{aligned}
\tanh\left(\exp\left(i\frac{\pi}{4}\right)\right) &= \frac{\sinh\left(e^{i\frac{\pi}{4}}\right)}{\cosh\left(e^{i\frac{\pi}{4}}\right)} \\
&= \frac{\sinh\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}+i\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)}{\cosh\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}+i\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)} \\
&= \frac{\sinh\dfrac{\sqrt{2}}{2}\cos\dfrac{\sqrt{2}}{2}+i\cosh\dfrac{\sqrt{2}}{2}\sin\dfrac{\sqrt{2}}{2}}{\cosh\dfrac{\sqrt{2}}{2}\cos\dfrac{\sqrt{2}}{2}+i\sinh\dfrac{\sqrt{2}}{2}\sin\dfrac{\sqrt{2}}{2}} \\
&= \frac{\left(\sinh\dfrac{\sqrt{2}}{2}\cos\dfrac{\sqrt{2}}{2}+i\cosh\dfrac{\sqrt{2}}{2}\sin\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(\cosh\dfrac{\sqrt{2}}{2}\cos\dfrac{\sqrt{2}}{2}-i\sinh\dfrac{\sqrt{2}}{2}\sin\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)}{\cosh^2\dfrac{\sqrt{2}}{2}\cos^2\dfrac{\sqrt{2}}{2}+\sinh^2\dfrac{\sqrt{2}}{2}\sin^2\dfrac{\sqrt{2}}{2}}
\end{aligned}$$

$$= \frac{\frac{1}{2}\left(\sinh\left(\sqrt{2}\right) + i\sin\left(\sqrt{2}\right)\right)}{\cosh^2\frac{\sqrt{2}}{2} - \sin^2\frac{\sqrt{2}}{2}}$$

$$= \frac{\sinh\left(\sqrt{2}\right)}{2\cosh^2\frac{\sqrt{2}}{2} - 2\sin^2\frac{\sqrt{2}}{2}} + i\frac{\sin\left(\sqrt{2}\right)}{2\cosh^2\frac{\sqrt{2}}{2} - 2\sin^2\frac{\sqrt{2}}{2}}.$$

Bài 3.3.3.[3.10] Tính các đạo hàm của hàm số tại mỗi điểm sau:

1. $\frac{d}{dz}\sinh(\sin z)$ tại $z = i$
2. $\frac{d}{dz}\sin(\sinh z)$ tại $z = i$

Giải. Ta có

$$\sinh z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}$$

nên

$$\sinh'(z) = \frac{e^z + e^{-z}}{2} = \cosh(z).$$

1. Đặt $f(z) = \sinh(\sin z)$. Ta có

$$\frac{d}{dz}\sinh(\sin z) = \cosh(\sin z).\cos z$$

nên

$$f'(i) = \cosh(\sin i).\cos i = \cos(\sinh 1).\cosh 1.$$

2. Đặt $g(z) = \sin(\sinh z)$. Ta có

$$\frac{d}{dz}\sin(\sinh z) = \cos(\sinh z).\cosh z$$

nên

$$g'(i) = \cos(\sinh i).\cosh i = \cosh(\sin 1).\cos 1.$$

Bài 3.3.4.[3.12]

1. Cho phương trình $\sinh(x+iy) = 0$. Dùng kết quả (3.3-6) để cân bằng phần thực và phần ảo của $\sinh z$ với 0. Chứng minh tập nghiệm của phương trình là $\{z = in\pi| \quad n \in \mathbb{Z}\}$.
2. Tương tự như trên, cho phương trình$\cosh(x+iy) = 0$. Chứng minh tập nghiệm của phương trình là $\{z = \pm(2n+1)\pi i/2$ với $n = 0, 1, 2, \ldots\}$
3. Tìm miền D để hàm $\tanh z$ giải tích

Giải.

1. Ta có

$$\sinh(x+iy) = \sinh x \cos y + i \cosh x \sin y = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sinh x \cos y & = 0 \\ \cosh x \sin y & = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sinh x & = 0 \\ \sin y & = 0 \end{cases}$$

Do $\cosh x > 0$ và $\cos y, \sin y$ không đồng thời bằng 0, từ đó ta suy ra

$$\sinh(x+iy) \Leftrightarrow \begin{cases} x & = 0 \\ y & = n\pi \end{cases} \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Vậy nghiệm của phương trình là $z = in\pi$ với $n \in \mathbb{Z}$. Từ đó ta có điều phải chứng minh.

2.

$$\cosh z = \cosh x \cos y + i \sinh x \sin y = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \cosh x \cos y & = 0 \\ \sinh x \sin y & = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos y & = 0 \\ \sinh x & = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y & = \dfrac{\pi}{2} + n\pi \\ x & = 0 \end{cases}$$

Vậy nghiệm của phương trình là

$$z = \pm\frac{i(2n+1)\pi}{2}$$

với $n = 0, 1, 2, \ldots$

3. Ta có $\sinh z$ và $\cosh z$ là các hàm nguyên nên $\tanh z = \sinh z / \cosh z$ giải tích trên tập mở $\mathbb{R}^2 \backslash D$ với D là tập nghiệm của phương trình $\cosh z = 0$.

Bài 3.3.5.[3.14] Các hàm sau không giải tích trên miền nào?

1. $\dfrac{1}{\cosh[(1+i)z]}$
2. $\dfrac{1}{\sinh z + \cosh z}$
3. $\dfrac{1}{\sinh(\pi z^2)}$

Giải.

1.

$$\begin{aligned} \cosh[(1+i)\,z] &= 0 \Leftrightarrow (1+i)z = i\left(\frac{\pi}{2} + n\pi\right) \quad (n \in \mathbb{Z}) \\ \Leftrightarrow z = \frac{i\left(\dfrac{\pi}{2} + n\pi\right)}{1+i} &= \pi(\frac{1}{4} + \frac{n}{2})i(1-i) = \pi\frac{2n+1}{4} + i\pi\frac{2n+1}{4} \end{aligned}$$

Ta có hàm $\cosh[(1+i)\,z]$ là hàm nguyên nên hàm $\dfrac{1}{\cosh[(1+i)z]}$ không giải tích trên tập đóng D là tập nghiệm của phương trình $\cosh[(1+i)z] = 0$.

2. Ta có

$$\sinh z + \cosh z = 0 \Leftrightarrow \frac{e^z + e^{-z}}{2} + \frac{e^z - e^{-z}}{2} = e^z = 0 \Leftrightarrow z \in \emptyset$$

Do đó hàm $\sinh z + \cosh z$ là hàm nguyên nên hàm $\dfrac{1}{\sinh z + \cosh z}$ không giải tích trên tập đóng $D = \emptyset$ là tập nghiệm của phương trình $\sinh z + \cosh z = 0$.

3.

$$\sinh(\pi z^2) = 0 \Leftrightarrow \pi z^2 = in\pi \quad (n \in \mathbb{Z}) \Leftrightarrow \begin{cases} z &= \sqrt{n}\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2} + i\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) \\ z &= \sqrt{n}(-\dfrac{\sqrt{2}}{2} - i\dfrac{\sqrt{2}}{2}) \\ z &= \sqrt{-n}\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2} - i\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) \\ x &= \sqrt{-n}\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2} + i\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) \end{cases}$$

Ta có hàm $\sinh(\pi z^2)$ là hàm nguyên nên hàm $\dfrac{1}{\sinh(\pi z^2)}$ không giải tích trên tập đóng D là tập nghiệm của phương trình $\sinh(\pi z^2) = 0$.

Bài 3.3.6.[3.17]

1. Chứng minh phương trình $\sinh z - \sin z = 0$ không có nghiệm trên đường thẳng $x = 1$.
2. Chứng minh $|\sinh z|^2 = \sinh^2 x + \sin^2 y$
3. Chứng minh $|\cosh z|^2 = \sinh^2 x + \cos^2 y = \cosh^2 x - \sin^2 y$
4. Đường thẳng $x = y$ có là tập con của tập nghiệm phương trình $\sin z + i \sinh z = 0$?

5. Vẽ đồ thị 3 chiều cho $|\sin z + i\sinh z|$ và xác minh rằng mặt thu được có chiều cao là 0 tại những điểm tìm được ở phần 4. Gồm cả $z = 0$ và tại ít nhất một nghiệm khác của phương trình đã cho.

Giải.

1. Cho $z = 1 + iy$, ta có

$$\begin{aligned}
\sinh z = \sin z \quad &\Leftrightarrow \quad \sinh 1 \cos y + i \cosh 1 \sin y = \sin 1 \cosh y + i \cos 1 \sinh y \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases} \sinh 1 \cos y = \sin 1 \cosh y \\ \cosh 1 \sin y = \cos 1 \sinh y \end{cases} \\
&\Rightarrow \quad \begin{cases} \cos y = \frac{\sin 1}{\sinh 1} \cosh y \\ \cosh^2 1 \left(1 - \left(\frac{\sin 1}{\sinh 1} \cosh y\right)^2\right) = \cos^2 1 \left(\cosh^2 y - 1\right) \end{cases} \\
&\Rightarrow \quad \cosh^2 y = \frac{\cos^2 1 \sinh^2 1 + \cosh^2 1 \sinh^2 1}{\cos^2 1 \sinh^2 1 + \cosh^2 1 \sin^2 1} := A \\
&\Rightarrow \quad y = \operatorname{arccosh}\left(\sqrt{A}\right)
\end{aligned}$$

Nhưng $z = 1 + i\operatorname{arccosh}(A)$ không thỏa phương trình $\sinh z = \sin z$, vì vậy phương trình vô nghiệm.

2. Ta có

$$|\sinh z|^2 = \sinh^2 x \cos^2 y + \cosh^2 x \sin^2 y = \sinh^2 x \cos^2 y + \left(1 + \sinh^2 x\right) \sin^2 y = \sinh^2 x + \sin^2 y.$$

3. Ta có

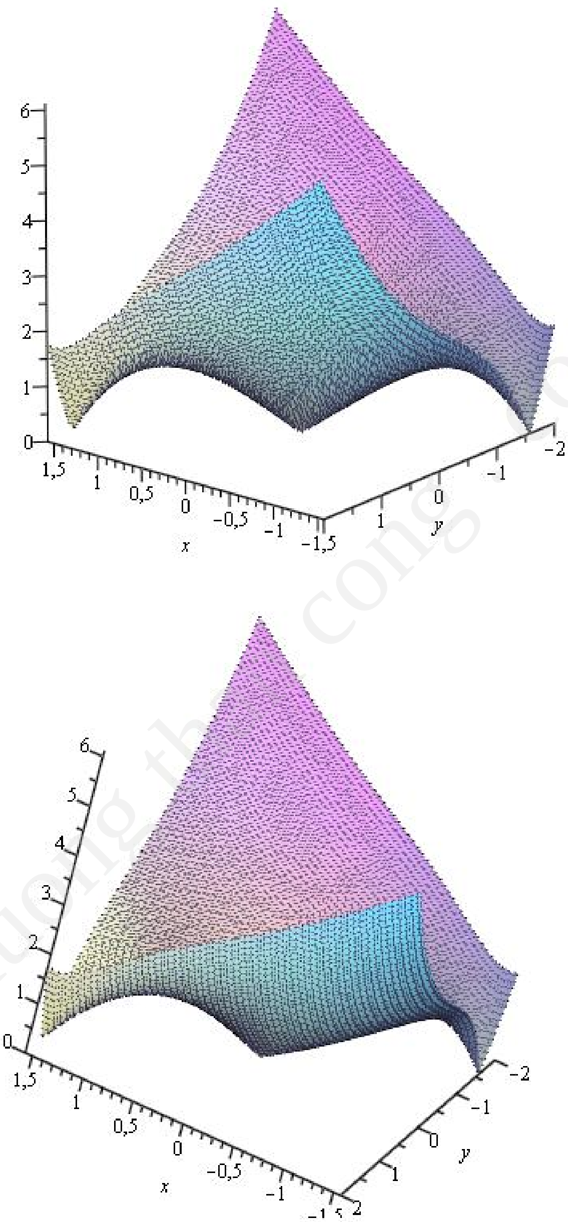
$$|\cosh z|^2 = \cosh^2 x \cos^2 y + \sinh^2 x \sin^2 y \Rightarrow \begin{cases} \cosh^2 x \cos^2 y + (\cosh^2 x - 1) \sin^2 y & = \cosh^2 x - \sin^2 y \\ \left(1 + \sinh^2 x\right) \cos^2 y + \sinh^2 x \sin^2 y & = \sinh^2 x + \cos^2 y \end{cases}$$

4. Cho $z = x + xi$, khi đó ta có

$$\sin z + i\sinh z = 0 \Leftrightarrow \sin x\cosh x + i\cos x\sinh x + i\sinh x\cos x - \cosh x\sin x = 0 \Leftrightarrow \cos x\sinh x = 0 \Leftrightarrow x \in \{0$$

5. Dùng đoạn lệnh:

```
>> x=[0:0.05:2];
>> y=[0:0.05:2];
>> [X, Y]=meshgrid(x,y);
>> Z=X+i*Y;
>> w=abs(sin(Z)+i*sinh(Z));
>> meshz(X,Y,w)
```



Hình 3.3.1

Tại những điểm $\frac{-\pi}{2}, 0, \frac{\pi}{2}$, ta thấy chiều cao của đồ thị là 0.

3.4 The Logarithmic Function

Bài 3.4.1.[**4.1**] Tính tất cả giá trị của Logarithm các số sau, chỉ ra Log tiêu chuẩn của chúng (viết dưới dạng $a+bi$).

1. e
2. $1-i$
3. $-ie^2$
4. $-\sqrt{3}+i$
5. e^i
6. e^{1+4i}
7. $\left(-\sqrt{3}+i\right)^4$
8. $e^{\log(i\sinh 1)}$
9. e^{e^i}
10. $\operatorname{Log}(\operatorname{Log} i)$

Giải.

10. Ta có

$$\operatorname{Log}(\operatorname{Log} i)=\operatorname{Log}\left(i\frac{\pi}{2}\right)=\log\frac{\pi}{2}+i\frac{\pi}{2}.$$

Từ đó ta suy ra

$$\log(\operatorname{Log}(\operatorname{Log} i))=\log\left(\log\frac{\pi}{2}+i\frac{\pi}{2}\right)=\frac{1}{2}\log\left(\log^2\frac{\pi}{2}+\frac{\pi^2}{4}\right)+i\left(\arctan\frac{\frac{\pi}{2}}{\log\frac{\pi}{2}}+2k\pi\right)$$

và

$$\mathrm{Log}\left(\mathrm{Log}\left(\mathrm{Log}i\right)\right) = \frac{1}{2}\log\left(\log^2\frac{\pi}{2} + \frac{\pi^2}{4}\right) + i\left(\arctan\frac{\frac{\pi}{2}}{\log\frac{\pi}{2}}\right).$$

Bài 3.4.2.[**4.11**] Giải các phương trình sau:

1. $\mathrm{Log}z = \overline{\mathrm{Log}\overline{z}}$.

2. $\mathrm{Log}z = i + 1$.

3. $(\mathrm{Log}z)^2 + \mathrm{Log}z = -1$

Giải.

1. $\mathrm{Log}z$ không xác định khi $z = 0$.

- Nếu z là số không là số thực âm, đặt $\theta = \arg z, -\pi < \theta < pi$, và $z = |z|\,\mathrm{cis}\theta, \overline{z} = |z|\,\mathrm{cis}\,(-\theta)$, nên|

$$\mathrm{Log}z = \mathrm{Log}\,|z| + i\theta = \overline{\mathrm{Log}\,|z| - i\theta} = \overline{\mathrm{Log}\overline{z}}$$

- Nếu z là số thực âm thì

$$\begin{aligned} \mathrm{Log}z &= \mathrm{Log}\,|z| + i\pi \\ \overline{\mathrm{Log}\overline{z}} &= \mathrm{Log}\,|z| - i\pi \end{aligned}$$

  nên $\mathrm{Log}z \neq \overline{\mathrm{Log}\overline{z}}$.

Vậy ta có nghiệm của phương trình $\mathrm{Log}z = \overline{\mathrm{Log}\overline{z}}$ là $z \in \mathbb{C}$, ngoại trừ 0 và các số thực âm.

Bài 3.4.3.[4.14] Giải các phương trình sau:

1. $e^z = e$
2. $e^z = e^{-z}$
3. $e^z = e^{iz}$
4. $(e^z - 1)^2 = e^{2z}$
5. $(e^z - 1)^2 = e^z$
6. $(e^z - 1)^3 = 1$
7. $e^{4z} + e^{2z} + 1 = 0$
8. $e^{e^z} = 1$

Giải.

8.

$$\begin{aligned} e^{e^z} &= 1 \Leftrightarrow e^z = ik2\pi \Leftrightarrow e^z = k2\pi\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right) \\ &\Leftrightarrow z = \log(k2\pi) + i\left(\frac{\pi}{2} + l2\pi\right) \text{ với } k, l \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

Bài 3.4.4.[4.22] Tập giá trị của $\log i^2$có trùng tập giá trị của $2\log i$ không? Giải thích.

Giải. Ta có

$$\log i^2 = \log(-1) = i(\pi + k2\pi)$$

và

$$2\log i = 2\log\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right) = 2i\left(\frac{\pi}{2} + k'2\pi\right) = i(\pi + 4k'\pi)$$

với $k, k' \in \mathbb{Z}$. Từ đó ta thấy hai tập giá trị của $\log i^2$ và $2\log i$ không trùng nhau. VD: $i3\pi = \log i^2$ nhưng $i3\pi \neq 2\log i$.

Bài 3.4.5.[4.23] Chứng minh những điều sau đây là đúng với $\theta \in \mathbb{R}$.

1. $\mathrm{Re}\left[\log\left(1+e^{i\theta}\right)\right] = \mathrm{Log}\left|2\cos\left(\dfrac{\theta}{2}\right)\right|$ với $e^{i\theta} \neq -1$

2. $\mathrm{Re}\left[\log\left(re^{i\theta}-1\right)\right] = \dfrac{1}{2}\mathrm{Log}\left(1-2r\cos\theta+r^2\right)$ nếu $r \geq 0$ và $e^{i\theta} \neq 1$.

Giải.

1. Ta có

$$\mathrm{Re}\left[\log\left(1+e^{i\theta}\right)\right] = \mathrm{Re}\left[\log\left(1+\cos\theta+i\sin\theta\right)\right] = \frac{1}{2}\log\left(2+2\cos\theta\right) = \frac{1}{2}\log\left(4\cos^2\frac{\theta}{2}\right) = \log\left|2\cos\right.$$

2. Ta có

$$\mathrm{Re}\left[\log\left(re^{i\theta}-1\right)\right] = \mathrm{Re}\left[\log\left(r\cos\theta-1+ir\sin\theta\right)\right] = \log\sqrt{r^2-2\cos\theta+1} = \frac{1}{2}\log\left(r^2-2r\cos+1\right)$$

Bài 3.4.6.[4.25]

1. Ta đã có công thức $\log z_1 + \log z_2 = \log(z_1 z_2)$. Hãy cho $z_1 = -ie$ và $z_2 = -2$, hãy tính giá trị của $\log z_1, \log z_2$ và $\log(z_1 z_2)$ để thỏa tính chất trên.

2. Với z_1 và z_2ở câu 1. ,hãy tính $\log z_1, \log z_2$ và $\log\dfrac{z_1}{z_2}$ để tính chất $\log z_1 - \log z_2 = \log\dfrac{z_1}{z_2}$ được thỏa mãn.

Giải.

1. Ta có

$$\begin{aligned}\log z_1 &= \log(-ie) = 1 + i\left(-\frac{\pi}{2} + m2\pi\right),\\ \log z_2 &= \log(-2) = \log 2 + i(\pi + n2\pi)\end{aligned}$$

và

$$\log(z_1 z_2) = \log(2ie) = \log 2 + 1 + i\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)$$

nên để

$$\log z_1 + \log z_2 = \log(z_1 z_2)$$

được thỏa thì $m + n = k$.

2. Ta có

$$\log\frac{z_1}{z_2} = \log\frac{ie}{2} = (1 - \log 2) + i\left(\frac{\pi}{2} + k2\pi\right)$$

nên để

$$\log z_1 - \log z_2 = \log\frac{z_1}{z_2}$$

được thỏa thì $m + n = k - 1$

Bài 3.4.7.[4.26] Công thức $\log z^n = n\log z$ với $n \in \mathbb{Z}$ rất có hiệu quả trong việc lấy logarithm mỗi vế của phương trình. Cho $z = 1 + i$ và $n = 5$

1. Tìm giá trị của $\log z^n$ và $\log z$ để thỏa mãn phương trình $\log z^n = n\log z$.
2. Với các giá trị của z và n đã cho, phương trình sau có thỏa không $n\mathrm{Log}z = \mathrm{Log}z^n$.
3. Giả sử $n = 2$ và z có giá trị không đổi. Hỏi $n\mathrm{Log}z = \mathrm{Log}z^n$ có thỏa hay không?

Giải.

1. Ta có

$$z^n = (1+i)^5 = 4\sqrt{2}\left(\cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4}\right) = -4-4i$$

nên ta có

$$\begin{aligned}
\log z^n &= n\log z \\
\Leftrightarrow \log(-4-4i) &= 5\log(1+i) \\
\Leftrightarrow \log\left(4\sqrt{2}\left(\cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4}\right)\right) &= 5\log\left(\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)\right) \\
\Leftrightarrow \frac{5}{2}\log 2 + i\left(\frac{5\pi}{4} + m2\pi\right) &= 5\left(\frac{1}{2}\log 2\right) + i\left(\frac{5\pi}{4} + n2\pi\right) \\
\Leftrightarrow m &= n.
\end{aligned}$$

Vậy

$$\log z^n = \frac{5}{2}\log 2 + i\left(\frac{5\pi}{4} + m2\pi\right)$$

và

$$n\log z = 5\left(\frac{1}{2}\log 2\right) + i\left(\frac{5\pi}{4} + m2\pi\right)$$

với $m \in \mathbb{Z}$.

2. Ta có

$$n\mathrm{Log}z = \frac{5}{2}\log 2 - i\frac{3\pi}{4} = \mathrm{Log}z^n$$

3. Đặt $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ với $\theta \in [-\pi, \pi]$, ta có $z^2 = r^2(\cos 2\theta + i\sin 2\theta)$ nên ta có

$$\begin{aligned}
2\mathrm{Log}z &= \mathrm{Log}z^2 \\
\Leftrightarrow \quad 2(\mathrm{Log}r + i\theta) &= \mathrm{Log}r^2 + i(2\theta + k'2\pi) \\
\Leftrightarrow \quad 2\mathrm{Log}r + i2\theta &= \mathrm{Log}r^2 + i(2\theta + k'2\pi)
\end{aligned}$$

với $-\pi \le (2\theta + k'2\pi) \le \pi$. Từ đó ta nhận thấy với $z = \cos\pi + i\sin\pi$ thì $2\mathrm{Log}z = i2\pi$ và $\mathrm{Log}z^2 = 0$ nên phương trình không được thỏa.

Bài 3.4.8.[4.27] Điều nào là sai sau đây? Ta có $1^2 = (-1)^2$ nên suy ra $\log 1^2 = \log(-1)^2$, vì vậy nên $2\log 1 = 2\log(-1)$ suy ra $\log 1 = \log(-1)$ mà $\log 1 = 0$ ta sẽ kết luận $\log(-1) = 0$. Hãy mô tả bước không hợp lí đầu tiên?

Giải. Ở đây ta hiểu một cách ước lệ rằng $\log 1 = \log(-1)$ là 2 tập hợp bằng nhau hay nói cách khác là vế trái sai khác vế phải 1 bội của $i2\pi$ và $\log 1 = ik2\pi$ nên điều kết luận là sai.

Bài 3.4.9.[4.28] Bài toán sau đây nói về sự liên hệ giữa $\log(8i)^{\frac{1}{3}}$ và $\dfrac{1}{3}\log(8i)$. Chứng minh rằng:

1. $\log(8i)^{\frac{1}{3}} = \text{Log}2 + i\left(\dfrac{\pi}{6} + \dfrac{2}{3}k\pi\right)$ với $k = 0, \pm1, \pm2\ldots$

2. $\log(8i)^{\frac{1}{3}} = \text{Log}2 + i\left(\dfrac{\pi}{6} + \dfrac{2}{3}m\pi + 2n\pi\right)$ với $m = 0,1,2$ và $n = 0, \pm1, \pm2\ldots$. Vì vậy sẽ có 3 tập giá trị (ứng với $m = 0,1,2$) của $\log(8i)^{\frac{1}{3}}$ và mỗi tập sẽ có vô hạn phần tử.

3. Tập giá trị của $\log(8i)^{\frac{1}{3}}$ đồng nhất với tập giá trị của $\dfrac{1}{3}\log(8i)$. Điều này sẽ cho ta tổng quát hóa để áp dụng giữa $\dfrac{1}{p}\log z$ và $\log z^{\frac{1}{p}}$.

Giải.

1. Ta có

$$\begin{aligned}
(8i)^{\frac{1}{3}} &= 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{2} + m2\pi\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2} + m2\pi\right)\right)^{\frac{1}{3}} \\
&= 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{6} + \frac{2}{3}m\pi\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{6} + \frac{2}{3}m\pi\right)\right) \\
\text{với} \quad & m = 0,1,2
\end{aligned}$$

Vì vậy ta có

$$\log(8i)^{\frac{1}{3}} = \text{Log}2 + i\left(\frac{\pi}{6} + \frac{2}{3}m\pi + 2n\pi\right)$$

với $m = 0, 1, 2$ và $n \in \mathbb{Z}$ nên suy ra

$$\log(8i)^{\frac{1}{3}} = \text{Log}2 + i\left(\frac{\pi}{6} + \frac{2}{3}k\pi\right)$$

với $k \in \mathbb{Z}$.

2. Như chứng minh trên, ta có

$$\log(8i)^{\frac{1}{3}} = \text{Log}2 + i\left(\frac{\pi}{6} + \frac{2}{3}m\pi + 2n\pi\right)$$

với $m = 0, 1, 2$ và $n = 0, \pm1, \pm2 \ldots$

3. Ta có

$$\frac{1}{3}\log(8i) = \frac{1}{3}\left(3\text{Log}2 + i\left(\frac{\pi}{2} + k2\pi\right)\right) = \text{Log}2 + i\left(\frac{\pi}{6} + \frac{2}{3}k\pi\right)$$

với $k \in \mathbb{Z} = \log(8i)^{\frac{1}{3}}$. Từ đó ta có điều phải chứng minh.

Bài 3.4.10.[4.29] Sử dụng MALAB, tìm logarithm của những số $-1 + i10^{-4}$ và $-1 - i10^{-4}$. Giải thích tại sao hai kết quả lại rất khác nhau mặc dù hai điểm biểu diễn những số này trên mặt phẳng phức thì "gần" nhau.

Giải. Ta có

$$\begin{aligned}\log\left(-1 + i10^{-4}\right) &\simeq 4.9999999750000001667 \cdot 10^{-9} + 3.1414926535901265718i,\\ \log\left(-1 - i10^{-4}\right) &\simeq 4.9999999750000001667 \cdot 10^{-9} - 3.1414926535901265718i.\end{aligned}$$

Ta có

$$-1 + i10^{-4} = r(\cos\alpha + i\sin\alpha)$$

và

$$-1 - i10^{-4} = r(\cos\alpha - i\sin\alpha)$$

nên

$$\begin{cases} \log\left(-1 + i10^{-4}\right) = \log r + i(\alpha + k2\pi) & (k \in \mathbb{Z}) \\ \log\left(-1 - i10^{-4}\right) = \log r + i(-\alpha + l2\pi) & (l \in \mathbb{Z}) \end{cases}$$

Máy tính chỉ hiển thị với $\alpha + k2\pi$ và $-\alpha + l2\pi$ nằm trong $[-\pi, \pi]$ nên

$$\begin{cases} \frac{-\pi-\alpha}{2\pi} \le k \le \frac{\pi-\alpha}{2\pi} \\ \frac{-\pi+\alpha}{2\pi} \le l \le \frac{\pi+\alpha}{2\pi} \end{cases}$$

suy ra $k = -l$. Nghĩa là hai giá trị trên sẽ có dạng

$$\begin{cases} \log\left(-1 + i10^{-4}\right) = \log r + i\theta \\ \log\left(-1 - i10^{-4}\right) = \log r - i\theta \end{cases} \quad (\theta \in [-\pi, \pi])$$

rất khác nhau.

3.5 Analyticity of the Logarithmic Function

Bài 3.5.1.[5.1] Dùng

$$\mathrm{Log} z = \left(\frac{1}{2}\right) \mathrm{Log}\left(x^2 + y^2\right) + i \arg z$$

khi $\arg z = \arctan \dfrac{y}{x}$ hoặc $x = 0$, $\arg z = \dfrac{\pi}{2} - \arctan \dfrac{x}{y}$ và

$$f'(z_0) = \left(\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}\right) = \left(-i\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y}\right)$$

để chứng minh $\dfrac{d}{dz}\mathrm{Log}z = \dfrac{1}{z}$ trong miền $\mathbb{C}\backslash \left\{\mathrm{Im}z = 0 \,\text{và}\, \mathrm{Re}z \leq 0\right\}$.

Giải. Từ giả thiết đề bài ta suy ra hàm $\arg z$ liên tục trên trục ảo. Đặt $u(x,y) = \left(\dfrac{1}{2}\right)\mathrm{Log}\left(x^2+y^2\right)$ và $v(x,y) = \arg z$ thì ta có $\dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{x}{x^2+y^2}$ và $\dfrac{\partial v}{\partial x} = \dfrac{-\frac{y}{x^2}}{\left(\frac{y}{x}\right)^2+1}$ nên ta có

$$\frac{d}{dz}\mathrm{Log}z = \left(\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}\right) = \frac{x}{x^2+y^2} + i\frac{-\frac{y}{x^2}}{\left(\frac{y}{x}\right)^2+1} = \frac{x-iy}{x^2+y^2} = \frac{1}{z}.$$

Nếu $x = 0$,

$$\frac{d}{dz}\mathrm{Log}z = \left(\frac{\partial v}{\partial y} - i\frac{\partial u}{\partial y}\right) = \frac{x}{x^2+y^2} - \frac{1}{2}\cdot\frac{2y}{x^2+y^2} = \frac{x-iy}{x^2+y^2} = \frac{1}{z}.$$

Bài 3.5.2.[5.2] Cho $f(z) = \log(z) = \mathrm{Log}r + i\theta$ với $0 \leq \theta < 2\pi$.

1. Tìm miền giải tích "lớn nhất" của $f(z)$.

2. Tìm giá trị của $f\left(-e^2\right)$.

3. Giải thích tại sao không thể xác định $f\left(e^2\right)$trong miền giải tích.

Giải.

1. Ta có $f(z)$ không liên tục trên đường thẳng thực dương và có đạo hàm trên tập mở $(0, 2\pi)$ nên miền giải tích lớn nhất của $f(z)$ là $(0, 2\pi)$.

2. Ta có

$$f\left(-e^2\right) = f\left(e^2\left(\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}\right)\right) = 2 + i\frac{3\pi}{2}.$$

3. Vì

$$e^2 = e^2\left(\cos\left(0 + k2\pi\right) + i\sin\left(0 + k2\pi\right)\right)$$

và $(0 + k2\pi) \notin (0, 2\pi)$ với mọi $k \in \mathbb{Z}$ nên ta không thể xác định $f\left(e^2\right)$trong miền giải tích.

Bài 3.5.3.[5.3] Xét một nhánh của hàm $\log z$ giải tích trong miền được tạo bởi cắt nhánh $x = 0$, $y \geq 0$. Với nhánh đó thì $\log(-1) = -i\pi$. Tìm cái giá trị sau trên nhánh đã cho:

1. $\log 1$
2. $\log(-ie)$
3. $\log(-e + ie)$
4. $\log\left(-\sqrt{3} + i\right)$
5. $\log\left(\mathrm{cis}\frac{3\pi}{4}\right)$

Giải. Với nhánh ở giả thiết, ta có $\log(-1) = i\left(\pi + k2\pi\right) = -i\pi$ nên suy ra nhánh của đề bài cho là $-\frac{3\pi}{2} \leq \theta < \frac{\pi}{2}$.

5. Ở đây ta có

$$\log\left(\mathrm{cis}\frac{3\pi}{4}\right) = i\left(\frac{3\pi}{4} + k2\pi\right) = -i\frac{5\pi}{4}.$$

Bài 3.5.4.[5.8] Cho nhánh của hàm $\log z$ giải tích trên miền được tạo bởi cắt nhánh $x = -y$ và $x \geq 0$. Với nhánh này thì $\log 1 = -2\pi i$. Tìm các giá trị sau trên nhánh đã cho:

1. $\log i$.
2. $\log\left(\sqrt{3} + i\right)$.
3. $\log(-ie)$.

Giải. Ta có $\log 1 = i\,(k2\pi) = -2\pi i$ nên ta suy ra nhánh của đề bài cho là $-\dfrac{9\pi}{4} \leq \theta < -\dfrac{\pi}{4}$.

3. Ta tính được

$$\log(-ie) = 1 + i\left(-\frac{\pi}{2} + k2\pi\right) = 1 - i\frac{\pi}{2}$$

.

Bài 3.5.5.[5.11] Cho hàm $f(z) = \mathrm{Log}\,(z - i)$

1. Tìm cắt nhánh để tạo ra miền giải tích lớn nhất của hàm f.
2. Tìm giá trị của $f(-i)$.
3. Giải thích vì sao $g(z) = \dfrac{\mathrm{Log}\,(z-i)}{(z-2i)}$ có một điểm kì dị trên miền được tìm thấy ở câu 1. nhưng hàm $h(z) = \dfrac{\mathrm{Log}\,(z-i)}{z+2-i}$ thì giải tích trên miền đó.

Giải.

1. Ta có cắt nhánh cần tìm là

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}((x+iy)-i) &\leq 0 \text{ hay } x \leq 0 \\ \operatorname{Im}((x+iy)-i) &= 0 \text{ hay } y = 1 \end{aligned}$$

2. Ta có $f(-i) = \operatorname{Log}(-2i) = \operatorname{Log}(2) + i\left(-\frac{\pi}{2} + k2\pi\right)$

3. Ta có

$$g(z) = \frac{\operatorname{Log}(z-i)}{(z-2i)}$$

có điểm kì dị là $z = 2i$ không nằm trong miền tìm được ở câu 1. Ta có

$$h(z) = \frac{\operatorname{Log}(z-i)}{z+2-i}$$

có một điểm kì dị là $z = -2+i$ nằm trong miền tìm được ở câu 1. nên hàm h giải tích trên miền đó.

Bài 3.5.6.[5.12]

1. Chứng tỏ rằng $\operatorname{Log} z = \operatorname{Log}\left(\frac{1}{z}\right)$ đúng trên miền giải tích của $\operatorname{Log} z$.

2. Tìm nhánh của $\log z$ sao cho $\operatorname{Log} z = \operatorname{Log}\left(\frac{1}{z}\right)$ không đúng trên miền giải tich của $\log z$. Chứng minh?

Giải.

1. Ta có với $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ $(\theta \in [-\pi, \pi])$. Khi đó ta có:

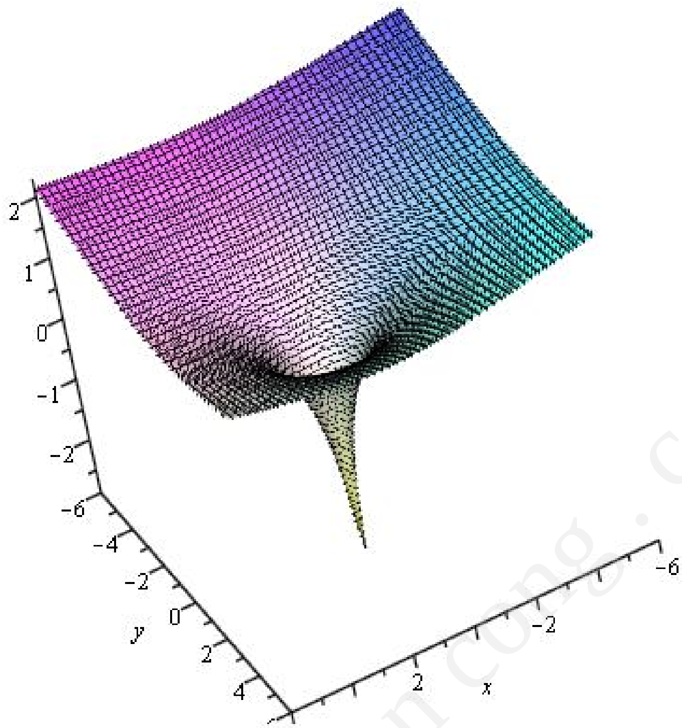
$$\begin{array}{rrcl} & \mathrm{Log} z & = & \mathrm{Log}\left(\dfrac{1}{z}\right) \\ \Leftrightarrow & \mathrm{Log} r + i\theta & = & -\mathrm{Log} r - i\theta \\ \Leftrightarrow & (r, \theta) & = & (1, 0). \end{array}$$

Vậy $\mathrm{Log} z = \mathrm{Log}\left(\dfrac{1}{z}\right)$ đúng trên miền giải tích của $\mathrm{Log} z$.

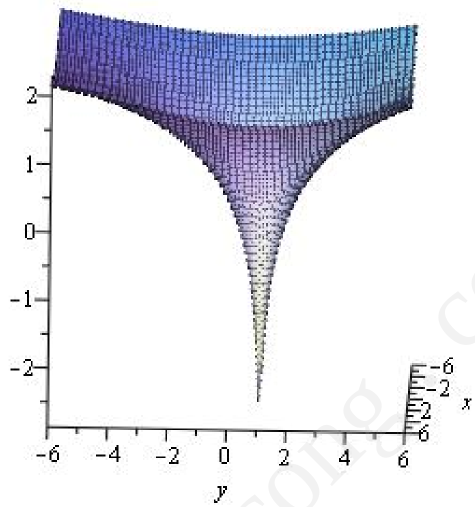
2. Ta chọn nhánh của $\log z$ là $-2\pi \le \arg z < 0$ thì ta có $\mathrm{Log} z = \mathrm{Log}\left(\dfrac{1}{z}\right)$ không đúng trên miền giải tích của $\log z$ vì khi đó $\theta = 0$.

Bài 3.5.10.[**5.17**] Vẽ đồ thị 3 chiều của mặt cho phần thực và phức của hàm $\mathrm{Log}(z - 1 - i)$. Đồ thị phải thể hiện được sự không liên tục tại điểm phân nhánh và cắt nhánh. Kiểm tra kết quả với $z = 0$

Giải. Đồ thị của hàm $\mathrm{Re}(\mathrm{Log}(z - 1 - i))$:

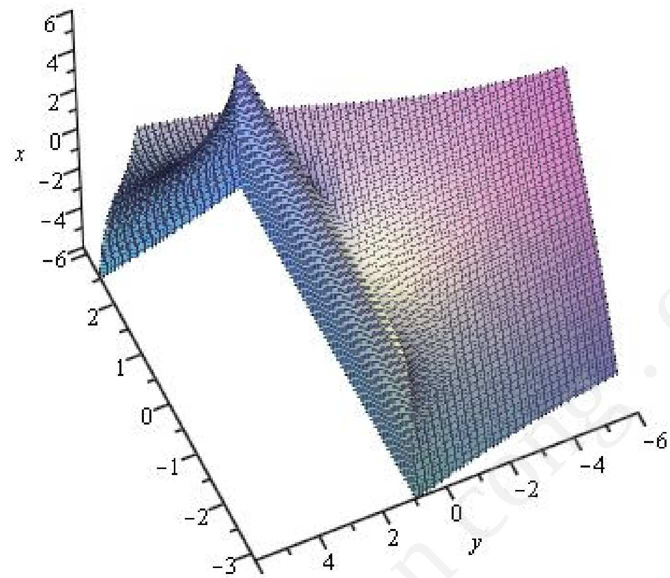


Hình 3.5.1

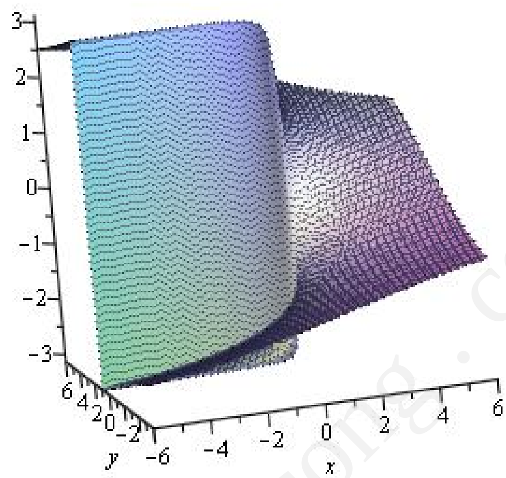


Hình 3.5.2

Đồ thị của hàm $\mathrm{Im}\,(\mathrm{Log}\,(z-1-i))$:



Hình 3.5.3



Hình 3.5.4

Tại điểm $x = y = 0$, $\operatorname{Re} z = \frac{1}{2}\log 2 \simeq 0.35$ và $\operatorname{Im} z = -\frac{3}{4}\pi \simeq -2, 4$.

3.6 Complex Exponentials

Bài 3.6.1.[**6.1**] Tìm tất cả giá trị của các số phức sau dưới dạng $a + ib$.

1. 1^{2i}
2. i^{-1}
3. $\left(\sqrt{3} + i\right)^{1-2i}$
4. $(e^i)^i$

5. $e^{\left(e^{i}\right)}$

6. $(1.1)^{1.1}$

7. $\pi^{i/2}$

8. $(\text{Log} i)^{\frac{\pi}{2}}$

9. $(1 + i\tan 1)^{\sqrt{2}}$

10. $\left(\sqrt{2}\right)^{1+i\tan 1}$

Giải.

1. Ta có

$$\begin{aligned}
1^{2i} &= e^{2i\log 1} = e^{2i(1+ik2\pi)} = e^{-4k\pi+2i} \\
&= e^{-4k\pi}(\cos 2 + i\sin 2) \\
&= e^{-4k\pi}\cos 2 + ie^{-4k\pi}\sin 2
\end{aligned}$$

với $k \in \mathbb{Z}$.

Bài 3.6.2.[6.11]

1. Chứng minh rằng $z^i \in \mathbb{R}$ nếu $|z| = e^{n\pi}$ với n là số nguyên tùy ý.

2. Dùng các công thức cơ bản của hàm e^z và định nghĩa $z^c = e^{c\log z}$, hãy chứng minh những điều sau với $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$: thì $\dfrac{1}{z^\beta}$ đồng nhất với $z^{-\beta}$ và $z^\alpha z^\beta$đồng nhất với $z^{\alpha+\beta}$.

Giải.

1. Với $|z| = e^{n\pi}$ ta có

$$\begin{aligned} z^i &= e^{i\log z} = e^{i\,(\mathrm{Log}\,|z| + i\,(\arg z + k2\pi))} \\ &= e^{-\,(\arg z + k2\pi) + in\pi} = e^{-(\arg z + k2\pi)}\,(\cos n\pi + i\sin n\pi) \\ &= \pm e^{-\,(\arg z + k2\pi)}, \quad k \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

với mọi $k \in \mathbb{Z}$. Từ đó ta có điều phải chứng minh.

2. Ta có

$$\frac{1}{z^\beta} = \frac{1}{e^{\beta\log z}} = e^{-\beta\log z} = z^{-\beta}$$

và

$$z^\alpha z^\beta = e^{\alpha\log z}e^{\beta\log z} = e^{(\alpha+\beta)\log z} = z^{\alpha+\beta}.$$

Từ đó ta có những điều phải chứng minh.

Bài 3.6.3.[6.14] Hãy chứng minh những điều sau:

1. Với n là số nguyên thì z^n chỉ có một giá trị và $z^n = r^n\,(\cos n\theta + i\sin n\theta)$.
2. Với n, m là hai số nguyên và $\dfrac{n}{m}$ là phân số tối giản thì $e^{\frac{n}{m}}$chỉ có đúng m giá trị và được xác định bởi

$$z^{n/m} = \left(\sqrt[m]{r}\right)^n \left(\cos\left(\frac{n}{m}\theta + \frac{2kn\pi}{m}\right) + i\sin\left(\frac{n}{m}\theta + \frac{2kn\pi}{m}\right)\right)$$

3. Với c là số vô tỉ thì z^c có vô số giá trị khác nhau.
4. Với c là số phức với $\mathrm{Im}z \neq 0$ thì z^ccó vô số giá trị khác nhau.

Giải.

1. Ta có

$$z^n = e^{n\log z} = e^{n(\mathrm{Log} r + i(\theta + k2\pi))} = e^{n\log r + i(n\theta + nk2\pi)} = r^n\left(\cos n\theta + i\sin n\theta\right)$$

Từ đó ta có điều phải chứng minh.

2. Ta có

$$\begin{aligned} z^{\frac{n}{m}} &= e^{\frac{n}{m}\log z} = e^{\frac{n}{m}\left(\mathrm{Log} r + i\left(\theta + k2\pi\right)\right)} = e^{\mathrm{Log} r^{\frac{n}{m}} + i\left(\theta\frac{n}{m} + \frac{k2\pi n}{m}\right)} \\ &= r^{\frac{n}{m}}\left(\cos\left(\frac{n}{m}\theta + \frac{2kn\pi}{m}\right) + i\sin\left(\frac{n}{m}\theta + \frac{2kn\pi}{m}\right)\right). \end{aligned}$$

có m giá trị với tương ứng với $k = 0, 1\ldots m-1$. Từ đó ta có điều phải chứng minh.

3. Với c là số vô tỉ thì ta có

$$\begin{aligned} z^c &= e^{c\log z} = e^{c(\mathrm{Log} r + i(\theta + k2\pi))} = e^{c\mathrm{Log} r + i(c\theta + k2\pi c)} \text{ với } k \in \mathbb{Z} \\ &= e^{c\mathrm{Log} r}\left(\cos\left(c\theta + k2\pi c\right) + i\sin\left(c\theta + k2\pi c\right)\right) \\ &= e^{c\mathrm{Log} r}\cos\left(c\theta + k2\pi c\right) + ie^{c\mathrm{Log} r}\sin\left(c\theta + k2\pi c\right). \end{aligned}$$

Giả sử với $k \neq k'$ mà

$$e^{c\mathrm{Log} r}\cos\left(c\theta + k2\pi c\right) + ie^{c\mathrm{Log} r}\sin\left(c\theta + k2\pi c\right) = e^{c\mathrm{Log} r}\cos\left(c\theta + k'2\pi c\right) + ie^{c\mathrm{Log} r}\sin\left(c\theta + k'2\pi c\right)$$

thì ta suy ra

$$\begin{aligned} & c\theta + k2\pi c = c\theta + k'2\pi c + 2n\pi \\ \Leftrightarrow\ & c = \frac{n}{k - k'} \quad \text{mâu thuẫn doc} \notin \mathbb{Q} \end{aligned}$$

Từ đó ta có z^c có vô số giá trị.

4. Với $c = x + iy$,ta có

$$\begin{aligned} z^c &= e^{(x+iy)\log z} = e^{(x+iy)(\text{Log}r+i(\theta+k2\pi))} = e^{(x-\theta k2\pi)+i(y\text{Log}r+x\theta+xk2\pi)} \left(\text{ với } k\in\mathbb{Z}\right) \\ &= e^{(x-\theta k2\pi)}\left(\cos\left(y\text{Log}r+x\theta+xk2\pi\right)+i\sin\left(y\text{Log}r+x\theta+xk2\pi\right)\right) \\ &= e^{(x-\theta k2\pi)}\cos\left(y\text{Log}r+x\theta+xk2\pi\right)+ie^{(x-\theta k2\pi)}\sin\left(y\text{Log}r+x\theta+xk2\pi\right). \end{aligned}$$

Với $k \neq k'$ thì

$$\begin{aligned} &e^{(x-\theta k2\pi)}\cos\left(y\text{Log}r+x\theta+xk2\pi\right)+ie^{(x-\theta k2\pi)}\sin\left(y\text{Log}r+x\theta+xk2\pi\right) \\ \neq &e^{(x-\theta k'2\pi)}\cos\left(y\text{Log}r+x\theta+xk'2\pi\right)+ie^{(x-\theta k'2\pi)}\sin\left(y\text{Log}r+x\theta+xk'2\pi\right). \end{aligned}$$

nên ta suy ra z^ccó vô số giá trị. Từ đó ta có điều phải chứng minh.

Bài 3.6.4.[6.15] Câu đố sau xuất hiện ngoài qui luật trong Spring 1989 *Newsletter of the Northeastern of the Mathematical Association of America.* Chỗ nào dưới đây là sai?

$$e^{i\theta} = \left(e^{i\theta}\right)^{\frac{2\pi}{2\pi}} = \left(e^{i2\pi}\right)^{\frac{\theta}{2\pi}} = (1)^{\frac{\theta}{2\pi}} = 1$$

Giải. Ta có $(e^a)^b \neq \left(e^b\right)^a$ với $a, b \in \mathbb{R}$. Ví dụ

$$\left(e^{i2\pi}\right)^\pi = 1^\pi = e^{\pi\log 1} = e^{ik2\pi^2} = \cos\left(k2\pi^2\right) + i\sin\left(k2\pi^2\right)$$

và

$$(e^\pi)^{i2\pi} = e^{i2\pi\log e^\pi} = e^{i2\pi(\pi+i(k2\pi))} = e^{4k\pi^2}\left[\cos\left(2\pi^2\right)+i\sin\left(2\pi^2\right)\right]$$

nên

$$\left(e^{i2\pi}\right)^\pi \neq (e^\pi)^{i2\pi}.$$

Ta có 1^c sẽ có vô số giá trị với c là số vô tỉ. Ví dụ:

$$1^\pi = e^{\pi\log 1} = e^{ik2\pi^2} = \cos\left(k2\pi^2\right) + i\sin\left(k2\pi^2\right)$$

có vô số giá trị nên điều sau đây là không đúng $(1)^{\frac{\theta}{2\pi}} = 1$.

Bài 3.6.5.[6.16] Dùng nhánh chính của hàm số, tính đạo hàm sau:

1. $f'(i)$ với $f(z) = z^{2+i}$.
2. $f'(-128i)$ với $f(z) = z^{\frac{8}{7}}$.
3. $f'(-8i)$ với $f(z) = z^{\frac{1}{3+i}}$.
4. $f'(z)$ và $f'(i)$ với $f(z) = z^z$
5. $f'(i)$ với $f(z) = z^{\sin z}$
6. Tính $\dfrac{d}{dz}\left(2^{\cosh z}\right)$. Tìm miền giải tích của hàm $2^{\cosh z}$.
7. Tìm $f'(i)$ với $f(z) = i^{(e^z)}$

Giải.

1. Ta có trên nhánh chính, $f'(z) = (2+i)\dfrac{z^{2+i}}{z}$ nên

$$\begin{aligned} f'(i) &= (2+i)\frac{i^{2+i}}{i} = (1-2i)\left(e^{(2+i)\log i}\right) \\ &= (1-2i)\left(e^{(2+i)i\left(\frac{\pi}{2}\right)}\right) = (1-2i)\,e^{-\frac{\pi}{2}+i\pi} \\ &= (1-2i)\frac{1}{e^{\frac{\pi}{2}}}(-1) = -\frac{1}{e^{\frac{\pi}{2}}} + i\frac{2}{e^{\frac{\pi}{2}}}. \end{aligned}$$

Bài 3.6.6.[6.24]

1. Cho hàm $f(z) = 10^{\left(z^3\right)}$. Ta tính được $f'(z)$ là số thực tại $z = 1$. Tính $f'(1+i)$. Tìm miền giải tích của f.
2. Cho hàm $f(z) = 10^{(e^z)}$. Ta tính được $\left|f\left(\dfrac{i\pi}{2}\right)\right| = e^{-2\pi}$, tìm $f'(z)$ và $f'\left(\dfrac{i\pi}{2}\right)$.

Giải.

1. Ta có $f'(z)$ trên một nhánh của hàm là

$$\begin{aligned} 10^{\left(z^3\right)} \log 10.3.z^2 nên f'(1) &= 10^{\left(1^3\right)} (\log 10 + ik2\pi).3.1^2 \\ &= 30 (\log 10 + ik2\pi). \end{aligned}$$

Từ đó ta có $f'(1) \in \mathbb{R}$ khi và chỉ khi $k = 0$ hay ta xét hàm số trên nhánh chính. Khi đó ta có

$$\begin{aligned} f'(1+i) &= 10^{\left((1+i)^3\right)} \log 10.3.2i = 6i \log 10.10^{2i-2} \\ &= 6i \log 10 e^{(2i-2)\log 10} \\ &= 6i \log 10 e^{-2\log 10} (\cos(2\log 10) - i \sin(2\log 10)). \end{aligned}$$

Trên nhánh chính thì f giải tích trên $\mathbb{C}$.

2. Ta có $f(z) = 10^{(e^z)} = e^{e^z \log 10} = e^{e^z(\log 10 + ik2\pi)}$, ta suy ra

$$\begin{aligned} \left| f\left(\frac{i\pi}{2}\right) \right| &= \left| e^{e^{\frac{i\pi}{2}}(\log 10 + ik2\pi)} \right| = \left| e^{i(\log 10 + ik2\pi)} \right| \\ &= \left| e^{-k2\pi} (\cos(\log 10) + i \sin(\log 10)) \right| = e^{-k2\pi}. \end{aligned}$$

nên ta suy ra $k = 1$. Khi đó ta có

$$f'(z) = e^z \log 10.e^z = e^{2z} (\log 10 + i2\pi)$$

nên

$$f'\left(\frac{i\pi}{2}\right) = -(\log 10 + i2\pi).$$

3.7 Inverse Trigonometric and Hyperbolic Functions

Bài 3.7.1.[7.1] Chứng minh các công thức sau:

1. $\cos^{-1} z = -i \log \left(z + i\,(1 - z^2)^{\frac{1}{2}} \right)$
2. $\tan^{-1} z = \dfrac{i}{2} \log \left(\dfrac{i+z}{i-z} \right)$
3. $\sinh^{-1} z = \log \left(z + (z^2 - 1)^{\frac{1}{2}} \right)$

Giải.

1. Ta có

$$w = \cos^{-1} z \Rightarrow z = \cos w = \frac{e^{iw} + e^{-iw}}{2}.$$

Đặt $e^{iw} = p$ thì ta được

$$z = \cos w = \frac{p + p^{-1}}{2}$$

nên $p^2 - 2pz + 1 = 0$. Từ đó ta suy ra

$$e^{iw} = p = z + \left(z^2 - 1\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Vậy ta có điều cần chứng minh,

$$w = \cos^{-1} z = -i \log \left(z + i \left(1 - z^2\right)^{\frac{1}{2}} \right)$$

2. Tương tự như trên, ta có

$$w = \tan^{-1} z \Rightarrow z = \tan w = \frac{\sin w}{\cos w} = \frac{e^{iw} - e^{-iw}}{i\left(e^{iw} + e^{-iw}\right)}.$$

Đặt $e^{iw} = p$ thì ta được

$$z = \tan w = \frac{p - p^{-1}}{i\,(p + p^{-1})} = \frac{p^2 - 1}{i\,(p^2 + 1)}.$$

nên

$$(zi - 1)\,p^2 + (iz + 1) = 0$$

hay

$$e^{iw} = \left(\frac{-1 - iz}{z - i}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{i + z}{i - z}\right)^{\frac{1}{2}}$$

Từ đó ta suy ra điều phải chứng minh,

$$\tan^{-1} z = \frac{i}{2} \log\left(\frac{i + z}{i - z}\right).$$

3. Ta có

$$w = \sinh^{-1} z \Rightarrow z = \sinh w = \frac{e^w - e^{-w}}{2} = \frac{e^{2w} - 1}{2e^w}$$

nên ta có

$$e^{2w} - 2ze^w - 1 = 0.$$

hay

$$e^w = z - \left(z^2 + 1\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Từ đó ta có điều phải chứng minh,

$$\sinh^{-1} z = \log\left(z + \left(z^2 - 1\right)^{\frac{1}{2}}\right).$$

Bài 3.7.2.[**7.2**]

1. Chứng minh rằng nếu tính được đạo hàm trên nhánh của arccos thì ta có công thức $\dfrac{d}{dz}(\arccos z) = \dfrac{-1}{(1 - z^2)^{\frac{1}{2}}}$.

2. Chứng minh $\dfrac{d}{dz}(\arcsin z) = \dfrac{1}{(1-z^2)^{\frac{1}{2}}}$ bằng

$$z^2 = \sin^2 w = 1 - \cos^2 w = 1 - \left(\frac{dz}{dw}\right)^2$$

3. Tương tự, chứng minh $\dfrac{d}{dz}\left(\sinh^{-1} z\right) = \dfrac{1}{(1+z^2)^{\frac{1}{2}}}$ từ công thức $\dfrac{d}{dz}\left(\cosh^{-1} z\right) = \dfrac{1}{(z^2-1)^{\frac{1}{2}}}$

Giải.

1. Ta có

$$\arccos z = -i \log\left(z + i\left(1-z^2\right)^{\frac{1}{2}}\right)$$

nên ta có

$$\frac{d}{dz}(\arccos z) = i\frac{-1 + i\dfrac{1}{2}\dfrac{(1-z^2)^{\frac{1}{2}}}{(1-z^2)}(2z)}{\left(z + i(1-z^2)^{\frac{1}{2}}\right)} = \frac{-1}{(1-z^2)^{\frac{1}{2}}}.$$

Từ đó ta có điều phải chứng minh.

2. Ta có

$$z^2 = 1 - \left(\frac{dz}{dw}\right)^2$$

nên

$$\frac{dz}{dw} = \left(1-z^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

từ đó dẫn đến

$$\frac{dw}{dz} = \frac{1}{(1-z^2)^{\frac{1}{2}}}.$$

Vậy ta có điều phải chứng minh.

3. Ta có
$$z^2 = \cosh^2 w = 1 + \sinh^2 w = 1 + \left(\frac{dz}{dw}\right)^2$$
nên ta suy ra
$$\frac{dz}{dw} = \left(z^2 - 1\right)^{\frac{1}{2}}$$
nên
$$\frac{dw}{dz} = \frac{1}{\left(z^2-1\right)^{\frac{1}{2}}}.$$
Vậy ta có điều phải chứng minh.

Bài 3.7.3.[7.3] Chứng minh rằng nếu trên một nhánh xác định của $\left(z^2-1\right)^{\frac{1}{2}}$ trong hai đẳng thức
$$\cos^{-1} z = -i \log\left(z + i\left(1 - z^2\right)^{\frac{1}{2}}\right)$$
và
$$\sin^{-1} z = -i \log\left(iz + \left(1 - z^2\right)^{\frac{1}{2}}\right)$$
thì ta có
$$\cos^{-1} z + \sin^{-1} z = 2k\pi + \frac{\pi}{2}$$
với mọi cách chọn của hàm log.

Giải. Trên một nhánh xác định của $\left(z^2-1\right)^{\frac{1}{2}}$, ta có
$$\begin{aligned}
\cos^{-1} z + \sin^{-1} z &= -i \log\left(z + i\left(1 - z^2\right)^{\frac{1}{2}}\right) - i \log\left(iz + \left(1 - z^2\right)^{\frac{1}{2}}\right) \\
&= -i \log\left[\left(z + i\left(1 - z^2\right)^{\frac{1}{2}}\right)\left(iz + \left(1 - z^2\right)^{\frac{1}{2}}\right)\right] \\
&= -i \log(i) = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \ \left(\text{với } k \in \mathbb{Z}\right).
\end{aligned}$$

Bài 3.7.4.[7.4] Tìm nghiệm các phương trình sau:

1. $\cos w = 3$

2. $\sinh w = i$

3. $\cos w = 1 + i$

4. $\sinh w = i\sqrt{2}$

5. $\cosh^2 w = -1$

6. $\tan w = 2i$

7. $\sin(\cos w) = 0$

8. $\sinh(\cos w) = 0$

9. $\sin^{-1} w = -i$

Giải.

1. Ta có

$$
\begin{aligned}
w &= \arccos 3 = -i\log\left(3 + i\left(1 - 3^2\right)^{\frac{1}{2}}\right)\\
&= -i\log\left(3 + i\,(-8)^{\frac{1}{2}}\right)\\
&= \begin{cases} -i\log\left(3 + i2\sqrt{2}\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}} - i\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)\right) & \text{với } k = 0\\ -i\log\left(3 + i2\sqrt{2}\left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}} + i\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)\right) & \text{với } k = 1 \end{cases}\\
&= \begin{cases} -i\log(5 + i2) & \text{với } k = 0\\ -i\log(1 - 2i) & \text{với } k = 1 \end{cases}\\
&= \begin{cases} -\dfrac{i}{2}\left(\mathrm{Log}29 + i\left(\arctan\dfrac{2}{5} + n2\pi\right)\right) & \text{với } k = 0\\ -\dfrac{i}{2}\left(\mathrm{Log}5 + i\left(\arctan(-2) + n2\pi\right)\right) & \text{với } k = 1 \end{cases}
\end{aligned}
$$

Bài 3.7.5.[7.13] Xét xem những điều sau là đúng hay sai

1. $\tan^{-1}(\tan z) = z$
2. $\tan(\tan^{-1} z) = z$

Giải.

1. Ta có

$$\begin{aligned}
\tan^{-1}(\tan z) &= \frac{i}{2}\log\left(\frac{i+\tan z}{i-\tan z}\right) \\
&= \frac{i}{2}\log\left(\frac{i+\dfrac{e^{iz}-e^{-iz}}{i\left(e^{iz}+e^{-iz}\right)}}{i-\dfrac{e^{iz}-e^{-iz}}{i\left(e^{iz}+e^{-iz}\right)}}\right) \\
&= \frac{i}{2}\log\left(\frac{-2e^{-iz}}{-2e^{iz}}\right) \\
&= \frac{i}{2}\log e^{-2iz} = \frac{i}{2}\left(-2iz + ik2\pi\right) \\
&= z - k\pi.
\end{aligned}$$

2. Ta có $\tan(\tan^{-1} z) = z$ do theo định nghĩa.

Bài 3.7.6.[7.14] Giải thích tại sao giá trị của $\sinh^{-1} x$ được tính bằng máy tính hay máy tính bỏ túi có giá trị bằng $\operatorname{Log}\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$. Chú ý những nhánh ở trong công thức

$$\sinh^{-1} z = \log\left(z + \left(1+z^2\right)^{\frac{1}{2}}\right)$$

Giải. Nếu tính bằng máy tính, máy sẽ chỉ sử dụng nhánh $(-\pi, \pi]$ nên kết quả

$$\sinh^{-1} x = \log\left(x + \left(1+x^2\right)^{\frac{1}{2}}\right) = \operatorname{Log}\left(x+\sqrt{x^2+1}\right).$$

Bài 3.7.7.[7.15]

1. Chứng minh với z là số thực, ví dụ $z = x$ thì ta có $\sinh^{-1} z \simeq \mathrm{Log}2x$ nếu $x \gg 1$ và $\sinh^{-1} z \simeq -\mathrm{Log}\,(2\,|x|)$ nếu $x \ll -1$.

2. Dùng phần mềm máy tính với gói numerical như MATLAB, vẽ $\sinh^{-1} x$ và $\mathrm{Log}2x$ trong đoạn $\dfrac{1}{2} \leq x \leq 4$.

Giải.

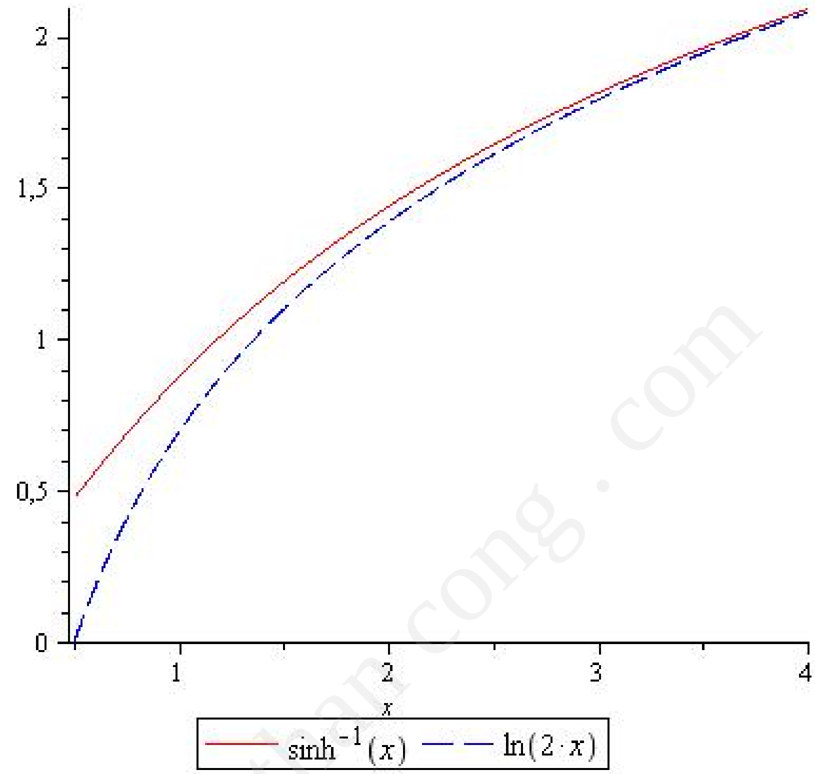
1. Nếu $z = x,\ x \in \mathbb{R}$ thì

$$\sinh^{-1} z = \mathrm{Log}\left(x + \sqrt{x^2+1}\right) \simeq \mathrm{Log}\,(x + |x|)$$

(vì $x \gg 1$) nên $\sinh^{-1} z \simeq \mathrm{Log}2x$ với $x \gg 1$. Nếu $x \ll -1$ thì

$$\sinh^{-1} z = \mathrm{Log}\left(x + \sqrt{x^2+1}\right) \simeq \mathrm{Log}\left(\frac{1}{2\,|x|}\right) = -\mathrm{Log}\,(2\,|x|)\,.$$

2. Đồ thị của $\sinh^{-1} x$ và $\mathrm{Log}2x$:



Hình 3.7.1

Bài 3.7.8.[7.16] Chứng minh rằng $\tanh^{-1}\left(e^{i\theta}\right) = \frac{1}{2}\log\left(i\cot\frac{\theta}{2}\right)$.

Giải. Ta có

$$\begin{aligned}
\tanh^{-1}\left(e^{i\theta}\right) &= \frac{1}{2}\log\left(\frac{1+e^{i\theta}}{1-e^{i\theta}}\right)\\
&= \frac{1}{2}\log\left(i\frac{\cos\frac{\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}}\right)\\
&= \frac{1}{2}\log\left(i\cot\frac{\theta}{2}\right).
\end{aligned}$$

Từ đó ta có điều phải chứng minh.

Chương 4

Integration in the Complex Plane

Mục lục

4.1 Introduction to Line Integration

Bài 4.1.1. [**4.1.2-4**] Cho C là phần đường cong $y = x^2$ đi từ $(0, 0)$ đến $(1, 1)$. Cho $F(x, y) = x + y + 1$. Tính các tích phân sau trên C:

1. $\int_{0,0}^{1,1} F(x,y)\,dx$

2. $\int_{0,0}^{1,1} F(x,y)\,dy$

Giải.

1. Ta có

$$\begin{aligned}\int_{0,0}^{1,1} F(x,y)\,dx &= \int_0^1 F\left(x,x^2\right)dx \\ &= \int_0^{1`} \left(x+x^2+1\right)dx \\ &= \left(\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+x\right)\Big|_0^1 \\ &= \frac{13}{6}.\end{aligned}$$

2. Ta có

$$\begin{aligned}\int_{0,0}^{1,1} F(x,y)\,dy &= \int_0^1 F\left(y^{\frac{1}{2}},y\right)dy \\ &= \int_0^1 \left(y^{\frac{1}{2}}+y+1\right)dy \\ &= \left(\frac{2}{3}y^{\frac{3}{2}}+\frac{1}{2}y^2+y\right)\Big|_0^1 \\ &= \frac{13}{6}.\end{aligned}$$

Bài 4.1.2. [4.1.4-6] Cho C là phần đường cong $x^2+y^2=1$ trong phần tư mặt phẳng thứ nhất. Cho $F(x,y)=x^2y$. Tính các tích phân sau trên C:

1. $\displaystyle\int_{0,1}^{1,0} F(x,y)\,dx$

2. $\displaystyle\int_{0,1}^{1,0} F(x,y)\,dy$

3. $\displaystyle\int_{0,1}^{1,0} F(x,y)\,ds$

Giải.

1. Ta có

$$\begin{aligned}
\int_{0,1}^{1,0} F(x,y)\,dx &= \int_0^1 F\left(x, \sqrt{1-x^2}\right) dx \\
&= \int_0^1 x^2\sqrt{1-x^2}dx \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin t)^2 \sqrt{1-(\sin t)^2} \cos t dt \\
&= \frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin 2t)^2\,dt \\
&= \frac{1}{8}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\cos 4t)\,dt \\
&= \frac{1}{8}\left(t-\frac{\sin 4t}{4}\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \\
&= \frac{\pi}{16}.
\end{aligned}$$

2. Ta có

$$\begin{aligned}
\int_{0,1}^{1,0} F(x,y)\,dy &= -\int_0^1 F\left(\sqrt{1-y^2}, y\right) dy \\
&= -\int_0^1 \left(1-y^2\right) ydy
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= -\left(\frac{1}{2}y^2 - \frac{1}{3}y^4\right)\Big|_0^1 \\
&= -\frac{1}{4}
\end{aligned}
$$

3. Ta có

$$
\begin{aligned}
\int_{0,1}^{1,0} F(x,y)\,ds &= \int_0^1 x^2\sqrt{1-x^2}\sqrt{1+\left(\frac{d\left(\sqrt{1-x^2}\right)}{dx}\right)^2}dx \\
&= \int_0^1 x^2\sqrt{1-x^2}\sqrt{1+\frac{x^2}{1-x^2}}dx \\
&= \int_0^1 x^2dx \\
&= \frac{1}{3}
\end{aligned}
$$

Bài 4.1.3. [4.1.7] Chứng tỏ rằng $\int_{0,-1}^{0,1} ydx = -\frac{\pi}{2}$ trên phần đường tròn nằm trên nửa mặt phẳng $x \geq 0$.

Giải. Ta có

$$
\begin{aligned}
\int_{0,-1}^{0,1} ydx &= \int_{0,-1}^{1,0} ydx + \int_{1,0}^{0,1} ydx \\
&= \int_0^1 -\sqrt{1-x^2}dx + \int_0^1 \sqrt{1-(1-x)^2}\,(1-x)'\,dx \\
&= -\int_0^1 \sqrt{1-x^2}dx - \int_0^1 \sqrt{1-x^2}dx \\
&= -2\int_0^1 \sqrt{1-x^2}dx \\
&= -2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-(\sin t)^2}\cos t dt \\
&= -\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2(\cos t)^2\,dt
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned} &= -\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1+\cos 2t)\, dt \\ &= -\left(t + \frac{\sin 2t}{2}\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= -\frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

4.2 Complex Line Integration

Bài 4.2.1. [4.2.4-6] Tính $\displaystyle\int_i^1 \overline{z}dz$ trên đường C, cho bởi:

1. Dọc theo đường thẳng $x + y = 1$
2. Parabola $y = (1-x)^2$
3. Trên đường tròn $x^2 + y^2 = 1$ trong phần tư mặt phẳng thứ nhất. Hãy so sánh kết quả của 1, 2 và 3.

Giải.

1. Tham số hóa $z(t) = t + i(1-t)$, $t \in [0,1]$, ta có

$$\begin{aligned} \int_0^i \overline{z}dz &= \int_0^1 (t - i(1-t))(1-it)\, dt \\ &= \int_0^1 (2t-1)\, dt - i\int_0^1 dt \\ &= \left(t^2 - t\right)\Big|_0^1 - i(t)\Big|_0^1 \\ &= -i. \end{aligned}$$

2. Tham số hóa $z(t) = t + i(1-t)^2$, $t \in [0,1]$, ta có

$$\begin{aligned}
\int_0^i \overline{z}dz &= \int_0^1 \left(t - i(1-t)^2\right)(1 - 2i(1-t))\,dt \\
&= \int_0^1 \left(t - 2(1-t)^3\right)dt - i\int_0^1 \left((1-t)^2 + 2t - 2t^2\right)dt \\
&= \left(\frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{2}(1-t)^4\right)\Big|_0^1 - i\int_0^1 \left(1-t^2\right)dt \\
&= -i\left(t - \frac{1}{3}t^3\right)\Big|_0^1 \\
&= -\frac{2}{3}i.
\end{aligned}$$

3. Tham số hóa $z(t) = t + i\sqrt{1-t^2}$, $t \in [0,1]$, ta có

$$\begin{aligned}
\int_i^1 \overline{z}dz &= \int_0^1 \left(t - i\sqrt{1-t^2}\right)\left(1 - i\frac{t}{\sqrt{1-t^2}}\right)dt \\
&= -i\int_0^1 \left(\sqrt{1-t^2} + \frac{t^2}{\sqrt{1-t^2}}\right)dt \\
&= -i\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}dt \\
&= -i\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos t}{\sqrt{1-(\sin t)^2}}dt \\
&= -i\int_0^{\frac{\pi}{2}} dt \\
&= -\frac{\pi}{2}i.
\end{aligned}$$

Các kết quả nhận được đều có phần thực bằng 0.

Bài 4.2.2. [4.2.8-10] Tính các tích phân sau:

1. $\displaystyle\int_1^{-1} \frac{1}{z} dz$ trên phần đường tròn $|z| = 1$ ở nửa trên mặt phẳng.

2. $\displaystyle\int_1^{-1} \frac{1}{z} dz$ trên phần đường tròn $|z| = 1$ ở nửa dưới mặt phẳng.

3. $\displaystyle\int_1^{-1} \overline{z} dz$ trên phần đường tròn $|z| = 1$ ở phần tư mặt phẳng thứ nhất.

Giải.

1. Dùng phép tham số hóa $z(t) = e^{it}$, $t \in [0, \pi]$, ta có

$$\begin{aligned} \int_1^{-1} \frac{1}{z} dz &= \int_0^{\pi} \frac{1}{e^{it}} e^{it} i dt \\ &= \int_0^{\pi} i dt \\ &= \pi i. \end{aligned}$$

2. Dùng phép tham số hóa $z(t) = e^{-it}$, $t \in [0, \pi]$, ta có

$$\begin{aligned} \int_1^{-1} \frac{1}{z} dz &= \int_0^{\pi} \frac{1}{e^{-it}} e^{-it} (-i) dt \\ &= -\int_0^{\pi} i dt \\ &= -i\pi. \end{aligned}$$

3. Dùng phép tham số hóa $z(t) = e^{it}$, $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, ta có

$$\begin{aligned} \int_1^{i} \overline{z}^4 dz &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\overline{e^{it}}\right)^4 e^{it} i dt \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-i4t} e^{it} i dt \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-3it} i dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 3t dt + i\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 3t dt \\
&= \left(-\frac{\cos 3t}{3}\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + i\left(\frac{\sin 3t}{3}\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \\
&= \frac{1}{3} - \frac{1}{3}i.
\end{aligned}$$

Bài 4.2.3. [**4.2.11**] Tính $\displaystyle\int_2^i \overline{z}dz$ trên phần ellipse $\dfrac{x^2}{4} + y^2 = 1$ thuộc phần tư mặt phẳng thứ nhất.

Giải. Dùng phép tham số hóa $z(t) = 2\cos t + i\sin t$, $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, ta có

$$\begin{aligned}
\int_2^i \overline{z}dz &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (2\cos t - i\sin t)(-2\sin t + i\cos t)\, dt \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} -\frac{3}{2}\sin 2t dt + 2i\int_0^{\frac{\pi}{2}} dt \\
&= \left(\frac{3\cos 2t}{4}\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + i\pi \\
&= -\frac{3}{2} + \pi i.
\end{aligned}$$

Bài 4.2.4. [**4.2.13**]

1. Tìm biểu diễn tham số của hai vòng cung ngắn trên $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 1$ nối $z = 1$ với $z = i$.

2. Tính $\int_1^i \overline{z}dz$ trên vòng cung trong câu (1), dùng tham số hóa tìm được.

Giải.

1. Vòng cung ngắn đó được tham số

$$z = 1 + i + e^{it}$$

với t từ $-\dfrac{\pi}{2}$ đến $-\pi$.

2. Ta có

$$\overline{z} = 1 - i + e^{-it} = 1 - i + \cos t - i \sin t,$$

và

$$dz = ie^{it}dt = i(\cos t + i \sin t)\, dt.$$

Từ đó tính được

$$\begin{aligned}
\int_1^i \overline{z} dz &= \int_{\frac{-\pi}{2}}^{-\pi} (1 - i + \cos t - i \sin t)\, i(\cos t + i \sin t)\, dt \\
&= (1-i)\int_{\frac{-\pi}{2}}^{-\pi} -\sin t dt + i(1-i)\int_{\frac{-\pi}{2}}^{-\pi} \cos t dt + \int_{\frac{-\pi}{2}}^{-\pi} i\left(\cos^2 t + \sin^2 t\right) dt \\
&= i\left(2 - \frac{\pi}{2}\right).
\end{aligned}$$

Bài 4.2.5. [4.2.14]

1. Xét $I = \displaystyle\int_{0+i0}^{2+i} e^{z^2} dt$ trên đường thẳng $x = 2y$. Không làm phép tính tích phân, chứng minh $|I| \le \sqrt{5}e^3$.

2. Xét $I = \int_1^i \frac{dz}{z^4}$ trên đường thẳng $x + y = 1$. Không làm phép tính tích phân, chứng minh $|I| \le 4\sqrt{2}$.

3. Cho $I = \int_i^1 e^{i\mathrm{Log}\overline{z}} dz$ trên parabol $y = 1 - x^2$. Không tính tích phân, chứng minh rằng $|I| \le 1.479e^{\pi/2}$.

Giải. Ta sẽ dùng bất đẳng thức ML để giải những bài tập dạng này:

Bước 1: Tìm M sao cho $|f(z)| \leq M$ với mọi z thuộc đường C.

Bước 2: Xác định chiều dài của đường là L, từ đó theo bất đẳng thức ML, ta có

$$\left|\int_C f(z)\,dz\right| \leq ML$$

Ta sẽ trình bày câu 2. và 3. để minh họa cho phương pháp nêu trên.

2. Chiều dài đường đang xét bằng $\sqrt{2}$. Mặt khác, giả sử $z = x + iy$ thuộc đường này, ta có

$$\left|\frac{1}{\bar{z}^4}\right| = \frac{1}{|z|^4} = \frac{1}{(x^2+y^2)^2} \leq \frac{4}{(x+y)^4} = 4.$$

Vậy ta phải có $|I| = 4\sqrt{2}$.

3. Ta có

$$\begin{aligned} L &= \int_0^1 \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}^2\right)} dx \\ &= \int_0^1 \sqrt{1+4x^2} \\ &= \left[x\sqrt{x^2+1} + \frac{1}{4}\log\left(x + \sqrt{x^2 + \frac{1}{4}}\right)\right]\Bigg|_0^1 \\ &= 1.47894 < 1.479. \end{aligned}$$

Với $-\pi < \theta < \pi, \theta = \arg z$, ta có

$$\left|e^{i\mathrm{Log}\bar{z}}\right| = \left|e^{i\left(\mathrm{Log}|z| - i\theta\right)}\right| = \left|e^{i\mathrm{Log}|z|}e^{\theta}\right| = e^{\theta}.$$

Trên parabol thì θ đạt max khi $\theta = \dfrac{\pi}{2}$. Nên $M = e^{\pi/2}$. Vậy $ML \le 1.479e^{\pi/2}$.

Bài 4.2.6. [4.2.17]

1. Cho $g(t)$ là hàm phức của biến thực t. Biểu diễn $\int_a^b g(t)\,dt$ như giới hạn của tổng. Dùng argument tương tự như đã dùng trong Eq. (4.2-14), chứng minh rằng với $b > a$, ta có

$$\left|\int_a^b g(t)\,dt\right| \le \int_a^b |g(t)|\,dt$$

2. Dùng câu (1) để chứng minh

$$\left|\int_0^1 \sqrt{t}e^{it}dt\right| \le \frac{2}{3}$$

Giải.

1. Theo định nghĩa

$$\int_a^b g(t)\,dt = \sum_{k=1}^{n} g(t_k)\,\Delta t_k, n \to \infty, \Delta t_k \to 0,$$

suy ra

$$\left|\int_a^b g(t)\,dt\right| = \left|\sum_{k=1}^{n} g(t_k)\,\Delta t_k\right|, n \to \infty, \Delta t_k \to 0.$$

Theo định nghĩa

$$\int_a^b |g(t)|\,dt = \sum_{k=1}^{n} |g(t_k)|\,\Delta t_k, n \to \infty, \Delta t_k \to 0.$$

Vì $b > a$ nên $\Delta t_k > 0$, suy ra

$$\left|\sum_{k=1}^{n} g\left(t_k\right)\Delta t_k\right| \leq \sum_{k=1}^{n}\left|g\left(t_k\right)\right|\left|\Delta t_k\right| = \sum_{k=1}^{n}\left|g\left(t_k\right)\right|\Delta t_k.$$

Vậy

$$\left|\int_a^b g\left(t\right)dt\right| \leq \int_a^b \left|g\left(t\right)\right|dt.$$

2. Áp dụng câu (1), ta có

$$\left|\int_0^1 \sqrt{t}e^{it}dt\right| \leq \int_0^1 \left|\sqrt{t}e^{it}\right|dt = \int_0^1 \sqrt{t}dt = \frac{2}{3}$$

Bài 4.2.7. [4.2.18] Viết một chương trình MATLAB cho phép bạn kiểm tra trong bảng trong ví dụ 1, viết một chương trình xấp xỉ $\int_{0+i0}^{1+i}(z+1)\,dz$ trên đường $y = x^2$ như trong Fig. 4.4-2. Chứng minh rằng nếu bạn dùng 50 xấp xỉ tích phân thì kết quả sẽ là $1.00010 + i1.99990$.

Giải. Đoạn mã sử dụng MATLAB:

```
for n=1:10
u=1:n;
X=u/n;
Y=X.^2;
dx=1/n;
Xp=X-dx;
Yp=Xp.^2;
x=(X+Xp)/2;
y=x.^2;
fz=x+1+i*y;
```

```
dy=Y-Yp;
ss=fz.*(dx+i*dy);
val(n)=sum(ss);
p(n)=n;
end
a=[p' val.']
```

Trong đoạn chương trình trên, thay $n = 1 : 10$ bởi $n = 50$ thì ta sẽ được kết quả là $1.00010 + i1.99990$.

4.3 Contour Integration and Green's Theorem

Bài 4.3.1. [4.3.2-10] Tích phân nào sau đây có thể tính bằng cách áp dụng trực tiếp định lý Cauchy-Goursat:

1. $\displaystyle\oint_{|z|=1} \frac{\sin z}{z+2i} dz$
2. $\displaystyle\oint_{|z+3i|=1} \frac{\sin z}{z+2i} dz$
3. $\displaystyle\oint_{|z-3i|=6} e^{\overline{z}} dz$
4. $\displaystyle\oint_{|z+i|=1} \mathrm{Log} z dz$
5. $\displaystyle\oint_{|z-1-i|=1} \mathrm{Log} z dz$
6. $\displaystyle\oint_{|z|=\frac{1}{2}} \frac{1}{(z-1)^4+1} dz$
7. $\displaystyle\oint_{|z|=3} \frac{dz}{1-e^z}$

8. $\displaystyle\oint_{|z|=b} \frac{dz}{z^2+bz+1}$, $0<b<1$

9. $\displaystyle\int_0^{1+i} z^3 dz$ trên $y=x$

Giải. Ta sẽ phát biểu lại định lý Cauchy-Goursat: Cho C là một đường đơn đóng và trong C là miền đơn liên. Cho $f(z)$ là một hàm giải tích trên và trong C, khi đó ta có

$$\oint_C f(z)\,dz = 0$$

Từ đó, để giải được những bài toán có dạng trên, đầu tiên ta sẽ xác định C có phải là đường đơn đóng và trong C có phải miền đơn liên hay không. Sau đó xem xét hàm f, nếu f giải tích tại mọi z trong và trên C thì ta có thể áp dụng định lý Cauchy-Goursat.

1. Do $\dfrac{\sin z}{z+2i}$ giải tích trong $\{z : |z|<2\}$ là miền đơn liên nên ta có thể áp dụng trực tiếp định lý Cauchy-Goursat, và $\displaystyle\oint_{|z|=1} \frac{\sin z}{z+2i}dz = 0$.

2. Hàm $\dfrac{\sin z}{z+2i}$ không xác định tại $z_0=-2i \in \{z : |z+3i|=1\}$, nên ta không thể áp dụng trực tiếp định lý Cauchy-Goursat.

3. Hàm $e^{\overline{z}}$ không khả vi tại $z_0=0$ thuộc phần nằm trong đường $\{z : |z-3i|=6\}$ nên ta không thể áp dụng trực tiếp định lý Cauchy-Goursat.

4. Hàm $\mathrm{Log} z$ không khả vi tại $z_0=0$ thuộc đường tròn $\{z : |z+i|=1\}$ nên ta không thể áp dụng trực tiếp định lý Cauchy-Goursat.

5. Do $\{z : |z-1-i| = 1\} \in \mathbb{C}\backslash\left(-\infty, 0\right]$ là miền giải tích của Log$z$ và là miền đơn liên. Do đó ta có thể áp dụng trực tiếp định lý Cauchy-Goursat, và $\displaystyle\oint_{|z-1-i|=1} \text{Log}z dz =$ 0.

6. Ta có $(z-1)^4 + 1 = 0$ xảy ra khi $z = 1 + \cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}\right)$, $k = 0, 1, 2, 3$. Nếu z là một nghiệm thì $|z| \geq |\text{Im}z| = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Vậy hàm $\dfrac{1}{(z-1)^4 + 1}$ giải tích trong $\left\{z : |z| < \frac{\sqrt{2}}{2}\right\}$, áp dụng định lý Cauchy-Goursat, thì $\displaystyle\oint_{|z|=\frac{1}{2}} \frac{1}{(z-1)^4 + 1} dz$

7. Hàm $\dfrac{1}{1 - e^z}$ không xác định tại $z_0 = 0$ nằm trong đường tròn $\{z : |z| = 3\}$ nên ta không thể áp dụng trực tiếp định lý Cauchy-Goursat.

8. Giả sử $z_0^2 + bz_0 + 1 = 0$, khi đó $1 = z_0\overline{z_0} = |z_0|^2$. Vậy hàm $\dfrac{1}{z_0^2 + bz_0 + 1}$ giải tích trong $\{z : |z| < 1\}$ là miền đơn liên. Áp dụng định lý Cauchy-Goursat, thì $\displaystyle\oint_{|z|=b} \frac{dz}{z^2 + bz + 1} = 0$.

Bài 4.3.2. [4.3.11] Trong phần thảo luận về định lý Green ở phụ lục của chương, nếu ta có $P(x,y)$, $Q(x,y)$ trên miền đơn liên D sao cho $\frac{\partial P}{\partial y}$, $\frac{\partial Q}{\partial x}$ liên tục, và $\oint_C Pdx + Qdy = 0$ với mọi đường cong đơn đóng trong D, thì ta có $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ trong D. Cho $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$, trong đó u và v có đạo hàm riêng liên tục trong miền đơn liên D. Giả sử $\oint f(z)\, dz = 0$ với mọi đường cong đơn đóng trong D, chứng minh f giải tích trong D.

Giải. Ta có

$$0 = \oint f(z)\, dz = \oint udx - vdy + i\oint vdx + udy.$$

Suy ra $\oint udx - vdy = \oint vdx + udy = 0$ với mọi đường cong C đơn đóng trong D. Suy ra

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial y} & = \frac{\partial(-v)}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} & = \frac{\partial u}{\partial x} \end{cases}$$

với mọi $x + iy \in D$. Vậy ta phải có hàm f giải tích trong D.

Bài 4.3.3. [4.3.12,4.3.13] Chứng minh hai tích phân sau đây bằng cách tính $\oint\limits_{|z|=1} e^z dz$ theo hai cách là dùng định lý Cauchy-Goursat và tính theo định nghĩa của tích phân đường:

$$I_1 = \int_0^{2\pi} e^{\cos\theta} \left(\cos\left(\sin\theta + \theta\right)\right) d\theta = 0$$

$$I_2 = \int_0^{2\pi} e^{\cos\theta} \left(\sin\left(\sin\theta + \theta\right)\right) d\theta = 0$$

Giải. Hàm e^z là hàm nguyên nên $\oint_{|z|=1} e^z dz = 0$ theo định lý Cauchy-Goursat. Mặt khác ta có

$$\begin{aligned}
\oint\limits_{|z|=1} e^z dz &= \int_0^{2\pi} e^{e^{i\theta}} \left(e^{i\theta}\right)' d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} e^{\cos\theta + i\sin\theta} e^{i\theta} i d\theta \\
&= i\int_0^{2\pi} e^{\cos\theta + i\sin\theta} e^{i\theta} d\theta \\
&= i\int_0^{2\pi} e^{\cos\theta + i(\sin\theta + \theta)} d\theta \\
&= i\int_0^{2\pi} e^{\cos\theta} \left(\cos\left(\sin\theta + \theta\right) + i\sin\left(\sin\theta + \theta\right)\right) d\theta \\
&= i\int_0^{2\pi} e^{\cos\theta} \cos\left(\sin\theta + \theta\right) d\theta - \int_0^{2\pi} e^{\cos\theta} \sin\left(\sin\theta + \theta\right) d\theta \\
&= iI_1 - I_2.
\end{aligned}$$

Vậy ta phải có $I_1 = I_2 = 0$.

Bài 4.3.4. [4.3.14,4.3.15] Chứng minh rằng:

$$I_1 = \int_0^{2\pi} e^{\sin n\theta} \cos(\theta - \cos n\theta)\, d\theta = 0$$

$$I_2 = \int_0^{2\pi} e^{\sin n\theta} \sin(\theta - \cos n\theta)\, d\theta = 0$$

Giải. Tương tự như bài trước ta có

$$\begin{aligned} iI_1 - I_2 &= i\int_0^{2\pi} e^{\sin n\theta} \cos(\theta - \cos n\theta)\, d\theta - \int_0^{2\pi} e^{\sin n\theta} \sin(\theta - \cos n\theta)\, d\theta \\ &= i\int_0^{2\pi} e^{\sin n\theta} (\cos(\theta - \cos n\theta) + i\sin(\theta - \cos n\theta))\, d\theta \\ &= i\int_0^{2\pi} e^{\sin n\theta} e^{i\theta} e^{-i\cos n\theta} d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} e^{-i\left(e^{i\theta}\right)^n} e^{i\theta} i d\theta \\ &= \oint_{|z|=1} e^{-iz^n} dz \\ &= 0. \end{aligned}$$

Vậy ta phải có $I_1 = I_2 = 0$.

Bài 4.3.5. [4.3.16] Chứng minh rằng nếu ta có a là số thực thỏa $|a| > 1$, thì

$$\int_0^{2\pi} \frac{1 - a\cos\theta}{1 - 2a\cos\theta + a^2} d\theta = 0$$

Giải. Áp dụng định lý Cauchy–Goursat, thì

$$\oint_{|z|=1} \frac{1}{z-a} dz = 0.$$

Mặt khác, ta có:

$$\begin{aligned}
\oint_{|z|=1} \frac{1}{z-a} dz &= \int_0^{2\pi} \frac{(i\cos\theta - \sin\theta)}{\cos\theta - a + i\sin\theta} d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \frac{(i\cos\theta - \sin\theta)(\cos a - a - i\sin\theta)}{(\cos\theta - a)^2 + (\sin\theta)^2} d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \frac{a\sin\theta + i(1 - a\cos\theta)}{1 - 2a\cos\theta + a^2} d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \frac{a\sin\theta}{1 - 2a\cos\theta + a^2} d\theta + i\int_0^{2\pi} \frac{1 - a\cos\theta}{1 - 2a\cos\theta + a^2} d\theta
\end{aligned}$$

Vậy ta phải có

$$\int_0^{2\pi} \frac{1 - a\cos\theta}{1 - 2a\cos\theta + a^2} d\theta = 0.$$

Bài 4.3.6. [4.3.18-22] Tính các tích phân sau trên đường C là biên của hình vuông có các đỉnh là $\pm(2 \pm 2i)$ bằng nguyên lý biến dạng của đường cong.

1. $\oint_C \frac{dz}{z-i}$
2. $\oint_C \frac{dz}{(z-i)^4}$
3. $\oint_C \frac{zdz}{z-i}$
4. $\oint_C \frac{(z+1)^m dz}{z^m}$, với m là số nguyên dương.
5. $\oint_C \frac{z^m dz}{(z-1)^m}$, với m là số nguyên dương.

Giải.

3. Ta có

$$\begin{aligned}
\oint_C \frac{zdz}{z-i} &= \oint_C \frac{z-i+i}{z-i} dz \oint_C dz + i \oint_C \frac{dz}{z-i} \\
&= i \oint_C \frac{dz}{z-i} \\
&= i2\pi i \\
&= -2\pi.
\end{aligned}$$

4. Ta có

$$\begin{aligned}
\oint_C \frac{(z+1)^m dz}{z^m} &= \sum_{k=0}^{m} \oint_C \frac{\binom{m}{k} z^k dz}{z^m} \\
&= \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} \oint_C \frac{dz}{z^{m-k}} \\
&= \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} \oint_{|z|=1} \frac{dz}{z^{m-k}} \\
&= \binom{m}{m-1} 2\pi i \\
&= 2m\pi i.
\end{aligned}$$

5. Ta có

$$\begin{aligned}
\oint_C \frac{z^m dz}{(z-1)^m} &= \oint_C \frac{(z-1+1)^m dz}{(z-1)^m} \\
&= \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} \oint_C \frac{dz}{(z-1)^{m-k}} \\
&= \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} \oint_{|z-1|=\frac{1}{2}} \frac{dz}{(z-1)^{m-k}} \\
&= 2m\pi i.
\end{aligned}$$

Bài 4.3.7. [4.3.23] Chứng minh rằng:

$$\oint_{|z-3|=2} \frac{\text{Log}z}{(z-1)(z-3)}dz = \oint_{|z-3|=2} \frac{\text{Log}z}{4(z-3)}dz.$$

Giải. Ta có

$$\begin{aligned}\oint_{|z-3|=2} \frac{\text{Log}z}{(z-1)(z-3)}dz &= \oint_{|z-3|=2} \frac{(z+1)-(z-3)}{4(z+1)(z-3)}\text{Log}z dz\\ &= \oint_{|z-3|=2} \frac{\text{Log}z dz}{4(z+1)} - \oint_{|z-3|=2} \frac{\text{Log}z dz}{4(z-3)}.\end{aligned}$$

Áp dụng định lý Cauchy–Goursat, ta có

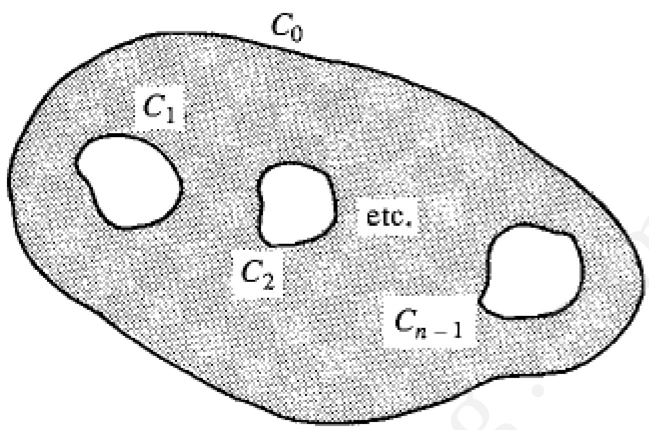
$$\oint_{|z-3|=2} \frac{\text{Log}z dz}{4(z+1)} = 0.$$

Từ đây suy ra:

$$\oint_{|z-3|=2} \frac{\text{Log}z}{(z-1)(z-3)}dz = \oint_{|z-3|=2} \frac{\text{Log}z}{4(z-3)}dz.$$

Bài 4.3.8. [4.3.24-25]

1. Xét miền n-liên thông D được bao bởi các đường cong đơn đóng C_0, C_1,..., C_{n-1} như trong hình 4.3.1. Cho $f(z)$ là hàm giải tích trên D và trên biên của nó.



Hình 4.3.1

Chứng minh rằng:

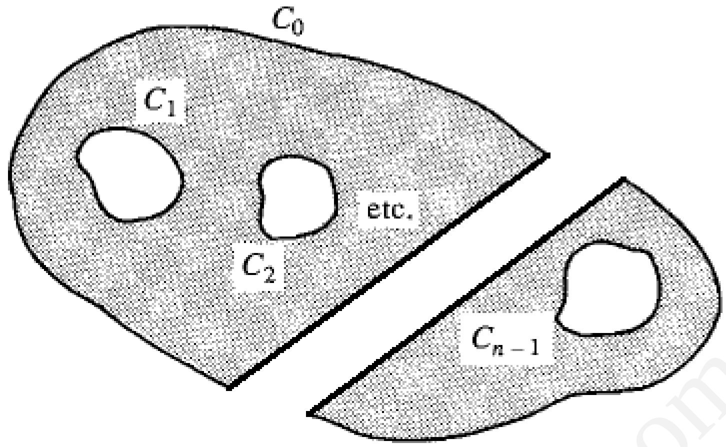
(a)

$$\oint_{C_0} f(z)\,dz = \oint_{C_2} f(z)\,dz + \oint_{C_2} f(z)\,dz + \ldots + \oint_{C_{n-1}} f(z)\,dz$$

2. Chứng minh rằng:

$$\oint_{|z|=2} \frac{\sin z}{(z^2-1)}dz = \oint_{|z-1|=\frac{1}{2}} \frac{\sin z}{(z^2-1)}dz + \oint_{|z+1|=\frac{1}{2}} \frac{\sin z}{(z^2-1)}dz.$$

Giải. Ta có thể chứng minh theo quy nạp trường hợp $n = 2$ là nội dung của nguyên lý biến dạng đường cong. Với $n > 2$, ta có thể cắt nhát cắt để cô lập C_{n-1} bằng một đường cong đơn đóng bất kì, chẳng hạn như trong hình 4.3.2.



Hình 4.3.2

Gọi C' là đường bao quanh C_{n-1} như trong hình 4.3.2. Từ đó theo quy nạp và nguyên lý biến dạng đường cong ta có:

$$\begin{aligned}
\oint_{C_0} f(z)\,dz &= \oint_{C_2} f(z)\,dz + \oint_{C_2} f(z)\,dz + \ldots + \oint_{C_{n-2}} f(z)\,dz + \oint_{C'} f(z)\,dz \\
&= \oint_{C_0} f(z)\,dz = \oint_{C_2} f(z)\,dz + \oint_{C_2} f(z)\,dz + \ldots + \oint_{C_{n-1}} f(z)\,dz.
\end{aligned}$$

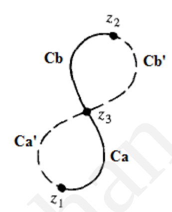
Áp dụng công thức trên cho C_0 là đường tròn $|z| = 2$, C_1 là đường tròn $|z-1| = \frac{1}{2}$, C_2 là đường tròn $|z+1| = \frac{1}{2}$ và $f(z) = \dfrac{\sin z}{z^2-1}$ giải tích trên $\mathbb{C}\setminus\{-1,1\}$ ta có

$$\oint_{|z|=2} \frac{\sin z}{(z^2-1)}dz = \oint_{|z-1|=\frac{1}{2}} \frac{\sin z}{(z^2-1)}dz + \oint_{|z+1|=\frac{1}{2}} \frac{\sin z}{(z^2-1)}dz.$$

4.4 Path Independence, Indefinite Integrals, Fundamental Theorem of Calculus in the Complex Plane

Bài 4.4.1. [**4.4.1**] Cho hai đường C_1 là đường nét liền và C_2 là đường nét đứt đều nối z_1 và z_2 như hình 4.4.1. Cho hàm $f(z)$ giải tích trong miền mở đơn liên chứa C_1, C_2. Chứng minh rằng

$$\int_{C_1} f(z)\,dz = \int_{C_2} f(z)\,dz.$$



Hình 4.4.1

Giải. Ta có

$$\begin{aligned}\int_{C_a} f(z)\,dz &= \int_{C_{a'}} f(z)\,dz\\ \int_{C_b} f(z)\,dz &= \int_{C_{b'}} f(z)\,dz\end{aligned}$$

Cộng hai đẳng thức trên vế theo vế ta được

$$\int_{C_a} f(z)\,dz + \int_{C_b} f(z)\,dz = \int_{C_{a'}} f(z)\,dz + \int_{C_{b'}} f(z)\,dz$$

Hay

$$\int_{C_1} f(z)\,dz = \int_{C_2} f(z)\,dz.$$

Bài 4.4.2. [4.4.2-7] Tính các tích phân sau trên đường $y = \sqrt{x}$.

1. $\displaystyle\int_0^{4+2i} e^{iz} dz$

2. $\displaystyle\int_0^{4+2i} \left(1 + z^2\right) dz$

3. $\displaystyle\int_0^{4+2i} \left(z + z^{-2}\right) dz$

4. $\displaystyle\int_0^{4+2i} e^z \sinh z dz$

5. $\displaystyle\int_0^{4+2i} e^z \cosh e^z dz$

6. $\displaystyle\int_{1+i}^{4+2i} \frac{z}{z^2 - 1} dz$

Giải. Các hàm đã cho có nguyên hàm trong miền xác định, nên các tích phân không phụ thuộc vào đường đi, và ta có

4.

$$\begin{aligned}
\int_0^{4+2i} e^z \sinh z dz &= \int_0^{4+2i} e^z \frac{e^z - e^{-z}}{2} dz \\
&= \int_0^{4+2i} \frac{e^{2z} - 1}{2} dz \\
&= \left(\frac{e^{2z}}{4} - \frac{1}{2}z\right)\Big|_0^{4+2i} \\
&= \frac{1}{4}e^{8+4i} - \frac{9}{4} - i.
\end{aligned}$$

5.

$$\begin{aligned}\int_0^{4+2i} e^z \cosh e^z dz &= \left(\sinh e^z\right)\Big|_0^{4+2i}\\ &= \sinh(4+2i) - \sinh 1.\end{aligned}$$

6.

$$\begin{aligned}\int_{1+i}^{4+2i} \frac{z}{z^2-1} dz &= \frac{1}{2}\int_{1+i}^{4+2i}\left(\frac{1}{z+1}+\frac{1}{z-1}\right)dz\\ &= \frac{1}{2}\left(\mathrm{Log}\,(z+1)+\mathrm{Log}\,(z-1)\right)\Big|_{1+i}^{4+2i}\\ &= \frac{1}{2}\left(\mathrm{Log}\left(z^2-1\right)\right)\Big|_{1+i}^{4+2i}\\ &= \frac{1}{2}\mathrm{Log}\frac{(4+2i)^2-1}{(1+i)^2-1}\\ &= \frac{1}{2}\mathrm{Log}\frac{12+16i}{-1+2i}.\end{aligned}$$

Bài 4.4.3. [4.4.8] Nhận xét cách tính hai tích phân sau đây trên đường thẳng $y = x$.

$$\begin{aligned}\int_0^{1+i} z dz &= \frac{z^2}{2}\Big|_0^{1+i} &= \frac{(1+i)^2}{2} &= i,\\ \int_0^{1+i} \overline{z} dz &= \frac{\overline{z}^2}{2}\Big|_0^{1+i} &= \frac{(1-i)^2}{2} &= -i\end{aligned}$$

Giải. Hàm $f(z) = z$ là hàm nguyên và ta có $\frac{z^2}{2}$ là một nguyên hàm của $f(z)$ trên $\mathbb{C}$, nên tích phân đầu tính đúng. Ở tích phân dưới hàm $g(z) = \frac{\overline{z}^2}{2}$ nếu kiểm tra bằng điều kiên Cauchy–Rieman thì chỉ khả vi tại $z = 0$, nên cách lấy $g(z)$ rồi thay cận để tính tích phân là chưa chính xác. Tuy nhiên, kết quả cuối cùng là chính xác. Thật vậy, bằng cách tham số hóa đường đang xét bằng $z(t) = t + it$, $t \in [0, 1]$, ta có

$$\begin{aligned}\int_0^{1+i} \overline{z} dz &= \int_0^1 (t - it)(1 - i)\, dt \\ &= (1-i)^2 \int_0^1 t dt \\ &= \frac{(1-i)^2}{2} \\ &= -i\end{aligned}$$

Bài 4.4.4. [4.4.9] Tính giá trị $\int_e^i \mathrm{Log} z dz$ trên đường thẳng nối $z = e$ với $z = i$.

Giải. Nếu ta tham số hóa $z(t) = e(1 - t) + it$, $t \in [0, 1]$, thì

$$\mathrm{Log} z(t) = \ln\left(\sqrt{e^2 (1-t)^2 + t^2}\right) + i \mathrm{Arg}\left(e(1-t) + it\right),$$

và việc tính trực tiếp theo định nghĩa có vẻ "bất khả thi". Ta sẽ tính tích phân này theo đường khác, vì hàm $\mathrm{Log} z$ giải tích trong miền $\mathbb{C} \backslash \big(-\infty, 0\big]$ đơn liên nên tích phân trên không phụ thuộc vào đường đi nếu ta lấy tích phân vào đường đi trong $\mathbb{C} \backslash \big(-\infty, 0\big]$ bất kì. Xét đường

$$z^*(t) = e^{1-t+i\frac{\pi}{2}t}, \quad t \in [0, 1],$$

ta có

$$\begin{aligned}\int_e^i \mathrm{Log} z dz &= \int_0^1 \mathrm{Log} e^{z^*(t)} e^{z^*(t)} \left(z^*(t)\right)' dt \\ &= \int_e^i z e^z dz \\ &= \left(z e^z - e^z\right)\Big|_e^i \\ &= i e^i - e^i - e e^e + e^e\end{aligned}$$

Bài 4.4.5. [4.4.10]

1. Tính $\displaystyle\int_{1+i}^{-1-i} \frac{\text{Log} z}{z} dz$ trên một đường trong $\mathbb{C}\backslash\big(-\infty, 0\big]$.

2. Tính $\displaystyle\int_{1}^{i} z^{\frac{1}{2}} dz$, hàm $z^{\frac{1}{2}}$ xét ở đây là nhánh chính, và đường đi trong $\mathbb{C}\backslash\big(-\infty, 0\big]$.

3. Tính $\displaystyle\int_{1}^{i} z^{\frac{1}{2}} dz$, hàm $z^{\frac{1}{2}}$ ở đây là nhánh nhận giá trị -1 khi $z = 1$, và đường đi trong $\mathbb{C}\backslash\big(-\infty, 0\big]$.

Giải. Khi bài toán nói tính tích phân trên một đường C bất kì trong miền D cho trước thì thường là tích phân sẽ không phụ thuộc vào việc chọn đường.

Chú ý ta chỉ được chọn đường đi trong miền thỏa điều kiện của định lý độc lập về đường đi. Ta sẽ minh họa qua bài tập 1.

1. Ta sẽ tính tích phân trên đường $e^{i\left(\frac{\pi}{4}-t\right)}$, $t \in [0, \pi]$, khi đó ta có

$$\begin{aligned}
\int_{1+i}^{-1-i} \frac{\text{Log} z}{z} dz &= \int_0^{\pi} \frac{\text{Log} e^{i\left(\frac{\pi}{4}-t\right)}}{e^{i\left(\frac{\pi}{4}-t\right)}} e^{i\left(\frac{\pi}{4}-t\right)} (-i)\, dt \\
&= \int_0^{\pi} \left(\frac{\pi}{4} - t\right) dt \\
&= \left(\frac{\pi}{4} t - \frac{1}{2} t^2\right) \Big|_0^{\pi} \\
&= -\frac{\pi^2}{4}.
\end{aligned}$$

Bài 4.4.6. [4.4.14] Tính tích phân $\int_0^i \cos z \cosh z dz$ bằng hai cách bên dưới và kiểm tra kết quả giống nhau. Tại sao các đường viền không xác định?.

1. Biểu diễn $\cos z$ và $\cosh z$ bởi hàm mũ của z. Nhân các biểu thức kết quả rồi tính tích phân hàm mũ.

2. MATLAB Symbolic Math Toolbox có thể tính tích phân thực. Dùng điều này ,tìm hàm có đạo hàm là hàm thực $\cos z \cosh$ và sử dụng kết quả này tính tích phân đã cho.

Giải.

1. Ta có

$$\cos z \cosh = \left(\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}\right)\left(\frac{e^{z}+e^{-z}}{2}\right) = \frac{e^{(1+i)z}+e^{(i-1)z}+e^{(-1+i)z}+e^{(-1-i)z}}{4}.$$

Đây là nguyên hàm của hàm

$$\frac{1}{4}\left[\frac{e^{(1+i)z}}{1+i}+\frac{e^{(-1+i)z}}{i-1}+\frac{e^{(-1+i)}}{-1+i}+\frac{e^{(-1-i)z}}{-1-i}\right].$$

Vậy nên

$$\begin{aligned}
\int_0^i \cos z \cosh z dz &= \frac{1}{4}\left[\frac{e^{-1+i}}{1+i}+\frac{e^{-1-i}}{i-1}+\frac{e^{-1-i}}{-1+i}+\frac{e^{1-i}}{-1-i}\right] \\
&- \frac{1}{4}\left[\frac{1}{1+i}+\frac{1}{i-1}+\frac{1}{-1+i}+\frac{1}{-1-i}\right] \\
&= \frac{1}{4}\left[\frac{e^{-1+i}}{1+i}+\frac{e^{-1-i}}{i-1}+\frac{e^{-1-i}}{-1+i}+\frac{e^{1-i}}{-1-i}\right] \\
&= \frac{1}{4}\left[\frac{e^{-1}}{2}\left(e^{i}(1-i)+e^{-i}(-1-i)\right)+\frac{e}{2}\left(e^{i}(1+i)+e^{-i}(-1+i)\right)\right] \\
&= \frac{1}{4}\left[e^{-1}(i\sin 1 - i\cos 1)+e(i\sin 1+i\cos 1)\right] \\
&= \frac{i}{2}(\sin 1\cosh 1+\cos 1\sinh 1).
\end{aligned}$$

2.

```
syms x
int(cos(x)*cosh(x))
ans =(cos(x)*sinh(x))/2+(cosh(x)*sin(x))/2
```

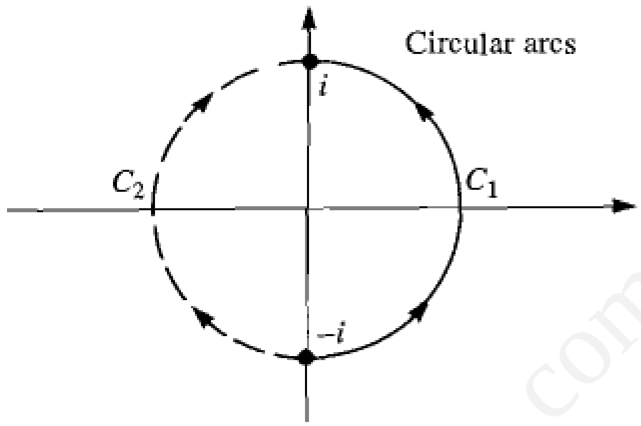
$$\begin{aligned}\int_0^i \cos z \cosh z dz &= \frac{1}{2}\left(\sin z \cosh z + \cos z \sinh z\right)\Big|_0^i \\ &= \frac{1}{2}\left(\sin i \cosh i + \cos i \sinh i\right) \\ &= \frac{i}{2}\left(\sin 1 \cosh 1 + \cos 1 \sinh 1\right)\end{aligned}$$

Bài 4.4.7. [4.4.15] Xét hai đường C_1 và C_2 như trong hình 4.4.2. Đầu tiên ta có thể tính $\displaystyle\int_{C_1} \frac{dz}{z} = (\mathrm{Log} z)\Big|_{-i}^{i} = i\pi$.

1. Giải thích tại sao không thể dùng nguyên lý về tích phân không phụ thuộc vào đường đi để tính $\displaystyle\int_{C_2} \frac{dz}{z} = \int_{C_1} \frac{dz}{z} = i\pi$.

2. Tính giá trị của $\displaystyle\int_{C_2} \frac{dz}{z}$ bằng cách sử dụng một nhánh nào đó của hàm $\log z$ giải tích trên miền đơn liên chứa C_2.

3. Dùng phép tham số C_2 bằng $z(t) = e^{-it}$, $t \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$ để kiểm tra kết quả tính tích phân trong câu hỏi 2.



Hình 4.4.2

Giải.

1. Vì hàm $\frac{1}{z}$ không giải tích tại 0, hai đường C_1 và C_2 không cùng nằm trong bất kì miền đơn liên nào mà $\frac{1}{z}$ giải tích trên đó.

2. Hàm $-\text{Log}\left(-\frac{1}{z}\right)$ giải tích trong $\mathbb{C}\backslash[0,+\infty)$, có đạo hàm là $\frac{1}{z}$ trên đó. Vì vậy ta có

$$\begin{aligned} \int_{C_2} \frac{dz}{z} &= \left(-\text{Log}\left(-\frac{1}{z}\right)\right)\Big|_{-i}^{i} \\ &= -\text{Log}\left(\frac{-\frac{1}{i}}{-\frac{1}{-i}}\right) \\ &= -\text{Log}\,(-1) \\ &= -i\pi \end{aligned}$$

3. Với $z = e^{-it}, t \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$ thì

$$\begin{aligned}\int_{-i}^{i} \frac{dz}{z} &= \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \frac{1}{e^{-it}} e^{-it}(-i)\,dt \\ &= -i\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} dt \\ &= -i\pi\end{aligned}$$

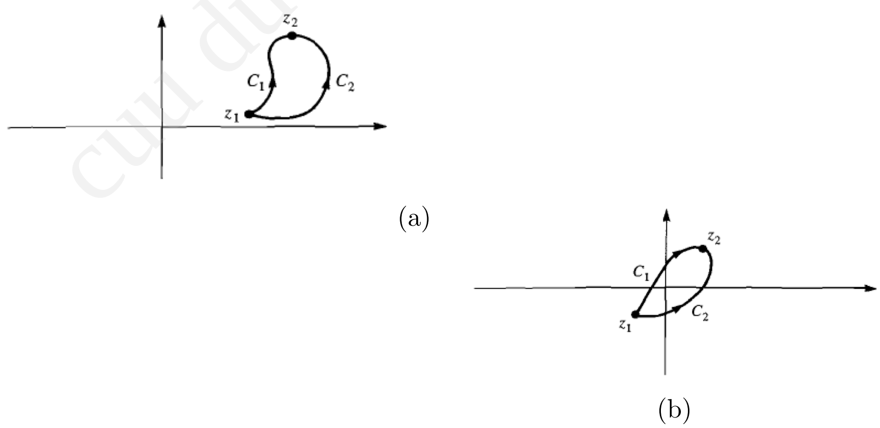
Bài 4.4.8. [4.4.17] Cho z_1 và z_2 là hai điểm bất kì trong $\mathbb{C}$ được nối bởi C_1 và C_2 là hai đường không cắt nhau và không đi qua 0. Giải thích tại sao

$$\int_{\substack{z_1\\C_1}}^{z_2} \frac{dz}{z^2} = \int_{\substack{z_1\\C_2}}^{z_2} \frac{dz}{z^2}.$$

Xét hai trường hợp:

1. $z = 0$ không nằm trong miền bao bởi C_1và C_2 (xem hình 4.4.3a).

2. $z = 0$ nằm trong miền bao bởi C_1 và C_2 (xem hình 4.4.3b).



Hình 4.4.3

Giải. Hàm $-\frac{1}{z}$ giải tích trong $\mathbb{C}\setminus\{0\}$, và có đạo hàm bằng $\frac{1}{z^2}$, nên ta có

$$\int_{\substack{z_1\\ C_1}}^{z_2} \frac{dz}{z^2} = -\frac{1}{z}\Big|_{z_1}^{z_2} = \int_{\substack{z_1\\ C_2}}^{z_2} \frac{dz}{z^2}.$$

Bài 4.4.9. [4.4.18] Trong phép tính hàm biến thực ta đã biết *Định lý giá trị trung bình*: nếu hàm $f(x)$ liên tục trong $[a,b]$, lúc đó tồn tại số x_1, $a < x_1 < b$, sao cho

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(x_1)(b-a)$$

Hãy làm sáng tỏ rằng điều này không chính xác cho tích phân đường của hàm biến phức qua các bước:

1. Chứng minh $\displaystyle\int_1^i \frac{dz}{z^2} = 1+i$ trên đường thẳng $x+y=1$.
2. Chứng minh rằng không có z_1 nào trên đường đang xét thỏa mãn $\dfrac{1}{z_1^2}(i-1) = 1+i$.

Giải. Ta có hàm $\dfrac{1}{z^2}$ giải tích trên $\mathbb{C}\setminus\{0\}$và $\dfrac{d}{dz}\left(-\dfrac{1}{z}\right) = \dfrac{1}{z^2}$ nên suy ra

$$\begin{aligned}\int_1^i \frac{dz}{z^2} &= -\frac{1}{z}\Big|_1^i\\ &= -\left(\frac{1}{i}-1\right)\\ &= 1+i\end{aligned}$$

Giả sử $z_1 = x_1 + i(1-x_1)$, $0 < x_1 < 1$, ta có

$$\begin{aligned}\frac{1}{z_1^2}(i-1) - 1 - i &= \frac{i-1}{(x_1 + i(1-x_1))^2} - 1 - i\\ &= \frac{i-1}{2x_1 - 1 + i2x_1(1-x_1)} - 1 - i\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{i-1-(i+1)\left(2x_1-1+i2x_1(1-x_1)\right)}{2x_1-1+i2x_1(1-x_1)} \\ &= \frac{-2x_1^2+i2\left(x_1-1\right)^2}{z_1^2} \\ &\neq 0 \end{aligned}$$

Từ đó ta có điều phải chứng minh.

Bài 4.4.10. [4.4.21]

1. Chứng minh rằng nhánh của z^{α} (α là số, thực hoặc phức) có nguyên hàm là $\dfrac{zz^{\alpha}}{\alpha+1}$ trong miền giải tích của z^{α}. Xem phần 3.6.
2. Dùng giá trị chính của tất cả hàm trong hàm dưới dấu tích phân, tìm $\int_{-i}^{i}\left(z^i-i^z\right)dz$. Dùng một đường của tích phân không thông qua $z=0$ hoặc trục thực âm.

Giải.

1. Ta có

$$\frac{d}{dz}\frac{z^{\alpha}z}{\alpha+1}=\frac{d}{dz}\frac{z^{\alpha+1}}{\alpha+1}=\frac{(\alpha+1)\,z^{\alpha}}{\alpha+1}=z^{\alpha}$$

2. Ta có

$$\begin{aligned} \int_{-i}^{i} z^i dz &= \left.\frac{z^{i+1}}{i+1}\right|_{-i}^{i} = \left.\frac{zz^i}{i+1}\right|_{-i}^{i} = \left.\frac{z}{i+1}e^{i\log z}\right|_{-i}^{i} \\ &= \frac{i}{i+1}e^{-\frac{\pi}{2}}+\frac{i}{i+1}e^{\frac{\pi}{2}} = \frac{2i}{i+1}\cosh\left(\frac{\pi}{2}\right) = (i+1)\cosh\left(\frac{\pi}{2}\right) \end{aligned}$$

và

$$\int_{-i}^{i} i^z dz = \int_{-i}^{i} e^{z\mathrm{Log} i}dz = \int_{-i}^{i} e^{\frac{i\pi z}{2}} = \frac{2}{i\pi}\left[e^{i\frac{\pi}{2}z}\right]_{-i}^{i} = \frac{2}{i\pi}\left(e^{-\frac{\pi}{2}}-e^{\frac{\pi}{2}}\right) = \frac{4i}{\pi}\sinh\left(\frac{\pi}{2}\right).$$

Từ đó, ta được

$$\int_{-i}^{i}\left(z^{i}-i^{z}\right)dz=(i+1)\cosh\left(\frac{\pi}{2}\right)-\frac{4i}{\pi}\sinh\left(\frac{\pi}{2}\right).$$

4.5 The Cauchy Integral Formula and Its Extension

Bài 4.5.1. [**4.5.1**] Để đi đến đạo hàm của công thức tích phân Cauchy, cho $f(z)$ là giải tích trên và trong đường đơn đóng C. Từ chính của biến dạng của đường, ta có

$$\oint_{C}\frac{f(z)}{z-z_0}=\oint_{C_0}\frac{f(z)}{z-z_0}dz$$

1. Viết lại tích phân bên phải bằng cách đổi biến $z=z_0+re^{i\theta}$, với r là bán kính của C_0 và θ tăng từ 0 đến 2π. Chú ý $\dfrac{dz}{d\theta}=ire^{i\theta}$.
2. Cho tích phân thu được trong câu (1), cho $r\to 0$ dưới dấu tích phân. Tính tích phân và dùng kết quả đó để chứng minh
$$\oint_{C}\frac{f(z)}{z-z_0}=2\pi i f(z_0)$$
3. Điều gì làm cho đạo hàm này không chính xác.

Giải.

1. Đặt $z=z_0+re^{i\theta}$ thì ta có $dz=re^{i\theta i}d\theta, z-z_0=re^{i\theta}$. Suy ra:

$$\oint\frac{f(z)}{z-z_0}dz=\int_{\theta=0}^{2\pi}\frac{f\left(z_0+re^{i\theta}\right)}{re^{i\theta}re^{i\theta}id\theta}=i\int_{0}^{2\pi}f\left(z_0+ie^{i\theta}\right)d\theta$$

2. Ta có

$$\oint_C \frac{f(z)}{z-z_0} = i\int_0^{2\pi} f(z_0)\,d\theta = if(z_0)\int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi i f(z_0)$$

3. Chúng ta không có

$$\lim_{r\to 0}\int_0^{2\pi} f\left(z_0 + re^{i\theta}d\theta\right) = \int_0^{2\pi} \lim_{r\to 0} f(z_0+\theta)$$

Bài 4.5.2. [4.5.2-13] Tích các tích phân bằng cách dùng công thức tích phân Cauchy, hoặc định lý Cauchy-Goursat.

1. $\displaystyle\oint_{|z|=3} \frac{\sin z}{z-2}dz$
2. $\displaystyle\oint_{|z|=1} \frac{\sin z}{z-2}dz$
3. $\displaystyle\oint_{|z|=2} \frac{\cosh z}{(z-3)(z-1)}dz$
4. $\displaystyle\frac{1}{2\pi i}\oint \frac{\cosh(e^z)}{z^2-4z+3}dz$, trên biên hình vuông có các đỉnh là $z=2$, $z=4$, $z=3\pm i$
5. $\displaystyle\oint_{\left|z+\frac{1}{2}-2i\right|=2} \frac{e^{iz}}{z^2+z+1}dz$
6. $\displaystyle\frac{1}{2\pi i}\oint_{|z-4i|=3} \frac{\mathrm{Log} z}{z^2+9}dz$
7. $\displaystyle\frac{1}{2\pi i}\oint_{|z-1|=2} \frac{e^{iz}}{(z-1)^2}dz$
8. $\displaystyle\oint_{|z-1|=2} \frac{ze^z}{(z-1)^2}dz$
9. $\displaystyle\frac{1}{2\pi i}\oint_{|z-1|=2} \frac{dz}{(z+2)(z-i)^2}$

10. $\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\oint_{|z-1|=2}\frac{\cos z}{(z-i)^3}dz$

11. $\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\oint_{|z|=2}\frac{\sin 2z}{z^{15}}dz$

12. $\displaystyle\oint_{|z|=2}\frac{\sin 2z}{z^{16}}dz$

Giải.

1. Áp dụng công thức tích phân Cauchy, ta có

$$\oint_{|z|=3}\frac{\sin z}{z-2}dz = 2\pi i\sin 2.$$

2. Áp dụng định lý Cauchy–Goursat, ta có

$$\oint_{|z|=1}\frac{\sin z}{z-2}dz = 0.$$

3. Áp dụng công thức tích phân Cauchy, ta có

$$\begin{aligned}\oint_{|z|=2}\frac{\cosh z}{(z-3)(z-1)}dz &= \oint_{|z|=2}\frac{\frac{\cosh z}{z-3}}{z-1}dz\\ &= 2\pi i\frac{\cosh 1}{1-3}\\ &= -\pi i\cosh 1.\end{aligned}$$

4. Áp dụng công thức tích phân Cauchy, ta có

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi i}\oint \frac{\cosh e^z}{z^2-4z+3}dz &= \frac{1}{2\pi i}\oint \frac{\frac{\cosh e^z}{z-1}}{z-3}dz\\ &= \frac{\cosh e^3}{2}.\end{aligned}$$

5. Áp dụng công thức tích phân Cauchy, ta có

$$\begin{aligned}\oint_{\left|z+\frac{1}{2}-2i\right|=2} \frac{e^{iz}}{z^2+z+1}dz &= \oint_{\left|z+\frac{1}{2}-2i\right|=2} \frac{\frac{e^{iz}}{z+\frac{1+i\sqrt{3}}{2}}}{z-\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}}dz\\ &= 2\pi i\frac{e^{i\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}}}{\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}+\frac{1+i\sqrt{3}}{2}}\\ &= \frac{2\pi}{\sqrt{3}}e^{\frac{-\sqrt{3}-i}{2}}.\end{aligned}$$

6. Áp dụng công thức tích phân Cauchy, ta có

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi i}\oint_{|z-4i|=3} \frac{\mathrm{Log} z}{z^2+9}dz &= \frac{1}{2\pi i}\oint_{|z-4i|=3} \frac{\frac{\mathrm{Log} z}{z+3i}}{z-3i}dz\\ &= \frac{\mathrm{Log} 3i}{3i+3i}\\ &= \frac{-i\mathrm{Log} 3i}{6}.\end{aligned}$$

7. Áp dụng công thức tích phân Cauchy, ta có

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi i}\oint_{|z-1|=2} \frac{e^{iz}}{(z-i)^2}dz &= \left.\left(e^{iz}\right)'\right|_i\\ &= ie^{-1}.\end{aligned}$$

8. Áp dụng công thức tích phân Cauchy, ta có

$$\begin{aligned}\oint_{|z-1|=2} \frac{ze^z}{(z-i)^2}dz &= 2\pi i\,(ze^z)'\Big|_i \\ &= 2\pi i\,(ze^z+e^z)\Big|_i \\ &= 2\pi\,(-1+i)\,e^i.\end{aligned}$$

9. Áp dụng công thức tích phân Cauchy, ta có

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi i}\oint_{|z-1|=2} \frac{dz}{(z+2)(z-i)^2} &= \left(\frac{1}{z+2}\right)'\Big|_i \\ &= \frac{-1}{(z+2)^2}\Big|_i \\ &= \frac{-1}{(i+2)^2}.\end{aligned}$$

10. Áp dụng công thức tích phân Cauchy, ta có

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi i}\oint_{|z-1|=2} \frac{\cos z}{(z-i)^3}dz &= \frac{1}{2!}(\cos z)^{(2)}\Big|_i \\ &= -\frac{\cos z}{2}\Big|_i \\ &= -\frac{\cos i}{2}.\end{aligned}$$

11. Áp dụng công thức tích phân Cauchy, ta có

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi i}\oint_{|z|=2} \frac{\sin 2z}{z^{15}}dz &= \frac{1}{14!}(\sin 2z)^{(14)}\Big|_0 \\ &= -\frac{2^{14}\sin 2z}{14!}\Big|_0\end{aligned}$$

$$= \quad 0.$$

12. Áp dụng công thức tích phân Cauchy, ta có

$$\begin{aligned}\oint_{|z|=2} \frac{\sin 2z}{z^{16}} dz &= 2\pi i \frac{1}{15!} \left(\sin 2z\right)^{(15)} \Big|_0 \\ &= -\frac{2^{16}\pi i \cos 2z}{15!}\Big|_0 \\ &= -\frac{2^{16}\pi i}{15!}.\end{aligned}$$

Bài 4.5.3. [4.5.15]

1. Sử dụng công thức tích phân Cauchy kiểm tra rằng

$$\oint_{|z|=1} \frac{e^{az}}{z^{n+1}} dz = \frac{a^n 2\pi i}{n!}.$$

2. Viết lại tích phân trong câu (1) sử dụng phép tham số hóa đường tròn $z(\theta) = e^{i\theta}$, $\theta \in [0, 2\pi]$ và thực hiện phép tính theo θ. Chứng minh rằng khi a là số thực, thì

$$\int_0^{2\pi} e^{a\cos\theta} \cos\left(a\sin\theta - n\theta\right) d\theta = \frac{2\pi a^n}{n!},$$

và

$$\int_0^{2\pi} e^{a\cos\theta} \sin\left(a\sin\theta - n\theta\right) d\theta = 0$$

.

Giải. Áp dụng công thức tích phân Cauchy, ta có

$$\begin{aligned}
\oint_{|z|=1} \frac{e^{az}}{z^{n+1}} dz &= \frac{2\pi i}{n!} \left(e^{az}\right)^{(n)} \Big|_0 \\
&= \frac{2\pi i \left(a^n e^{az}\right)}{n!} \Big|_0 \\
&= \frac{a^n 2\pi i}{n!}.
\end{aligned}$$

Mặt khác ta có

$$\begin{aligned}
\oint_{|z|=1} \frac{e^{az}}{z^{n+1}} dz &= \int_0^{2\pi} \frac{e^{ae^{i\theta}}}{e^{i(n+1)\theta}} ie^{i\theta} d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} e^{a\cos\theta + i(a\sin\theta - n\theta)} i d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} e^{a\cos\theta} \left(i\cos\left(a\sin\theta - n\theta\right) - \sin\left(a\sin - n\theta\right)\right) d\theta
\end{aligned}$$

Vậy ta phải có

$$\int_0^{2\pi} e^{a\cos\theta} \cos\left(a\sin\theta - n\theta\right) d\theta = \frac{2\pi a^n}{n!}$$

và

$$\int_0^{2\pi} e^{a\cos\theta} \sin\left(a\sin\theta - n\theta\right) d\theta = 0.$$

Bài 4.5.4. [**4.4.16**]

1. Tính tích phân $\oint_{|z|=1} \dfrac{dz}{z-a} dz$ trong hai trường hợp $|a| > 1$ và $|a| < 1$.

2. Tại sao rằng cách tích trong câu (1) vừa sử dụng không thể áp dụng cho $\oint_{|z|=1} \dfrac{dz}{\overline{z}-a}$. Hãy tính tích phân đó với trong hai trường hợp với chú ý rằng trên đường tròn đơn vị $\overline{z} = \dfrac{1}{z}$.

Giải.

1. Nếu $|a| < 1$ thì theo công thức tích phân Cauchy, ta có

$$\oint_{|z|=1} \frac{dz}{z-a} = 2\pi i.$$

Nếu $|a| > 1$ thì theo định lý Cauchy–Goursat, ta có

$$\oint_{|z|=1} \frac{dz}{z-a} = 0.$$

2. Vì hàm $\dfrac{1}{\overline{z}-a}$ không giải tích trên $\mathbb{C}\backslash\{a\}$ nên ta không thể tích thể sử dụng cách tính trên để tính $\displaystyle\oint_{|z|=1} \frac{dz}{\overline{z}-a}$. Mặt khác, ta có

$$\begin{aligned}
\oint_{|z|=1} \frac{dz}{\overline{z}-a} &= \oint_{|z|=1} \frac{dz}{\frac{1}{z}-a} \\
&= \frac{-1}{a} \oint_{|z|=1} \frac{z}{z-\frac{1}{a}} dz \\
&= \begin{cases} -\frac{2\pi i}{a^2} & \text{,nếu } |a| > 1 \\ 0 & \text{,nếu } |a| < 1 \end{cases}.
\end{aligned}$$

Bài 4.5.5. [4.5.18] Để chứng minh công thức mở rộng Cauchy cho đạo hàm cấp một ta cần chứng minh rằng

$$\lim_{\Delta z_0 \to 0} \frac{1}{2\pi} \left| \oint_C \frac{f(z)}{(z-(z_0+\Delta z_0))(z-z_0)} dz - \oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^2} dz \right| = 0.$$

Hãy hoàn tất chứng minh này.

Giải. Gọi b là khoảng cách từ z_0 đến C, m là giá trị lớn nhất của $|f(z)|$ trong C, và L là độ dài của C, và ta xét $|\Delta z_0| \leq \frac{b}{2}$. Ta có

$$\begin{aligned}\left|\oint_C \frac{f(z)}{(z-(z_0+\Delta z_0))(z-z_0)}dz - \oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^2}dz\right| &= \left|\oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^2}\left(\frac{\Delta z_0}{z-(z_0+\Delta z_0)}\right)dz\right| \\ &\leq \left(\frac{m}{b}\cdot\frac{|\Delta z_0|}{\frac{b}{2}}\right)L \\ &= \frac{2mL}{b^2}|\Delta z_0|.\end{aligned}$$

Vậy ta phải có

$$\lim_{\Delta z_0\to 0}\frac{1}{2\pi}\left|\oint_C \frac{f(z)}{(z-(z_0+\Delta z_0))(z-z_0)}dz - \oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^2}dz\right| = 0.$$

Bài 4.5.6 Cho hàm $f(z)$ giải tích trong và trên đường cong C đơn đóng và hai số z_1 và z_2 khác nhau ở phần trong của C.

1. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{(z-z_1)(z-z_2)}dz = \frac{f(z_1)}{z_1-z_2} + \frac{f(z_2)}{z_2-z_1}.$$

2. Tổng quát hơn, cho z_1, z_2,...,z_n phân biệt ở phần trong của C. Chứng minh rằng

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{(z-z_1)(z-z_2)\dots(z-z_n)}dz &= \frac{f(z_1)}{(z_1-z_2)(z_1-z_3)\dots(z_1-z_n)} \\ &+ \frac{f(z_2)}{(z_2-z_1)(z_2-z_3)\dots(z_2-z_n)} + \dots + \frac{f(z_n)}{(z_n-z_1)(z_n-z_2)\dots(z_n-z_{n-1})}\end{aligned}$$

Giải.

1. Theo đề bài, ta có tồn tại hai đường tròn C_1 và C_2 thuộc phần trong của C không cắt nhau và trong hai đường không có đường nào nằm ở phần trong của đường kia mà $z_1$thuộc phần trong củaC_1, z_2 thuộc phần trong của C_2. Lúc đó theo định lý Cauchy–Goursat, ta có

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{(z-z_1)(z-z_2)}dz &= \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_1} \frac{f(z)}{(z-z_1)(z-z_2)}dz + \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_2} \frac{f(z)}{(z-z_1)(z-z_2)}dz \\ &= \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_1} \frac{\frac{f(z)}{(z-z_2)}}{(z-z_1)}dz + \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_2} \frac{\frac{f(z)}{(z-z_1)}}{(z-z_2)}dz.\end{aligned}$$

Áp dụng công thức tích phân Cauchy, ta có

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_1} \frac{\frac{f(z)}{(z-z_2)}}{(z-z_1)}dz = \frac{f(z_1)}{z_1-z_2}$$

và

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_2} \frac{\frac{f(z)}{(z-z_1)}}{(z-z_2)}dz = \frac{f(z_2)}{z_1-z_2}.$$

Từ đó, ta có điều phải chứng minh.

2. Tương tự như trên ta có các đường tròn C_1, C_2, ..., C_n bao các điểm z_1, z_2, ..., z_n, và ta có

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{(z-z_1)(z-z_2)\dots(z-z_n)}dz &= \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_1} \frac{\frac{f(z)}{(z-z_2)(z-z_3)\dots(z-z_n)}}{z-z_1}dz \\ &+ \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_2} \frac{\frac{f(z)}{(z-z_1)(z-z_3)\dots(z-z_n)}}{z-z_2}dz + \dots + \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_n} \frac{\frac{f(z)}{(z-z_1)(z-z_2)\dots(z-z_{n-1})}}{z-z_n}dz\end{aligned}$$

Vậy theo công thức tích phân Cauchy ta có

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{(z-z_1)(z-z_2)\dots(z-z_n)}dz = \frac{f(z_1)}{(z_1-z_2)(z_1-z_3)\dots(z_1-z_n)}$$

$$+\frac{f(z_2)}{(z_2-z_1)(z_2-z_3)\dots(z_2-z_n)}+\dots+\frac{f(z_n)}{(z_n-z_1)(z_n-z_2)\dots(z_n-z_{n-1})}.$$

Bài 4.5.7. [4.5.20-23] Dùng kĩ thuật của Bài 4.5.6 tính những tích phân sau

1. $\displaystyle\frac{1}{2\pi i}\oint_{|z|=3}\frac{\cos(z-1)}{(z+1)(z-2)}dz$
2. $\displaystyle\oint\frac{dz}{e^z(z^2-1)}dz$ quanh biên của hình vuông với các đỉnh $z=\pm 2$, và $z=\pm 2i$
3. $\displaystyle\oint_{|z-1|=\frac{8}{9}}\frac{\mathrm{Log}z}{z^2-z+\frac{1}{2}}dz$
4. $\displaystyle\oint_{|z|=3}\frac{dz}{e^z(z^2-1)^2}$

Giải.

3. Ta có

$$\begin{aligned}
\oint_{|z-1|=\frac{8}{9}}\frac{\mathrm{Log}z}{z^2-z+\frac{1}{2}}dz &= \oint_{|z-1|=\frac{8}{9}}\frac{\mathrm{Log}z}{\left(z-\frac{1+i}{2}\right)\left(z-\frac{1-i}{2}\right)} \\
&= 2\pi i\left(\frac{\mathrm{Log}\left(\frac{1+i}{2}\right)}{\frac{1+i}{2}-\frac{1-i}{2}}+\frac{\mathrm{Log}\left(\frac{1-i}{2}\right)}{\frac{1-i}{2}-\frac{1+i}{2}}\right) \\
&= 2\pi i\left(\frac{\mathrm{Log}\left(\frac{1+i}{2}\right)}{i}+\frac{\mathrm{Log}\left(\frac{1-i}{2}\right)}{-i}\right) \\
&= 2\pi\mathrm{Log}\left(\frac{1+i}{1-i}\right) \\
&= 2\pi\mathrm{Log}i \\
&= \pi^2 i.
\end{aligned}$$

4. Ta có

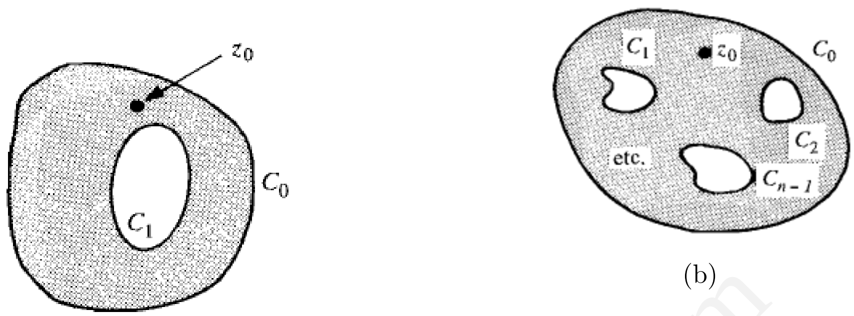
$$\begin{aligned}
\oint_{|z|=3} \frac{dz}{e^z\left(z^2-1\right)^2} &= \oint_{|z-1|=\frac{1}{2}} \frac{\frac{e^{-z}}{(z+1)^2}}{(z-1)^2}dz + \oint_{|z+1|=\frac{1}{2}} \frac{\frac{e^{-z}}{(z-1)^2}}{(z+1)^2}dz \\
&= 2\pi i\left(\left(\frac{e^{-z}}{(z+1)^2}\right)'\Big|_1 + \left(\frac{e^{-z}}{(z-1)^2}\right)'\Big|_{-1}\right) \\
&= -2\pi i\left(\frac{e^{-z}(z+3)}{(z+1)^3}\Big|_1 + \frac{e^{-z}(z+1)}{(z-1)^2}\Big|_{-1}\right) \\
&= -\pi e^{-1} i.
\end{aligned}$$

Bài 4.5.8. [4.5.25]

1. Cho D là miền 2-liên thông bao bởi đường đơn đóng C_0 và C_1 như trong hình 4.5.1a. Cho f giải tích trên D và trên biên của nó, và cho $z_0$trong D. Chứng minh rằng
$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_0}\frac{f(z)}{z-z_0}dz = f(z_0) + \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_1}\frac{f(z)}{z-z_0}dz.$$

2. Sử dụng kết quả ở câu (1) chỉ ra rằng
$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{|z|=2}\frac{1}{(z-1)\sin z}dz = \frac{1}{\sin 1} + \frac{1}{2\pi i}\oint_{|z|=\frac{1}{2}}\frac{1}{(z-1)\sin z}dz.$$

3. Tổng quát, cho D là miền n-liên thông bao bởi các đường đơn đóng C_0, C_1, ..., C_{n-1} như trong hình 4.5.1b. Cho f giải tích trên D và trên biên của nó, và cho $z_0$trong D. Chứng minh rằng
$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_0}\frac{f(z)}{z-z_0}dz = f(z_0) + \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_1}\frac{f(z)}{z-z_0}dz + \ldots + \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_{n-1}}\frac{f(z)}{z-z_0}dz.$$



Hình 4.5.1

Giải.

1. Tồn tại đường tròn C_2 trong D mà z_0 thuộc phần trong của C_2. Theo định lý Cauchy–Goursat, ta có

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_0}\frac{f(z)}{z-z_0}dz = \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_2}\frac{f(z)}{z-z_0}dz + \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_1}\frac{f(z)}{z-z_0}dz.$$

Theo công thức tích phân Cauchy, ta có

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_2}\frac{f(z)}{z-z_0}dz = f(z_0).$$

Vậy ta có điều cần phải chứng minh.

2. Áp dụng công thức ở câu (1) cho hàm $f(z) = (\sin z)^{-1}$, ta có điều phải chứng minh.

3. Tương tự như câu (1), tồn tại đường tròn C_n trong D mà z_0 thuộc phần trong của C_n, ta có

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_0}\frac{f(z)}{z-z_0}dz &= \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_n}\frac{f(z)}{z-z_0}dz+\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_1}\frac{f(z)}{z-z_0}dz+\ldots+\\ &\quad \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_{n-1}}\frac{f(z)}{z-z_0}dz\\ &= f(z_0)+\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_1}\frac{f(z)}{z-z_0}dz+\ldots+\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_{n-1}}\frac{f(z)}{z-z_0}dz.\end{aligned}$$

4.6 Some Applications of the Cauchy Integral Formula

Bài 4.6.1. [4.6.1-5] Sử dụng định lý giá trị trung bình Gauss, chứng minh

1. $\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} e^{e^{i\theta}}d\theta = 1$

2. $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} e^{\cos\theta}\cos(\sin\theta)\,d\theta = 2\pi$

3. $\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}\cos^2\left(\frac{\pi}{6}+ae^{i\theta}\right)d\theta = \frac{3}{4}$, với $a>0$

4. $\displaystyle\int_{\pi}^{\pi}\frac{a+\cos n\theta}{a^2+1+2a\cos n\theta}d\theta = \frac{2\pi}{a}$, với $a>1$, n là số nguyên

5. $\displaystyle\int_0^{2\pi}\mathrm{Log}\left(a^2+1+2a\cos n\theta\right)d\theta = 4\pi\mathrm{Log}a$, với $a>1$, n là số nguyên

Giải.

1. Áp dụng định lý giá trị trung bình Gauss, ta có

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{e^{i\theta}}d\theta = e^0 = 1$$

2. Ta có

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{e^{i\theta}}d\theta &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{\cos\theta}\left(\cos(\sin\theta) + i\sin(\sin\theta)\right)d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{\cos\theta}\cos(\sin\theta)\,d\theta + \frac{i}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{\cos\theta}\sin(\sin\theta)\,d\theta.\end{aligned}$$

So sánh với câu (1), ta có

$$\int_0^{2\pi} e^{\cos\theta}\cos(\sin\theta)\,d\theta = 2\pi.$$

3. Áp dụng định lý giá trị trung bìng của Gauss, ta có

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos^2\left(\frac{\pi}{6} + ae^{i\theta}\right)d\theta &= \cos^2\frac{\pi}{6} \\ &= \frac{3}{4}.\end{aligned}$$

4. Đầu tiên, áp dụng định lý giá trị trung bình Gauss, ta có

$$\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{(e^{i\theta})^n + a}d\theta = \frac{2\pi}{a}.$$

Mặt khác, ta có

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{(e^{i\theta})^n + a}d\theta &= \int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{\cos(n\theta) + i\sin(n\theta) + a}d\theta \\ &= \int_{-\pi}^{\pi}\frac{\cos(n\theta) + a - i\sin(n\theta)}{1 + 2a\cos(n\theta) + a^2}d\theta\end{aligned}$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos(n\theta) + a}{1 + 2a\cos(na) + a^2} + -i \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin(n\theta)}{1 + 2a\cos(na) + a^2} d\theta.$$

So sách hai cách tính, ta được

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos(n\theta) + a}{1 + 2a\cos(na) + a^2} = \frac{2\pi}{a}.$$

5. Áp dụng định lý trung bình Gauss, ta có

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} \text{Log}\left(a^2 + 1 + 2a\cos n\theta\right) d\theta &= \int_0^{2\pi} \text{Log}\left(a + \left(e^{i\theta}\right)^n\right)^2 d\theta \\
&= 2\pi \text{Log} a^2 \\
&= 4\pi \text{Log} a.
\end{aligned}$$

Bài 4.6.2. [4.6.6] Hãy chỉ ra rằng giá trị trung bình của hàm $g(x, y) = x^2 - y^2$trên đường tròn $|z| = r$ bằng giá trị của hàm $g(x, y)$ tại tâm của hình tròn, với $r > 0$. Mặt khác, tính giá trị trung bình của hàm $h(x, y) = x^2 + y^2$ cũng trên đường tròn $|z| = r$, giá trị của $h(x, y)$ tại tâm hình tròn, và giải thích tại sao lại có hiện tượng 2 giá trị này khác nhau.

Giải. Do hàm $g(x, y)$ điều hòa trên $\mathbb{R}^2$, nên có hàm g^* điều hòa liên hợp với g. Xét hàm phức $G(x + iy) = g(x, y) + ig^*(x, y)$, theo định lý giá trị trung bình Gauss, ta có

$$\begin{aligned}
g(0, 0) + ig^*(0, 0) &= G(0) \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} G\left(re^{i\theta}\right) d\theta \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g\left(re^{i\theta}\right) d\theta + \frac{i}{2\pi} \int_0^{2\pi} g^*\left(re^{i\theta}\right) d\theta.
\end{aligned}$$

Vậy ta có

$$g(0,0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g\left(re^{i\theta}\right) d\theta,$$

tức giá trị trung bình của hàm $g(x,y) = x^2 - y^2$trên đường tròn $|z| = r$ bằng giá trị của hàm $g(x,y)$ tại tâm của hình tròn, với $r > 0$. Với phép tham số hóa đường tròn $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$, ta có

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} h(r\cos\theta, r\sin\theta)\, d\theta &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} r^2 d\theta \\ &= r^2.\end{aligned}$$

Trong khi đó thì $h(0,0) = 0$. Vì hàm h không điều hòa nên nên không tính giống như đối với hàm g, và do đó không đảm bảo rằng trung bình của hàm $h(x,y) = x^2+y^2$trên đường tròn $|z| = r$ bằng giá trị của hàm $h(x,y)$ tại tâm của hình tròn, với $r > 0$.

Bài 4.6.3. [**4.6.8**] Cho $f(z) \not\equiv \text{const}$ là hàm giải tích trên miền R bị chặn và liên tục trên $\overline{R}$. Giả sử $f(z) \neq 0$ với mọi $z \in R$. Chứng minh giá trị lớn nhất của $|f(z)|$ trên $\overline{R}$ phải nằm trên biên của nó.

Giải. Xét $g(z) = f(z)^{-1}$, ta có $g(z) \not\equiv \text{const}$ và giải tích trên R nên theo nguyên lý môđun cực đại thì môđun của $g(z)$ không đạt giá trị cực đại. Do đó, môđun của $f(z)$ cũng không đạt giá trị cực tiểu trong R. Do hàm $|f(z)|$ liên tục trên $\overline{R}$ compact nên đạt giá trị nhỏ nhất trên $\overline{R}$, vậy giá trị nhỏ nhất chỉ đạt được tại biên của R.

Bài 4.6.4. [**4.6.9-12**] Cho tập đóng, bị chặn R và hàm $f(z)$, tìm giá trị của z mà tại đó $|f(z)|$ đạt giá trị lớn nhất và nhỏ nhất và tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của $|f(z)|$. Nếu đáp án không nằm trên biên của R, hãy giải thích.

1. $f(z) = z$, R là $|z - 1 - i| \leq 1$
2. $f(z) = z^2$, R là $|z - 1 - i| \leq 2$

3. $f(z) = e^z$, R là $|z - 1 - i| \le 1$

4. $f(z) = \sin z$, R là hình chữ nhật $1 \le y \le 2$, $0 \le x \le 2\pi$

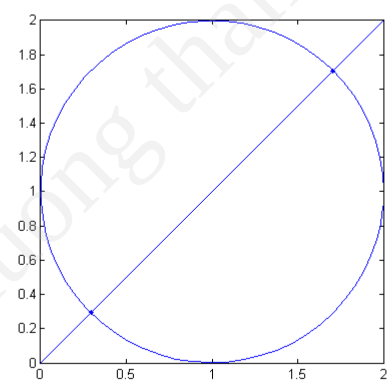
Giải. Ta sẽ dùng nguyên lý Module cực đại và cực tiểu để giải những dạng bài trên

Bước 1: Chứng minh f giải tích tại mọi điểm trên R.

Bước 2:

Nếu $f(z) \ne 0$ với mọi $z \in R$ thì theo nguyên lý Module cực đại và cực tiểu ta suy ra $|f(z)|$ đại cực đại và cực tiểu trên ∂R. Từ đó tham số hóa hoặc đặt $z = x + iy$ để giải bài toán cực trị trên $\mathbb{R}$.

Nếu tồn tại $z_0 \in R$ để $f(z_0) = 0$ thì ta "chỉ" được áp dụng nguyên lý Module cực đại. Khi đó $|f(z)|$đạt cực đại trên ∂R và $\min |f(z)| = 0$.



Hình 4.6.1: $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 1$

1. Ta có $f(z) = z$ là hàm giải tích tại mọi điểm trên $R = \{z : |z - 1 - i| \le 1\}$ và $f(z) \ne 0$ với mọi $z \in R$ nên theo nguyên lý Module cực đại và cực tiểu ta có $|f(z)|$ đạt giá trị cực đại và cực tiểu trên ∂R =đường tròn tâm $i + 1$ bán kính 1. Suy ra

$$z = (\cos\theta - 1) + i(\sin\theta - 1)$$

từ đó ta có

$$\begin{aligned}|f(z)|^2 &= |z|^2 = (\cos\theta - 1)^2 + (\sin\theta - 1)^2 \\ &= 3 - 2(\cos\theta + \sin\theta) \\ &= 3 - \sqrt{2}\cos\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right)\end{aligned}$$

mà

$$-1 \le \cos\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right) \le 1$$

nên

$$3 - \sqrt{2} \le |f(z)|^2 \le 3 + \sqrt{2}$$

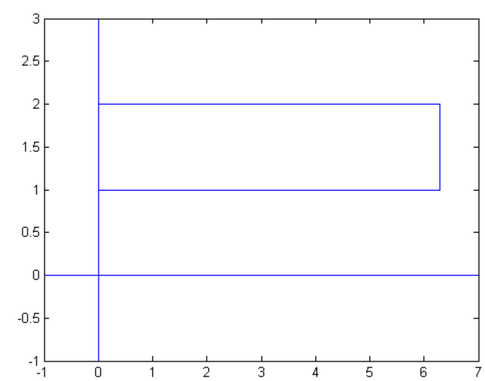
hay

$$\sqrt{2} - 1 = \sqrt{3 - \sqrt{2}} \le |f(z)| \le \sqrt{3 + \sqrt{2}} = \sqrt{2} + 1$$

Vậy ta kết luận:

$|f|$ max tại $\left(\sqrt{2}+1\right)e^{i\pi/4}$, $|f|_{\max} = \sqrt{2}+1$.

$|f|$ min tại $\left(\sqrt{2}-1\right)e^{i\pi/4}$, $|f|_{\min} = \sqrt{2}-1$.



Hình 4.6.2: $1 \le y \le 2, 0 \le x \le 2\pi$

4.

$$|\sin z| = \sqrt{\sinh^2 y + \sin^2 x}$$

Giá trị lớn nhất phải nằm trong hình chữ nhật.

Tại $x = 0, x = \pi$ thì $\sin^2 x = 0$ nên $|\sin z| = \sinh y$.

Trên biên trên thì $|\sin z| = \sqrt{\sinh^2 2 + \sin^2 x}$.

Trên biên dưới thì $|\sin z| = \sqrt{\sinh^2 1 + \sin^2 x}$.

Giá trị lớn nhất ở biên trên và $\sin^2 x$ đạt max tại $x = \dfrac{\pi}{2}$.

Vậy max $= \sqrt{\sinh^2 2 + 1} = \cosh 2$ tại $x = \dfrac{\pi}{2}, y = 2$.

Ta có $\sqrt{\sinh^2 y + \sin^2 x}$ nhỏ nhất là $\sinh y$ nếu $x = 0$ hoặc π. $\sinh y$ nhỏ nhất nếu $y = 1$. Vậy giá trị nhỏ nhất của $|\sin z|$ là $\sinh 1$, tại $x = 0, y = 1$ hoặc $x = \pi, y = 1$.

Bài 4.6.5. [4.6.13-14] Cho $u(x, y)$ là hàm thực, không hằng, điều hòa trong miền R bị chặn và liên tục trên $\overline{R}$. Chứng minh rằng $u(x, y)$ chỉ đạt giá trị lớn nhất và nhỏ nhất tại biên của R.

Giải. Xét hàm phức $F(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ trên R, ở đâyv là hàm điều hòa liên hợp của u. Gọi $f(z) = e^{F(z)}$, ta có f giải tích trong R và $f(z) \not\equiv \text{const}$, $|f(z)| \neq 0$ nên $|f(z)|$ không đạt giá trị cực đại, và cực tiểu trong R. Mặt khác, do$|f(z)| = e^{u(x,y)}$ nên ta có kết luận rằng u không đạt cực đại và cực tiểu trong R. Vậy $u(x, y)$ chỉ đạt giá trị lớn nhất và nhỏ nhất tại biên của R.

Bài 4.6.6. [4.6.17] Bài này xây dựng một trong bốn công thức Wallis, chúng cho phép tính $\int_0^{2\pi} (f(\theta))^m \, d\theta$ với m là số nguyên không âm và $f(\theta) = \sin\theta$ hoặc $f(\theta) = \cos\theta$. Ở đây, chúng ta chỉ xét m là số chẵn.

1. Sử dụng công thức nhị thức hãy chỉ ra rằng

$$z^{-1}\left(z+\frac{1}{z}\right)^{2n} = \sum_{k=0}^{2n} \frac{(2n)!z^{2n-2k-1}}{(2n-k)!k!}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

2. Dùng kết quả trên, chứng tỏ rằng

$$\oint_{|z|=1} z^{-1}\left(z+\frac{1}{z}\right)^{2n} dz = 2\pi i \frac{(2n)!}{(n!)^2}.$$

3. Với $z = e^{i\theta}$, $0 \le \theta \le 2\pi$, trên đường tròn đơn vị, từ câu (2) hãy chỉ ra rằng

$$\int_0^{2\pi} (\cos\theta)^{2n}\, d\theta = 2\pi \frac{(2n)!}{(n!)^2}.$$

4. Dùng tính đối xứng của hàm $\cos\theta$, và $2n$ là số chẵn, hãy chỉ ra rằng

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos\theta)^{2n}\, d\theta = \frac{\pi}{2}\frac{(2n)!}{(n!)^2\, 2^{2n}}.$$

5. Tính

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin\theta)^{2n}\, d\theta,$$

   với $n = 0, 1, 2, \ldots$

Giải.

1. Ta có

$$z^{-1}\left(z+\frac{1}{z}\right)^{2n} = z^{-1}\sum_{k=0}^{2n}\binom{2n}{k} z^{2n-k}\frac{1}{z^k}$$

$$= \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} z^{2n-2k-1}$$
$$= \sum_{k=0}^{2n} \frac{(2n)! z^{2n-2k-1}}{(2n-k)!k!}.$$

2. Ta có

$$\begin{aligned}
\oint_{|z|=1} z^{-1}\left(z+\frac{1}{z}\right)^{2n} dz &= \sum_{k=0}^{2n} \frac{(2n)!}{(2n-k)!k!} \oint_{|z|=1} z^{2n-2k-1} dz \\
&= \sum_{\substack{k=0 \\ k\neq n}}^{2n} \frac{(2n)!}{(2n-k)!k!} \oint_{|z|=1} z^{2n-2k-1} dz + \frac{(2n)!}{(n!)^2} \oint_{|z|=1} z^{-1} dz \\
&= \sum_{\substack{k=0 \\ k\neq n}}^{2n} \frac{(2n)!}{(2n-k)!k!} \frac{z^{2n-2k}}{2n-2k}\Big|_0^0 + 2\pi i \frac{(2n)!}{(n!)^2} \\
&= 2\pi i \frac{(2n)!}{(n!)^2}.
\end{aligned}$$

3. Ta có

$$\begin{aligned}
\oint_{|z|=1} z^{-1}\left(z+\frac{1}{z}\right)^{2n} dz &= \int_0^{2\pi} e^{-i\theta}\left(e^{i\theta}+e^{-i\theta}\right)^{2n} e^{i\theta} i d\theta \\
&= i \int_0^{2\pi} (2\cos\theta)^{2n}\, d\theta.
\end{aligned}$$

So sánh với câu (2), ta được

$$\int_0^{2\pi} (2\cos\theta)^{2n}\, d\theta = 2\pi \frac{(2n)!}{(n!)^2}.$$

4. Ta có

$$\int_0^{2\pi} (2\cos\theta)^{2n}\, d\theta = \int_0^{\pi} (2\cos\theta)^{2n}\, d\theta + \int_{\pi}^{2\pi} (2\cos\theta)^{2n}\, d\theta$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^{\pi} (2\cos\theta)^{2n}\, d\theta + \int_{\pi}^{2\pi} (2\cos(\theta-\pi))^{2n}\, d\theta \\
&= 2\int_0^{\pi} (2\cos\theta)^{2n}\, d\theta \\
&= 2\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} (2\cos\theta)^{2n}\, d\theta + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (2\cos\theta)^{2n}\, d\theta\right) \\
&= 2\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} (2\cos\theta)^{2n}\, d\theta + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (2\cos(\pi-\theta))^{2n}\, d\theta\right) \\
&= 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} (2\cos\theta)^{2n}\, d\theta.
\end{aligned}$$

So sánh với câu (3), ta được

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (2\cos\theta)^{2n}\, d\theta = \frac{\pi}{2}\frac{(2n)!}{(n!)^2\, 2^{2n}}.$$

5. Ta có

$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin\theta)^{2n}\, d\theta &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)\right)^{2n} d\theta \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (2\cos\theta)^{2n}\, d\theta.
\end{aligned}$$

Bài 4.6.7. [4.6.18] Định lý cơ bản của đại số phát biểu rằng một đa thức với hệ số phức $p(z) = a_n z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \ldots + a_0$ có ít nhất một nghiệm z_0 trong mặt phẳng phức. Bài toán này sẽ chỉ ra rằng nó sẽ có n nghiệm z_0, z_1,..., z_n.

1. Chỉ ra rằng $z^n - z_0^n$ có thể viết lại dưới dạng $(z-z_0)\,R_{n-1}(z)$, trong đó $R_{n-1}(z)$ là đa thức bậc $n-1$ theo z.

2. Chỉ ra rằng nếu z_0 là nghiệm của p thì

$$p(z) = a_n(z^n - z_0^n) + a_{n-1}\left(z^{n-1} - z_0^{n-1}\right) + \ldots + a_1(z-z_0).$$

3. Dùng kết quả của câu (1) và câu (2) để chứng minh rằng tồn tại đa thức q bậc $n-1$ sao cho $p(z) = (z - z_0)\, q(z)$.

Giải.

1. Ta có

$$z^n - z_0^n = (z - z_0)\left(z^{n-1} + z_0 z^{n-2} + \ldots + z_0^{n-1}\right).$$

Nên ta xác định

$$R_{n-1}(z) = \left(z^{n-1} + z_0 z^{n-2} + \ldots + z_0^{n-1}\right).$$

2. Ta có

$$\begin{aligned} p(z) &= p(z) - p(z_0) \\ &= a_n\left(z^n - z_0^n\right) + a_{n-1}\left(z^{n-1} - z_0^{n-1}\right) + \ldots + a_1(z - z_0). \end{aligned}$$

3. Ta có

$$\begin{aligned} p(z) &= a_n\left(z^n - z_0^n\right) + a_{n-1}\left(z^{n-1} - z_0^{n-1}\right) + \ldots + a_1(z - z_0) \\ &= a_n(z - z_0)\, R_{n-1}(z) + a_{n-1}(z - z_0)\, R_{n-2}(z) + \ldots + a_1(z - z_0)\, R_0(z) \\ &= (z - z_0)\left(a_n R_{n-1}(z) + a_{n-1} R_{n-2}(z) + \ldots + a_1 R_0(z)\right). \end{aligned}$$

Đặt

$$q = a_n R_{n-1} + a_{n-1} R_{n-2} + \ldots + a_1 R_0.$$

Ta có điều phải chứng minh ngoài ra, theo qui nạp ta sẽ có p có n nghiệm trong $\mathbb{C}$.

Chương 5

Infinite Series Involving a Complex Variable

Mục lục

5.1 Introduction and Review of Real Series

Bài 5.1.1 Viết khai triển Taylor của những hàm sau:

1. $\dfrac{1}{1-x}$ tại điểm $x = 0$
2. $\dfrac{1}{(1+x)^2}$ tại $x = 0$
3. $\dfrac{1}{1-x}$ tại điểm $x = 1$
4. $\sqrt{x}$ tại điểm $x = 1$
5. $\operatorname{Log}(1-x)$ tại $x = 0$
6. x^3 tại $x = 1$

Giải.

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - x_0)^n$$

1. Ta có

$$\left(\frac{1}{1-x}\right)^{(n)}\Big|_{x=0} = \frac{n!}{(1-x)^{n+1}}\Big|_{x=0} = n!.$$

Suy ra

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{n!} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

2. Ta có

$$\left(\frac{1}{(1+x)^2}\right)^{(n)}\Big|_{x=0} = \frac{(-1)^n (n+1)!}{(1+x)^{n+2}}\Big|_{x=0} = (-1)^n (n+1)!.$$

4. Ta có

$$\left(\sqrt{x}\right)^{(n)}\Big|_{x=1} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{1}{2}-2\right)\cdots\left(\frac{1}{2}-n+1\right)x^{\frac{1}{2}-n}\Big|_{x=1} = \frac{(-1)^{n-1}\,3\cdot 5\cdots(2n-3)}{2^n}.$$

5. Ta có

$$(\mathrm{Log}\,(1-x))^{(n)}\Big|_{x=0} = \left(\frac{1}{x-1}\right)^{(n-1)}\Big|_{x=0} = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(x-1)^n}\Big|_{x=0} = -(n-1)!.$$

6. Ta có

$$x^3 = (x-1+1)^3 = 1+3(x-1)+3(x-1)^2+(x-1)^3.$$

Bài 5.1.2 Chứng minh những chuỗi sau hội tụ tuyệt đối hay phân kì:

1. $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$

2. $\sum_{n=1}^{\infty} (n+1)\,x^n$

3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n x^n}{n}$

4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sinh n}{e^n}(x+1)^n$

5. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n x^n}{n!}$

Giải.

1. Ta có
$$\left|\frac{x^{n+1}}{x^n}\right| = |x|.$$
Do đó chuỗi hội tụ tuyệt đối nếu $|x| < 1$ và phân kì nếu $|x| > 1$. Hơn nữa, nếu $|x| = 1$, khi đó $x^n \nrightarrow 0$, nên chuỗi trên cũng phân kì.

2. Ta có
$$\left|\frac{(n+2)\,x^{n+1}}{(n+1)\,x^n}\right| = \left|\frac{n+2}{n+1}\cdot x\right| \longrightarrow |x|.$$
Chuỗi hội tụ tuyệt đối nếu $|x| < 1$ và phân kì nếu $|x| > 1$.

3. Ta có
$$\left|\frac{\dfrac{2^{n+1}x^{n+1}}{n+1}}{\dfrac{2^n x^n}{n}}\right| = \left|\frac{n}{n+1}\cdot 2x\right| \longrightarrow 2\,|x|.$$
Chuỗi hội tụ tuyệt đối nếu $|x| < 1/2$ và phân kì nếu $|x| > 1/2$. Hơn nữa, nếu $x = \pm 1/2$, thì
$$\frac{n}{n+1}\cdot 2x \nrightarrow 0,$$
nên chuỗi trên cũng phân kì.

4. Ta có
$$\begin{aligned}\left|\frac{\dfrac{\sinh(n+1)}{e^{n+1}}(x+1)^{n+1}}{\dfrac{\sinh n}{e^n}(x+1)^n}\right| &= \left|\frac{\sinh(n+1)}{e\sinh n}(x+1)\right| = \left|\frac{e^{n+1}-e^{-n-1}}{e\left(e^n-e^{-n}\right)}(x+1)\right| \\ &= \left|\frac{e^{2n+2}-1}{e^{2n+2}-e^2}(x+1)\right| \longrightarrow |x+1|.\end{aligned}$$

Chuỗi hội tụ tuyệt đối nếu $|x+1| < 1$ và phân kì nếu $|x+1| > 1$.

5. Ta có

$$\left|\frac{\dfrac{(n+1)^{n+1}\,x^{n+1}}{(n+1)!}}{\dfrac{n^n x^n}{n!}}\right| = \left|\frac{(n+1)^n}{n^n}x\right| = \left|\left(1+\frac{1}{n}\right)^n x\right| \longrightarrow e\,|x|$$

Chuỗi hội tụ tuyệt đối nếu $|x| < 1/e$ và phân kì nếu $|x| > 1/e$.

Bài 5.1.3 [5.1.16] Biết rằng chuỗi $\sum \frac{1}{n^p}$ hội tụ nếu $p > 1$. Dùng tiêu chuẩn so sánh để chứng minh những chuỗi sau hội tụ hoặc phân kì

1. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos^2 nx}{n^{3/2}}$ với $-\infty < x < \infty$

2. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\tanh nx}{n^{1.1}}$ với $-\infty < x < \infty$

3. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+nx}}$ với $x > 0$

4. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\left(\sqrt{n+x}\right)^3}$ với $x \geq 0$

5. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+\cos^2 nx}{\sqrt{n}}$ với $-\infty < x < \infty$

6. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\coth nx}{n}$ với $|x| > 0$

Giải.

1. Ta có
$$\left|\frac{\cos^2 nx}{n^{3/2}}\right| \leq \frac{1}{n^{3/2}}$$
với $-\infty < x < \infty$. Mà $\sum 1/n^{3/2}$ hội tụ nên chuỗi đang xét hội tụ.

2. Ta có
$$\left|\frac{\tanh nx}{n^{1.1}}\right| \leq \frac{1}{n^{1.1}}$$
với $-\infty < x < \infty$. Mà $\sum 1/n^{1.1}$ hội tụ nên chuỗi đang xét hội tụ.

3. Ta có
$$1 + nx > 1$$
với $x > 0$ nên chuỗi đã cho hội tụ.

4. Ta có
$$\left|\frac{1}{\left(\sqrt{n+x}\right)^3}\right| \leq \frac{1}{n^{3/2}}$$
với $x \geq 0$ và $\sum 1/n^{3/2}$ hội tụ nên chuỗi đang xét hội tụ.

5. Ta có
$$\left|\frac{1+\cos^2 nx}{\sqrt{n}}\right| \geq \frac{1}{\sqrt{n}}$$
với $-\infty < x < \infty$ và $\sum 1/\sqrt{n}$ phân kì $(1/2 < 1)$ nên chuỗi đã cho phân kì.

6.
$$\left|\frac{\coth nx}{n}\right| > \frac{1}{n}$$

vì với $|x| > 0 \Leftrightarrow x \neq 0$ thì $|\coth nx| > 1$. Mà $\sum 1/n$ phân kì nên chuỗi đã cho phân kì.

5.2 Complex Sequences and Convergence of Complex Series

Bài 5.2.1. [5.2.1] Từ nhà, bạn đi về phía đông 1 dặm, quay 90^0 và đi 1/2 dặm về phía bắc, sau đó quay 90^0 và đi 1/4 dặm về tây, sau đó quay 90^0 và đi 1/8 dặm về nam, rồi lại quay 90^0 và đi 1/16 dặm về đông. Cứ như thế, sau mỗi đoạn đi, bạn quay 90^0 ngược chiều kim đồng hồ và đi một đoạn bằng một nửa đoạn vừa đi. Như vậy có vô hạn các số ứng với độ dài của mỗi đoạn. Nếu bạn vẽ chu trình xoắn ốc này lên mặt phẳng phức, bạn có thể đặt mỗi đoạn đi tương ứng với một số hạng trong chuỗi vô hạn $\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z}$ với $z = \frac{i}{2}$

1. Khi kết thúc hành trình, khoảng cách giữa điểm đến với nhà bạn là bao nhiêu?

2. Bạn đã đi được bao nhiêu dặm?

3. Nếu bạn đi 3 dặm mỗi giờ thì đi hết toàn bộ hành trình trong bao lâu? Hành trình gồm vô hạn các đoạn đường, tại sao nó không mất một lượng vô hạn thời gian để đi?

4. Giả sử bạn đi giống như trên nhưng mỗi đoạn bằng 90 phần trăm đoạn trước. Bạn bắt đầu với một đoạn đường 1 dặm. Hành trình của bạn mất bao lâu?

Giải.

1. Giả sử ta bắt đầu ở gốc tọa đô O và phía đông ở phần âm của trục thực. Sau khi đi đoạn thứ nhất, vị trí là $M_1 = -1$. Sau khi đi đoạn thứ hai, tọa độ là $M_2 = -1 - z$.

Tương tự, $M_3 = -1 - z - z^2$. Tổng quát,

$$M_n = -1 - z - z^2 - \ldots - z^n = -\frac{1 - z^{n+1}}{1 - z}.$$

Và

$$M_n \longrightarrow \frac{1}{z-1} = \frac{1}{\frac{i}{2} - 1} = \frac{2}{i-2} = -\frac{4}{5} - \frac{2}{5}i.$$

Khoảng cách giữa điểm cuối với gốc tọa độ:

$$\sqrt{\left(\frac{4}{5}\right)^2 + \left(\frac{2}{5}\right)^2} = \frac{2\sqrt{5}}{5}.$$

2. Tổng chiều dài của quãng đường:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 2.$$

3. Tuy hành trình gồm vô số đoạn đường, nhưng tổng chiều dài của nó là hữu hạn và do đó, thời gian đi hết quãng đường là 2/3 giờ (40 phút)

4. Tổng chiều dài quãng đường là

$$\frac{1}{1 - \frac{9}{10}} = 10$$

và thời gian đi là 10/3 giờ (3 giờ 20 phút)

Bài 5.2.2 [5.2.3] Chứng minh những chuỗi sau phân kì trên miền đã cho:

1. $\sum_{n=1}^{\infty} (2iz)^n$ với $|z| \geq \frac{1}{2}$

2. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(i+1)^n(z+1)^n$ với $|z+1|\geq\frac{1}{\sqrt{2}}$

3. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n(i-1)^n}{(z-2i)^n}$ với $|z-2i|\leq\sqrt{2}$

4. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n+2}{n}\right)^n(z+i+n)^n$ với $|z+1+i|\geq\frac{1}{2}$

Giải.

4. Ta có

$$\left|\left(\frac{2n+2}{n}\right)^n(z+i+n)^n\right|\geq\left|\left(\frac{n+1}{n}\right)^n\right|=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\longrightarrow e\neq 0$$

Vì dãy

$$\left\{\left(\frac{2n+2}{n}\right)^n(z+i+n)^n\right\}$$

không hội tụ về 0 nên chuỗi này phân kì.

Bài 5.2.3 [5.2.7] Chứng minh những chuỗi sau hội tụ bằng tiêu chuẩn tỉ số trên miền đã cho.

1. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}n^2\left(z+\frac{1}{2}\right)^n$ với $\left|z+\frac{1}{2}\right|<1$

2. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}n!e^{n^2z}$ với $\operatorname{Re}(z)<0$

3. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2+i)^n}{(z+i)^n(n+i)^2}$ với $|z+i|>\sqrt{5}$

4. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(\frac{n}{z}\right)^n$ với $|z|>e$

Giải.

2. Ta có

$$\begin{aligned}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| &= \left|\frac{(n+1)!e^{(n+1)^2 z}}{n!e^{n^2 z}}\right| \\ &= \left|(n+1)\,e^{z\,(2n+1)}\right| \\ &= (n+1)\left|e^{(2n+1)\,(\mathrm{Re}\,(z)+i\mathrm{Im}z)}\right| \\ &= (n+1)\,e^{(2n+1)\,\mathrm{Re}\,(z)}.\end{aligned}$$

Với $\mathrm{Re}\,(z) < 0$ thì ta có

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{n+1}{e^{|\mathrm{Re}\,(z)|\,(2n+1)}}.$$

Dùng quy tắc L'hospital,

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{e^{|\mathrm{Re}\,(z)|\,(2n+1)}} &= \lim_{x\to\infty}\frac{x+1}{e^{|\mathrm{Re}\,(z)|\,(2x+1)}} \\ &= \lim_{x\to\infty}\frac{1}{2\,|\mathrm{Re}\,(z)|\,e^{|\mathrm{Re}\,(z)|\,(2x+1)}} = 0 < 1.\end{aligned}$$

Vậy chuỗi đã cho hội tụ tuyệt đối.

3. Ta có

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{\dfrac{(2+i)^{n+1}}{(z+i)^{n+1}\,(n+1+i)^2}}{\dfrac{(2+i)^n}{(z+i)^n\,(n+i)^2}}\right| = \left|\frac{2+i}{z+i}\right|\left|\frac{(n+i)^2}{(n+1+i)^2}\right| \longrightarrow \frac{\sqrt{5}}{|z+i|}$$

Vì $|z+i| > \sqrt{5}$ nên $\sqrt{5}/\,|z+i| < 1$ và chuỗi đã cho hội tụ tuyệt đối. Hơn nữa, nếu $|z+i| < \sqrt{5}$, hay $\sqrt{5}/\,|z+i| > 1$ thì chuỗi trên phân kì.

4. Ta có

$$\begin{aligned}
\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| &= \left|\frac{\dfrac{1}{(n+1)!}\left(\dfrac{n+1}{z}\right)^{n+1}}{\dfrac{1}{n!}\left(\dfrac{n}{z}\right)^{n}}\right| \\
&= \left|\frac{1}{z}\cdot\frac{(n+1)^n}{n^n}\right| \\
&= \left|\frac{1}{z}\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right| \longrightarrow \frac{e}{|z|}.
\end{aligned}$$

Vì $|z| > e$ hay $e/\,|z| < 1$ nên chuỗi hội tụ tuyệt đối. Hơn nữa, nếu $|z| < e$ thì chuỗi đang xét phân kì.

Bài 5.2.4 [5.2.11] Chứng minh rằng:

1. $1+\cos\theta+\cos 2\theta+\ldots+\cos N\theta = \cos\left(\dfrac{N\theta}{2}\right)\dfrac{\sin\left(\dfrac{(N+1)\,\theta}{2}\right)}{\sin\left(\dfrac{\theta}{2}\right)}$

2. $\sin\theta+\sin 2\theta+\ldots+\sin N\theta = \sin\left(\dfrac{N\theta}{2}\right)\dfrac{\sin\left(\dfrac{(N+1)\,\theta}{2}\right)}{\sin\left(\dfrac{\theta}{2}\right)}$

Giải. Đặt $z = e^{i\theta}$ thì $z^n = \cos n\theta + i\sin n\theta$. Ta có

$$\sum_{n=0}^{N}(\cos n\theta + i\sin n\theta) = \sum_{i=0}^{N} z^n = \frac{1-z^{N+1}}{1-z}.$$

Mặt khác,

$$\begin{aligned}
\frac{1-z^{N+1}}{1-z} &= \frac{1-(\cos(N+1)\theta+i\sin(N+1)\theta)}{1-(\cos\theta+i\sin\theta)} \\
&= \frac{2\sin\frac{(N+1)\theta}{2}}{2\sin\frac{\theta}{2}}\cdot\frac{\sin\frac{(N+1)\theta}{2}-i\cos\frac{(N+1)\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}-i\cos\frac{\theta}{2}} \\
&= \frac{\sin\frac{(N+1)\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}}\cdot\frac{\cos\left(\frac{(N+1)\theta}{2}-\frac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(\frac{(N+1)\theta}{2}-\frac{\pi}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{2}\right)} \\
&= \frac{\sin\frac{(N+1)\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}}\cdot\left(\cos\left(\frac{N\theta}{2}\right)+i\sin\left(\frac{N\theta}{2}\right)\right).
\end{aligned}$$

Suy ra

$$\begin{cases}
1+\cos\theta+\cos2\theta+\ldots+\cos N\theta &= \cos\left(\frac{N\theta}{2}\right)\dfrac{\sin\left(\frac{(N+1)\theta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)} \\
\sin\theta+\sin2\theta+\ldots+\sin N\theta &= \sin\left(\frac{N\theta}{2}\right)\dfrac{\sin\left(\frac{(N+1)\theta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}
\end{cases}$$

Bài 5.2.5 [5.2.15-5.2.16]

1. Chứng minh rằng:

$$\sum_{n=1}^{\infty} nz^{n-1} = \frac{1}{(1-z)^2}$$

   Với $|z|<1$

2. Chứng minh rằng số hạng thứ n của $\sum_{n=1}^{\infty} nz^{n-1}$ là

$$S_n = \frac{z^n\left[n\left(1-z\right)-1\right]+1}{\left(1-z\right)^2}$$

   Với $z \neq 1$

3. Chứng minh rằng

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\left(n+1\right)}{2} z^{n-1} = \frac{1}{\left(1-z\right)^3}$$

Giải. Ta sử dụng công thức tích chuỗi trong bài này là

$$c_n\left(z\right) = \sum_{j=1}^{n} u_j v_{n-j+1}$$

với $c_n\left(z\right)$ là hệ số của chuỗi tích.

1. Đặt

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n\left(z\right) = \left(1+z+z^2+\ldots\right)\left(1+z+z^2+\ldots\right)$$

Ta có

$$c_n\left(z\right) = \underbrace{1\cdot z^{n-1} + z\cdot z^{n-2} + \ldots}_{n\text{ số hạng}} = nz^{n-1}$$

Nên

$$\left(1+z+z^2+\ldots\right)\left(1+z+z^2+\ldots\right) = \sum_{n=1}^{\infty} nz^{n-1} = \frac{1}{\left(1-z\right)^2}.$$

2. Ta có số hạng thứ n của tổng trên là

$$S_n = \sum_{j=1}^{n} c_j\left(z\right) = \sum_{j=1}^{n} jz^{j-1} = 1+2z+3z^2+\ldots+nz^{n-1}$$

Ta thấy rằng

$$\begin{aligned}
(S_n - 1)\,z &= 2z^2 + 3z^3 + \ldots + (n-1)\,z^{n-1} + nz^n \\
\Rightarrow\ (S_n - 1)\,z + \left(z^2 + z^3 + \ldots + z^{n-1}\right) &= S_n - 1 - 2z + nz^n \\
\Rightarrow\ (S_n - 1)\,z + z^2\frac{1 - z^{n-2}}{1 - z} &= S_n - 1 - 2z - nz^n \\
\Rightarrow\ S_n\,(1 - z) &= \frac{(1 + z + nz^n)\,(1 - z) + z^2 - z^n}{1 - z} \\
\Rightarrow\ S_n &= \frac{1 + nz^n - nz^{n+1} - z^n}{(1 - z)^2} \\
\Rightarrow\ S_n &= \frac{z^n\,[n\,(1 - z) - 1] + 1}{(1 - z)^2}.
\end{aligned}$$

3. Ta có

$$1 + 2z + 3z^2 + 4z^3 + \ldots = \frac{1}{(1 - z)^2}.$$

Và

$$\left(1 + z + z^2 + z^3 + \ldots\right)\left(1 + 2z + 3z^2 + 4z^3 + \ldots\right) = \frac{1}{(1 - z)^3}.$$

Đặt

$$\left(1 + z + z^2 + z^3 + \ldots\right)\left(1 + 2z + 3z^2 + 4z^3 + \ldots\right) = \sum_{n=1}^{\infty} d_n\,(z).$$

Ta có

$$\begin{aligned}
d_n\,(z) &= 1 \cdot nz^{n-1} + z \cdot (n-1)\,z^{n-2} + z^2 \cdot (n-2)\,z^{n-3} + \ldots + z^{n-1} \cdot 1 \\
&= (1 + 2 + \ldots + n)\,z^{n-1} = \frac{n\,(n+1)}{2} z^{n-1}.
\end{aligned}$$

Vậy nên

$$\sum_{n=1}^{\infty} d_n\,(z) = \frac{1}{(1 - z)^3} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\,(n+1)}{2} z^{n-1}.$$

5.3 Uniform Convergence of Series

Bài 5.3.1 [5.3.5] Dùng tiêu chuẩn Weierstrass, chứng minh chuỗi sau hội tụ đều:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-nz}}{\operatorname{Log}(n+i)}$$

Với $\operatorname{Re}(z) \geq a$, $a > 0$

Giải. Ta có

$$\left|\frac{e^{-nz}}{\operatorname{Log}(n+i)}\right| \leq \frac{e^{-n\operatorname{Re}(z)}}{|\operatorname{Log}(n+i)|} \leq \frac{e^{-na}}{\left|\operatorname{Log}\left(\sqrt{n^2+1}\right)\right|} \leq 2\frac{e^{-na}}{|\operatorname{Log}(n^2+1)|}$$

Ta sẽ chứng minh rằng chuỗi số dương

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2\frac{e^{-na}}{|\operatorname{Log}(n^2+1)|}$$

hội tụ. Ta có

$$\left|\frac{2\dfrac{e^{-(n+1)a}}{\left|\operatorname{Log}\left((n+1)^2+1\right)\right|}}{2\dfrac{e^{-na}}{|\operatorname{Log}(n^2+1)|}}\right| = \frac{1}{e^a}\frac{\left|\operatorname{Log}\left(n^2+1\right)\right|}{\left|\operatorname{Log}\left((n+1)^2+1\right)\right|} \longrightarrow \frac{1}{e^a} < 1.$$

Vì vậy theo tiêu chuẩn tỉ số, chuỗi

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2\frac{e^{-na}}{\operatorname{Log}(n^2+1)}$$

hội tụ. Theo tiêu chuẩn Weierstrass, chuỗi đã cho hội tụ đều. *(Tiêu chuẩn Weierstrass yêu cầu các số hạng M_j phải dương và chỉ phụ thuộc vào j)*

Bài 5.3.2 [5.3.6] Trong bài này, ta sẽ chứng minh tiêu chuẩn hội tụ Weierstrass. Ta có chuỗi $\sum_{j=1}^{\infty} u_j(z)$ có tổng là $S(z)$ với z nằm trong miền R. Ta cũng có chuỗi hằng, dương $\sum_{j=1}^{\infty} M_j$ mà trên khắp R: $|u_j(z)| \le M_j$. Chứng minh $\sum_{j=1}^{\infty} u_j(z)$ hội tụ đều trên R

Giải. Theo tiêu chuẩn so sánh thì chuỗi $\displaystyle\sum_{j=1}^{\infty} u_j(z)$ phải hội tụ tuyệt đối. Ta có

$$|S(z) - S_n(z)| = \left|\left(\lim_{k\to\infty}\sum_{j=1}^{k} u_j(z)\right) - \sum_{j=1}^{n} u_j(z)\right| = \left|\lim_{k\to\infty}\sum_{j=n+1}^{k} u_j(z)\right|.$$

Đặt $T = \displaystyle\sum_{j=1}^{\infty} M_j$ và $T_n = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} M_j$. Suy ra

$$\begin{aligned} |S(z) - S_n(z)| &= \left|\lim_{k\to\infty}\sum_{j=n+1}^{k} u_j(z)\right| \\ &= \lim_{k\to\infty}\left|\sum_{j=n+1}^{k} u_j(z)\right| \\ &\le \lim_{k\to\infty}\sum_{j=n+1}^{k} |u_j(z)| \\ &\le \lim_{k\to\infty}\sum_{j=n+1}^{k} M_j = T - T_n. \end{aligned}$$

Vì

$$\lim_{n\to\infty}(T - T_n) = 0$$

nên

$$\forall \epsilon,\ \exists N \in \mathbb{N}:\ \forall n > N:\ T - T_n < \varepsilon.$$

Suy ra

$$\forall\epsilon,\ \exists N\in\mathbb{N}:\ \forall n>N:\ |S(z)-S_n(z)|<\varepsilon.$$

Nghĩa là dãy S_n hội tụ đều về S. *(Một lần nữa, từ chứng minh trên, ta thấy các số M_n dương để bất đẳng thức xảy ra và chỉ phụ thuộc vào n để cho sự hội tụ đều có thể xảy ra)*

Bài 5.3.3 [5.3.7] Chứng minh rằng

$$\tan^{-1}y=y-\frac{y^3}{3}+\frac{y^5}{5}-\cdots$$

Và

$$\frac{1}{2}\mathrm{Log}\left(1+y^2\right)=\frac{y^2}{2}-\frac{y^4}{4}+\frac{y^6}{6}-\cdots$$

Với y là số thực và $|y|\le q<1$.

Giải. Xét

$$S=1-y^2+y^4-y^6+y^8-\cdots$$

Và

$$T=y-y^3+y^5-y^7+y^9-\cdots$$

Ta có

$$\begin{cases} S+y^2S & =1\\ T+y^2T & =y\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} S & =\dfrac{1}{1+y^2}\\ T & =\dfrac{y}{1+y^2}\end{cases}.$$

Tiếp theo, ta chứng minh chuỗi

$$S=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n y^{2n}$$

và

$$T=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n y^{2n+1}$$

hội tụ đều với $|y|\leq q<1$. Ta có

$$\begin{cases}\left|(-1)^n y^{2n}\right|\leq |y|^{2n}\leq q^{2n}\\ \left|(-1)^n y^{2n+1}\right|\leq |y|^{2n+1}\leq q^{2n+1}\end{cases}.$$

Và

$$\begin{cases}\sum_{n=0}^{\infty} q^{2n}=\dfrac{1}{1-q}\\ \sum_{n=0}^{\infty} q^{2n+1}=\dfrac{q}{1-q}\end{cases}.$$

Nên theo tiêu chuẩn Weierstrass, chuỗi $S=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n y^{2n}$ và $T=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n y^{2n+1}$ hội tụ đều với $|y|\leq q<1$. Suy ra

$$\begin{cases}\displaystyle\int_0^y\left(\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n y^{2n}\right)\mathrm{d}y &=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\left(\int_0^y(-1)^n y^{2n}\mathrm{d}y\right)=y-\frac{y^3}{3}+\frac{y^5}{5}-\cdots\\ \displaystyle\int_0^y\left(\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n y^{2n+1}\right)\mathrm{d}y &=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\left(\int_0^y(-1)^n y^{2n+1}\right)\mathrm{d}y=\frac{y^2}{2}-\frac{y^4}{4}+\frac{y^6}{6}-\cdots\end{cases}.$$

Ta đã chứng minh

$$\begin{cases}\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n y^{2n} &=\dfrac{1}{1+y^2}\\ \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n y^{2n+1} &=\dfrac{y}{1+y^2}\end{cases}$$

nên

$$\begin{cases} \displaystyle\int_0^y \left(\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n y^{2n}\right) dy = \int_0^y \frac{dy}{1+y^2} & = y - \dfrac{y^3}{3} + \dfrac{y^5}{5} - \cdots \\ \displaystyle\int_0^y \left(\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n y^{2n+1}\right) dy = \int_0^y \frac{y dy}{1+y^2} & = \dfrac{y^2}{2} - \dfrac{y^4}{4} + \dfrac{y^6}{6} - \cdots \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \tan^{-1} y & = y - \dfrac{y^3}{3} + \dfrac{y^5}{5} - \cdots \\ \dfrac{1}{2}\mathrm{Log}\,(1+y^2) & = \dfrac{y^2}{2} - \dfrac{y^4}{4} + \dfrac{y^6}{6} - \cdots \end{cases}$$

Ví dụ: Với $y = 1/\sqrt{3}$ thì $\tan^{-1} y = \pi/6$ và ta có

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{6} &= \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^3}{3} + \frac{\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^5}{5} - \frac{\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^7}{7} + \dots \\ &= \frac{1}{\sqrt{3}}\left(1 - \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3} + \frac{1}{3^2}\cdot\frac{1}{5} - \frac{1}{3^3}\cdot\frac{1}{7} + \dots\right). \end{aligned}$$

Bài 5.3.4 [5.3.8] Chứng minh $S = \displaystyle\sum_{j=1}^{\infty} z^{j-1}$ hội tụ đều về $\dfrac{1}{1-z}$ trong đĩa $|z| \le r$ với $r < 1$.

Giải. Ta có

$$S_n = \frac{1-z^n}{1-z}.$$

Và

$$\left|\frac{1}{1-z} - S_n\right| = \left|\frac{z^n}{1-z}\right| = \frac{|z|^n}{|1-z|}.$$

Ta có

$$\begin{aligned} &1 - |z| \ge 1 - r \\ &\Rightarrow |1-z| \ge 1 - |z| \ge 1 - r \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{|1-z|} \leq \frac{1}{1-r}.$$

nên

$$\left|\frac{1}{1-z} - S_n\right| = \frac{|z|^n}{|1-z|} \leq \frac{r^n}{1-r}.$$

Với mọi $\epsilon > 0$, lấy $N \in \mathbb{N}$ sao cho

$$\frac{r^N}{1-r} \leq \epsilon \ (0 \leq r < 1)$$

thì với mọi $n \geq N$, ta có

$$\left|\frac{1}{1-z} - S_n\right| \leq \frac{r^n}{1-r} \leq \frac{r^N}{1-r} \leq \epsilon.$$

Hơn nữa, theo cách xác định N, ta thấy N không phụ thuộc vào z. Vì thế chuỗi đã cho hội tụ đều về $1/(1-z)$.

Bài 5.3.5 [5.3.9] Chứng minh rằng trong miền R,

$$\sum_{j=1}^{\infty} \int_C u_j(z) = \int_C S(z)\, dz$$

Với $\sum_{j=1}^{\infty} u_j(z)$ hội tụ đều về $S(z)$ và $u_j(z)$ liên tục trong R với mọi j

Giải. Với mọi số nguyên dương n thì

$$\sum_{j=1}^{n} \int_C u_j(z)\, dz = \int_C \sum_{j=1}^{n} u_j(z)\, dz$$

nên

$$\begin{aligned}\left|\int_C S(z)\,dz - \sum_{j=1}^{n}\int_C u_j(z)\,dz\right| &= \left|\int_C S(z)\,dz - \int_C \sum_{j=1}^{n} u_j(z)\,dz\right| \\ &= \left|\int_C \left[S(z) - \sum_{j=1}^{n} u_j(z)\right] dz\right|.\end{aligned}$$

Đặt L là chiều dài của C. Vì chuỗi $\sum_{j=1}^{\infty} u_j(z)$ hội tụ đều về $S(z)$ nên với mọi $\epsilon > 0$, tồn tại $N \in \mathbb{N}$ không phụ thuộc vào z để

$$\left|S(z) - \sum_{j=1}^{n} u_j(z)\right| \leq \frac{\epsilon}{L}$$

với mọi $n \geq N$. Suy ra với mọi $n \geq N$,

$$\left|\int_C \left[S(z) - \sum_{j=1}^{n} u_j(z)\right] dz\right| \leq \int_C \left|S(z) - \sum_{j=1}^{n} u_j(z)\right| dz \leq \int_C \frac{\epsilon}{L} dz = \epsilon.$$

Nghĩa là

$$\int_C S(z)\,dz = \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} \int_C u_j(z)\,dz = \sum_{j=1}^{\infty} \int_C u_j(z)dz.$$

Bài 5.3.6 [5.3.10] Chứng minh rằng nếu $\sum_{j=1}^{\infty} u_j(z)$ hội tụ đều về $S(z)$ trong R và nếu $u_j(z)$ giải tích với mọi j trong R thì $S(z)$ giải tích trong R

Giải. Gọi C là đường cong kín bất kì nằm trong R. Ta sẽ chứng minh rằng

$$\int_C S(z)\,dz = 0$$

và khi đó, theo *định lý Morera,* $S(z)$ giải tích trong R. Thực vậy, vì $\sum_{j=1}^{\infty} u_j(z)$ hội tụ đều về $S(z)$ trong R nên

$$\int_C \sum_{j=1}^{\infty} u_j(z)\, dz = \int_C S(z)\, dz = \sum_{j=1}^{\infty} \int_C u_j(z)\, dz.$$

Mà $u_j(z)$ giải tích trong R với mọi j nên

$$\int_C u_j(z)\, dz = 0\ \forall j.$$

Suy ra

$$\sum_{j=1}^{\infty} \int_C u_j(z)\, dz = 0 = \int_C S(z)\, dz.$$

Bài 5.3.7 [5.3.11] Cho $\sum_{j=1}^{\infty} u_j(z)$ hội tụ đều về $S(z)$ trong miền R. Chứng minh rằng nếu $u_1(z),\ u_2(z), \ldots$ là những hàm giải tích trong R, thì với mọi điểm trong của miền này thì

$$\frac{dS}{dz} = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{du_j(z)}{dz}$$

Giải. Xét chuỗi $\sum_{j=1}^{\infty} u_j(x)$ hội tụ đều về $S(x)$ trong R. Cho z là một điểm trong bất kì của miền R. Lấy một đường cong kín C trong R bao quanh z. Khi đó với những điểm x trên đường C, ta có chuỗi

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{u_j(x)}{2\pi i (x-z)^2}$$

sẽ hội tụ đều về

$$\frac{S(x)}{2\pi i (x-z)^2}.$$

Suy ra

$$\int_C \sum_{j=1}^{\infty} \frac{u_j(x)}{2\pi i(x-z)^2}dx = \sum_{j=1}^{\infty} \int_C \frac{u_j(x)}{2\pi i(x-z)^2}dx$$
$$\Leftrightarrow \int_C \frac{S(x)}{2\pi i(x-z)^2}dx = \sum_{j=1}^{\infty} \int_C \frac{u_j(x)}{2\pi i(x-z)^2}dx.$$

Vì $u_j(x)$ giải tích trong R với mọi j nên $S(x)$ giải tích trong R. Áp dụng công thức tích phân Cauchy, ta có

$$S'(z) = \sum_{j=1}^{\infty} u'_j(z).$$

Vì z là điểm trong bất kì nên biểu thức trên đúng với mọi điểm trong của R.

5.4 Power Series and Taylor Series

Bài 5.4.1. Định lý 15 về chuỗi Taylor được suy ra từ sự mở rộng tại điểm khởi đầu $z_0 = 0$. Dựa vào điều đó hãy chứng minh với trường hợp z_0 bất kì.

Giải. Phát biểu lại định lý 15 (Chuỗi Taylor): Cho $f(z)$ là hàm giải tích tại z_0. Cho C là đường tròn lớn nhất tâm z_0 sao cho f giải tích tại mọi điểm trong đường tròn. Gọi a là bán kính của C. Lúc đó, tồn tại một chuỗi lũy thừa $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n$ hội tụ về $f(z)$trong C, có nghĩa là:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n, \quad |z-z_0| < a$$

với

$$c_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$$

Ta xét γ là đường tròn tâm z_0, bán kính $b < a\ : \{t\ :\ |t - z_0| = b\}$. Theo công thức tích phân Cauchy, ta có:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(t)}{t - z}dt.$$

Ta khai triển

$$\frac{1}{t - z} = \frac{1}{(t - z_0)\left(1 - \frac{z - z_0}{t - z_0}\right)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z - z_0)^n}{(t - z_0)^{n+1}}.$$

Do

$$\left|\frac{(z - z_0)^{n+1}}{(t - z_0)^{n+2}}\right| : \left|\frac{(z - z_0)^n}{(t - z_0)^{n+1}}\right| = \frac{|z - z_0|}{|t - z_0|} < 1$$

nên chuỗi trên hội tụ đều theo t trong γ. Nhân cả hai vế cho $\frac{1}{2\pi i}f(t)$ và lấy tích phân, ta có

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(t)}{t - z}dt = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z - z_0)^n}{(t - z_0)^{n+1}} f(t) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n \end{aligned}$$

với

$$c_n = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(t)}{(t - z_0)^{n+1}}dt = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}.$$

Bài 5.4.2. Tìm ba số hạng đầu tiên của khai triển Taylor và khai triển Taylor hàm $f(z) = \dfrac{1}{z}$ tại $z_0 = i$.

Giải. Đặt $f(z) = 1/z$ thì f giải tích trên $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ nên tại $z_0 = i$, bán kính hội tụ là 1. Ta có

$$f^{(n)}(i) = (-1)^n n! \frac{1}{i^{n+1}},$$

suy ra

$$c_n = \frac{(-1)^n n! \frac{1}{i^{n+1}}}{n!} = (-1)^n \frac{1}{i^{n+1}}.$$

Vậy 3 số hạng đầu trong khai triển Taylor hàm $f(z)$ là

$$\begin{aligned} c_0 &= \frac{1}{i} = -i, \\ c_1 &= -1\frac{1}{(i)^2} = 1, \\ c_2 &= 1\frac{1}{i^3} = i. \end{aligned}$$

Ta khai triển Taylor hàm f tại tâm $z_0 = i$

$$\frac{1}{z} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{i^{n+1}} (i - z)$$

với mọi $z \in B(i, 1)$.

Bài 5.4.3.

1. Tìm tất cả hệ số trong khai triển z^5 tại hằng số z_0 và viết toàn bộ chuỗi.

2. Tìm bán kính hội tụ của chuỗi trên.

3. Giải câu 1. bằng khai triển nhị thức Newton, chú ý $z = (z - z_0) + z_0$

Giải. Đặt $f(z) = z^5$, do f giải tích trên toàn bộ mặt phẳng phức nên bán kính hội tụ trong khai triển Taylor tại tâm z_0 là $R = \infty$. Ta có

$$\begin{cases} c_0 = z_0^5 \\ c_1 = \dfrac{f'(z_0)}{1!} = 5z_0^4 \\ c_2 = \dfrac{f^{(2)}(z_0)}{2!} = 10z_0^3 \\ c_3 = \dfrac{f^{(3)}(z_0)}{3!} = 10z_0^2 \\ c_4 = \dfrac{f^{(4)}(z_0)}{4!} = 5z_0 \\ c_5 = \dfrac{f^{(5)}(z_0)}{5!} = 1 \\ c_n = \dfrac{f^{(n)}(z_0)}{n!} = 0 \quad \text{với } n > 5 \end{cases}.$$

Từ đó suy ra

$$\begin{aligned} f(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n \\ &= z_0^5 + 5z_0^4 (z - z_0) + 10z_0^3 (z - z_0)^2 + 10z_0^2 (z - z_0)^3 + 5z_0 (z - z_0)^4 + (z - z_0)^5 . \end{aligned}$$

Cũng theo khai triển Newton, ta có

$$\begin{aligned} z^5 &= (z_0 + (z - z_0))^5 \\ &= z_0^5 + 5z_0^4 (z - z_0) + 10z_0^3 (z - z_0)^2 + 10z_0^2 (z - z_0)^3 + 5z_0 (z - z_0)^4 + (z - z_0)^5 . \end{aligned}$$

Bài 5.4.4. Cho hai chuỗi

$$1 + z + z^2 + z^3 + \ldots$$

và

$$1 + \frac{z}{\mathrm{Log}2} + \frac{z^2}{\mathrm{Log}3} + \frac{z^3}{\mathrm{Log}4} + \ldots$$

Cả hai chuỗi trên đều hội tụ về $\dfrac{1}{1-z}$ tại $z = 0$. Tuy vậy, chuỗi thứ hai không là khai triển Taylor của hàm $\dfrac{1}{1-z}$. Điều này có mâu thuẫn với Định lý 16 hay không? Giải thích.

Giải. Ta có hàm $f(z) = 1/(1-z)$ giải tích trên $\mathbb{C}\setminus\{1\}$ nên chuỗi thứ nhất là khai triển Taylor của hàm f tại $z_0 = 0$ và bán kính hội tụ $R = 1$. Ta sẽ chứng minh với $z = 1/2 \in D(0,1) \subset \mathbb{C}$, thì

$$1 + \frac{\frac{1}{2}}{\text{Log}2} + \frac{\dfrac{1}{2}}{\text{Log}3} + \dots$$

khác

$$\frac{1}{1-\dfrac{1}{2}} = 2.$$

Thật vậy, đặt

$$s_n = 1 + \sum_{i=1}^{n} \frac{\left(\dfrac{1}{2}\right)^i}{\text{Log}i} = 1 + \sum_{i}^{n} \frac{1}{2^i \text{Log}i}$$

thì ta có

$$s_n > 1.1 \quad \forall n \geq 10,$$

nên ta suy ra

$$1 + \sum_{i}^{\infty} \frac{1}{2^i \text{Log}i} > 2.$$

Từ đó ta nhận thấy chuỗi thứ hai không hội tụ về hàm f trên $D(0,1)$.

Bài 5.4.5. Tìm tâm và bán kính hội tụ của các chuỗi sau:

1. $\dfrac{1}{z-i} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z+1)^n$

2. $\dfrac{1}{z^3+1} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-i)^n$

3. $\dfrac{1}{\cos z} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-1-i)^n$

4. $\dfrac{1}{\mathrm{Log} z} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-1-2i)^n$

5. $\dfrac{1}{z^{\frac{1}{2}}-1} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-2)^n$

Giải. Phương pháp giải:

Tổng quát, với f giải tích tại z_0 ta khai triển Taylor

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-z_0)^n$$

Bước 1: Tìm tập hợp A các điểm mà tại đó f không giải tích.

Bước 2: Xác định $\inf_{z\in A} |z-z_0|$.

Kết luận tâm hội tụ của chuỗi là z_0 và bán kính hội tụ của chuỗi là $\inf_{z\in A} |z-z_0|$.
Ví dụ bài 1.

Ta có hàm $f(z) = 1/(z-i)$ giải tích trên $\mathbb{C}\setminus\{i\}$ nên $A = \{i\}$. Ta có $z_0 = 1$ nên tâm hội tụ của chuỗi là $z_0 = 1$ và bán kính hội tụ là $|1-i| = \sqrt{2}$.

Bài 5.4.6. Cho

$$z^N - z_0^N = \sum_{n=1}^{N} c_n (z-z_0)^n$$

với mọi $z \in \mathbb{C}$. N là số nguyên dương. Hãy chứng minh

$$c_n = \frac{N! z_0^{N-n}}{n!(N-n)!}$$

Thay $z = z + z_0$ và chứng minh

$$(z+z_0)^N = \sum_{n=0}^{N} \frac{N! z_0^{N-n}}{n!\,(N-n)!}$$

Công thức này tương tự như công thức khai triển nhị thức Newton.

Giải. Đặt $f(z) = z^N$ thì f giải tích với mọi $z \in \mathbb{C}$, ta có

$$\begin{aligned}
f'(z_0) &= N z_0^{N-1}, \\
f^{(2)}(z_0) &= N(N-1)\, z_0^{N-2}, \\
f^{(3)}(z_0) &= N(N-1)(N-2)\, z_0^{N-3}, \\
&\vdots \\
f^{(N)}(z_0) &= N!, \\
f^{(n)}(z_0) &= 0 \quad \text{với } n > N.
\end{aligned}$$

Từ đó suy ra

$$\begin{aligned}
c_1 &= \frac{N z_0^{N-1}}{1!} = \frac{N! z_0^{N-1}}{1!\,(N-1)!}, \\
c_2 &= \frac{N(N-1)\, z_0^{N-2}}{2!} = \frac{N! z_0^{N-2}}{2!\,(N-2)!}, \\
&\vdots \\
c_N &= \frac{N! z_0^{N-N}}{N!}.
\end{aligned}$$

Vậy theo khai triển Taylor

$$\begin{aligned}
z^N &= \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-z_0)^n = z_0^N + \frac{N! z_0^{N-1}}{1!\,(N-1)!}(z-z_0) + \frac{N! z_0^{N-2}}{2!\,(N-2)!}(z-z_0)^2 \\
&\quad + \ldots + \frac{N! z_0^{N-N}}{N!}(z-z_0)^N.
\end{aligned}$$

Từ đó ta có điều phải chứng minh. Thay $z = z + z_0$vào thì ta có

$$(z + z_0)^N = \sum_{n=0}^{N} \frac{N! z_0^{N-n}}{n!\,(N-n)!}.$$

Bài 5.4.7.

1. Cho hàm $f(z) = \mathrm{Log} z$, lấy nhánh chính $y = 0, x \le 0$. Chứng minh

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z + 1 - i)^n$$

với $c_0 = \mathrm{Log}\sqrt{2} + \dfrac{i3\pi}{4}$ và $c_n = \dfrac{(-1)^{n+1} e^{-i(3\pi/4)n}}{n\left(\sqrt{2}\right)^n}, \quad n \ne 0.$

2. Tìm bán kính lớn nhất của đường tròn tâm $-1 + i$ sao cho chuỗi ở câu 1. hội tụ về hàm f ở bên trong đường tròn.

3. Dùng tiêu chuẩn tỉ số để chứng minh chuỗi ở câu 1. hội tụ ở trong đường tròn $|z - (-1 + i)| = \sqrt{2}$ và phân kì bên ngoài đường tròn. So sánh với đường tròn ở câu 2.

Giải.

1. Ta sẽ khai triển Taylor hàm $f(z) = \mathrm{Log} z$ tại

$$z_0 = -1 + i = \sqrt{2} e^{i\frac{3\pi}{4}}.$$

Ta có

$$\begin{aligned}
f'(z_0) &= \frac{1}{z_0} = \frac{1}{-1+i} = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-i\frac{3\pi}{4}}, \\
f^{(2)}(z_0) &= -\frac{1}{z_0^2} = -\frac{1!}{\left(\sqrt{2}\right)^2}e^{-i\frac{3\pi}{4}.2}, \\
f^{(3)}(z_0) &= \frac{2}{z_0^3} = \frac{2!}{\left(\sqrt{2}\right)^3}e^{-i\frac{3\pi}{4}.3}, \\
&\vdots \\
f^{(n+1)}(z_0) &= (-1)^{n+1}\frac{n!}{z_0^{n+1}} = \frac{(-1)^{n+1}n!}{\left(\sqrt{2}\right)^{n+1}}e^{-i\frac{3\pi}{4}(n+1)}.
\end{aligned}$$

Từ đó suy ra

$$c_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} = (-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{n!\left(\sqrt{2}\right)^n}e^{-i\frac{3\pi}{4}n} = \frac{(-1)^{n+1}e^{-i(3\pi/4)n}}{n\left(\sqrt{2}\right)^n}$$

Vậy ta có điều phải chứng minh.

2. Với nhánh chính $y = 0, x \leq 0$ thì hàm Log$z$ giải tích nên ta có bán kính lớn nhất của đường tròn tâm $-1+i$ cần tìm là khoảng cách nhỏ nhất từ $z_0 = -1+i$ đến tia $y = 0,\ x \leq 0$. Suy ra bán kính cần tìm bằng

$$\min_{y=0, x\leq 0}|z_0 - x - iy| = \min_{y=0, x\leq 0}|-1-x+i| = 1.$$

3. Ta xét tỉ số

$$\begin{aligned}
\left|\frac{c_{n+1}(z+1-i)^{n+1}}{c_n(z+1-i)^n}\right| &= \left|\frac{(-1)^{n+1}\dfrac{1}{\left(\sqrt{2}\right)^{n+1}}e^{-i\frac{3\pi}{4}(n+1)}}{(-1)^n\dfrac{1}{\left(\sqrt{2}\right)^n}e^{-i\frac{3\pi}{4}n}}(z+1-i)\right| \\
&= \left||-\frac{1}{\sqrt{2}}e^{-i\frac{3\pi}{4}}(x+1+i(y-1))\right|
\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{(x+1)^2+(y-1)^2}.$$

Từ đó ta suy ra

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_{n+1}(z+1-i)^{n+1}}{c_n(z+1-i)^n}\right| &< 1\\
\Leftrightarrow \quad \sqrt{(x+1)^2+(y-1)^2} &< \sqrt{2}\\
\Leftrightarrow \quad z\in D\left(-1+i,\sqrt{2}\right)
\end{aligned}$$

Vậy ta có với $z\in D\left(-1+i.\sqrt{2}\right)$ thì chuỗi

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z+1-i)^n$$

hội tụ.

Bài 5.4.8. Giả sử hàm $f(z)$ giải tích trong miền bao gồm gốc tọa độ phức, và ta khai triển thành chuỗi Maclaurin $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}c_nz^n$. Nếu đường tròn $|z|=r$ nằm trong miền đã cho và trên đường tròn đó, có hằng số K sao cho $|f(z)|\le K$, thì khi đó, các hệ số của chuỗi Maclaurin thỏa mãn bất đẳng thức

$$c_n\le\frac{K}{r^n}\quad\forall n\in\mathbb{N}$$

Đây được gọi là *bất đẳng thức Cauchy* và nó hữu ích để kiểm tra lại cách khai triển chuỗi Maclaurin, nếu bất đẳng thức Cauchy không thỏa, tức là đã có lỗi sai. Bất đẳng thức có thể được tổng quát hóa với chuỗi Taylor.

1. Chứng minh bất đẳng thức Cauchy bằng cách sử dụng đẳng thức hệ số của chuỗi Maclaurin $c_n=\dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}$, lấy đường $|z|=r$ và sử dụng bất đẳng thức ML.
2. Cho khai triển $e^z=\sum_{n=0}^{\infty}c_nz^n$. Ta muốn chặn $|c_n|$ mà không phải tính các

hệ số của khai triển. Qua cách chọn thích hợp cho r chứng minh rằng với mọi $n \geq 0$, ta có $|c_n| \leq e$ và $|c_n| \leq \dfrac{e^2}{2^n}$. Những hệ số đã biết trong khai triển

$$e^z = 1 + z + \frac{1}{2!}z^2 + \frac{1}{3!}z^3 + \ldots$$

có thỏa mãn bất đẳng thức không?

3. Mở rộng bất đẳng thức Cauchy để có thể áp dụng với chuỗi Taylor $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$. Dùng kết quả vừa mở rộng để giải thích tại sao với khai triển $e^z = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-3)^n$, không cần tính các hệ số, vẫn có thể kết luận $|c_n| \leq e^4$.

Giải.

1. Giả sử ta có đường tròn $|z| = r$ nằm trong miền giải tích của hàm f và có hằng số K để $|f(z)| \leq K$, ta sẽ chứng minh

$$|c_n| = \left| \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \right| \leq \frac{K}{r^n} \quad \forall n$$

Thật vậy, ta có

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{\gamma} \frac{f(z)}{z^{n+1}} dz$$

với γ là đường tròn tâm là gốc tọa độ, bán kính r. Từ đó, áp dụng bất đẳng thức ML, ta có

$$|c_n| = \frac{1}{2\pi} \left| \oint\limits_{\gamma} \frac{f(z)}{z^{n+1}} dz \right| \leq \frac{1}{2\pi} . \frac{K}{r^{n+1}} 2\pi = \frac{K}{r^{n+1}} \leq \frac{K}{r^n}$$

Từ đó ta có điều phải chứng minh.

2. Ta thấy $f(z) = e^z$ là một hàm nguyên. Ta cần xác định r để đường tròn $|z| = r$ nằm trong miền giải tích của $f(z)$ và K để $|f(z)| \leq K$ trên đường tròn này. Với một r bất kì thì trên đường tròn$|z| = r$,$|f(z)| = |e^z| \leq e^{|z|} \leq e^r$. Vậy theo bất đẳng thức Cauchy áp dụng cho hệ số trong khai triển Maclaurin $e^z = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$, ta có

$$|c_n| \leq \frac{e^r}{r^n}$$

Với $r = 1$, ta có $|c_n| \leq e$ và $r = 2$, ta có $|c_n| \leq e^2/r^2$.

3. Ta sẽ tổng quát hóa bất đẳng thức Cauchy trong khai triển Taylor như sau: Giả sử hàm f giải tích trên miền D mà đường tròn $|z - z_0| = r$ nằm trong D, trên đường tròn đó, có hằng số dương K để $|f(z)| \leq K$. Khi đó các hệ số của chuỗi Taylor của f tại z_0 thỏa mãn bất đẳng thức

$$|c_n| \leq \frac{K}{r^n} \quad n \in \mathbb{N}$$

Thật vậy, hệ số của chuỗi Taylor của f tại z_0 là

$$c_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(t)}{(t - z_0)^{n+1}} dt$$

với γ là đường tròn tâm z_0 bán kính r. Tương tự câu 1., áp dụng bất đẳng thức ML, ta suy ra

$$|c_n| = \frac{1}{2\pi} \left| \int_\gamma \frac{f(t)}{(t - z_0)^{n+1}} dt \right| \leq \frac{1}{2\pi} \frac{K}{r^{n+1}}.2\pi \leq \frac{K}{r^n}.$$

Từ đó ta có điều phải chứng minh. Ta xét trên mặt phẳng phức, đường tròn tâm $z_0 = 3$ bán kính 1 thì ta có $|e^z| \leq e^{3+1} = e^4$, khi đó áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có $|c_n| \leq e^4/1^n = e^4$.

Bài 5.4.9. Sau đây ta xác định chuỗi Taylor với một *số dư*, còn được gọi là định lí Taylor. Trong tính toán theo phương pháp số, ta thường dùng n số hạng đầu tiên của chuỗi Taylor thay cho khai triển vô hạn. Sai số giữa tổng vô hạn của $f(z)$ và tổng hữu hạn gọi là *số dư*. Chặn trên của độ lớn của số dư được xác định bởi định lý Taylor. Sau đây là trường hợp đặc biệt của định lý này trong khai triển ở gốc tọa độ.

1. Dựa vào chứng minh của định lý chuỗi Taylor, hãy chứng minh:

$$f(z_1) = \frac{1}{2\pi i}\oint_{C'} f(z)\left[\frac{1}{z} + \frac{z_1}{z^2} + \frac{z_1^2}{z^3} + \ldots + \frac{z_1^{n-1}}{z^n} + \left(\frac{z_1}{z}\right)^n \frac{1}{z - z_1}\right] dz$$

2. Sử dụng kết quả về $f(z_1)$ ở câu 1. , chứng minh

$$f(z_1) = f(0) + f'(0)\, z_1 + \frac{f^{(2)}(0)}{2} z_1^2 + \ldots + \frac{f^{(n-1)}(0)}{(n-1)!} z_1^{n-1} + R_n$$

   với

$$R_n = \frac{z_1^n}{2\pi i}\oint\limits_{C'} \frac{f(z)}{z^n (z - z_1)}$$

3. Ta có thể chặn sai số R_n ở câu 2. . Giả sử $|f(z)| \le m$ với mọi z trên đường tròn $C' : |z| = b$. Dùng bất đẳng thức ML để chứng minh

$$|R_n| \le \left|\frac{z_1}{b}\right|^n \frac{mb}{b - |z_1|}$$

4. Giả sử ta muốn xấp xỉ giá trị của $\cosh i$ bằng chuỗi hữu hạn

$$i^0 + \frac{i^2}{2!} + \frac{i^4}{4!} + \ldots + \frac{i^{10}}{10!}$$

   Lấy đường cong C' ở câu 2. là $|z| = 2$, dùng kết quả ở câu 3. để xác định sai số của chuỗi so với giá trị của $\cosh i$ là

$$\frac{\cosh 2}{2^{10}} = 3.67 \times 10^{-3}$$

Giải.

1. Theo tích phân Cauchy ta có

$$\begin{aligned}
f(z_1) &= \frac{1}{2\pi i}\oint_{C'} \frac{f(z)}{z - z_1}dz = \frac{1}{2\pi i}\oint_{C'} \frac{f(z)}{z\left(1 - \dfrac{z_1}{z}\right)}dz \\
&= \frac{1}{2\pi i}\oint_{C'} \frac{f(z)}{z\left(1 - \dfrac{z_1}{z}\right)}dz \\
&= \frac{1}{2\pi i}\oint_{C'} \frac{f(z)}{z}\left(1 + \frac{z_1}{z} + \frac{z_1^2}{z^2} + \ldots + \frac{z_1^{n-1}}{z^{n-1}} + \left(\frac{z_1}{z}\right)^n \frac{1}{1 - \frac{z_1}{z}}\right)dz \\
&= \frac{1}{2\pi i}\oint_{C'} f(z)\left[\frac{1}{z} + \frac{z_1}{z^2} + \frac{z_1^2}{z^3} + \ldots + \frac{z_1^{n-1}}{z^n} + \left(\frac{z_1}{z}\right)^n \frac{1}{z - z_1}\right]dz.
\end{aligned}$$

2. Từ kết quả của câu 1., ta suy ra

$$f(z_1) = f(0) + f'(0)\,z_1 + \frac{f^{(2)}(0)}{2}z_1^2 + \ldots + \frac{f^{(n-1)}(0)}{(n-1)!}z_1^{n-1} + R_n$$

với

$$R_n = \frac{z_1^n}{2\pi i}\oint\limits_{C'} \frac{f(z)}{z^n(z - z_1)}.$$

3. Ta có

$$\begin{aligned}
|R_n| &= \left|\frac{z_1^n}{2\pi i}\oint\limits_{C'} \frac{f(z)}{z^n(z - z_1)}\right| \\
&= \left|\frac{z^n}{2\pi}\right|\left|\oint\limits_{C'} \frac{f(z)}{z^n(z - z_1)}\right|.
\end{aligned}$$

Ta lại có $f(z) \leq m$ với mọi z trên đường tròn $C' : |z| = b$ nên

$$\frac{1}{|z - z_1|} \leq \frac{1}{b - |z_1|}$$

nên áp dụng bất đẳng thức ML, ta có

$$|R_n| \le \left|\frac{z^n}{2\pi}\right| \cdot \frac{m}{b^n\left(b-|z_1|\right)} \cdot 2\pi b = \left|\frac{z_1}{b}\right|^n \frac{mb}{b-|z_1|}.$$

Từ đó ta có điều phải chứng minh.

4. Dùng kết quả của câu 3., với C' là đường tròn tâm 0 bán kính $2 : |z| = 2$, trên đó ta có

$$|f(z)| = |\cosh z| \le |\cosh 2|,$$

nên ta được

$$|R_{11}| \le \left|\frac{\cosh i}{2}\right|^{11} \frac{\cosh 2.2}{2-|\cosh i|} = \frac{1}{2^{11}}.\frac{\cosh 2.2}{2-1} = \frac{\cosh 2}{2^{10}}.$$

Bài 5.4.10. Cho $f(z)$ là hàm nguyên có tính chất $f^{(n)}(z) = f(z), n = 0, 1, 2, \ldots$. Dùng chuỗi Taylor, chứng minh hàm f có tính chất sau

$$f(z_1 + z_2) = f(z_1)\, f(z_2)$$

Giải. Do f là hàm nguyên trên mặt phẳng phức nên ta có

$$\begin{aligned} f(z) &= f(0) + f'(0)\,z + \frac{f^{(2)}(0)}{2}z^2 + \ldots + \frac{f^{(n-1)}(0)}{(n-1)!}z^{n-1} + \ldots \\ &= f(0) + \frac{f(0)}{1!}z + \frac{f(0)}{2!}z^2 + \frac{f(0)}{3!}z^3 + \ldots + \frac{f(0)}{(n-1)!}z^{n-1} + \ldots \\ &= e^z. \end{aligned}$$

Mà ta lại có $e^{z_1+z_2} = e^{z_1}.e^{z_2}$ nên ta có điều phải chứng minh.

5.5 Techniques for Obtaining Taylor Series Expansions

Bài 5.5.1. Dựa vào kĩ thuật đổi biến để sinh ra một chuỗi Taylor mới, với a là hằng số, chứng minh các câu sau:

1. $\dfrac{1}{1+az} = 1 - az + a^2z^2 - a^3z^3 + \ldots, \quad |z| < \left|\dfrac{1}{a}\right|.$
2. $\dfrac{1}{1+z^2} = 1 - z^2 + z^4 - \ldots, \quad |z| < 1.$
3. $\dfrac{1}{1+a+z} = 1 - (z+a) + (z+a)^2 - \ldots, \quad |z+a| < 1.$
4. $e^{-z^2} = 1 - z^2 + \dfrac{z^4}{2} - \dfrac{z^6}{6} + \ldots, \forall z.$
5. Dựa vào kết quả câu 4. hãy tìm đạo hàm cấp 10 của e^{-z^2} tại $z = 0$.

Giải. Phương pháp: Dựa theo những hàm cơ bản, đổi biến và tìm bán kính lớn nhất để trong đường tròn đó, chuỗi hội tụ về $f(z)$. Ví dụ bài tập 2:

Ta có hàm $f(z) = \dfrac{1}{1+z^2}$ giải tích trên $\mathbb{C}\setminus\{i, -i\}$, nên khai triển Taylor $f(z)$ tại tâm $z_0 = 0$ có bán kính lớn nhất sẽ là $R = 1$. Ta có

$$\frac{1}{1-w} = 1 + w + w^2 + \ldots, |w| < 1$$

nên ta suy ra

$$\begin{aligned}\frac{1}{1+z^2} &= \frac{1}{1-(-z^2)} = 1 + \left(-z^2\right) + \left(-z^2\right)^2 + \ldots, \left|-z^2\right| < 1 \\ &= 1 - z^2 + z^4 - z^6 + \cdots.\end{aligned}$$

Vậy ta có điều phải chứng minh.

Bài 5.5.2. Bằng cách đạo hàm một số lần của hàm

$$\frac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + \ldots, \quad |z| < 1$$

hãy tìm c_n trong khai triển

$$\frac{1}{(1-z)^4} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n, |z| < 1$$

Giải. Đặt $f(z) = 1/(1-z)$, ta có

$$\frac{1}{(1-z)^4} = \frac{f^{(3)}(z)}{3!}$$

mà ta lại có

$$f^{(3)}(z) = 1.2.3 + 2.3.4.z + 3.4.5.z^2 + \ldots + (n+1)(n+2)(n+3)z^n.$$

Từ đó suy ra

$$\frac{1}{(1-z)^4} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$$

với

$$c_n = \sum_{i=0}^{n} (i+1)(i+2)(i+3)z^i.$$

Bài 5.5.3. Dùng kĩ thuật tính tích phân với đường từ gốc tọa độ đến $z, |z| < 1$ trong câu 2. của bài tập 5.5.1 để chứng minh

$$\tan^{-1} z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{2n+1}, \quad |z| < 1$$

Ta có thể đặt $z = 1$ trong khai triển ở câu trên để có

$$\tan^{-1} 1 = \frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \dots$$

Trong khai triển này, chuỗi có thể nhận giá trị là $\frac{\pi}{4}$ mặc dù không thỏa mãn phương pháp của ta với $|z| < 1$. Chuỗi hội tụ dần và không hữu dụng để tính π. Ta đã có $\tan^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) + \tan^{-1}\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{\pi}{4}$ và với kết quả của câu a., ta sẽ có sự hội tụ nhanh hơn với chuỗi:

$$\frac{\pi}{4} = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) - \left(\frac{\frac{1}{8} - \frac{1}{27}}{3}\right) + \frac{\left(\frac{1}{32} + \frac{1}{243}\right)}{5} - \frac{\frac{1}{128} + \frac{1}{2187}}{7} + \dots$$

Giải. Từ kết quả của câu 2. của bài tập 5.5.1, dùng kĩ thuật tích phân, ta có

$$\begin{aligned}
\tan^{-1}(z) &= \int_0^z \frac{1}{1 + z'^2} dz = \int_0^z \left(1 - z'^2 + z'^4 - \dots\right) dz \\
&= z - \frac{z^3}{3} + \frac{z^5}{5} - \dots \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{n+1}}{n+1}
\end{aligned}$$

từ đó ta có điều phải chứng minh.

Bài 5.5.4. Sử dụng chuỗi nhân để tìm công thức cho c_n trong khai triển Maclaurin. Tìm bán kính R lớn nhất để trong đường tròn tâm là gốc tọa độ, bán kính R thì những điều sau đây đúng:

1. $\frac{\cosh z}{1 - z} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$
2. $\frac{\text{Log}\,(1 - z)}{1 + z} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$

Giải. Ta sẽ giải câu 1. . Theo khai triển Maclaurin, ta có

$$\cosh z = 1 + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} + \dots$$

và

$$\frac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + \dots \quad \text{với } |z| < 1.$$

Từ đó, sử dụng chuỗi nhân, ta suy ra

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{\cosh z}{1-z} = \left(1 + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} + \dots\right)\left(1 + z + z^2 + \dots\right) \\ &= 1 + z + \left(1 + \frac{1}{2!}\right) z^2 + \left(1 + \frac{1}{2!}\right) z^3 + \left(1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{4!}\right) z^4 + \left(1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{4!}\right) z^5 + \dots \end{aligned}$$

Vậy ta có

$$c_n = \begin{cases} 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{4!} + \dots + \frac{1}{n!} & \text{với } 2|n \\ 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{4!} + \dots + \frac{1}{(n-1)!} & \text{với } 2 \nmid n \end{cases}$$

và $R = 1$.

Bài 5.5.5. Cho 2 đa thức P, Q với Q là đa thức phức có dạng

$$Q(z) = C(z - a_1)(z - a_2)\dots(z - a_n)$$

với $a_i \neq a_j$ khi $i \neq j$. Từ đó, ta có

$$\begin{aligned} \frac{P(z)}{Q(z)} &= \frac{P}{C(z - a_1)(z - a_2)\dots(z - a_m)} \\ &= \frac{A_1}{z - a_1} + \frac{A_2}{z - a_2} + \dots + \frac{A_n}{z - a_n} \end{aligned}$$

1. Chứng minh

$$\begin{aligned}\frac{P(z)}{C} &= A_1(z-a_2)(z-a_3)\ldots(z-a_n)+A_2(z-a_1)(z-a_3)\ldots(z-a_n)\\ &+\ldots+A_n(z-a_1)(z-a_2)\ldots(z-a_{n-1})\end{aligned}$$

2. Tìm A_j với $j=1,2,\ldots n$.

3. Dựa vào kết quả câu 2., chứng minh

$$A_j=\lim_{z\to a_j}\left[(z-a_j)\frac{P(z)}{Q(z)}\right]=\frac{P(a_j)}{Q'(a_j)}$$

4. Sử dụng kết quả câu 2. và 3., khai triển $\dfrac{z}{(z^2+1)(z-2)}$.

Giải.

1. Do

$$\frac{P(z)}{Q(z)}=\frac{A_1}{z-a_1}+\frac{A_2}{z-a_2}+\ldots+\frac{A_n}{z-a_n}$$

và

$$Q(z)=C(z-a_1)(z-a_2)\ldots(z-a_n),$$

nên ta suy ra

$$\begin{aligned}\frac{P(z)}{C} &= A_1(z-a_2)(z-a_3)\ldots(z-a_n)+A_2(z-a_1)(z-a_3)\ldots(z-a_n)\\ &+\ldots+A_n(z-a_1)(z-a_2)\ldots(z-a_{n-1}).\end{aligned}$$

2. Với mọi $j\in\{0,1,2,\ldots n\}$, thế $z=a_j$ ta có

$$\frac{P(z_j)}{C}=A_j(a_j-a_1)(a_j-a_2)\ldots(a_j-a_{j-1})(a_j-a_{j-1})\ldots(a_j-a_n)$$

mà

$$a_j \neq a_i \Leftrightarrow a_j - a_i \neq 0$$

với mọi $i \neq j$ nên ta suy ra

$$A_j = \frac{P(a_j)}{C\prod_{i\neq j}^{n}(a_i - a_j)}$$

3. Ta có

$$Q'(z) = C\sum_{i=1}^{n}\prod_{k\neq i}^{n}(z - a_k)$$

nên

$$Q'(a_j) = C\prod_{k\neq j}^{n}(z - a_k).$$

Vậy ta có

$$\lim_{z\to a_j}\left[(z - a_j)\frac{P(z)}{Q(z)}\right] = \frac{P(a_j)}{C\prod_{k\neq j}^{n}(z - a_k)} = A_j = \frac{P(a_j)}{Q'(a_j)}.$$

4. Ta có

$$\begin{aligned}\frac{z}{(z^2+1)(z-2)} &= \frac{z}{(z+i)(z-i)(z-2)}\\ &= \frac{A_1}{z+i} + \frac{A_2}{z-i} + \frac{A_3}{z-2}.\end{aligned}$$

Áp dụng kết quả trên ta suy ra

$$\begin{aligned}A_1 &= \frac{-i}{(-i-i)(i-2)} = \frac{-i}{-2i(i-2)} = \frac{i+2}{2(-1-4)} = -\frac{i+2}{10},\\ A_2 &= \frac{i}{(i+i)(i-2)} = \frac{1}{2(i-2)} = -\frac{i+2}{10},\\ A_3 &= \frac{2}{(2+i)(2-i)} = \frac{2}{5}.\end{aligned}$$

Bài 5.5.6. Dùng khai triển Taylor, tìm công thức tổng quát cho hệ số thứ n và chỉ ra đường tròn sao cho khai triển Taylor ở trong đường tròn thỏa mãn.

1. $\dfrac{z}{(z-1)(z-2)}$ khai triển tại $z=0$.
2. $\dfrac{z}{(z+1)(z+2)}$ khai triển tại $z=1$.
3. $\dfrac{1}{z^2}$ khai triển tại $z=2$.
4. $\dfrac{1}{z^3}$ khai triển tại $z=i$.
5. $\dfrac{z+1}{(z-1)^2(z+2)}$ khai triển tại $z=2$.
6. $\dfrac{1}{(z-1)^2(z+1)^2}$ khai triển tại $z=2$.
7. $\dfrac{e^z}{(z-2)(z+1)}$ khai triển tại $z=0$.
8. $\dfrac{z^3+2z^2+z-1}{z^2-4}$ khai triển tại $z=1$.

Giải. Ta sẽ giải bài 2. Ta có

$$\frac{z}{(z+1)(z+2)} = \frac{2(z+1)-(z+2)}{(z+1)(z+2)} = \frac{2}{z+2} - \frac{1}{z+1}.$$

Áp dụng công thức đạo hàm ta có:

$$\begin{aligned} f^{(n)}(z) &= \left(\frac{2}{z+2}\right)^{(n)} = 2(-1)^n \frac{(n-1)!}{(z+2)^n}, \\ g^{(n)}(z) &= \left(\frac{1}{z+1}\right)^{(n)} = (-1)^n \frac{(n-1)!}{(z+1)^n}, \end{aligned}$$

nên khai triển Taylor tại $z = 1$, ta có

$$\frac{z}{(z+1)(z+2)} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$$

với

$$c_n = \begin{cases} \dfrac{2}{3} - \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{6} & \text{với } n = 0 \\ (-1)^n \left(2\dfrac{(n-1)!}{(z+2)^n} + \dfrac{(n-1)!}{(z+1)^n} \right) \dfrac{1}{n!} = \dfrac{(-1)^n}{n} \left(\dfrac{2}{(z+2)^n} + \dfrac{1}{(z+1)^n} \right) & \text{với } n > 0 \end{cases}.$$

và

$$R = \min \{ |1 - (-1)|, |1 - (-2)| \} = 2.$$

Bài 5.5.7.

1. Cho $h(z) = \dfrac{f(z)}{g(z)}$, với $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ và $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (z - z_0)^n$ và $g(z_0) = b_0 \neq 0$. Ta tìm khai triển Taylor của hàm $h(z)$ có dạng $h(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$. Tìm c_0, c_1 và c_2 .

2. Áp dụng cách tìm trên để tìm hệ số c_0, c_1, c_2 và c_3 của chuỗi Maclaurin

$$\frac{\operatorname{Log}(1+z)}{\cos z} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$$

Giải.

1. Đặt

$$h(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$$

thì ta có

$$\begin{aligned} f(z) &= a_0 + a_1(z-z_0) + a_2(z-z_0)^2 = \ldots = g(z)\,h(z) \\ &= \left(b_0 + b_1(z-z_0) + b_2(z-z_0)^2 + \ldots\right)\left(c_0 + c_1(z-z_0) + c_2(z-z_0)^2 + \ldots\right). \end{aligned}$$

Từ đó ta có

$$\begin{cases} a_0 &= c_0 + b_0 \\ a_1 &= b_1 c_0 + b_0 c_1 \\ a_2 &= b_0 c_2 + b_1 c_1 + b_2 c_0 \end{cases}$$

nên

$$\begin{cases} c_0 &= a_0 - b_0 \\ c_1 &= \dfrac{a_1 - b_1(a_0 - b_0)}{b_0} \\ c_2 &= \dfrac{a_2 - b_1\left[\dfrac{b_1 a_1 - b_1(a_0 - b_0)}{b_0}\right] - b_2(a_0 - b_0)}{b_0} \end{cases}$$

2. Ta có

$$\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^5}{5!} + \cdots$$

và

$$\text{Log}\,(1+z) = z + (-1)^{2+1}\frac{1}{2}z^2 + (-1)^{3+1}\frac{1}{3}z^3 + \cdots (-1)^{n+1}\frac{1}{n}z^n + \cdots.$$

Từ đó suy ra

$$\begin{cases} c_0 &= 0 \\ c_1 &= 1 \\ c_2 &= -\dfrac{1}{2} \\ c_3 &= \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} = \dfrac{5}{6} \end{cases}.$$

5.6 Laurent Series

Bài 5.6.1. [5.6.1] Bằng khai triển Laurent, xác định số hạng thứ n và miền hình khuyên lớn nhất có thể của chuỗi biểu diễn hàm $\dfrac{\sinh z}{z^3}$ tại lân cận của z.

Giải. Ta có

$$\sinh z = -i \sin iz = -i\left(iz - \frac{(iz)^3}{3!} + \frac{(iz)^5}{5!} - \frac{(iz)^7}{7!} + \dots\right) = z + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \frac{z^7}{7!} + \dots$$

Do đó

$$\frac{\sinh z}{z^3} = \frac{1}{z^3}\left(z + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \frac{z^7}{7!} + \dots\right) = \frac{1}{z^2} + \frac{1}{3!} + \frac{z^2}{5!} + \frac{z^4}{7!} + \dots = \sum_{n=-1}^{\infty} u_n(z)$$

trong đó

$$u_n(z) = \frac{(z^2)^n}{(2n+3)!},$$

với $n \geq 1$.

Bài 5.6.2. [5.6.6] Khai triển Laurent của $\dfrac{1}{z+i}$ với $|z| > 1$. Xác định số hạng thứ n của chuỗi.

Giải. Ta có

$$\frac{1}{z+i} = \frac{\frac{1}{z}}{1+\frac{i}{z}} = \frac{1}{z}\left(1 - \frac{i}{z} + \frac{i^2}{z^2} - \frac{i^3}{z^3} + \cdots\right) = \frac{1}{z} - \frac{i}{z^2} + \frac{i^2}{z^3} - \frac{i^3}{z^4} + \cdots$$

với $|i/z| < 1$ hay $|z| > 1$.

Bài 5.6.3. [5.6.8] Khai triển hàm $\dfrac{1}{z-1}$ thành chuỗi Laurent trong lân cận của $z+3$. Xác định tâm và bán kính trong của miền, cho biết số hạng thứ n của chuỗi.

Giải. Ta có

$$\frac{1}{z-1} = \frac{1}{z+3-4} = \frac{1}{z+3}\left(\frac{1}{1-\frac{4}{z+3}}\right) = \frac{1}{z+3}\left(1+\frac{4}{z+3}+\frac{16}{(z+3)^2}+\frac{64}{(z+3)^2}+\dots\right)$$

với $\left|\dfrac{4}{z+3}\right| < 1$ hay $|z+3| > 4$. Vậy chuỗi

$$\frac{1}{z-1} = \sum_{n=-\infty}^{-1} c_n (z+3)^n$$

với $c_n = 4^{-n-1}$, có tâm hội tụ là -3, bán kính là 4.

Bài 5.6.4. [5.6.11]

1. Cho $f(z) = \dfrac{1}{z(z-1)(z+3)}$. Hàm này khai triển thành ba chuỗi Laurent khác nhau trong lân cận của z. Xác định ba miền của chuỗi Laurent.

2. Tìm mỗi chuỗi và cho biết công thức cho số hạng thứ n.

Giải.

1. Ta có

$$\frac{1}{z(z-1)(z+3)} = \frac{\frac{-1}{3}}{z} + \frac{\frac{1}{4}}{z-1} + \frac{\frac{1}{12}}{z+3}, \quad z \neq 0, 1, -3.$$

Miền của chuỗi Laurent là:

I: $0 < |z| < 1$

II: $1 < |z| < 3$

III: $|z| > 3$

2. Ta có

$$\begin{aligned}
\frac{1}{z-1} &= \frac{-1}{1-z} = -\left(1+z+z^2+\dots\right), \quad |z|<1, \\
\frac{1}{1-z} &= \frac{\frac{1}{z}}{1-\frac{1}{z}} = \frac{1}{z}\left(1+\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}+\dots\right), \quad |z|>1, \\
\frac{1}{z+3} &= \frac{\frac{1}{3}}{1+\frac{z}{3}} = \frac{1}{3}\left(1-\frac{z}{3}+\frac{z^2}{3^2}-\dots\right), \quad |z|<3, \\
\frac{1}{z+3} &= \frac{\frac{1}{z}}{1+\frac{3}{z}} = \frac{1}{z}\left(1-\frac{3}{z}+\frac{3^2}{z^2}-\dots\right), \quad |z|>3.
\end{aligned}$$

Trong miền I:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{z(z-1)(z+3)} &= \frac{-1}{3z} - \frac{1}{4}\left(1+z+z^2+\dots\right) + \frac{1}{36}\left(1-\frac{z}{3}+\frac{z^2}{3^2}-\dots\right) \\
&= \frac{-1}{3}z^{-1} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n.
\end{aligned}$$

với

$$c_n = \frac{-1}{4} + \frac{1}{36}\frac{(-1)^n}{3^n}.$$

Trong miền II:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{z(z-1)(z+3)} &= \frac{-1}{3z} + \frac{1}{4}\frac{1}{z}\left(1+\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}+\dots\right) + \frac{1}{36}\left(1-\frac{z}{3}+\frac{z^2}{3^2}-\dots\right) \\
&= \sum_{n=-\infty}^{-2} c_n z^n + \frac{-1}{12}z^{-1} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n
\end{aligned}$$

với

$$c_n = \frac{1}{4},\ n \le 2$$

và

$$c_n = \frac{1}{36}\frac{(-1)^n}{3^n},\ n \ge 0.$$

Trong miền III:

$$\begin{aligned}\frac{1}{z(z-1)(z+3)} &= \frac{-1}{3z} + \frac{1}{4}\frac{1}{z}\left(1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} + \dots\right) + \frac{1}{36}\frac{1}{z}\left(1 - \frac{3}{z} + \frac{3^2}{z^2} - \dots\right)\\ &= \sum_{n=-\infty}^{-2} c_n z^n\end{aligned}$$

với

$$c_n = \frac{1}{4} + \frac{(-1)^{n+1}3^{-n-1}}{12}.$$

Bài 5.6.5. [5.6.12] Tìm chuỗi Laurent cho hàm $f(z) = \dfrac{1}{z(z-2)}$ trong miền hình khuyên chứa điểm $z = 2 + 2i$. Tâm của hình khuyên là $z = 1$. Xác định miền của chuỗi và cho biết công thức của số hạng thứ n của chuỗi.

Giải. Ta có

$$f(z) = \frac{1}{z(z-2)} = \frac{-1}{2z} + \frac{1}{2(z-2)}.$$

Ta cần tính chuỗi Laurent trong lân cận của $(z-1)$ với $|z-1| > 1$. Ta có

$$\begin{aligned}\frac{1}{z} &= \frac{1}{1+z-1} = \frac{\frac{1}{z-1}}{1+\frac{1}{z-1}} = \frac{1}{z-1}\left(1 - \frac{1}{z-1} + \frac{1}{(z-1)^2} - \dots\right)\\ &= \frac{1}{z-1} - \frac{1}{(z-1)^2} + \frac{1}{(z-1)^3} - \dots \quad |z-1| > 1.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{1}{z-2} &= \frac{1}{z-1-1} = \frac{\frac{1}{z-1}}{1-\frac{1}{z-1}} = \frac{1}{z-1}\left(1+\frac{1}{z-1}+\frac{1}{(z-1)^2}+\dots\right)\\ &= \frac{1}{z-1}+\frac{1}{(z-1)^2}+\frac{1}{(z-1)^3}+\dots \quad |z-1|>1.\end{aligned}$$

Do đó

$$\begin{aligned}f(z) &= \frac{-1}{2}\left(\frac{1}{z-1}-\frac{1}{(z-1)^2}+\frac{1}{(z-1)^3}-\dots\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{z-1}+\frac{1}{(z-1)^2}+\frac{1}{(z-1)^3}+\dots\right)\\ &= \sum_{n=-\infty}^{-2} c_n (z-1)^n \quad |z-1|>1.\end{aligned}$$

trong đó

$$c_n = \frac{1}{2}\left(1+(-1)^n\right).$$

Bài 5.6.6. [5.6.18] Tích phân mũ $E_1(a)$ được định nghĩa bởi tích phân tầm thường

$$E_1(a) = \int_a^\infty \frac{e^{-x}}{x}dx, \quad a>0.$$

Vậy

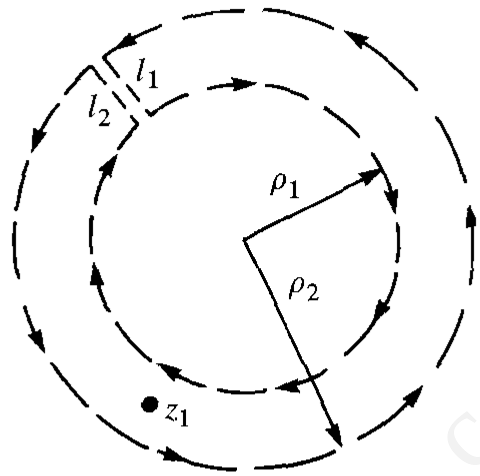
$$E_1(a) - E_1(b) = \int_a^b \frac{e^{-x}}{x}dx.$$

Dùng khai triển Laurent cho $\dfrac{e^{-z}}{z}$ và tích phân từng phần để chứng minh rằng

$$E_1(1) - E_1(b) = \mathrm{Log}\frac{b}{a} - (b-a) + \frac{b^2-a^2}{(2!)\,2} - \frac{b^3-a^3}{(3!)\,3} + \dots$$

Giải. Ta có

$$\frac{e^{-x}}{x} = \frac{1}{x} - 1 + \frac{x}{2!} - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^3}{4!} - \dots$$



Hình 5.6.1

nên

$$\begin{aligned}\int_a^b \frac{e^{-x}}{x} dx &= \int_a^b \frac{1}{x} dx - \int_a^b 1 dx + \int_a^b \frac{x}{2!} dx - \int_a^b \frac{x^2}{3!} dx + \int_a^b \frac{x^3}{4!} dx - \cdots \\ &= \operatorname{Log} \frac{b}{a} - (b-a) + \frac{b^2-a^2}{(2!)\,2} - \frac{b^3-a^3}{(3!)\,3} + \cdots .\end{aligned}$$

Bài 5.6.7. [5.6.19] Phép lấy đạo hàm của định lý Laurent được biết với trường hợp $z_0 = 0$. Suy ra định lý này cho trường hợp tổng quát hơn với z_0 không nhất thiết là 0.

Giải. Theo công thức tích phân Cauchy, ta có

$$f(z_1) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z-z_0|=\rho_1} \frac{f(z)}{z_1 - z} dz + \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z-z_0|=\rho_2} \frac{f(z)}{z - z_1} dz$$

Bài 5.6.8. [5.6.22] Khai triển Laurent của $\dfrac{z^{1/2}}{z-1}$ trong đĩa thủng tâm tại $z = 1$. Cho biết công thức của số hạng thứ n, và xác định bán kính ngoài lớn nhất của đĩa.

Dùng nhánh chính của $z^{1/2}$.

Giải. Ta có

$$z^{1/2} = \sum_{n=0}^{\infty} d_n (z-1)^n, \quad |z-1| < 1$$

với

$$\begin{aligned}
d_0 &= 1, \\
d_1 &= \left.\frac{\frac{1}{2} z^{-1/2}}{1!}\right|_{z=1} = \frac{1}{2}, \\
d_2 &= \left.\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{-1}{2}\right) z^{-3/2}}{2!}\right|_{z=1} = -\frac{1}{2^2}\frac{1}{2!}, \\
d_3 &= \left.\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{-1}{2}\right)\left(\frac{-3}{2}\right) z^{-5/2}}{3!}\right|_{z=1} = \frac{1}{2^3}\frac{3}{3!}, \\
\dots &\quad \dots \quad \dots, \\
d_n &= \frac{(-1)^{n-1}}{2^n}\frac{1\cdot 3\cdot 5\dots(2n-3)}{n!}.
\end{aligned}$$

Vậy

$$\frac{z^{1/2}}{z-1} = \frac{1}{z-1}\sum_{n=-1}^{\infty} d_n (z-1)^n = \sum_{n=-1}^{\infty} c_n (z-1)^n.$$

trong đó

$$c_{-1} = 1, \; c_0 = \frac{1}{2}, \; c_n = \frac{(-1)^n}{2^{n+1}}\frac{1\cdot 3\cdot 5\dots(2n-1)}{(n+1)!}.$$

Bài 5.6.9. [5.6.23]

1. Chứng minh rằng trong khai triển

$$\frac{1}{\sin z} = \sum_{n=-1}^{\infty} c_n z^n, \quad 0 < |z| < \pi,$$

ta có thể biết c_n từ công thức đệ quy

$$c_n = \left[\frac{c_{n-2}}{3!} - \frac{c_{n-4}}{5!} + \frac{c_{n-6}}{7!} - \ldots \pm \frac{c_{-1}}{(n+2)!}\right]$$

2. Tìm c_5 của chuỗi.

3. Cho khai triển Laurent $\dfrac{1}{\sinh z} = \sum_{n=-1}^{\infty} a_n z^n$ với $0 < |z| < \pi$. Tìm, bằng cách đổi biến, quan hệ giữa số hạng $a_n$và c_n của phần (1).

4. Suy ra công thức đệ quy giống như trong phần (1) cho các số hạng a_n.

5. 5.6 on the preceding pageDùng MATLAB, vẽ hình đối chiếu $\dfrac{1}{|\sinh z|}$ với 5 số hạng chuỗi Laurent xấp xỉ hàm này. Dùng miền $0 < |z| < \pi$.

Giải.

1. Ta đã biết trong ví dụ 4, tất cả các số hạng c_n với n chẵn đề bằng 0. Ta có

$$\frac{1}{z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + \ldots} = \frac{c_{-1}}{z} + c_1 z + c_3 z^3 + c_5 z^5 + \ldots$$

suy ra

$$1 = \left(z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + \ldots\right)\left(\frac{c_{-1}}{z} + c_1 z + c_3 z^3 + c_5 z^5 + \ldots\right).$$

Đồng nhất các hệ số của z^{n+1} với n lẻ, ta được

$$0 = c_n - \frac{c_{n-2}}{3!} + \frac{c_{n-4}}{5!} - \frac{c_{n-6}}{7!} - \ldots \pm \frac{c_{-1}}{(n+2)!}.$$

Suy ra

$$c_n = \frac{c_{n-2}}{3!} - \frac{c_{n-4}}{5!} + \frac{c_{n-6}}{7!} - \ldots \pm \frac{c_{-1}}{(n+2)!}.$$

2. Ta có

$$\begin{aligned} c_5 &= \frac{c_3}{3!} - \frac{c_1}{5!} + \frac{c_{-1}}{7!}, \\ c_3 &= \frac{c_1}{3!} - \frac{c_{-1}}{5!}, \\ c_1 &= \frac{c_{-1}}{3!}. \end{aligned}$$

Từ ví dụ 4 ta đã biết $c_{-1} = 1$, nên

$$\begin{aligned} c_1 &= \frac{1}{3!}, \\ c_3 &= \left(\frac{1}{3!}\right)^2 - \frac{1}{5!}, \\ c_5 &= \frac{1}{3!}\left[\left(\frac{1}{3!}\right)^2 - \frac{1}{5!}\right] - \frac{1}{3!5!} + \frac{1}{7!} = \left(\frac{1}{3!}\right)^3 - \frac{2}{3!5!} + \frac{1}{7!}. \end{aligned}$$

3. Ta có $\sin iz = i \sinh z$ nên

$$\frac{1}{\sinh z} = \frac{i}{\sin iz} = i \sum_{n=-1}^{\infty} c_n (iz)^n = \sum_{n=-1}^{\infty} i^{n+1} c_n z^n = \sum_{n=-1}^{\infty} a_n z^n.$$

Vậy

$$a_n = \begin{cases} i^{n+1} c_n & , n \text{ lẻ} \\ 0 & , n \text{ chẵn} \end{cases}.$$

4. Ta có

$$\frac{1}{\sinh z} = a_{-1} z^{-1} + a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots$$

hay

$$\frac{1}{z + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \frac{z^7}{7!} + \dots} = a_{-1} z^{-1} + a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots$$

Suy ra

$$1 = \left(z + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \frac{z^7}{7!} + \dots\right)\left(a_{-1}z^{-1} + a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots\right)$$

$$\begin{array}{ccccc} 1 & = & a_{-1} & \left[\text{số hạng của } z^0\right] \\ 0 & = & a_0 & \left[\text{số hạng của } z^1\right] \\ 0 & = & a_1 + \frac{a_{-1}}{3!} & \left[\text{số hạng của } z^2\right] \\ 0 & = & a_2 + \frac{a_0}{3!} & \left[\text{số hạng của } z^3\right] \\ 0 & = & a_3 + \frac{a_1}{3!} + \frac{a_{-1}}{5!} & \left[\text{số hạng của } z^4\right] \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{array}$$

do đó

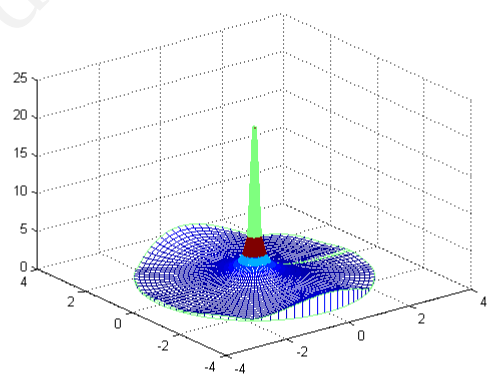
$$\begin{array}{rcl} a_{-1} & = & 1, \\ a_1 & = & \dfrac{-1}{3!}, \\ a_3 & = & \left(\dfrac{1}{3!}\right)^2 - \dfrac{1}{5!}, \\ \dots & \dots & \dots \end{array}$$

và $a_n = 0$ với n chẵn.

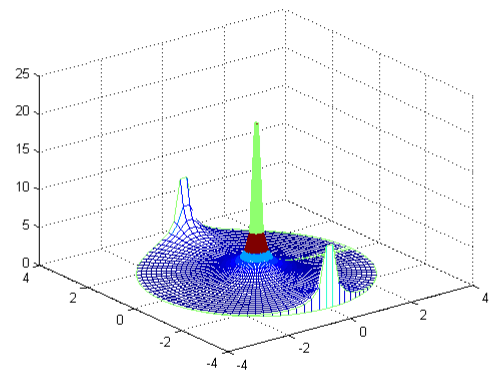
5.

```
>> nm=5;
>> d(1)=1;
>> for k=2:nm
for j=1:k-1;
u(j)=gamma(2*k-2*j+2);
end
d(k)=-sum(d./u);
d;
```

```
end
>> nr=25;
>> r=linspace(0.05,pi-0.05,nr);
>> nth=91;
>> theta =linspace(0,2*pi,nth);
>> [T,R]=meshgrid(theta,r);
>> [X,Y]=pol2cart(T,R);
>> z=X+i*Y;
>> mm=length(d);
>> ff=0;
>> for p=1:mm ff=d(p)*z.^(2*p-3)+ff;
end
% ff=1./sinh(z); % dung cho hình b
>> meshz(X,Y,abs(ff))
```

Hình 5.6.2: Xấp xỉ $\frac{1}{|\sinh z|}$ với 5 số hạng



Hình 5.6.3: Xấp xỉ $\frac{1}{|\sinh z|}$ với 5 số hạng

Bài 5.6.10. [5.6.25]

1. Khai triển

$$\cot z = \frac{B_0}{z} - \frac{B_2 2^2 z}{2!} + \frac{B_4 2^4 z^3}{4!} - \frac{B_6 2^6 z^5}{6!} + \dots$$
$$= \frac{1}{z} - \frac{z}{3} - \frac{z^3}{45} - \frac{2z^5}{945} - \dots, \quad 0 < |z| < \pi,$$

   với B_n là các số Bernoulli.

2. Kiểm tra ba số hạng đầu tiên của kết quả trước bằng cách nhân chuỗi Maclaurin cho $\cos z$ với chuỗi Laurent của $\dfrac{1}{\sin z}$.

Giải.

1. Ta có

$$\frac{z}{e^z - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!} z^n$$

trong đó

$$B_0 = 1, B_2 = \frac{1}{6}, B_4 = \frac{-1}{30}, B_6 = \frac{1}{42}, \dots$$

(làm tương tự như Bài 5.6.9. [5.6.23]). Thay z bởi $i2z$ ta được

$$\begin{aligned}\frac{i2z}{e^{i2z}-1} &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{B_n}{n!}(i2z)^n,\\ \frac{e^{-iz}}{e^{iz}-e^{-iz}} &= \frac{1}{i2z}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{B_n}{n!}(i2z)^n,\end{aligned}$$

thay z bởi $-z$ ta được

$$\begin{aligned}\frac{e^{iz}}{e^{-iz}-e^{iz}} &= \frac{1}{-i2z}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{B_n}{n!}(-i2z)^n,\\ \frac{e^{-iz}}{e^{iz}-e^{-iz}} &= \frac{1}{i2z}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{B_n}{n!}(-i2z)^n.\end{aligned}$$

Do đó

$$\begin{aligned}\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{e^{iz}-e^{-iz}} &= \frac{1}{i2z}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{B_n}{n!}z^n i^n\left(2^n+(-2)^n\right),\\ \frac{\cos z}{i\sin z} &= \frac{1}{i2z}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{B_n}{n!}z^n i^n\left(2^n+(-2)^n\right),\\ \cot z &= \frac{1}{2z}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{B_n}{n!}z^n i^n\left(2^n+(-2)^n\right)\\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{B_n}{n!}z^{n-1}2^n i^n \quad n \text{ chẵn}.\end{aligned}$$

Vậy

$$\cot z = \frac{1}{z}-\frac{z}{3}-\frac{z^3}{45}-\frac{2z^5}{945}-\cdots.$$

2. Ta có

$$\begin{aligned}
\frac{\cos z}{\sin z} &= \left(1-\frac{z^2}{2!}+\frac{z^4}{4!}-\dots\right)\left(\frac{1}{z}+\frac{z}{6}+\frac{7z^3}{360}+\dots\right)\\
&= \frac{1}{z}+\left(\frac{1}{6}-\frac{1}{2}\right)z+\left(\frac{7}{360}-\frac{1}{12}+\frac{1}{40}\right)z^3+\dots\\
&= \frac{1}{z}-\frac{1}{3}z-\frac{1}{45}z^3-\dots
\end{aligned}$$

Bài 5.6.11. [5.6.26] Một cách định nghĩa hàm Bessel là bằng tích phân

$$J_n(w)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}\cos(n\theta-w\sin\theta)\,d\theta,$$

với n là số nguyên. Số n được gọi là bậc của hàm Bessel. Có một liên hệ giữa tích phân này và số hạng của z trong khai triển Laurent của $e^{w(z-1/z)/2}$.

Cho

$$e^{(w/2)\left(z-z^{-1}\right)}=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}c_nz^n,\quad |z|>0$$

Dùng định lý Laurent chứng minh rằng

$$c_n=J_n(w)$$

Giải. Theo định lý Laurent thì

$$c_n=\frac{1}{2\pi i}\oint\frac{f(z)}{z^{n+1}}dz=\frac{1}{2\pi i}\oint\frac{e^{(w/2)\left(z-z^{-1}\right)}}{z^{n+1}}dz.$$

Đặt $z=e^{i\theta}$, $-\pi\le\theta\le\pi$, thì

$$\begin{aligned}
c_n &= \frac{1}{2\pi i}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{e^{(w/2)\left(e^{i\theta}-e^{-i\theta}\right)}}{e^{i(n+1)\theta}}ie^{i\theta}d\theta\\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}e^{i(w\sin\theta-n\theta)}d\theta
\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \cos\left(w\sin\theta - n\theta\right) + i\sin\left(w\sin\theta - n\theta\right) d\theta.$$

vì $\sin\left(w\sin\theta - n\theta\right)$ là hàm lẻ nên

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin\left(w\sin\theta - n\theta\right) d\theta = 0.$$

Do đó

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} \cos\left(n\theta - w\sin\theta\right) d\theta = J_n\left(w\right).$$

Bài 5.6.12. [5.6.27]

1. Dựa vào Bài 5.6.11. [5.6.26] chứng minh rằng

$$J_n\left(w\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(-1\right)^k \left(w/2\right)^{n+2k}}{k!\left(n+k\right)!}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

2. Cho w là biến thực trong bài trước. Cho hàm Bessel $J_0\left(w\right)$, chúng ta sẽ thử xấp xỉ dùng ba tổng riêng phần khác nhau trong chuỗi suy ra ở trên. Dùng MATLAB, vẽ trên một tập của hệ trục những tổng cho trường hợp $N = 11, 12$ và 15 cho khoảng $0 \leq w \leq 10$.

Giải.

1. Ta có

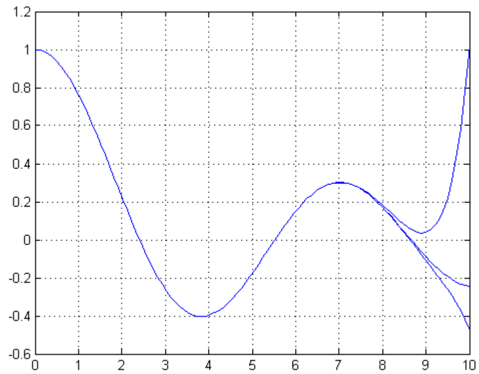
$$\begin{aligned}
e^{(w/2)\left(z - z^{-1}\right)} &= e^{wz/2} e^{-w/2z} \\
&= \left[1 + \frac{wz}{2} + \frac{\left(\frac{wz}{2}\right)^2}{2!} + \frac{\left(\frac{wz}{2}\right)^3}{3!} + \ldots\right]\left[1 + \frac{-w}{2z} + \frac{\left(\frac{-w}{2z}\right)^2}{2!} + \frac{\left(\frac{-w}{2z}\right)^3}{3!} + \ldots\right] \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(-1\right)^k \left(w/2\right)^{n+2k}}{k!\left(n+k\right)!}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots
\end{aligned}$$

Theo bài Bài 5.6.11. [5.6.26] thì

$$J_n(w) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (w/2)^{n+2k}}{k!\,(n+k)!}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

2.

```
>> x=linspace(0,10,100);
>> nm=[11 12 15];
>> for ij=1:3
y=x.*0;
for k=1:nm(ij)
k=k-1;
y=(-1)^(k)*(x/2).^(2*k)/(gamma(k+1))^2+y;
end
plot(x,y);
hold on
end
>> y2=besselj(0,x);
>> plot(x,y2);
>> grid
```



Hình 5.6.4

5.7 Properties of Analytic Functions Related to Taylor Series: Isolation of Zeros, Analytic Continuation, Zeta Function, Reflection

Bài 5.7.1. [5.7.1] Cho $f(z) = z^3 - x^3 + 3xy^2 + i(y^3 - 3x^2y)$, với $z = x + iy$.

1. Chứng minh rằng những không điểm của hàm này nằm trên trục $y = 0, -\infty < x < \infty$, là không cô lập.

2. Có phải kết quả của câu (1) mâu thuẫn với phát biểu rằng những không điểm của hàm giải tích là cô lập?. Giải tích.

Giải.

1. Nếu $y = 0$ thì $f(z) = f(x) = x^3 - x^3 = 0$ mọi nơi trên trục Oy.

2.

Bài 5.7.2. [5.7.2]

1. Cho $f(z) = e^z - e^{iy}$. Chứng minh rằng hàm này bằng không mọi nơi trên trục ảnh của mặt phẳng phức.

2. Bạn có thể giải quyết từ phần (1) và định lý 19 rằng mỗi điểm trên trục Oy có một lân cận mà $f(z) = 0$?. Giải thích.

Giải.

1. Trên trục ảnh của mặt phẳng phức thì $x = 0$, nên

$$f(z) = f(iy) = e^{iy} - e^{iy} = 0$$

2. Không thể thu được điều này vì định lý 19 không thể áp dụng được do $f(z)$ không giải tích mọi nơi ($e^{iy} = \cos y + i \sin y$ không giải tích mọi nơi).

Bài 5.7.3. [5.7.3]

1. Có hay không những không điểm của $\sin(\pi/(z^2+1))$, trong miền $|z| < 1$, cô lập?

2. Tìm tất cả không điểm của hàm này trong miền.

3. Đồng nhất những điểm tới hạn của tập, và xác định chúng có thuộc miền đã cho

Giải.

1-2. Ta có

$$\sin\left(\pi/\left(z^2+1\right)\right)=0 \Leftrightarrow \frac{\pi}{z^2+1}=n\pi \Leftrightarrow \frac{1}{z^2+1}=n \Leftrightarrow z^2=\frac{1}{n}-1.$$

Suy ra

$$z=\pm i\sqrt{1-\frac{1}{n}}.$$

Vì

$$\begin{cases} |z|>1 & ,n<0 \\ |z|<1 & ,n>0 \end{cases}.$$

Vậy những không điểm của

$$\sin\left(\pi/\left(z^2+1\right)\right)$$

trong miền $|z|<1$ là

$$z=\pm i\sqrt{1-\frac{1}{n}}, n=1,2,\ldots,$$

chúng thì cô lập.

3. Điểm tới hạn là $\pm i$, nhưng chúng không thuộc miền đã cho vì $z^2+1=0$.

Bài 5.7.4. [5.7.4] Tìm bậc của không điểm của hàm $\cos z$ tại $z=n\pi+\pi/2$.

Giải.

$$\frac{d\cos z}{dz}=-\sin z\Big|_{n\pi+\pi/2}=-\cos n\pi\neq 0$$

Vì đạo hàm cấp 1 khác không nên bậc của không điểm của hàm $\cos z$ tại $z=n\pi+\pi/2$ là 1.

Bài 5.7.5. [5.7.8] Chứng minh rằng nếu $f(z)$ có một không điểm bậc n tại z_0, thì $[f(z)]^m$ (m là số nguyên dương) có một không điểm bậc nm tại z_0.

Giải. Vì $f(z)$ có một không điểm bậc n tại z_0 nên

$$f(z) = (z - z_0)^n \phi(z)$$

với $\phi(z_0) \neq 0$. Suy ra

$$[f(z)]^m = (z - z_0)^{nm} [\phi(z)]^m,$$

trong đó $[\phi(z)]^m \neq 0$ tại điểm z_0. Vậy thì $[f(z)]^m$ có một không điểm bậc nm tại z_0.

Bài 5.7.6. [5.7.9] Tìm bậc của không điểm trong hàm $(\mathrm{Log}z - 1)^2$ tại $z = e$.

Giải. Ta có

$$\frac{d}{dz}(\mathrm{Log}z - 1)\Big|_e = \frac{1}{z}\Big|_e = \frac{1}{e} \neq 0$$

nên $(\mathrm{Log}z - 1)$ có không điểm bậc 1. Theo Bài 5.7.5. [5.7.8] thì $(\mathrm{Log}z - 1)^2$ có không điểm bậc 2.

Bài 5.7.7. [5.7.12]

1. Cho $f(z) = 1 + z + z^2 + \ldots, |z| < 1$. Khai triển hàm này trong chuỗi Taylor với $z = -3/4$, xác định c_n trong khai triển $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z + 3/4)^n$ của nó.
2. Có phải chuỗi Taylor tìm được trong câu (1) là kết quả của thác triển giải tích của $f(z)$ trong miền mở rộng $|z| < 1$?. Giải thích.

Giải.

1. Ta có

$$\frac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + \ldots, \quad |z| < 1$$

suy ra

$$\begin{aligned}
\frac{1}{1-z} &= \frac{1}{\frac{7}{4}-\left(z+\frac{3}{4}\right)} = \frac{\frac{4}{7}}{1-\frac{4}{7}\left(z+\frac{3}{4}\right)} \\
&= \frac{4}{7}\left[1+\frac{4}{7}\left(z+\frac{3}{4}\right)+\left(\frac{4}{7}\right)^2\left(z+\frac{3}{4}\right)^2+\dots\right] \\
&= \frac{4}{7}+\left(\frac{4}{7}\right)^2\left(z+\frac{3}{4}\right)+\left(\frac{4}{7}\right)^3\left(z+\frac{3}{4}\right)^2+\dots \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} c_n\left(z+3/4\right)^n
\end{aligned}$$

trong đó

$$c_n = \left(\frac{4}{7}\right)^{n+1}.$$

2. Vì chuỗi tìm được trong câu (1) hội tụ đến $1/\left(1-z\right)$ khi

$$\frac{4}{7}\left|z+\frac{3}{4}\right| < 1$$

hay

$$\left|z+\frac{3}{4}\right| < \frac{7}{4}$$

nên nó biểu diễn một thác triển giải tích của $f\left(z\right)$ trong miền mở rộng $|z| < 1$.

Bài 5.7.8. [5.7.16] Hàm zeta:

1. Cho hàm định nghĩa hàm zeta. Dùng tiêu chuẩn Weierstrass M để chứng minh rằng chuỗi này hội tụ đều trong nữa mặt phẳng $\mathrm{Re}\left(z\right) \geq a$, với $a > 1$.

2. Giải thích tổng chuỗi này giải tích với $\mathrm{Re}\left(z\right) > 1$.

3. Dùng tiêu chuẩn số hạng thứ n để chứng minh rằng chuỗi phân kì với $\mathrm{Re}\left(z\right) \leq 0$.

4. Nếu bạn khai triển hàm zeta trong một chuỗi Taylor với $z = 2$, vòng tròn hội tụ của nó là gì.

5. Cho số nguyên tố p_n. Chứng minh rằng

$$\zeta(z)\left(1-\frac{1}{2^z}\right)\left(1-\frac{1}{3^z}\right)\left(1-\frac{1}{5^z}\right)\ldots\left(1-\frac{1}{p_n^z}\right)\left(1-\frac{1}{p_{n+1}^z}\right)\ldots = 1$$

6. Riemmann tìm thấy rằng không điểm của hàm zeta gần với $\frac{i}{2} + i21.022$. Dùng MATLAB, vẽ trong không gian ba chiều của phần thực và phần ảo của $1/\zeta(s)$ cũng như $1/|\zeta(s)|$ gần điểm này, so sánh hình vẽ

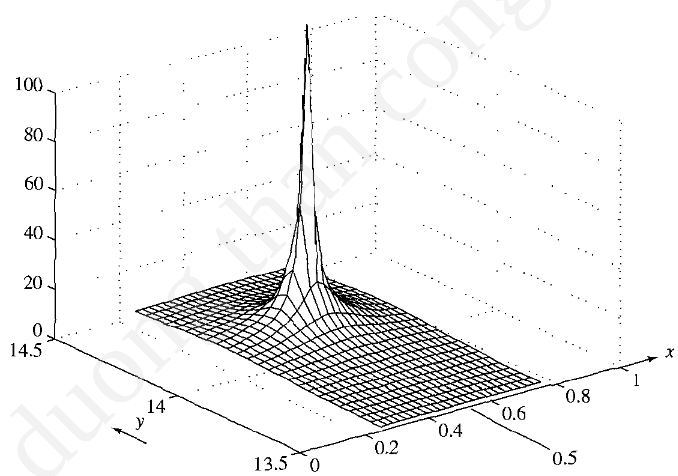


Figure 5.7–5 Reciprocal of the magnitude of the zeta function near $z = 0.5 + i14.134$

Hình 5.7.1

Giải.

1. Vì

$$\left|\frac{1}{n^z}\right| = \frac{1}{\left|e^{z\mathrm{Log}n}\right|} = \frac{1}{e^{\mathrm{Re}z\mathrm{Log}n}} \le \frac{1}{e^{a\mathrm{Log}n}} = \frac{1}{n^a}$$

do đó

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{1}{n^z}\right| \le \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^a}, \quad a > 1.$$

Theo tiêu chuẩn tích phân Cauchy thì

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^a} \text{ hộitụ } \Leftrightarrow \int_1^{\infty}\frac{1}{x^a}dx \text{ hội tụ } \Leftrightarrow a > 1.$$

Do đó theo tiêu chuẩn Weierstrass M thì

$$\zeta(z) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^z}$$

hội tụ đều trong nửa mặt phẳng $\mathrm{Re}(z) \ge a$, với $a > 1$.

2.

3. với $\mathrm{Re}(z) \le 0$ thì

$$\left|\frac{1}{n^z}\right| = \frac{1}{\left|e^{z\mathrm{Log}n}\right|} = \frac{1}{e^{\mathrm{Re}z\mathrm{Log}n}} \ge \frac{1}{e^0} = 1 \nrightarrow 0$$

khi $n \to \infty$. Do đó chuỗi phân kì với $\mathrm{Re}(z) \le 0$.

4. Vì $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n$ phân kì nên với $z = 1$ thì

$$\zeta(z=1) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$$

không giải tích tại $z = 1$. Đây là điểm kì dị gần nhất nên vòng tròn hội tụ là $|z-2| = 1$. Ta có khai triển Taylor của hàm zeta tại $z = 0$ là

$$\zeta(z) = \sum_{m=0}^{\infty} c_m (z-2)^m$$

trong đó

$$c_m = \frac{f^{(m)}(2)}{m!}.$$

Cụ thể

$$\begin{aligned}
c_0 &= \left.\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^z}\right|_{z=2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}, \\
c_1 &= \left.\frac{d}{dz} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^z}\right|_{z=2} = \left.\sum_{n=1}^{\infty} (-\mathrm{Log}n) \frac{1}{n^z}\right|_{z=2} = \sum_{n=1}^{\infty} (-\mathrm{Log}n) \frac{1}{n^2}, \\
c_2 &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-\mathrm{Log}n)^2}{2!} \frac{1}{n^2}, \\
\cdots\ &\cdots\ \cdots, \\
c_m &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-\mathrm{Log}n)^2}{m!} \frac{1}{n^2}, \quad m = 0, 1, 2, \ldots
\end{aligned}$$

5. Ta có

$$\begin{aligned}
\zeta(z) &= \frac{1}{1^z} + \frac{1}{2^z} + \frac{1}{3^z} + \frac{1}{4^z} + \ldots, \\
\frac{\zeta(z)}{2^z} &= \frac{1}{2^z} + \frac{1}{4^z} + \frac{1}{6^z} + \frac{1}{8^z} + \ldots, \\
\left(1 - \frac{1}{2^z}\right)\zeta(z) &= \zeta(z) - \frac{\zeta(z)}{2^z} = \frac{1}{1^z} + \frac{1}{3^z} + \frac{1}{5^z} + \frac{1}{7^z} + \ldots
\end{aligned}$$

Ở đây không có số hạng nào bên phải có dạng $1/n^z$ với n chia hết cho 2.

$$\frac{1}{3^z}\left(1 - \frac{1}{2^z}\right)\zeta(z) = \frac{1}{3^z} + \frac{1}{9^z} + \frac{1}{15^z} + \frac{1}{21} + \ldots,$$

$$\begin{aligned}\left(1-\frac{1}{2^z}\right)\left(1-\frac{1}{3^z}\right)\zeta(z) &= \left(1-\frac{1}{2^z}\right)\zeta(z)-\frac{1}{3^z}\left(1-\frac{1}{2^z}\right)\zeta(z)\\ &= \frac{1}{1^z}+\frac{1}{5^z}+\frac{1}{7^z}+\frac{1}{11^z}+\ldots\end{aligned}$$

Ở đây không có số hạng nào bên phải có dạng $1/n^z$ với n chia hết cho 2 hoặc 3.

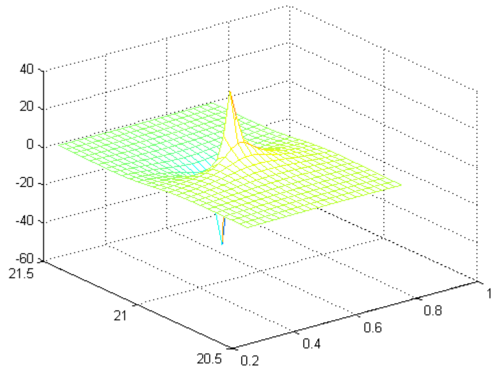
$$\begin{aligned}\frac{1}{5^z}\left(1-\frac{1}{3^z}\right)\left(1-\frac{1}{2^z}\right)\zeta(z) &= \frac{1}{5^z}+\frac{1}{25^z}+\frac{1}{35^z}+\frac{1}{55^z}+\ldots,\\ \left(1-\frac{1}{2^z}\right)\left(1-\frac{1}{3^z}\right)\left(1-\frac{1}{5^z}\right)\zeta(z) &= \left(1-\frac{1}{3^z}\right)\left(1-\frac{1}{2^z}\right)\zeta(z)-\frac{1}{5^z}\left(1-\frac{1}{3^z}\right)\left(1-\frac{1}{2^z}\right)\zeta(z)\\ &= \frac{1}{1^z}+\frac{1}{7^z}+\frac{1}{11^z}+\frac{1}{13^z}+\ldots\end{aligned}$$

Ở đây không có số hạng nào bên phải có dạng $1/n^z$ với n chia hết cho 2 hoặc 3 hoặc 5. Lặp lại các bước này với tất cả các số nguyên tố thì

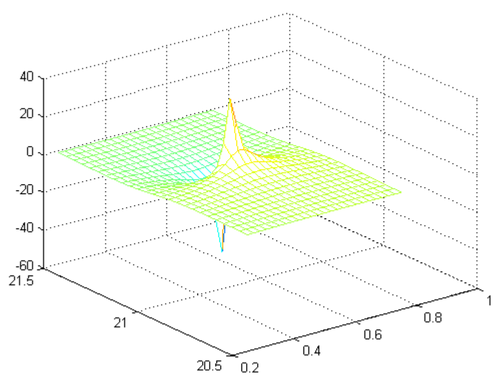
$$\zeta(z)\left(1-\frac{1}{2^z}\right)\left(1-\frac{1}{3^z}\right)\left(1-\frac{1}{5^z}\right)\ldots\left(1-\frac{1}{p_n^z}\right)\left(1-\frac{1}{p_{n+1}^z}\right)\ldots=\frac{1}{1^z}=\frac{1}{e^{z\mathrm{Log}1}}=1.$$

6.

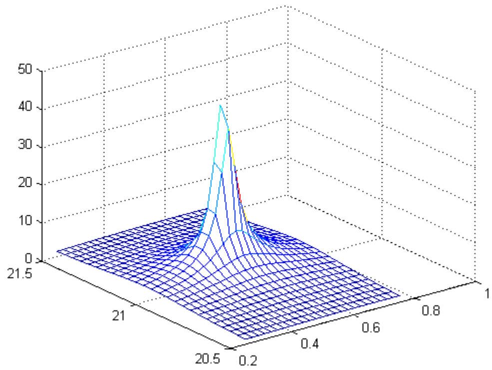
```
>> x=linspace(0.25,0.75,25);
>> y=linspace(20.5,21.5,25);
>> [X Y]=meshgrid(x,y);
>> w=zeta(X+i*Y)
>> meshgrid(X,Y,real(1./(w)))
>> mesh(x,y,imag(1./(w)))
>> mesh(x,y,abs(1./(w)))
```



Hình 5.7.2: $\mathrm{Re}\dfrac{1}{\zeta(z)}$



Hình 5.7.3: $\mathrm{Im}\dfrac{1}{\zeta(z)}$



Hình 5.7.4: $\left|\dfrac{1}{\zeta(z)}\right|$

5.8 The z Transformation

Bài 5.8.1. [5.8.1] Chứng minh rằng

$$\mathbb{Z}\left[e^{at}\right] = \frac{z}{z - e^{aT}},$$

với $|z| > \left|e^{aT}\right|$ và $a \in \mathbb{C}$.

Giải. Ta có $\left|ze^{-aT}\right| > 1$, do đó

$$\mathbb{Z}\left[e^{at}\right] = \sum_{n=0}^{+\infty} e^{anT} z^{-n} = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(e^{-aT} z\right)^{-n} = \frac{e^{-aT} z}{e^{-aT} z - 1} = \frac{z}{z - e^{aT}}.$$

Bài 5.8.2. [5.8.3-4] Cho α là số thực, chứng minh rằng

$$\mathbb{Z}\left[\sin(\alpha t)\right] = \frac{z \sin(\alpha T)}{z^2 - 2z\cos(\alpha T) + 1}$$

và

$$\mathbb{Z}\left[\cos\left(\alpha t\right)\right] = z\frac{z-\cos\left(\alpha T\right)}{z^2-2z\cos\left(\alpha T\right)+1}$$

với $|z| > 1$.

Giải. Ta có

$$\mathbb{Z}\left[\cos\left(\alpha T\right)+i\sin\left(\alpha T\right)\right] = \mathbb{Z}\left[e^{i\alpha T}\right]$$

Mặt khác

$$\begin{aligned}
\frac{z}{z-e^{i\alpha T}} &= \frac{z}{z-\cos\left(\alpha T\right)-i\sin\left(\alpha T\right)}\\
&= \frac{z\left(z-\cos\left(\alpha T\right)+i\sin\left(\alpha T\right)\right)}{\left(z-\cos\left(\alpha T\right)-i\sin\left(\alpha T\right)\right)\left(z-\cos\left(\alpha T\right)+i\sin\left(\alpha T\right)\right)}\\
&= \frac{z^2-z\cos\left(\alpha T\right)+iz\sin\left(\alpha T\right)}{z^2-2z\cos\left(\alpha T\right)+1}
\end{aligned}$$

Vậy ta có

$$\mathbb{Z}\left[\sin\left(\alpha t\right)\right] = \frac{z\sin\left(\alpha T\right)}{z^2-2z\cos\left(\alpha T\right)+1}$$

và

$$\mathbb{Z}\left[\cos\left(\alpha t\right)\right] = z\frac{z-\cos\left(\alpha T\right)}{z^2-2z\cos\left(\alpha T\right)+1}.$$

Bài 5.8.3. [5.8.7] Cho $\mathbb{Z}\left[f\left(t\right)\right] = F\left(z\right)$, chứng minh rằng

$$\mathbb{Z}\left[tf\left(t\right)\right] = -zT\frac{dF}{dz}.$$

Giải. Ta có

$$-zT\frac{dF}{dz} = -zT\sum_{n=1}^{\infty}-nf\left(nT\right)z^{-n-1} = \sum_{n=1}^{\infty}nTf\left(nT\right)z^{-n} = \mathbb{Z}\left[tf\left(t\right)\right].$$

Bài 5.8.4. [5.8.9] Sử dụng kết quả $\mathbb{Z}[u(t)] = z/(z-1)$, chứng minh rằng $\mathbb{Z}[u(t-T)] = 1/(z-1)$.

Giải. Ta có

$$\mathbb{Z}[u(t-T)] = z^{-1}\mathbb{Z}[u(t)] = \frac{z^{-1}z}{z-1} = \frac{1}{z-1}$$

Bài 5.8.5. [5.8.12] Chứng minh rằng $\mathrm{Log}(z/(z-1))$ giải tích trên mặt phẳng với nhát cắt $y=0$, $0 \le x \le 1$. Khai triển thành chuỗi Laurent với $|z| > 1$, và sử dụng kết quả này chứng minh rằng

$$\mathbb{Z}\left[\frac{T}{t}u(t-T)\right] = \mathrm{Log}\left(\frac{z}{z-1}\right)$$

Ở đây, ta định nghĩa $u(t-T)/t = 0$ khi $t = 0$.

Giải. Ta có

$$\begin{aligned}\mathrm{Log}\left(\frac{z}{z-1}\right) &= \mathrm{Log}\left(\frac{1}{1-z^{-1}}\right) = -\mathrm{Log}\left(1-z^{-1}\right)\\ &= -\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}n^{-1}(-z)^{-n} = \sum_{n=1}^{+\infty}n^{-1}z^{-n}.\end{aligned}$$

Mặt khác

$$\mathbb{Z}\left[\frac{T}{t}u(t-T)\right] = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{T}{nT}u((n-1)T) = \sum_{n=1}^{+\infty}n^{-1}z^{-n}.$$

Bài 5.8.6. [5.8.13] Tìm $\mathbb{Z}^{-1}[F(z)] = f(nT)$ với $F(z) = 1/(z-1)^2$.

Giải. Gọi $G(z) = \mathbb{Z}[u(t-T)]$, ta có

$$-zTF(z) = -zT\frac{dG}{dz} = \mathbb{Z}[tu(t-T)].$$

Ta suy ra được

$$-Tf(nT) = (n-1)\,Tu\,((n-1)\,T),$$

do đó

$$f(nT) = -(n-1)\,u\,((n-1)\,T) = \begin{cases} 0 & \text{khi } n = 0 \\ -n+1 & \text{khi } n > 0 \end{cases}$$

Bài 5.8.7. [5.8.16]

1. Cho $\mathbb{Z}[f(t)] = F(z)$, chứng minh rằng

$$\mathbb{Z}\left[e^{\beta t} f(t)\right] = F\left(ze^{-\beta T}\right).$$

2. Sử dụng kết quả Bài 5.8.2. [5.8.3-4] chứng minh rằng

$$\mathbb{Z}\left[e^{\beta t}\sin(\alpha t)\right] = \frac{ze^{\beta T}\sin(\alpha T)}{z^2 - 2ze^{\beta T}\cos(\alpha T) + e^{2\beta T}},$$

với α, β là các số thực và $|z| > e^{\beta T}$.

Giải.

1. Ta có

$$\mathbb{Z}\left[e^{\beta t} f(t)\right] = \sum_{n=0}^{+\infty} e^{\beta nT} f(nT)\, z^{-n} = \sum_{n=0}^{+\infty} f(nT)\left(e^{-\beta T} z\right)^{-n} = F\left(ze^{-\beta T}\right).$$

2. Ta có

$$\begin{aligned} \mathbb{Z}\left[e^{\beta t}\sin(\alpha t)\right] &= \frac{ze^{-\beta T}\sin(\alpha T)}{z^2 e^{-2\beta T} - 2ze^{-\beta T}\cos(\alpha T) + 1} \\ &= \frac{ze^{\beta T}\sin(\alpha T)}{z^2 - 2ze^{\beta T}\cos(\alpha T) + e^{2\beta T}}. \end{aligned}$$

Bài 5.8.8. [5.8.18]

1. Chứng minh rằng
$$\mathbb{Z}^{-1}\left[\frac{z}{(z-1)^2}\right] = h(nT) = n$$
bằng cách sử dụng tích chập của biến đổi ngược các hàm $z/(z-1)$ và $1/(z-1)$.

2. Chứng minh câu (1) bằng cách sử dụng công thức tích phân Cauchy.

Giải.

1. Ta có $\mathbb{Z}[u(t)] = z/(z-1)$ và $\mathbb{Z}[u(t-T)] = 1/(z-1)$, do đó

$$\begin{aligned} h(nT) &= \sum_{k=0}^{n} u((k-1)T)\, u((n-k)T) \\ &= \sum_{k=1}^{n} u((k-1)T)\, u((n-k)T) \\ &= \sum_{k=1}^{n} 1 = n. \end{aligned}$$

2. Áp dụng công thức tích phân Cauchy mở rộng, ta có

$$\begin{aligned} h(nT) &= \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{z}{(z-1)^2} z^{n-1} dz \\ &= \left.(z^n)'\right|_1 \\ &= n \end{aligned}$$

Bài 5.8.9. [5.8.22,24] Giải các phương trình sau phân với $f(n)$ sau

1. $f(n+2) = f(n+1) - f(n)$, $f(0) = f(1) = 1$.

2. $f(n+1) - f(n) = n$, $f(0) = 1$.

Giải. Đặt

$$F(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} f(n) z^{-n},$$

ta có

$$\begin{aligned} F(z) &= f(0) + f(1) z^{-1} + \sum_{n=2}^{+\infty} (f(n-1) - f(n-2)) z^{-n} \\ &= 1 + z^{-1} \left(f(1) + \sum_{n=2}^{+\infty} f(n-1) z^{-(n-1)} \right) - z^{-2} \sum_{n=2}^{+\infty} f(n-2) z^{-(n-2)} \\ &= 1 + z^{-1} F(z) - z^{-2} F(z). \end{aligned}$$

Rút $F(z)$ ra, ta có

$$F(z) = \frac{1}{1 - z^{-1} + z^{-2}}.$$

Đặt

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{1 - i\sqrt{3}}{2}, \\ \beta &= \frac{1 + i\sqrt{3}}{2}, \end{aligned}$$

ta có

$$\begin{aligned} F(z) &= \frac{1}{(1 - \alpha z^{-1})(1 - \beta z^{-1})} \\ &= \frac{\alpha}{\alpha - \beta} \cdot \frac{1}{1 - \alpha z^{-1}} + \frac{\beta}{\beta - \alpha} \cdot \frac{1}{1 - \beta z^{-1}} \\ &= \frac{\alpha}{\alpha - \beta} \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha^n z^{-n} + \frac{\beta}{\beta - \alpha} \sum_{n=0}^{+\infty} \beta^n z^{-n} \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\alpha^{n+1} - \beta^{n+1}}{\alpha - \beta} z^{-n}. \end{aligned}$$

Vậy ta có

$$f\left(n\right)=i\sqrt{3}\left(\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)^{n+1}-\left(\frac{1-i\sqrt{3}}{2}\right)^{n+1}\right).$$

Bài 5.8.10. [5.8.27]

1. Sử dụng hàm *ztrans* trong MATLAB để tìm z biến đổi của hàm e^{at} và đối chiếu kết quả với Bài 5.8.1. [5.8.1].

2. Kiểm tra kết quả với hàm ở câu (1) nhưng sử dụng hàm *iztrans*.

Giải.

```
>> syms T n z a y b
>> y=ztrans(exp(a*n*T))
>> pretty(y) z
>> check1=iztrans(y)
>> check2=iztrans(exp(1/z))
```

Appendix: Fractals and the Mandelbrot Set

Bài 5.A.1. [5.A.1]

1. Cho $b_n = n^2 i^n$, chứng minh rằng dãy này phân kì ra vô cùng.

2. Cho $b_n = n^2\cos\left(n\pi/2\right)$, chứng minh rằng chuỗi này phân kì nhưng không phân kì ra vô cùng.

Giải.

1. Ta có

$$|b_n| = n^2$$

Với $n > N$ thì $n^2 > N^2$ nên dãy b_n phân kì ra vô cùng.

2. Nếu n chẵn thì $b_n = n^2$ phân kì ra vô cùng .

Nếu n lẻ thì $b_n = 0$ không phân kì ra vô cùng,

Bài 5.A.2. [5.A.2] Chứng minh rằng nếu c thuộc tập Mandelbrot thì $\overline{c}$ cũng thuộc tập Mandelbrot.

Giải. Do c thuộc tập Mandelbrot nên dãy số $\{z_n\}_{n=0}^{\infty}$ định bởi

$$z_n = z_{n-1}^2 + c,\ z_0 = 0$$

là dãy không phân kì ra vô cùng. Xét $\{z'_n\}_{n=0}^{\infty}$ định bởi

$$z'_n = \left(z'_{n-1}\right)^2 + \overline{c},\ z'_0 = 0$$

thì

$$z'_n = \overline{z_n},\ \forall n \in \mathbb{N}.$$

nên $\{z'_n\}_{n=0}^{\infty}$ cũng không phân kì ra vô cùng. Do đó $\overline{c}$ cũng thuộc tập Mandelbrot.

Bài 5.A.3. [5.A.3]

1. Tìm giá trị c trong tập Mandelbrot mà $-c$ không thuộc tập Mandelbrot.

2. Chứng minh rằng -2 là điểm biên của tập Mandelbrot.

Giải. Xét $c = -2$, vì mọi điểm thuộc tập Mandelbrot đều có modulo không quá 2 nên ta chỉ cần chứng minh c thuộc tập Mandelbrot nhưng $-c$ thì không, là có kết luận của cả hai câu. Xét dãy $\{z_n\}_{n=0}^{\infty}$ định bởi

$$z_n = z_n^2 - 2, \ z_0 = 0$$

thì

$$z_n = 2 \ \forall n \geq 2,$$

do đó -2 thuộc tập Maldelbrot. Tuy nhiên, dãy $\{z_n'\}_{n=0}^{\infty}$ định bởi

$$z_n' = \left(z_{n-1}'\right)^2 + 2, \ z_0' = 0$$

là dãy số thực tiến đến $+\infty$ khi n lớn, nên 2 không thuộc tập Mandelbrot.

Bài 5.A.4. [5.A.4] Giả sử có số c sao cho dãy $\{z_n\}_{n=0}^{\infty}$ định bởi

$$z_n = z_{n-1}^2 + c, \ z_0 = 0$$

thỏa mãn $z_{n+p} = z_n$ $(p \neq 0)$. Chứng minh rằng c thuộc tập Mandelbrot.

Giải. Giả sử c không thuộc tập Mandelbrot, khi đó $|z_{0+np}|$ tiến đến $+\infty$ khi $n \to +\infty$, điều này mâu thuẫn với giả thiết.

Bài 5.A.5. [5.A.7] Xét tập Julia với phép lặp định bởi $f(z) = z^2 + c$.

1. Giả sử $z = z_0$ thuộc tập Julia, chứng minh rằng $-z_0$ cũng vậy.

2. Giả sử $c = 0$, chứng minh biên của tập Julia không phải là tập fractal.

Giải.

1. Ta có $f(-z_0) = f(z_0)$, do đó $f^n(-z_0) = f^n(z_0)$. Điều đó nói lên $-z_0$ cũng thuộc tập Julia.

2. Khi $c = 0$, ta có

$$|f^n(z_0)| = |z_0|^{2n},$$

vậy nếu z_0 thuộc tập Julia thì $|z_0| \leq 1$. Vậy biên tập Julia ở đây là đường tròn đơn vị không phải tập fractal.

Chương 6

Residues and Their Use in Integration

Mục lục

6.1 Introduction and Definition of the Residue

Bài 6.1.1. [6.1.1] Dùng thặng dư, tính tích phân $\oint_C \frac{1}{(z-1)^2} + \frac{i}{z-1} + 2(z-1) + \frac{3}{z-4} dz$, với C cho bởi

1. $|z-1| = 2$

2. $|z-5| = 2$

Giải.

1. Hàm

$$\frac{1}{(z-1)^2} + \frac{i}{z-1} + 2(z-1) + \frac{3}{z-4}$$

có điểm kì dị cô lập tại $z = 1$, và thặng dư là i. Hơn nữa $3/(z-4)$ giải tích tại $z = 1$. Do đó

$$\begin{aligned}\oint_C \frac{1}{(z-1)^2} + \frac{i}{z-1} + 2(z-1) + \frac{3}{z-4} dz &= 2\pi i \text{Res}\left[\frac{1}{(z-1)^2} + \frac{i}{z-1} + 2(z-1) + \frac{3}{z-4}, 1\right] \\ &= 2\pi i i = -2\pi.\end{aligned}$$

Bài 6.1.2. [6.1.4] Tính tích phân dưới đây bằng thặng dư

1. $\oint \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-n^2}(n-1)(z-1)^n dz$ quanh $|z| = 2$

2. $\oint \sum_{n=-5}^{\infty} \frac{1}{(z+i)^n (n+6)!} dz$ quanh $|z-i| = 3$

3. $\oint \sum_{n=-\infty}^{\infty} \cosh(1/z)\, dz$ quanh hình vuông đỉnh tại $\pm(1 \pm i)$

4. $\oint z \sin\left(\frac{1}{z-1}\right) dz$ quanh $|z| = 2$

5. $\oint \frac{1}{\sin z} dz$ quanh $|z| = 2$

Giải.

1. Thặng dư của

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-n^2} (n-1) (z-1)^n$$

là hệ số của $(z-1)^{-1}$, hay là $e^{-1}(-2)$. Vì điểm kì dị cô lập tại $z = 1$ nằm tong $|z| = 2$ nên

$$\begin{aligned}\oint \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-n^2} (n-1)(z-1)^n \, dz &= 2\pi i \mathrm{Res}\left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-n^2} (n-1)(z-1)^n, 1\right] \\ &= 2\pi i e^{-1}(-2) = \frac{-4\pi i}{e}.\end{aligned}$$

Bài 6.1.3. [6.1.10] Dùng thặng dư để chứng minh rằng nếu $n \geq 1$ là số nguyên thì

$$\oint_C \left(z + \frac{1}{z}\right)^n dz = \begin{cases} \dfrac{2\pi i n!}{\left(\frac{n-1}{2}\right)! \left(\frac{n+1}{2}\right)!}, & n \text{ lẻ} \\ 0, & n \text{ chẵn} \end{cases}$$

với C là đường đơn đóng bao quanh gốc tọa độ.

Giải. Ta có

$$\left(z + \frac{1}{z}\right)^n = \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{(n-k)!k!} z^{n-k} \left(z^{-1}\right)^k = \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{(n-k)!k!} z^{n-2k}.$$

Thặng dư của

$$\left(z+\frac{1}{z}\right)^n$$

là hệ số của z^{-1} trong khai triển trên, tức là $z^{n-2k}=z^{-1}$, hay $n-2k=-1$.

- Nếu n chẵn thì không có số k nào thỏa $n-2k=-1$ nên không có hệ số của z^{-1}.

- Nếu n lẻ thì
$$\operatorname{Res}\left[\left(z+\frac{1}{z}\right)^n,0\right]=\frac{n!}{(n-k)!k!}$$
với $k=(n+1)/2$.

Vậy

$$\oint_C\left(z+\frac{1}{z}\right)^n dz=\begin{cases}\dfrac{2\pi i n!}{\left(\frac{n-1}{2}\right)!\left(\frac{n+1}{2}\right)!}, & n \text{ lẻ}\\ 0, & n \text{ chẵn}\end{cases}.$$

Bài 6.1.4. [6.1.11] Ta muốn tính

$$\oint_{\substack{|z|=R\\ R>1}}\left(z^2-1\right)^{1/2}dz,$$

nơi chúng ta dùng một nhánh của biểu thức tích phân định nghĩa bởi nhánh cắt thẳng nối $z=1$ và $z=-1$, và $\left(z^2-1\right)^{1/2}>0$ trên đường $y=0, x>1$. Chú ý rằng những điểm kì dị được bao kín bởi đường của tích phân thì không cô lập.

1. Chứng minh rằng

$$\left(z^2-1\right)^{1/2}=z\left(1-1/z^2\right)^{1/2}=z-1/(2z)+\ldots,|z|>1.$$

2. Tính tích phân đã cho bằng tích phân từng phần của chuỗi Laurent tìm được trong phần (1).

Giải.

1. Theo khai triển Taylor ta có

$$(1+w)^{1/2} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n w^n, |w| < 1,$$

trong đó

$$\begin{aligned} c_0 &= 1, \\ c_1 &= \frac{1}{1!}\frac{1}{2}(1+w)^{-1/2}\Big|_{w=0} = \frac{1}{2}, \\ c_2 &= \frac{1}{2!}\frac{1}{2}\left(\frac{-1}{2}\right)(1+w)^{-3/2}\Big|_{w=0} = -\frac{1}{8}, \\ \cdots &\quad \cdots \quad \cdots \end{aligned}$$

Đặt $w = -1/z^2$ thì

$$\left(z - \frac{1}{z^2}\right)^{1/2} = 1 - \frac{1}{2z^2} - \frac{1}{8z^4} - \dots, |z| > 1$$

nên

$$\left(z^2 - 1\right)^{1/2} = z\left(z - \frac{1}{z^2}\right)^{1/2} = z - \frac{1}{2z} - \frac{1}{8z^3} - \dots$$

2.

$$\oint (z^2-1)^{1/2}\, dz \;=\; \oint z - \frac{1}{2z} - \frac{1}{8z^3} - \dots dz$$

$$\begin{aligned} &= 2\pi i \text{Res}\left[z - \frac{1}{2z} - \frac{1}{8z^3} - \dots, 0\right] \\ &= 2\pi i\left(\frac{-1}{2}\right) = -\pi i. \end{aligned}$$

Bài 6.1.5. [6.1.12] Tính tích phân $\oint \frac{1}{(z^2-1)^{1/2}} dz$, với cùng đường của tích phân và nhánh của $(z^2-1)^{1/2}$ đã dùng trong Bài 6.1.3. [6.1.10].

Giải. Theo khai triển Taylor ta có

$$(1+w)^{-1/2} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n w^n, |w| < 1$$

trong đó

$$\begin{aligned} c_0 &= 1, \\ c_1 &= \frac{1}{1!}\frac{-1}{2}(1+w)^{-3/2}\Big|_{w=0} = \frac{-1}{2}, \\ c_2 &= \frac{1}{2!}\frac{-1}{2}\left(\frac{-3}{2}\right)(1+w)^{-5/2}\Big|_{w=0} = \frac{3}{8} \\ \dots & \dots \dots \end{aligned}$$

Thay $w = -1/z^2$ thì

$$\left(1 - \frac{1}{z^2}\right)^{-1/2} = 1 + \frac{1}{2z^2} + \frac{3}{8}\frac{1}{z^4} + \dots, |z| > 1$$

nên

$$\begin{aligned} \oint \frac{1}{(z^2-1)^{1/2}} dz &= \oint \frac{1}{z\left(1 - \frac{1}{z^2}\right)^{1/2}} dz \\ &= \oint \frac{1}{z}\left(1 - \frac{1}{z^2}\right)^{-1/2} dz \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \oint \frac{1}{z}\left(1+\frac{1}{2z^2}+\frac{3}{8}\frac{1}{z^4}+\dots\right)dz \\
&= 2\pi i \mathrm{Res}\left[\frac{1}{z}+\frac{1}{2z^3}+\frac{3}{8z^5}+\dots,0\right] \\
&= 2\pi i.
\end{aligned}
$$

6.2 Isolated Singularities

Bài 6.2.1. [6.2.1] Dùng khai triển chuỗi Laurent $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-z_0)^n$ chứng minh rằng hàm sau có điểm kì dị cốt yếu tại những điểm đã cho. Xác định thặng dư và cho biết c_{-2}, c_{-1}, c_0, c_1.

1. $\sinh(1/z)$ tại $z=0$
2. $(z-1)^3 \cosh(1/(z-1))$ tại $z=1$
3. $e^{1/z}\sinh(1/z)$ tại $z=0$
4. $2^{i/z}$ tại $z=0$
5. $e^{1/(z-i)}e^{z-i}$ tại $z=i$

Giải.

1. Ta có

$$\sinh\left(\frac{1}{z}\right) = z^{-1}+\frac{z^{-3}}{3!}+\frac{z^{-5}}{5!}+\dots$$

nên hàm sinh $(1/z)$ có điểm kì dị cốt yếu tại 0, và

$$\begin{aligned} c_{-2} &= 0, \\ c_{-1} &= 1, \\ c_0 &= 0, \\ c_1 &= 0. \end{aligned}$$

Bài 6.2.2. [6.2.6] Có phải hàm $e^{\mathrm{Log}(1/z)}$ có điểm kì dị cốt yếu tại $z = 0$?. Giải thích. Bản chất của điểm kì dị là gì và thặng dư là gì?.

Giải.

Bài 6.2.3. [6.2.7]

1. Dùng MATLAB, vẽ hàm

$$f(z) = \frac{1}{(z+2)^2 (z-2)^2 z}$$

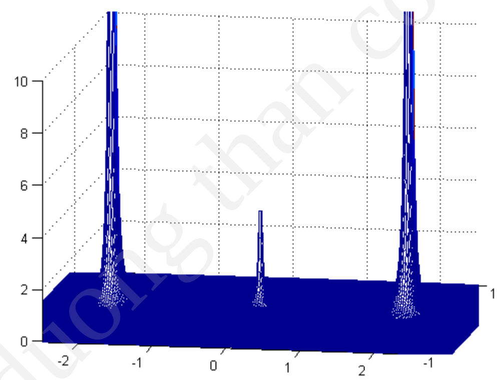
với hai cực bậc hai, và một cực bậc một.

2. Chúng ta quan sát kích thước của hàm không có giới hạn vô cùng tại điểm kì dị cốt yếu. Minh họa điều này bằng hình vẽ MATLAB của kích thước của $e^{1/z}$ trong miền $0 < |z| \leq 1$. Để cho hình vẽ hữu dụng, tốt nhất không cho $|z|$ tiến quá gần 0, bạn sẽ thấy sau một vài thí nghiệm.

Giải.

1.

```
>> x=linspace(-3,3,200);
>> y=linspace(-1,1,200);
>> [X,Y]=meshgrid(x,y);
>> z=X+i*Y;
>> f=((z+2).^2).*z.*((z-2).^2);
>> f=1./f;
>> f=abs(f);
>> mesh(X,Y,Z);
>> mesh(X,Y,f)
>> axis([-2.5 2.5 -1 1 0 10])
>> view(10,15)
```

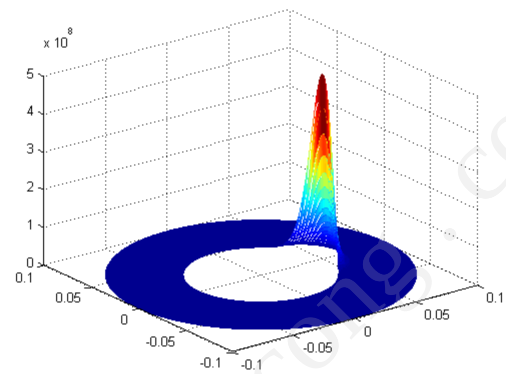


Hình 6.2.1

2.

```
>> r=linspace(0.05,0.1,100);
>> th=linspace(0,360,361);
>> th=th/(360)*2*pi;
>> [TH,R]=meshgrid(th,r);
>> [X,Y]=pol2cart(TH,R);
```

```
>> z=X+i*Y;
>> f=exp(1./z);
>> f=abs(f);
>> mesh(X,Y,f)
```



Hình 6.2.2

Bài 6.2.4. [6.2.8] Dùng khai triển chuỗi hoặc quy tắc L'Hopital để chứng minh rằng hàm sau có điểm kì dị bỏ được tại những điểm kì dị. Bạn phải chứng minh rằng $\lim_{z\to z_0} f(z)$ tồn tại và hữu hạn tại điểm kì dị. Xác định $f(z)$ nên định nghĩa như thế nào tại mỗi điểm kì dị bỏ được. Dùng nhánh chính nơi nào tính nhập nhằng.

1. $\frac{e^z-1}{z}$ tại $z=0$
2. $\frac{e^z-e}{\text{Log} z}$ tại $z=1$
3. $\frac{\sinh z}{z^2+\pi^2}$ tại hai điểm kì dị
4. $\frac{z^2-1}{z^i-i^{z-1}}$ tại $z=1$
5. $\frac{\text{Log} z}{z^z-1}$ tại $z=1$
6. $\frac{1}{z}\text{Log}\frac{1}{1-z}$ tại $z=0$

7. $\frac{1}{z^2} - \frac{\cos z^2}{z^2}$ tại $z = 0$

Giải.

1. Ta có

$$\lim_{z \to 0} \frac{e^z - 1}{z} = \lim_{z \to 0} \frac{1 + z + \frac{z^2}{2!} + \ldots - 1}{z} = \lim_{z \to 0} 1 + \frac{z}{2!} + \ldots = 1$$

nên $(e^z - 1)/z$ có điểm kì dị bỏ được tại $z = 0$. Ta định nghĩa $f(0) = 1$.

Bài 6.2.5. [6.2.15]

1. Cho cả $g(z)$ và $h(z)$ giải tích và có không điểm bậc m tại z_0. Cho $f(z) = g(z)/h(z)$. Chứng minh rằng
$$\lim_{z \to z_0} f(z) = \frac{g^{(m)}(z_0)}{h^{(m)}(z_0)}$$
2. Giải thích tại sao $f(z)$ có điểm kì dị bỏ được tại z_0. Nên định nghĩa $f(z)$ như thế nào để bỏ được điểm kì dị của nó?
3. Dùng kết quả trong (1) và (2) để bỏ điểm kì dị tại $z = 0$ trong hàm $f(z) = \frac{z^3}{\sin^3 z}$ bởi định nghĩa chính xác $f(0)$.

Giải.

1. Vì $g(z)$ và $h(z)$ giải tích và có không điểm bậc m tại z_0 nên

$$\begin{aligned} g(z) &= c_m (z - z_0)^m + c_{m+1} (z - z_0)^{m+1} + \ldots, \\ h(z) &= d_m (z - z_0)^m + d_{m+1} (z - z_0)^{m+1} + \ldots \end{aligned}$$

với $c_m,\ d_m \neq 0$ và

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{g^{(n)}(z_0)}{n!}, \quad n = m, m+1, \ldots, \\ d_k &= \frac{h^{(n)}(z_0)}{n!}, \quad k = m, m+1, \ldots \end{aligned}$$

Ta có

$$\begin{aligned} \lim_{z\to z_0} f(z) &= \lim_{z\to z_0} \frac{c_m (z-z_0)^m + c_{m+1}(z-z_0)^{m+1} + \ldots}{d_m (z-z_0)^m + d_{m+1}(z-z_0)^{m+1} + \ldots} \\ &= \lim_{z\to z_0} \frac{c_m + c_{m+1}(z-z_0) + \ldots}{d_m + d_{m+1}(z-z_0) + \ldots} \\ &= \frac{c_m}{d_m} = \frac{g^{(m)}(z_0)}{h^{(m)}(z_0)}. \end{aligned}$$

2. Vì $f(z)$ có khai triển Taylor tại z_0

$$f(z) = \frac{c_m + c_{m+1}(z-z_0) + \ldots}{d_m + d_{m+1}(z-z_0) + \ldots} = a_0 + a_1(z-z_0) + \ldots$$

với $a_0 = c_m/d_m$. Nên không có phần chính trong khai triển Laurent tại z_0. Vì vậy $f(z)$ có điểm kì dị bỏ được tại z_0, và ta định nghĩa

$$f(z_0) = \frac{c_m}{d_m} = \frac{g^{(m)}(z_0)}{h^{(m)}(z_0)}.$$

3. Doz^3 có không điểm bậc 3, và

$$(\sin z)^3 = \left(z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \ldots\right)^3$$

có không điểm bậc 3. Nên

$$\lim_{z\to 0}\frac{z^3}{\sin^3 z}=\frac{\left.\left(z^3\right)^{"'}\right|_{z=0}}{\left.\left(\sin^3 z\right)^{"'}\right|_{z=0}}=\frac{6}{\left.6\cos z-27\sin^2 z\cos z\right|_{z=0}}=\frac{6}{6}=1.$$

Vậy ta định nghĩa $f(0)=1$.

Bài 6.2.6. [6.2.16] Cho $f(z)=g(z)/h(z)$, với

$$g(z)=b_M(z-z_0)^M+b_{M+1}(z-z_0)^{M+1}+\dots$$

có một không điểm bậc M tại $z=z_0$ và

$$h(z)=a_N(z-z_0)^N+a_{N+1}(z-z_0)^{N+1}+\dots,$$

có một không điểm bậc N tại $z=z_0$.

1. Chứng minh rằng nếu $N\geq M$, $f(z)$ có một cực của bậc $N-M$ tại $z=z_0$.

2. Nếu $N\leq M$, nên định nghĩa $f(z_0)$ như thế nào để điểm kì dị của $f(z)$ tại z_0 bị khử?. Cho trường hợp $N=M, N<M$

Giải.

1. Ta có

$$f(z)=\frac{g(z)}{h(z)}=\frac{b_M(z-z_0)^M+b_{M+1}(z-z_0)^{M+1}+\dots}{a_N(z-z_0)^N+a_{N+1}(z-z_0)^{N+1}+\dots}.$$

Nếu $N > M$ thì

$$\begin{aligned}(z-z_0)^{N-M}\lim_{z\to z_0} f(z) &= \frac{b_M (z-z_0)^N + b_{M+1}(z-z_0)^{N+1}+\ldots}{a_N (z-z_0)^N + a_{N+1}(z-z_0)^{N+1}+\ldots}\\ &= \frac{b_M + b_{M+1}(z-z_0)+\ldots}{a_N + a_{N+1}(z-z_0)+\ldots}\\ &= \frac{b_M}{a_N} \neq 0, \infty,\end{aligned}$$

nên $f(z)$ có một cực của bậc $N-M$ tại $z = z_0$.

2.

- Nếu $N = M$ thì

$$\begin{aligned}\lim_{z\to z_0} f(z) &= \lim_{z\to z_0}\frac{b_N (z-z_0)^N + b_{N+1}(z-z_0)^{N+1}+\ldots}{a_N (z-z_0)^N + a_{N+1}(z-z_0)^{N+1}+\ldots}\\ &= \frac{b_N}{a_N} = \frac{g^{(N)}(z_0)}{h^{(N)}(z_0)}\end{aligned}$$

Ta định nghĩa

$$f(z_0) = \frac{g^{(N)}(z_0)}{h^{(N)}(z_0)}$$

.

- Nếu $N < M$ thì

$$\begin{aligned}\lim_{z\to z_0} f(z) &= \lim_{z\to z_0}\frac{b_M (z-z_0)^M + b_{M+1}(z-z_0)^{M+1}+\ldots}{a_N (z-z_0)^N + a_{N+1}(z-z_0)^{N+1}+\ldots}\\ &= \lim_{z\to z_0}\frac{b_M (z-z_0)^{M-N} + b_{M+1}(z-z_0)^{M-N+1}+\ldots}{a_N + a_{N+1}(z-z_0)+\ldots}\\ &= 0\end{aligned}$$

Ta định nghĩa $f(z_0) = 0$.

Bài 6.2.7. [6.2.17] Xác định tất cả cực cho mỗi hàm dưới đây và cho biết bậc của mỗi cực. Dùng nhánh chính của hàm đã cho nếu tính nhập nhằng.

1. $\frac{1}{z^2+2z+1}$

2. $\frac{1}{z^2+z+1}$

3. $\frac{1}{z^3-1}$

4. $\frac{z-1}{(z^3-1)^2}$

5. $\frac{\sin z}{z^{10}(z+1)}$

6. $\frac{1}{\cosh z - ae^z}$, với a là số thực

7. $\frac{1}{10^z - e^z}$

8. $\frac{\sinh z}{z \sin z}$

9. $\frac{1}{(e^z+1)^4}$

10. $\frac{1}{\sin(\pi z/e)\left[\mathrm{Log}(z)-1\right]}$

11. $\frac{\sin 1/z}{(z+1/z)^3}$

12. $\frac{\sin(z=i\pi/4)}{e^{2z}-i}$

13. $\frac{1}{z^{1/2}\sinh^4 z}$

14. $\frac{1}{1-z^{1/2}}$

15. $\frac{1}{\left(1-z^{1/2}\right)^4}$

Giải.

1. Ta có

$$\frac{1}{z^2+2z+1} = \frac{1}{(z+1)^2},$$

có cực điểm bậc 2 tại -1.

Bài 6.2.8. [6.2.32] Cho $f(z) = \frac{\mathrm{Log}z}{z^2+1}$. Có phải hàm này là hàm chỉnh hình trong miền đã cho?. Giải thích.

1. $|z| < 1$
2. $|z-i| < 1$
3. $|z-1| < 1$
4. $|z+i| < 2$

Giải.

1. Ta có Log$z$ không giải tích trong nhánh cắt $y = 0, -\infty \le x \le 0$. Vì miền $|z| < 1$ có một phần nhánh cắt $y = 0, -1 \le x \le 0$ nền hàm không chỉnh hình trong miền $|z| < 1$.

Bài 6.2.9. [6.2.33] Cho $f(z)$ có cực điểm bậc m tại z_0,và cho $g(z)$ có cực bậc điểm n tại z_0.

1. Chứng minh rằng(fg) có cực điểm bậc $m+n$ tại z_0.
2. Nếu $m \ne n$, chứng minh rằng bậc của cực điểm tại z_0 của $(f+g)$ thì lớn hơn m và n.
3. Nếu $m = n$, chứng minh rằng bậc của cực điểm tại z_0của $(f+g)$ không nhất thiết là m.

Giải.

1. Ta có

$$\begin{aligned} f(z) &= c_{-m}(z-z_0)^{-m} + c_{-(m-1)}(z-z_0)^{-(m-1)} + \ldots, \\ g(z) &= c_{-n}(z-z_0)^{-n} + c_{-(n-1)}(z-z_0)^{-(n-1)} + \ldots \end{aligned}$$

nên

$$f(z)\,g(z) = c_{-m}c_{-n}(z-z_0)^{-(m+n)} + \ldots$$

Vì $c_{-m},\ c_{-n} \neq 0$ và số mũ âm lớn nhất của chuỗi trên là $-(m+n)$. Vậy fg có cực điểm bậc $m+n$ tại z_0.

2. Giả sử $m > n$ thì

$$f(z) + g(z) = c_{-m}(z-z_0)^{-m} + \ldots$$

Vì $c_{-m} \neq 0$ và số mũ âm lớn nhất của chuỗi trên là $-m$ nên $f+g$ có cực bậc m, lớn hơn n. Ngược lại $m < n$ thì tương tự.

3. Ta sẽ cho một ví dụ

$$f(z) = \frac{\cos z}{z^2}, \quad g(z) = \frac{-1}{z^2} + \frac{1}{z}.$$

Lúc đó, f và g đều có cực điểm bậc 2 nhưng

$$\begin{aligned} f(z) + g(z) &= \frac{\cos z}{z^2} - \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z} \\ &= \frac{1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} + \ldots - 1}{z^2} + \frac{1}{z} \\ &= \frac{-1}{2!} + \frac{z^2}{4!} + \ldots + \frac{1}{z} \end{aligned}$$

có cực điểm bậc 1 tại $z = 0$.

Bài 6.2.10. [6.2.36] Một điểm kì dị cốt yếu không cô lập của hàm là một điểm kì dị có mọi lân cận gồm hữu hạn số điểm kì dị cô lập của hàm. Ví dụ hàm $f(z) = 1/\sin(1/z)$ có điểm kì dị không cô lập tại $z = 0$.

1. Chứng minh rằng trong miền $|z| < \epsilon\,(\epsilon > 0)$, có cực điểm tại $z = \pm 1/n\pi$, $\pm 1/(n+1)\pi$, $\pm 1/(n+2)\pi, \ldots$, với n là số nguyên sao cho $n > 1/(\pi\epsilon)$.
2. Có hay không một khai triển Laurent của $f(z)$ trong lân cận bỏ đi của $z = 0$.
3. Tìm hàm khác với điểm kì dị không cô lập tại $z = 0$. Chứng minh rằng nó có hữu hạn số điểm kì dị cô lập trong $|z| = \epsilon$.

Giải.

1. Ta có $\sin(1/z) = 0$ khi

$$\frac{1}{z} = \pm(n\pi), \pm(n+1)\pi, \pm(n+2)\pi, \ldots$$

với $n \geq 1$ là số nguyên. Do đó

$$z = \pm\frac{1}{n\pi}, \pm\frac{1}{(n+1)\pi}, \pm\frac{1}{(n+2)\pi}, \ldots$$

là những điểm kì dị của $1/\sin(z^{-1})$. Những điểm này là cực điểm đơn của $1/\sin(z^{-1})$ vì $\sin(z^{-1})$ có không điêm bậc một tại những điểm này. Giả sử $n > 1/(\pi\varepsilon)$ thì vỡi mỗi cực điểm của $1/\sin(z^{-1})$ tại

$$z = \pm\frac{1}{n\pi}, \pm\frac{1}{(n+1)\pi}, \pm\frac{1}{(n+2)\pi}, \ldots$$

vẫn thỏa $|z| < \epsilon$.

2. Không có khai triển Laurent của $f(z)$ trong lân cận bỏ đi của $z = 0$. Vì không có lân cận bỏ đi của $z = 0$ mà $f(z)$ giải tích (với $n > 1/(\pi\varepsilon)$ ta có thể tìm được điểm kì dị của $1/\sin(z^{-1})$ trong lân cận).

3.

Bài 6.2.11. [6.2.37] Cho hàm $f(z)$ giải tích trong lân cận bỏ đi N cho bởi $0 < |z - z_0| < a$. Ta giả sử $f(z)$ được bao mọi nơi trong N, chẳng hạn $|f(z)| \leq M$, và sẽ chứng minh tồn tại một giá trị K sao cho $\lim_{z\to z_0} f(z) = K$. Nếu ta định nghĩa $f(z_0) = K$ ta sẽ chứng minh được $f(z)$ giải tích tại z_0.

1. Cho $u(z) = (z - z_0)^2 f(z)$ và định nghĩa $u(z_0) = 0$. Giải thích tại sao $u'(z)$ tồn tại trong N.
2. Chứng minh rằng $u'(z_0) = 0$.
3. Giải thích tại sao nếu bạn làm khai triển chuỗi Taylor trước $u(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$ rằng c_0 và c_1 cùng bằng 0. Giải thích như thế nào kết quả này chứng minh rằng $u(z) = v(z)(z - z_0)^2$, với $v(z)$ là hàm giải tích tại z_0.
4. Dùng kết quả trước để thiết lập điều gần như hiển nhiên rằng cho $z \neq z_0$ ta có $v(z) = f(z)$. Bạn biết $\lim_{z\to z_0} v(z)$ tồn tại như thế nào?. Chúng ta gọi số này là K.
5. Nếu ta định nghĩa $f(z_0) = K$, $f(z)$ giải tích như thế nào trong lân cận đã cho?.

Giải.

1. Trong N thì $f(z)$ giải tích mọi nơi. Vậy nên $u(z) = (z - z_0)^2 f(z)$ là tích của những hàm giải tích nên là hàm giải tích trong N.

2. Ta có

$$\begin{aligned} u'(z_0) &= \lim_{z\to z_0}\frac{u(z)-u(z_0)}{z-z_0} = \lim_{z\to z_0}\frac{u(z)}{z-z_0} \\ &= \lim_{z\to z_0}\frac{(z-z_0)^2 f(z)}{z-z_0} = \lim_{z\to z_0}(z-z_0) f(z) \\ \big(\text{Vì } f(z)\le M\big) &= 0. \end{aligned}$$

Vì $u(z)$ tồn tại trong miền $0<|z-z_0|<a$, và $u'(z_0)$ tồn tại nên $u'(z)$ tồn tại trong miền $|z-z_0|$. Và vì vậy có khai triển Taylor tại z_0.

3. Ta có

$$u(z)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-z_0)^n$$

với

$$c_0=u(z_0)=0,\ c_1=u'(z_0)=0.$$

Do đó

$$u(z)=\sum_{n=0}^{\infty} c_{n+2}(z-z_0)^{n+2}=(z-z_0)^2\sum_{n=0}^{\infty} c_{n+2}(z-z_0)^n=(z-z_0)^2 v(z)$$

với

$$v(z)=\sum_{n=0}^{\infty} c_{n+2}(z-z_0)^n$$

là hàm giải tích tại z_0.

4. Ta có

$$u(z)=(z-z_0)^2 v(z)$$

với $|z-z_0|<a$, nên

$$(z-z_0)^2 v(z)=(z-z_0)^2 f(z),\quad |z-z_0|<a$$

Vậy nên $v(z) = f(z)$ với $z \neq z_0$. Và ta có $\lim_{z \to z_0} v(z)$ tồn tại vì $v(z)$ giải tích tại z_0. Do vậy

$$\lim_{z \to z_0} v(z) = \lim_{z \to z_0} f(z) = K.$$

5. Nếu $f(z_0) = K$ thì $f(z_0)$là tổng của chuỗi hội tụ Taylor

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_{n+2} (z - z_0)^n$$

với $|z - z_0| < a$ và do đó $f(z)$ giải tích tại z_0.

6.3 Finding the Residue

Bài 6.3.1. [6.3.1] Cho $f(z) = g(z) + h(z)$. Chứng minh rằng thặng dư của $f(z)$ tại z_0 là tổng của thặng dư của $g(z)$ và $h(z)$ tại z_0. Giả sử rằng z_0 là điểm kì dị cô lập của cả $g(z)$ và $h(z)$.

Giải. Giả sử $f,\ g,\ h$ giải tích trong lân cận bỏ đi của z_0 cho bởi $0 < |z - z_0| < R$, giả sử $0 < r < R$. Ta có

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z-z_0|=r} f(z)\, dz &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z-z_0|=r} g(z) + h(z)\, dz \\ &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z-z_0|=r} g(z)\, dz + \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z-z_0|=r} h(z)\, dz \end{aligned}$$

Vậy nên

$$\operatorname{Res}[f(z), z_0] = [g(z), z_0] + [h(z), z_0].$$

Bài 6.3.2. [6.3.3] Cho mỗi hàm dưới đây, xác định nơi và bậc của mỗi cực và tìm thặng dư. Dùng nhánh chính cho hàm đa trị.

1. $\frac{\cos z}{z^2+z+1}$

2. $\frac{1}{z} - \frac{e^z}{z(z+1)} + \frac{1}{(z-1)^4}$

3. $\frac{1}{z^{1/2}(z^2-9)^2}$

4. $\dfrac{\cos\left(\frac{\pi}{2}z\right)}{z^2\left(z-1\right)^2}$

5. $\frac{1}{\left(\mathrm{Log} z\right)(z^2+1)^2}$

6. $\frac{\sin z - z}{z \sinh z}$

7. $\frac{z^8+1}{z^4}$

8. $\frac{1}{\left(\mathrm{Log}(z/e)-1\right)^2}$

9. $\frac{1}{\sin z^2}$

10. $\frac{1}{10^z - e^z}$

11. $\frac{\cos(1/z)}{\sin z}$

12. $\frac{1}{e^{2z}+e^z+1}$

Giải.

1. Ta có $z^2 + z + 1 = 0$ khi

$$z_1 = \frac{-1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2},\ z_2 = \frac{-1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}.$$

z_1 và z_2 là hai cực đơn và thặng dư là

$$\operatorname{Res}\left[\frac{\cos z}{z^2+z+1}, z_1\right] = \left.\frac{\cos z}{2z+1}\right|_{\frac{-1}{2}+\frac{i\sqrt{3}}{2}} = \frac{\cos\left(\frac{-1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}{i\sqrt{3}},$$
$$\operatorname{Res}\left[\frac{\cos z}{z^2+z+1}, z_2\right] = \left.\frac{\cos z}{2z+1}\right|_{\frac{-1}{2}-\frac{i\sqrt{3}}{2}} = \frac{\cos\left(\frac{-1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}{-i\sqrt{3}}.$$

Bài 6.3.3. [6.3.15] Cho hàm giải tích $f(z) = g(z)/h(z)$, có cực tại z_0. Cho $g(z) \neq 0$, $h(z_0) = h'(z_0) = 0$, $h''(z_0) \neq 0$. Thì $f(z)$ có một cực điểm bậc hai tại $z = z_0$. Chứng minh rằng

$$\operatorname{Res}[f(z), z_0] = \frac{2g'(z_0)}{h''(z_0)} - \frac{2}{3}\frac{g(z_0)\,h'''(z_0)}{[h''(z_0)]^2}.$$

Dùng công thức trên để tính

$$\operatorname{Res}\left[\frac{\cos z}{(\operatorname{Log} z-1)^2}, e\right]$$

Giải. Theo khai triển Taylor, ta có

$$g(z) = c_0 + c_1(z-z_0) + c_2(z-z_0)^2 + \dots$$

với

$$c_0 = g(z_0), \; c_1 = \frac{g'(z_0)}{1!}, \dots$$

Và

$$h(z) = d_2(z-z_0)^2 + d_3(z-z_0)^3 + \dots$$

với

$$d_2 = \frac{h"(z_0)}{2!}, \dots$$

Ta có $f = g/h$ tương đương với

$$a_{-2}(z-z_0)^{-2} + a_{-1}(z-z_0)^{-1} + a_0 + \dots \;=\; \frac{c_0 + c_1(z-z_0) + c_2(z-z_0)^2 + \dots}{d_2(z-z_0)^2 + d_3(z-z_0)^3 + \dots}.$$

Đồng nhất hệ số ta được

$$\begin{aligned} a_{-2}d_2 &= c_0, \\ a_{-2}d_3 + a_{-1}d_2 &= c_1, \\ a_0 d_2 &= c_2. \end{aligned}$$

Suy ra

$$a_{-2} = \frac{c_0}{d_2},\; a_{-1} = \frac{c_1}{d_2} - \frac{c_0 d_3}{d_2^2}.$$

Vậy

$$\operatorname{Res}[f(z), z_0] = \frac{c_1}{d_2} - \frac{c_0 d_3}{d_2^2} = \frac{g'(z_0)}{\frac{h''(z_0)}{2}} - \frac{g(z_0)\frac{h'''(z_0)}{3!}}{\left(\frac{h''(z_0)}{2!}\right)^2} = \frac{2g'(z_0)}{h''(z_0)} - \frac{2}{3}\frac{g(z_0)h'''(z_0)}{[h''(z_0)]^2}.$$

Đặt

$$g(z) = \cos z,\; h(z) = (\mathrm{Log} z - 1)^2$$

thì

$$\operatorname{Res}\left[\frac{\cos z}{(\mathrm{Log} z - 1)^2}, e\right] = \frac{2g'(e)}{h''(e)} - \frac{2}{3}\frac{g(e)h'''(e)}{[h''(e)]^2} = -e^2 \sin e + e\cos e.$$

Bài 6.3.4. [6.3.16] Tìm thặng dư của hàm sau tại những điểm tương ứng

1. $\frac{z+1}{z}\sin(1/z)$ tại 0

2. $\frac{1}{z^z - 1}$ (nhánh chính) tại 1

3. $\frac{1}{(z+i)^5}$ tại $-i$
4. $\frac{\sin z}{(z+i)^5}$ tại $-i$
5. $\frac{z^{12}}{(z-1)^{10}}$ tại 1
6. $\frac{1}{\sinh\left(2\mathrm{Log} z\right)}$ tại i
7. $\frac{1}{\cos\left(\frac{\pi}{2}e^z+\sin z\right)}$ tại 0
8. $\frac{1}{\sin[z(e^z-1)]}$ tại 0
9. $\frac{\cos(z-1)}{z^{10}}+\frac{2}{z-1}$ tại $z=1$
10. $\frac{\cos(z-1)}{z^{10}}+\frac{2}{z-1}$ tại $z=0$

Giải.

1. Ta có

$$\begin{aligned}\frac{z+1}{z}\sin\frac{1}{z} &= \left(1+\frac{1}{z}\right)\left(z^{-1}-\frac{z^{-3}}{3!}+\frac{z^{-5}}{5!}+\dots\right)\\ &= \left(z^{-1}-\frac{z^{-3}}{3!}+\dots\right)+\left(z^{-2}-\frac{z^{-4}}{3!}+\dots\right).\end{aligned}$$

Vậy

$$\operatorname{Res}\left[\frac{z+1}{z}\sin\frac{1}{z}\right]=c_{-1}=1.$$

Bài 6.3.5. [6.3.26]

1. Cho $n \geq 1$ là số nguyên. Chứng minh rằng n cực điểm của

$$\frac{1}{z^n+z^{n-1}+z^{n-2}+\ldots+1}$$

tại $\operatorname{cis}\left(2k\pi/\left(n+1\right)\right), k=1,2,\ldots,n.$

2. Chứng minh rằng những cực điểm là đơn.

3. Chứng minh rằng thặng dư tại $\text{cis}\,(2k\pi/\,(n+1))$ là

$$\frac{\text{cis}\left(\frac{2k\pi}{n+1}\right)-1}{(n+1)\,\text{cis}\left(\frac{2k\pi n}{n+1}\right)}$$

Giải.

1. Ta có

$$\frac{1}{z^n+z^{n-1}+z^{n-2}+\ldots+1}=\frac{z-1}{z^{n+1}-1},\quad z\neq 1$$

nên cực điểm của

$$\frac{1}{z^n+z^{n-1}+z^{n-2}+\ldots+1}$$

là những giá trị mà $z^{n+1}-1=0$ hay

$$z=1^{\frac{1}{n+1}}=\text{cis}\left(\frac{2k\pi}{n+1}\right),k=1,2,\ldots,n$$

($k\neq 0$ vì nếu $k=0$ thì $z=1$ không phải là cực điểm).

2. Vì $z-1$ khác 0 ở tất cả các cực điểm, và $z^{n+1}-1$ có không điểm bậc 1 ở tất cả các cực điểm. Vì vậy những cực điểm này là đơn.

3. Ta có

$$\text{Res}\left[\frac{z-1}{z^{n+1}-1},\text{cis}\left(\frac{2k\pi}{n+1}\right)\right]=\left.\frac{z-1}{(n+1)\,z^n}\right|_{\text{cis}\left(\frac{2k\pi}{n+1}\right)}=\frac{\text{cis}\left(\frac{2k\pi}{n+1}\right)-1}{(n+1)\,\text{cis}\left(\frac{2k\pi n}{n+1}\right)}$$

Bài 6.3.6. [6.3.27] Dùng thặng dư để tính tích phân sau. Dùng nhánh chính của hàm đa trị

1. $\oint \frac{dz}{\sin z}$ quanh $|z-6| = 4$

2. $\oint \frac{\sinh 1/z}{z-1} dz$ quanh $|z| = 2$

3. $\oint \frac{\sin z}{\sinh^2 z} dz$ quanh $|z| = 3$

4. $\oint \frac{dz}{[\text{Log}(\text{Log} z)-1]}$ quanh $|z-16| = 5$

5. $\oint \frac{e^{1/z}}{z^2-1} dz$ quanh $|z-1| = 3/2$

6. $\oint \frac{dz}{\sinh z - 2e^z}$ quanh $|z+1| = 2$

7. $\oint \frac{dz}{\sin\left(z^{1/2}\right)}$ quanh $|z-9| = 5$

8. $\oint \frac{dz}{\bar{z}-b}$ quanh $|z| = a > 0$. Chú ý hàm trong dấu tích phân không giải tích. Cho $a > |b|$ và $a < |b|$

Giải.

1. Ta có $\sin z = 0$ khi $z = k\pi$, cực điểm trong miền $|z-6| = 4$ là $\pi,\ 2\pi,\ 3\pi$, nên

$$\begin{aligned}
\oint_{|z-6|=4} \frac{dz}{\sin z} &= \text{Res}\left[\frac{1}{\sin z}, \pi\right] + \text{Res}\left[\frac{1}{\sin z}, 3\pi\right] + \text{Res}\left[\frac{1}{\sin z}, 3\pi\right] \\
&= \left.\frac{1}{\cos z}\right|_{\pi} + \left.\frac{1}{\cos z}\right|_{2\pi} + \left.\frac{1}{\cos z}\right|_{3\pi} \\
&= -2\pi i.
\end{aligned}$$

Bài 6.3.7. [6.3.36]

1. Cho $f(z) = \frac{1}{z^2(z^2+9)} = \frac{a}{z} + \frac{b}{z^2} + \frac{c}{z-3i} + \frac{d}{z+3i}$. Tìm các hệ số, giải thích tại sao

những điều sau đúng:

$$\begin{aligned} a &= \operatorname{Res}\left[f(z), 0\right], \\ b &= \operatorname{Res}\left[zf(z), 0\right], \\ c &= \operatorname{Res}\left[f(z), 3i\right], \\ d &= \operatorname{Res}\left[f(z), -3i\right]. \end{aligned}$$

2. Tìm a, b, c, d bằng cách dùng thặng dư, và kiểm tra kết quả bằng cách đặt bốn phân số trên một mẫu số chung và được $\frac{1}{z^2(z^2+9)}$.

3. Tìm khai triển phân số thành phần của $\frac{z}{(z+1)(z-1)^2}$ bằng cách dùng thặng dư.

Giải.

1.

$$\operatorname{Res}\left[f(z), 0\right] = \operatorname{Res}\left[\frac{a}{z}, 0\right] + \operatorname{Res}\left[\frac{b}{z^2}, 0\right] + \operatorname{Res}\left[\frac{c}{z-3i}, 0\right] + \operatorname{Res}\left[\frac{d}{z+3i}, 0\right] = a,$$

$$\operatorname{Res}\left[f(z), 0\right] = \operatorname{Res}\left[a, 0\right] + \operatorname{Res}\left[\frac{b}{z}, 0\right] + \operatorname{Res}\left[\frac{cz}{z-3i}, 0\right] + \operatorname{Res}\left[\frac{dz}{z+3i}, 0\right] = b,$$

$$\operatorname{Res}\left[f(z), 3i\right] = \operatorname{Res}\left[\frac{a}{z}, 3i\right] + \operatorname{Res}\left[\frac{b}{z^2}, 3i\right] + \operatorname{Res}\left[\frac{c}{z-3i}, 3i\right] + \operatorname{Res}\left[\frac{d}{z+3i}, 3i\right] = c,$$

$$\operatorname{Res}\left[f(z), -3i\right] = \operatorname{Res}\left[\frac{a}{z}, -3i\right] + \operatorname{Res}\left[\frac{b}{z^2}, -3i\right] + \operatorname{Res}\left[\frac{c}{z-3i}, -3i\right] + \operatorname{Res}\left[\frac{d}{z+3i}, -3i\right] = d.$$

2.

$$\begin{aligned} a &= \operatorname{Res}\left[\frac{1}{z^2(z^2+9)}, 0\right] = \lim_{z\to 0} \frac{d}{dz}\frac{1}{z^2+9} = \lim_{z\to 0}\frac{-2z}{z^2+9} = 0. \\ b &= \operatorname{Res}\left[\frac{1}{z(z^2+9)}, 0\right] = \frac{1}{9}. \\ c &= \operatorname{Res}\left[\frac{1}{z^2(z^2+9)}, 3i\right] = \frac{i}{54}. \end{aligned}$$

$$d = \operatorname{Res}\left[\frac{1}{z^2(z^2+9)}, -3i\right] = \frac{-i}{54}.$$

Thử lại

$$\frac{1}{z^2(z^2+9)} = \frac{1/9}{z^2} + \frac{i/54}{z-3i} + \frac{-i/54}{z+3i}.$$

3. Ta biểu diễn

$$\frac{z}{(z+1)(z-1)^2} = \frac{a}{z+1} + \frac{b}{z-1} + \frac{c}{(z-1)^2}.$$

Trong đó,

$$\begin{aligned} a &= \operatorname{Res}\left[\frac{z}{(z+1)(z-1)^2}, -1\right] = \frac{-1}{4}, \\ b &= \operatorname{Res}\left[\frac{z}{(z+1)(z-1)^2}, 1\right] = \frac{1}{4}, \\ c &= \operatorname{Res}\left[\frac{z(z-1)}{(z+1)(z-1)^2}, 1\right] = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Bài 6.3.8. [6.3.37]

1. Cho khai triển Laurent của điểm kì dị cô lập $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-z_0)^n$. Nếu điểm kì dị là cực điểm, ta có thể dùng quy tắc I, II, III (cho thặng dư) của chương này để được c_{-1}. Chứng minh rằng nếu cực điểm có bậc N, thì ta cũng có hệ số từ công thức $c_n = \lim_{z\to z_0} \left(\frac{d}{dz}\right)^{N+n} \left[(z-z_0)^N f(z)\right]$.

2. Dùng công thức trước để tìm hệ số $c_0$trong khai triển Laurent của $1/\sin z$ trong lân cận của $z=0$.

Giải.

1. Vì cực điểm có bậc N nên

$$f(z) = c_{-N}(z-z_0)^{-N} + c_{-(N-1)}(z-z_0)^{-(N-1)} + \dots$$

suy ra

$$(z-z_0)^N f(z) = c_{-N} + c_{-(N-1)}(z-z_0) + \dots + c_{-(N-k)}(z-z_0)^k + c_{-(N-k)+1}(z-z_0)^{k+1}\dots$$

Lấy đạo hàm k lần ta được

$$\frac{\partial^k}{\partial z^k}\left[(z-z_0)^N f(z)\right] = k!c_{-(N-k)} + \frac{(k+1)!}{1!}c_{-(N-k)+1}(z-z_0) + \dots$$

nên

$$\lim_{z\to z_0}\frac{\partial^k}{\partial z^k}\left[(z-z_0)^N f(z)\right] = k!c_{-(N-k)}.$$

Đặt $n = -(N-k)$ thì $k = n+N$. Thay lại đẳng thức trên ta được

$$c_n = \lim_{z\to z_0}\left(\frac{d}{dz}\right)^{N+n}\left[(z-z_0)^N f(z)\right]$$

2. Vì $1/\sin z$ có cực điểm bậc 1 tại $z=0$ nên

$$\begin{aligned}
c_0 &= \lim_{z\to z_0}\left(\frac{d}{dz}\right)^{0+1}\left[(z-0)^1 f(z)\right] \\
&= \lim_{z\to 0}\frac{\partial}{\partial z}\frac{z}{\sin z} \\
&= \lim_{z\to 0}\frac{\sin z - z\cos z}{\sin^2 z} \\
\text{(L'Hopital)} \quad &= \lim_{z\to 0}\frac{\cos z - \cos z + z\sin z}{2\sin z\cos z} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Bài 6.3.9. [6.3.38] Định nghĩa $\mathrm{Res}\,[f(z),\infty] = \oint_C f(z)\,dz$. Chứng minh rằng

1. $\text{Res}\left[1/z, \infty\right] = -1$
2. Nếu n là số nguyên, $\text{Res}\left[z^n, \infty\right] = 0, n \neq -1$
3. $\text{Res}\left[e^{1/(z-i)}, \infty\right] = -1$
4. $\text{Res}\left[\frac{1}{z^4+1}, \infty\right] = 0$

Giải.

1.

$$\text{Res}\left[1/z, \infty\right] = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=1} \frac{1}{z} dz = \frac{-1}{2\pi i} \oint_{|z|=1} \frac{1}{z} dz = -1$$

Bài 6.3.10. [6.3.39]

1. Cho $f(z)$ giải tích trong miền $|z| > r$ và cho $f(z)$ có khai tiển Laurent trong miền này $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^n$. Chứng minh rằng

$$\text{Res}\left[f(z), \infty\right] = -c_{-1}$$

2. Cho $w = 1/z$ và định nghĩa $F(w) = f(1/w)$. Chứng minh rằng

$$\text{Res}\left[f(z), \infty\right] = -\text{Res}\left[w^{-2}F(w), 0\right]$$

3. Khai triển Laurent $f(z) = \frac{z-1}{z+1}$ với $|z| > 1$, và cho biết xấp xỉ hệ số, tìm $\text{Res}\left[f(z), \infty\right]$ bằng (1)
4. Tìm thặng dư trong câu (3) bằng (2).
5. Cho hàm phân thức $f(z) = \frac{a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_0}{b_m z^m + b_{m-1} z^{m-1} + \ldots + b_0}$. Chứng mình rằng nếu $m-n \geq 2$ thì $\text{Res}\left[f(z), \infty\right] = 0$

Giải.

1. Ta có

$$\begin{aligned}\operatorname{Res}[f(z),\infty] &= \frac{1}{2\pi i}\oint_{|z|=R,R>r} f(z)\,dz \\ &= \frac{-1}{2\pi i}\oint \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^n dz \\ &= \frac{-2\pi i}{2\pi i}c_{-1} \\ &= -c_{-1}.\end{aligned}$$

2. Ta có

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^n, \quad |z| > r$$

đặt $z = 1/w$ thì

$$\begin{aligned}F(w) &= f\left(\frac{1}{w}\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n w^{-n}, \quad |w| < r, \\ -w^2 F(w) &= \ldots - c_{-2} - c_{-1}w^{-1} - c_0 w^{-2} - c_1 w^3 - \ldots\end{aligned}$$

nên

$$-\operatorname{Res}\left[w^{-2}F(w),0\right] = \operatorname{Res}\left[-w^{-2}F(w),0\right] = -c_{-1} = \operatorname{Res}[f(z),\infty].$$

3. Ta có

$$\begin{aligned}f(z) &= \frac{z-1}{z+1} = 1 - \frac{2}{z+1} = 1 - \frac{\frac{2}{z}}{1+\frac{1}{z}} \\ &= 1 - \frac{2}{z}\left(1 - \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} - \ldots\right)\end{aligned}$$

$$= \quad 1-\frac{2}{z}+\frac{2}{z^2}-\frac{2}{z^3}+$$

Vậy

$$\operatorname{Res}\left[f\left(z\right),\infty\right]=2.$$

4.

$$w^{-2}F\left(w\right)=\frac{w^{-2}\left(\frac{1}{w}-1\right)}{\frac{1}{w}+1}=\frac{1}{w^2}\left(\frac{1-w}{w+1}\right)$$

có không điểm bậc 2 tại $w=0$ nên

$$\begin{aligned}\operatorname{Res}\left[f\left(z\right),\infty\right] &= \text{-Res}\left[w^{-2}F\left(w\right),0\right]\\ &= \lim_{w\to 0}\frac{d}{dw}\left(\frac{1-w}{w+1}\right)=2.\end{aligned}$$

5. Ta có

$$\begin{aligned}-w^{-2}F\left(w\right) &= -w^{-2}f\left(\frac{1}{w}\right)=-w^{-2}\frac{\frac{a_n}{w^n}+\frac{a_{n-1}}{w^{n-1}}+\ldots+a_0}{\frac{b_m}{w^m}+\frac{b_{m-1}}{w^{m-1}}+\ldots+b_0}\\ &= -\frac{a_nw^{m-n-2}+a_{n-1}w^{m-n-1}+\ldots+a_0w^{m-2}}{b_m+b_{m-1}w+\ldots+b_0w^m}\end{aligned}$$

Vì $m-n\geq 2$ nên $\operatorname{Res}\left[w^{-2}F\left(w\right),0\right]=0$, suy ra $\operatorname{Res}\left[f\left(z\right),\infty\right]=0$.

Bài 6.3.12. [6.3.42] Cho $f\left(z\right)$ có cực điểm bậc m tại $z=z_0$, khai triển Laurent tại z_0 là

$$f\left(z\right)=c_{-m}\left(z-z_0\right)^{-m}z+c_{-(m-1)}\left(z-z_0\right)^{-(m-1)}+\ldots$$

1. Cho $\Psi\left(z\right)=\left(z-z_0\right)^N f\left(z\right)$. Giả sử $N\geq m$. Khai triển Taylor cho $\Psi\left(z\right)$ tại z_0 là gì. Chứng minh

$$\lim_{z\to z_0}\frac{1}{(N-1)!}\frac{d^{N-1}}{dz^{N-1}}\left[\left(z-z_0\right)^N f\left(z\right)\right]=c_{-1}=\operatorname{Res}\left[f\left(z\right),z_0\right]$$

2. Giả sử $1 \leq N \leq m$. Chứng minh rằng $\Psi(z)$ có khai triển Laurent tại z_0. Chứng minh
$$\lim_{z \to z_0} \frac{1}{(N-1)!} \frac{d^{N-1}}{dz^{N-1}} \left[(z - z_0)^N f(z) \right] = \infty$$

Giải.

1. Ta có

$$\Psi(z) = (z - z_0)^N f(z) = c_{-m} (z - z_0)^{N-m} z + c_{-(m-1)} (z - z_0)^{N-(m-1)} + \dots$$

là khai triển Taylor cho $\Psi(z)$ tại z_0.

$$\frac{d^{N-1}}{dz^{N-1}} \left[(z - z_0)^N f(z) \right] = (N-1)! c_{-1} + \frac{N!}{1!} c_0 (z - z_0) + \dots$$

Vậy nên

$$\text{Res}\left[f(z), z_0 \right] = c_{-1} = \lim_{z \to z_0} \frac{1}{(N-1)!} \frac{d^{N-1}}{dz^{N-1}} \left[(z - z_0)^N f(z) \right].$$

2. Biểu diễn

$$(z - z_0)^N f(z) = c_{-m} (z - z_0)^{N-m} z + c_{-(m-1)} (z - z_0)^{N-(m-1)} + \dots$$

với $N < m$, nên đây là khai triển Laurent của $\Psi(z)$ tại z_0. Ta có

$$\frac{d^{N-1}}{dz^{N-1}} \left[(z - z_0)^N f(z) \right] = (N-m) \dots (-m+2) c_{-m} (z - z_0)^{-m+1} + (N-m+1) \dots (-m+3) c_{-(m}$$

Do đó

$$\lim_{z \to z_0} \frac{1}{(N-1)!} \frac{d^{N-1}}{dz^{N-1}} \left[(z - z_0)^N f(z) \right] = \infty.$$

6.4 Evaluation of Real Integrals with Residue Calculus, I

Bài 6.4.1. Dùng thặng dư, chứng minh các đẳng thức sau:

1. $\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{k - \sin\theta} = \frac{2\pi}{\sqrt{k^2 - 1}}$ với $k > 1$. Kết quả còn đúng với $k < 1$ không? Giải thích.

2. $\int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\theta}{a + b\cos\theta} = \frac{2\pi}{\sqrt{a^2 - b^2}}$ với $a > b \geq 0$.

3. $\int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \frac{\cos\theta}{a + b\cos\theta} d\theta = \frac{2\pi}{b}\left[1 - \frac{a}{\sqrt{a^2 - b^2}}\right]$ với $a > b > 0$.

4. $\int_0^{2\pi} \sin^4\theta d\theta = \frac{3\pi}{4}$.

5. $\int_0^{2\pi} \cos^m\theta d\theta = \frac{2\pi}{2^m} \frac{m!}{\left[\frac{m}{2}!\right]^2}$ với mọi m chẵn lớn hơn 0. Chứng minh rằng tích phân đó bằng 0 khi m lẻ.

6. $\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{(a + b\sin\theta)^2} = \frac{2\pi a}{\left(\sqrt{a^2 - b^2}\right)^3}$ với $a > b \geq 0$.

7. $\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{a + \sin^2\theta} = \frac{2\pi}{\sqrt{a(a+1)}}$ với $a > 0$.

8. $\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos\theta}{1 - 2a\cos\theta + a^2} d\theta = \frac{2\pi}{a(a^2 - 1)}$ với $a \in \mathbb{R}$ và $|a| > 1$.

9. $\int_0^{2\pi} \frac{\cos\theta}{1 - 2a\cos\theta + a^2} d\theta = \frac{2\pi a}{1 - a^2}$ với $a \in \mathbb{R}$ và $|a| < 1$.

10. $\int_0^{2\pi} \frac{\cos n\theta d\theta}{\cosh a + \cos\theta} = \frac{2\pi(-1)^n e^{-na}}{\sinh a}$ với $n \in \mathbb{N}$ và $a > 0$.

11. $\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{a^2\sin^2\theta + b^2\cos^2\theta} = \frac{2\pi}{ab}$ với $a, b \in \mathbb{R}$ và $a, b > 0$.

Giải. Phương pháp:

Bước 1: Đổi biến với $\sin n\theta = \dfrac{z^n - z^{-n}}{2i}, \cos n\theta = \dfrac{z^n + z^{-n}}{2}$ và $d\theta = \dfrac{dz}{iz}$

Bước 2: Tìm tất cả điểm kì dị của hàm f và nằm trong đường tròn $|z| < 1$

Bước 3: Tính $\sum \operatorname{Res}[f(z), z_0]$với mọi z_0 tìm được ở bước 2.

Xét bài 2: Với $b = 0$ bài toán dễ dàng chứng minh, xét $b \neq 0$, đặt $\cos\theta = \dfrac{z + z^{-1}}{2}$ và $d\theta = \dfrac{dz}{iz}$, ta có

$$I = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\theta}{a + b\cos\theta} = \int_C \frac{dz}{iz\left(a + b\dfrac{z + z^{-1}}{2}\right)}$$

với C là đường tròn tâm gốc tọa độ và bán kính 1. Từ đó suy ra

$$\begin{aligned} I &= \int_C \frac{2dz}{biz^2 + 2aiz + bi} = \frac{2}{i}\int_C \frac{dz}{bz^2 + 2az + b} \\ &= \frac{2}{i}\int_C \frac{dz}{b\left(z + \dfrac{a - \sqrt{a^2 - b^2}}{b}\right)\left(z + \dfrac{a + \sqrt{a^2 - b^2}}{b}\right)}. \end{aligned}$$

Ta có hai điểm kì dị của

$$f(z) = \frac{1}{bz^2 + 2az + b}$$

là

$$z_1 = \frac{-a - \sqrt{a^2 - b^2}}{b}$$

và

$$z_2 = \frac{-a + \sqrt{a^2 - b^2}}{b}$$

thì ta có z_1 nằm ngoài đường tròn đơn vị z_2 nằm trong đường tròn đơn vị nên ta suy ra:

$$I = \frac{2}{i}.2\pi i.\operatorname{Res}[f(z), z_2] = 4\pi \lim_{z \to z_2}(z - z_2) f(z)$$

$$= \quad 4\pi f\left(z_2\right) = \frac{2\pi}{\sqrt{a^2 - b^2}}.$$

Bài 6.4.2. Tính những tích phân sau. Nếu cần thiết, dùng chu kì hoặc tính chất đối xứng của tích phân để chuyển về tích phân trên đoạn dài 2π. Ví dụ $\int_0^\pi d\theta = \dfrac{1}{2}\int_0^{2\pi} d\theta$

1. $\int_0^\pi \dfrac{\cos\theta}{5+4\cos\theta}d\theta$
2. $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \dfrac{\sin\theta}{5-4\sin\theta}d\theta$
3. $\int_0^\pi \sin^5 x \sin 5x dx$
4. $\int_{-\pi}^\pi \dfrac{\sin 2\theta}{5-4\sin\theta}d\theta$
5. $\int_0^\pi \dfrac{\cos 2\theta}{2-\cos\theta}d\theta$
6. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \dfrac{\sin^2\theta}{5+4\cos^2\theta}d\theta$

Giải.

1. Đặt $z = e^{i\theta}$ thì $\cos\theta = \dfrac{z+z^{-1}}{2}$ và $d\theta = \dfrac{dz}{iz}$. Ta có

$$\int_0^\pi \frac{\cos\theta}{5+4\cos\theta}d\theta = \frac{1}{2}\oint_{|z|=1} \frac{\dfrac{z+z^{-1}}{2}}{5+2\left(z+z^{-1}\right)}\frac{dz}{iz} = \frac{1}{4i}\oint_{|z|=1} \frac{z^2+1}{z\left(2z^2+5z+2\right)}dz$$

Đặt

$$f(z) = \frac{z^2+1}{z\left(2z^2+5z+2\right)}.$$

Ta cần xác định các điểm kì dị cô lập của $f(z)$. Dễ thấy $f(z)$ có một đơn cực tại $z = 0$ và hai đơn cực còn lại là nghiệm của phương trình

$$2z^2 + 5z + 2 = 0 \Leftrightarrow z = -\frac{1}{2} \vee z = -2.$$

Vì $z = -2$ nằm ngoài đường tròn đang xét nên

$$\frac{1}{4i}\oint_{|z|=1} \frac{z^2+1}{z(2z^2+5z+2)}dz = \frac{1}{4i}\cdot 2\pi i\left\{\mathrm{Res}\left[f(z), 0\right] + \mathrm{Res}\left[f(z), -\frac{1}{2}\right]\right\}$$

Ta có

$$\frac{z^2+1}{(2z^3+5z^2+2z)'} = \frac{z^2+1}{6z^2+10z+2}.$$

Ta tính được

$$\begin{aligned}\mathrm{Res}\left[f(z), 0\right] &= \frac{1}{2},\\ \mathrm{Res}\left[f(z), -\frac{1}{2}\right] &= -\frac{5}{6}.\end{aligned}$$

Vậy

$$\int_0^{\pi} \frac{\cos\theta}{5+4\cos\theta}d\theta = \frac{\pi}{2}\left(\frac{1}{2} - \frac{5}{6}\right) = -\frac{\pi}{6}.$$

6. Ta có

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2\theta}{5+4\cos^2\theta}d\theta &= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-\cos 2\theta}{5+2(1+\cos 2\theta)}d\theta = \frac{1}{4}\int_0^{\pi} \frac{1-\cos\varphi}{5+2(1+\cos\varphi)}d\varphi\\ &= \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}\int_{|z|=1} \frac{1-\frac{z+z^{-1}}{2}}{5+2\left(1+\frac{z+z^{-1}}{2}\right)}\frac{dz}{iz}\\ &= -\frac{1}{16i}\int_{|z|=1} \frac{(z-1)^2}{z(z^2+7z+1)}dz.\end{aligned}$$

Tương tự câu 1,

$$\begin{aligned}
-\frac{1}{16i}\int_{|z|=1} f(z)\,dz &= -\frac{1}{16i}\cdot 2\pi i\left\{\operatorname{Res}\left[f(z),0\right]+\operatorname{Res}\left[f(z),\frac{3\sqrt{5}-7}{2}\right]\right\}\\
&= -\frac{\pi}{8}\left[1+\frac{3\left(3\sqrt{5}-7\right)}{7\sqrt{5}-15}\right]\\
&= \frac{\pi\left(9-4\sqrt{5}\right)}{2\left(7\sqrt{5}-15\right)}\\
&= \pi\left(\frac{3\sqrt{5}}{40}-\frac{1}{8}\right).
\end{aligned}$$

6.5 Evaluation of Integrals, II

Bài 6.5.1. Những tích phân suy rộng nào sau đây là tồn tại?

1. $\int_0^\infty e^{-2x}dx$
2. $\int_0^\infty e^{2x}dx$
3. $\int_0^\infty xe^{-2x}dx$
4. $\int_0^\infty xe^{-2x}dx$
5. $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x}dx$
6. $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|x|}dx$
7. $\int_{-\infty}^{+\infty} \dfrac{x^2+x}{1+x^2}dx$
8. $\int_{-\infty}^{+\infty} \dfrac{x-1}{1+x^2}dx$

Giải.

7. Ta có

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^2+x}{1+x^2}dx &= \int_{-\infty}^{+\infty}\left(1+\frac{x-1}{x^2+1}\right)dx\\
&= \int_{-\infty}^{+\infty}dx+\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x-1}{x^2+1}dx\\
&= \int_{-\infty}^{+\infty}dx+\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x}{x^2+1}dx-\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{x^2+1}dx\\
&= [x]_{-\infty}^{+\infty}+0-[\arctan x]_{-\infty}^{+\infty}\\
&= [x]_{-\infty}^{+\infty}-\pi\\
&= +\infty.
\end{aligned}$$

Bài 6.5.2. Định nghĩa thông thường của $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$ được cho bởi công thức sau

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx=\lim_{b\to\infty}\int_0^b f(x)\,dx+\lim_{a\to\infty}\int_{-a}^0 f(x)\,dx,$$

không dùng biến phức,chứng minh điều sau:

1. Chứng minh $\int_{-\infty}^{+\infty}\sin(x)\,dx$ không tồn tại với định nghĩa thông thường.
2. Chứng minh giá trị chính Cauchy của tích phân trước là tồn tại và bằng không.
3. Chứng minh rằng $\int_{-\infty}^{+\infty}\dfrac{dx}{1+x^2}=\pi$ với cả hai định nghĩa tiêu chuẩn và giá trị chính Cauchy.
4. Chứng minh rằng nếu theo định nghĩa thông thường, $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$ tồn tại thì giá trị chính Cauchy tồn tại và chúng bằng nhau.

Giải.

1. Theo định nghĩa thông thường, ta có

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \sin(x)\, dx = \lim_{b\to\infty}\int_0^b \sin(x)\, dx + \lim_{a\to\infty}\int_{-a}^0 \sin(x)\, dx$$

mà ta lại có

$$\lim_{b\to\infty}\int_0^b \sin(x)\, dx = \lim_{b\to\infty}(1-\cos(b))$$

không xác định nên từ đó kết luận

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \sin(x)\, dx$$

không tồn tại với định nghĩa thông thường.

2. Ta có theo định nghĩa về tích phân suy rộng hay là giá trị chính Cauchy thì

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} \sin(x)\, dx &= \lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{R} \sin(x)\, dx\\ &= \lim_{R\to\infty}(\cos(-R)-\cos(R))\\ &= 0.\end{aligned}$$

Từ đó ta có điều phải chứng minh.

3. Theo định nghĩa thông thường

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2} &= \lim_{b\to\infty}\int_0^b\frac{dx}{1+x^2}+\lim_{a\to\infty}\int_{-a}^0\frac{dx}{1+x^2}\\ &= \lim_{b\to\infty}(\arctan(b)-\arctan(0))+\lim_{a\to\infty}(\arctan(0)-\arctan(-a))\\ &= \frac{\pi}{2}-0+0-\left(-\frac{\pi}{2}\right)=\pi.\end{aligned}$$

và theo định nghĩa giá trị chính Cauchy

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2} &= \lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{R}\frac{dx}{1+x^2}dx\\ &= \lim_{R\to\infty}\left(\arctan(R)-\arctan(-R)\right)\\ &= \frac{\pi}{2}-\left(-\frac{\pi}{2}\right)=\pi.\end{aligned}$$

4. Giả sử với định nghĩa thông thường,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$$

xác định và bằng α. Theo định nghĩa về giá trị chính Cauchy, ta có:

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx &= \lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{R} f(x)\,dx = \lim_{R\to\infty}\left(\int_{0}^{R} f(x)\,dx+\int_{-R}^{0} f(x)\,dx\right)\\ &= \lim_{R\to\infty}\int_{0}^{R} f(x)\,dx+\lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{0} f(x)\,dx\\ &= \alpha.\end{aligned}$$

Ta có điều phải chứng minh.

Bài 6.5.3. Dùng tính chất đối xứng của tích phân, không tính tích phân, hãy chỉ ra điều nào sau đây là đúng:

1. $\int_0^\infty \dfrac{dx}{x^2+1}=\dfrac{1}{2}\int_{-\infty}^\infty \dfrac{dx}{x^2+1}$
2. $\int_0^\infty \dfrac{dx}{x^2+x+1}=\dfrac{1}{2}\int_{-\infty}^\infty \dfrac{dx}{x^2+x+1}$
3. $\int_0^\infty \dfrac{\cos x dx}{x^2+1}=\dfrac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \dfrac{\cos x dx}{x^2+1}$
4. $\int_0^\infty \dfrac{\tanh x dx}{x^2+1}=\dfrac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \dfrac{\tanh x dx}{x^2+1}$

5. $\int_{-\infty}^{\infty} \dfrac{x}{x^4+1} dx = 0$

6. $\int_{-\infty}^{\infty} \dfrac{x+1}{x^4+1} dx = 0$

7. $\int_{-\infty}^{\infty} \dfrac{1+\sin x}{x^4+x^2+1} dx = 0$

8. $\int_{-\infty}^{\infty} \dfrac{x\sin\left(x^2\right)}{x^4+x^2+1} dx = 0$

9. $\int_{-\infty}^{\infty} \dfrac{xe^{ix}}{x^4+x^2+1} dx = \int_{-\infty}^{\infty} \dfrac{ix\sin x}{x^4+x^2+1} dx$

Giải. Nếu f là hàm lẻ (tức là $f(x) = -f(-x)$) và khả tích thì ta sẽ có

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx = 0$$

Nếu f là hàm chẵn (tức là $f(x) = f(-x)$) và tích phân suy rộng của hàm f tồn tại thì ta sẽ có

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx = 2\int_{0}^{\infty} f(x)\, dx = 2\int_{-\infty}^{0} f(x)\, dx$$

Ví dụ ta nhận thấy các hàm $f(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$, $f(x) = \dfrac{\cos x dx}{x^2+1}$ hay $f(x) = \dfrac{x}{x^4+1}$ là các hàm chẵn nên câu 1., 3. và 5. là đúng.

Bài 6.5.4. Dùng thặng dư để tích các tích phân sau:

1. $\int_{-\infty}^{\infty} \dfrac{dx}{x^2+x+1}$

2. $\int_{-\infty}^{\infty} \dfrac{dx}{\left(x^2+x+1\right)\left(x^2+1\right)}$

3. $\int_{-\infty}^{\infty} \dfrac{x^4 dx}{\left(x^6+1\right)}$

4. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^3 + x^2 + x + 1}{x^4 + 1} dx$

5. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{\left(x^2 + a^2\right)^2} \quad a > 0$

6. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{\left(x + a\right)^2 + b^2} \quad a, b \in \mathbb{R}, b > 0$

Giải. Phương pháp tính tích phân

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} dx$$

với $Q(x) \neq 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$ và $\deg Q - \deg P \geq 2$ thì ta sẽ có

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} dx = 2\pi i \sum \text{Res} \left[\frac{P(z)}{Q(z)}, z_0 \right]$$

với mọi z_0 để $\text{Im} z_0 \geq 0$ và $Q(z_0) = 0$. Ta sẽ giải bài tập 1. và gợi ý bài tập 4.

1. Ta có $P(x) = 1$, $Q(x) = x^2 + x + 1 \neq 0$ với mọi x thực và $Q(z) = 0$ khi và chỉ khi

$$z = \frac{\pm i\sqrt{3} - 1}{2}$$

nên ta suy ra:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2 + x + 1} &= 2\pi i \sum \text{Res} \left[\frac{P(z)}{Q(z)}, z_0 \right] \\ &= 2\pi i \text{Res} \left[\frac{P(z)}{Q(z)}, \frac{i\sqrt{3} - 1}{2} \right] \end{aligned}$$

do

$$\text{Im} \frac{-i\sqrt{3} - 1}{2} < 0$$

Từ đó ta suy ra

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2 + x + 1} = 2\pi i.i\sqrt{3} = -2\pi\sqrt{3}$$

4. Để ý do

$$\frac{x^3 + x}{x^4 + 1}$$

là hàm lẻ nên

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^3 + x}{x^4 + 1} = 0.$$

Từ đó suy ra

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^3 + x^2 + x + 1}{x^4 + 1} dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2 + 1}{x^4 + 1} dx$$

Dùng phương pháp đã nêu trên tính tích phân này.

Bài 6.5.5. Cho tích phân suy rộng

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^3 + x^2}{(x^2 + 1)(x^2 + 4)} dx$$

Ta có thể định lý 4 để tính tích phân sau được không? Tính tích phân sau bằng cách cộng hai giá trị chính Cauchy.

Giải. Ta đặt $P(x) = x^3 + 2$ và $Q(x) = (x^2 + 1)(x^2 + 4)$ thì ta có $\deg Q - \deg P = 1 < 2$ nên không thể áp dụng định lý 4. Để ý

$$\frac{x^3}{(x^2 + 1)(x^2 + 4)}$$

là hàm lẻ nên

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^3 + x^2}{(x^2 + 1)(x^2 + 4)} dx \quad = \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{(x^2 + 1)(x^2 + 4)} dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\left[\frac{4}{3\left(x^2+4\right)}-\frac{1}{3\left(x^2+1\right)}\right]dx$$

Dùng phương pháp tính tích phân

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{P\left(x\right)}{Q\left(x\right)}dx,$$

ta suy ra

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{4}{3\left(x^2+4\right)}dx &= \frac{4}{3}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{x^2+4}dx\\ &= \frac{4}{3}.2\pi i\text{Res}\left[\frac{1}{z^2+4},2i\right]\\ &= \frac{8\pi i}{3}.\frac{1}{2\left(2i\right)}=\frac{2\pi}{3}.\end{aligned}$$

và

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{3\left(x^2+1\right)}dx &= \frac{1}{3}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{x^2+1}dx\\ &= \frac{1}{3}.2\pi i\text{Res}\left[\frac{1}{z^2+1},i\right]\\ &= \frac{2\pi i}{3}.\frac{1}{2\left(i\right)}=\frac{\pi}{3}.\end{aligned}$$

Từ đó ta suy ra

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x^3+x^2}{\left(x^2+1\right)\left(x^2+4\right)}dx &= \int_{-\infty}^{\infty}\left[\frac{4}{3\left(x^2+4\right)}-\frac{1}{3\left(x^2+1\right)}\right]dx\\ &= \frac{2\pi}{3}-\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{3}.\end{aligned}$$

Bài 6.5.6. Với $a,b,c\in\mathbb{R}$ và $b^2<4ac$,chứng minh:

1. $\int_{-\infty}^{+\infty}\dfrac{dx}{ax^2+bx+c}=\dfrac{2\pi}{\sqrt{4ac-b^2}}$

2. $\int_{-\infty}^{+\infty} \dfrac{dx}{\left(ax^2+bx+c\right)^2} = \dfrac{4\pi a^3}{\left(\sqrt{4ac-b^2}\right)^3}$

Giải.

1. Theo đề bài thì $a \neq 0$, ta có $ax^2+bx+c=0$ khi và chỉ khi

$$z = \frac{-b \pm i\sqrt{4ac-b^2}}{2a}.$$

Áp dụng phương pháp tính tích phân

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} dx,$$

ta có

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{ax^2+bx+c} &= 2\pi i \mathrm{Res}\left[\frac{1}{az^2+bz+c}, \frac{-b+i\sqrt{4ac-b^2}}{2a}\right] \\
&= 2\pi i . \frac{1}{Q'(z_0)} = 2\pi i . \frac{1}{2az_0+b} \\
&= \frac{2\pi}{\sqrt{4ac-b^2}}.
\end{aligned}$$

2. Tương tự như trên, với

$$z_0 = \frac{-b+i\sqrt{4ac-b^2}}{2a}.$$

ta có

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{\left(ax^2+bx+c\right)^2} &= 2\pi i \mathrm{Res}\left[\frac{1}{\left(az^2+bz+c\right)^2}, z_0\right] \\
&= 2\pi i . \lim_{z\to z_0} \frac{d}{dz} \frac{\left(z-z_0\right)^2}{\left(az^2+bz+c\right)^2}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= 2\pi i.\frac{-2}{\left(z_0+\dfrac{b+i\sqrt{4ac-b^2}}{2a}\right)^3} \\
&= 2\pi i\frac{-2a^3}{-i\left(\sqrt{4ac-b^2}\right)^3} \\
&= \frac{4\pi a^3}{\left(\sqrt{4ac-b^2}\right)^3}.
\end{aligned}
$$

Bài 6.5.7. Cho $f(z)=\dfrac{P(z)}{Q(z)}$ với P và Q là hai đa thức theo z và $\deg Q-\deg P\geq 2$.

1. Chứng minh:
$$\sum \operatorname{Res}\left[\frac{P(z)}{Q(z)},z_0\right]=0$$
với mọi z_0 là cực của $\dfrac{P(z)}{Q(z)}$.

2. Dùng kết quả câu 1., tìm tổng thặng dư của hàm $f(z)=\dfrac{z}{z^3+1}$

Giải. Lấy C là đường tròn tâm gốc tọa độ bán kính R, do $\deg Q-\deg P\geq 2$ nên $\exists \mu, R_0$ để
$$\left|\frac{P(z)}{Q(z)}\right|\leq \frac{\mu}{|z|^{\deg Q-\deg P}}$$
từ đó ta suy ra
$$\sum \operatorname{Res}\left[\frac{P(z)}{Q(z)},z_0\right]=\lim_{R\to\infty}\int_C\frac{P(z)}{Q(z)}dz=0$$
Vậy ta có điều phải chứng minh.

Bài 6.5.8.

1. Giải thích tại sao không thể tính $\int_0^\infty \dfrac{x}{x^4+1}dx$ bằng cách sử dụng một nửa đường tròn ở nửa trên mặt phẳng hoặc nửa dưới mặt phẳng.

2. Cho C_1 là một phần tư đường tròn trong góc phần tư thứ nhất định hướng dương với bán kính $R > 1$. Chứng minh rằng:

$$\int_0^R \frac{xdx}{x^4+1} - \int_R^0 \frac{ydy}{y^4+1} + \int_{C_1} \frac{zdz}{z^4+1} = 2\pi i \sum \text{Res}\left[\frac{z}{z^4+1}, z_0\right]$$

với mọi cực z_0 thuộc góc phần tư thứ nhất.

3. Cho $R \to \infty$, chứng minh

$$\int_0^\infty \frac{xdx}{x^4+1} = \frac{\pi}{4}$$

Giải.

1. Ta không thể dùng một nửa đường tròn ở trên hay ở nửa dưới mặt phẳng do tích phân

$$\int_0^\infty \frac{x}{x^4+1} dx$$

không là giá trị chính Cauchy.

2. Đặt C là đường đi từ $z_0 = iR$ đến gốc tọa độ, đi đến $z_1 = R$ và cuối cùng theo đường C_1 về điểm z_0. Ta có

$$\begin{aligned}\int_0^R \frac{xdx}{x^4+1} + \int_{iR}^0 \frac{zdz}{z^4+1} + \int_{C_1} \frac{zdz}{z^4+1} &= \int_0^R \frac{xdx}{x^4+1} - \int_R^0 \frac{ydy}{y^4+1} + \int_{C_1} \frac{zdz}{z^4+1} \\ &= 2\pi i \sum \text{Res}\left[\frac{z}{z^4+1}, e^{i\frac{\pi}{4}}\right].\end{aligned}$$

vì chỉ có cực $z_0 = e^{i\pi/4}$ thuộc góc phần tư thứ nhất và nằm trong C. Suy ra

$$2\int_0^R \frac{xdx}{x^4+1} + \int_{C_1} \frac{zdz}{z^4+1} = 2\pi i \frac{-i}{4} = \frac{\pi}{2}.$$

3. Ta sẽ chứng minh

$$\lim_{R\to\infty}\int_{C_1}\frac{zdz}{z^4+1}=0.$$

Khi $R\to\infty$, trên C_1, ta có

$$\left|\frac{z}{z^4+1}\right|\leq\frac{R}{R^4-1}$$

nên theo bất đẳng thức ML

$$\left|\int_{C_1}\frac{zdz}{z^4+1}\right|\leq\frac{R}{R^4-1}\cdot\frac{\pi R}{2}=\frac{\pi}{2}\cdot\frac{R^2}{R^4-1}\longrightarrow 0.$$

Vì vậy

$$\lim_{R\to\infty}\left(2\int_0^R\frac{xdx}{x^4+1}+\int_{C_1}\frac{zdz}{z^4+1}\right)=2\int_0^\infty\frac{xdx}{x^4+1}=\frac{\pi}{2}$$
$$\Leftrightarrow\int_0^\infty\frac{xdx}{x^4+1}=\frac{\pi}{4}.$$

Bài 6.5.9. Cho $P(z)=a_nz^n+a_{n-1}z^{n-1}+\ldots+a_0$ và $Q(z)=b_mz^m+b_{m-1}z^{m-1}+\ldots+b_0$ là đa thức trong trường phức với $m>n$. Trong bài tập này, ta sẽ chứng minh nếu $f(z)=\dfrac{P(z)}{Q(z)}$ thì tồn tại hằng số μ và R_0 sao cho $f(z)\leq\dfrac{\mu}{|z|^{m-n}}$ với mọi $|z|\geq R_0$.

1. Cho $A=\max\{|a_n|,|a_{n-1}|,\ldots,|a_1|,|a_0|\}$. Dùng bất đẳng thức tam giác, hãy chứng minh

$$|P(z)|\leq(n+1)A|z|^n$$

với $|z|\geq 1$.

2. Để ý $Q(z)=b_mz^mg(z)$ với

$$g(z)=1+\frac{b_{m-1}}{b_mz}+\frac{b_{m-2}}{b_mz^2}+\ldots+\frac{b_0}{b_mz^m}$$

Cho $B = \max\left\{\left|\frac{b_{m-1}}{b_m}\right|, \left|\frac{b_{m-2}}{b_m}\right|, \left|\frac{b_0}{b_n}\right|, 1\right\}$. Giả sử $m \geq 1$, chứng minh

$$|g(z)| \geq 1 - \left|\frac{b_{m-1}}{b_m z} + \frac{b_{m-2}}{b_m z^2} + \ldots + \frac{b_0}{b_m z^m}\right| \geq 0$$

với $|z| \geq 2mB$. Và trong miền $|z| \geq 2mB$, hãy chứng minh

$$|g(z)| \geq 1 - \frac{m}{2m} = \frac{1}{2}$$

3. Dùng kết quả trước để chứng minh

$$|Q(z)| \geq \frac{|b_m| |z|^m}{2}$$

với $|z| \geq 2mB$.

4. Chứng minh

$$\left|\frac{P(z)}{Q(z)}\right| \leq \frac{2(n+1)A}{|b_m| |z|^{m-n}}$$

với $|z| \geq R_0 = 2mB$.

Giải.

1. Ta có

$$\begin{aligned}
|P(z)| &= \left|a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0\right| \\
&\leq |a_n| |z|^n + |a_{n-1}| |z|^{n-1} + \ldots + |a_1| |z| + |a_0| \\
&\leq A\left(|z|^n + |z|^{n-1} + \ldots + |z| + 1\right) \\
&\leq A(n+1) |z|^n
\end{aligned}$$

do $|z| \geq 1$ nên $|z|^n \geq |z|^r$ với $r \leq n$. Từ đó ta có điều phải chứng minh.

2. Ta có

$$\begin{aligned} |g(z)| &\geq 1 - \left|\frac{b_{m-1}}{b_m z} + \frac{b_{m-2}}{b_m z^2} + \ldots + \frac{b_0}{b_m z^m}\right| \\ &\geq 1 - \left(\frac{\frac{|b_{m-1}|}{|b_m|}}{|z|} + \frac{\frac{|b_{m-2}|}{|b_m|}}{|z|^2} + \ldots + \frac{\frac{|b_0|}{|b_m|}}{|z|^m}\right) \\ &\geq 1 - \left(\frac{1}{2m} + \frac{1}{2m} + \ldots \frac{1}{2m}\right) = 1 - \frac{m}{2m} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

do $|z| \geq 2mB \geq 2$ nên$|z|^n \geq |z|^r$ với $r \leq n$. Từ đó ta có điều phải chứng minh.

3. Dùng kết quả đã chứng minh trên ta suy ra được điều phải chứng minh:

$$|Q(z)| \geq \frac{|b_m|\,|z|^m}{2}$$

4. Dùng kết quả đã chứng minh ở trên

$$|P(z)| \leq (n+1)\,A\,|z|^n$$

và

$$|Q(z)| \geq \frac{|b_m|\,|z|^m}{2}$$

Ta suy ra

$$\left|\frac{P(z)}{Q(z)}\right| \leq \frac{2(n+1)\,A}{|b_m|\,|z|^{m-n}}$$

với $|z| \geq R_0 = 2mB$.

6.6 Evaluation of Integrals, III

Bài 6.6.1. Tính những tích phân sau bằng thặng dư (Dùng giá trị chính Cauchy và tính chất của các hàm chẵn lẻ).

1. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(2x)}{x^2+9} dx$

2. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x\sin(2x)}{x^2+3} dx$

3. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{xe^{ix}}{(x-1)^2+9} dx$

4. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^3\sin(2x)}{x^4+16} dx$

5. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x\sin(2x)}{x^2+x+1} dx$

6. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x-1)\cos(2x)}{x^2+x+1} dx$

7. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x^3+x^2)\cos\left(\sqrt{2}x\right)}{x^4+1} dx$

8. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{xe^{ix/3}}{(x-1)^2+4} dx$

9. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{xe^{ix}}{x^4+x^2+1} dx$

10. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x\sin x}{(x^2+1)(x^2+16)} dx$

11. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2\cos x}{(x^2+1)(x^2+16)} dx$

12. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x^3+x^2+x)\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{(x^2+1)(x^2+4)} dx$

13. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{\left(x^2+4\right)^2} dx$

Giải. Ta sẽ nêu phương pháp tính dạng tích phân

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} \cos(vx)\, dx$$

hoặc

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} \sin(vx)\, dx$$

với $v > 0$ và $\deg Q - \deg P \geq 1$. Trước tiên, áp dụng bổ đề Jordan, ta có

$$\lim_{R\to\infty} \int_{C_1} \frac{P(z)}{Q(z)} e^{ivz} dz,$$

nên ta có công thức tính tích phân

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{P(z)}{Q(z)} e^{ivz} dz = 2\pi i \sum \operatorname{Res}\left[\frac{P(z)}{Q(z)} e^{ivz}\right]$$

tại mọi điểm cực của hàm nằm nửa trên mặt phẳng. Từ đó ta sẽ kết luận

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} \cos(vx)\, dx = \operatorname{Re}\left(2\pi i \sum \operatorname{Res}\left[\frac{P(z)}{Q(z)} e^{ivz}\right]\right)$$

và

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} \sin(vx)\, dx = \operatorname{Im}\left(2\pi i \sum \operatorname{Res}\left[\frac{P(z)}{Q(z)} e^{ivz}\right]\right)$$

Ta sẽ làm bài 13. để minh họa.

Như đã nói ở trên, ta sẽ tính tích phân sau bằng thặng dư, tức

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\left(z^2+4\right)^2} e^{iz} dz = 2\pi i \sum \operatorname{Res}\left[\frac{1}{\left(z^2+4\right)^2} e^{iz}\right].$$

tại mọi điểm cực của hàm nằm nửa trên mặt phẳng, cụ thể là với điểm cực duy nhất $z = 2i$, ta có

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(z^2+4)^2} e^{iz} dz &= 2\pi i \mathrm{Res}\left[\frac{1}{(z^2+4)^2} e^{iz}, 2i\right] \\
&= 2\pi i. \lim_{z \to 2i} \left[\frac{d}{dz} \frac{e^{iz}}{(z+2i)^2}\right] \\
&= 2\pi i. \lim_{z \to 2i} \frac{ie^{iz}(z+2i) + 2e^{iz}}{(z+2i)^3} \\
&= 2\pi i \left(-\frac{3}{32e^2} i\right) = \frac{3}{16e^2}.
\end{aligned}$$

Từ đó ta suy ra

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{(x^2+4)^2} dx &= \mathrm{Re}\left(\frac{3}{16e^2}\right) = \frac{3}{16e^2}, \\
\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{(x^2+4)^2} dx &= \mathrm{Im}\left(\frac{3}{16e^2}\right) = 0.
\end{aligned}$$

Kiểm tra lại theo tính chất của hàm tuần hoàn, ta thấy với

$$f(x) = \frac{\sin x}{(x^2+4)} = \frac{-\sin(-x)}{\left((-x)^2+4\right)} = -f(-x)$$

là hàm lẻ nên

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{(x^2+4)^2} dx = 0.$$

Bài 6.6.2. Với $m \geq n \geq 0$ và a là số thực dương, hãy chứng minh

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin mx \sin nx}{a^2+x^2} dx = \frac{\pi}{2a} e^{-ma} \sinh na$$

Giải. Với trường hợp $n = 0$ và $m = n$ thì ta dễ dàng thấy kết quả, ta sẽ chứng minh với trường hợp $m > n > 0$. Ta có

$$\int_0^\infty \frac{\sin mx \sin nx}{a^2 + x^2} dx = \frac{1}{2} \int_0^\infty \frac{\cos\left[(m-n)x\right] - \cos\left[(m+n)x\right]}{a^2 + x^2} dx.$$

Đặt

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_0^\infty \frac{\cos\left[(m-n)x\right]}{a^2+x^2} dx = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^\infty \frac{\cos\left[(m-n)x\right]}{a^2+x^2} dx, \\ I_2 &= \int_0^\infty \frac{\cos\left[(m+n)x\right]}{a^2+x^2} dx = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^\infty \frac{\cos\left[(m+n)x\right]}{a^2+x^2} dx. \end{aligned}$$

do các hàm

$$f_1(x) = \frac{\cos\left[(m-n)x\right]}{a^2+x^2}$$

và

$$f_2(x) = \frac{\cos\left[(m+n)x\right]}{a^2+x^2}$$

là các hàm chẵn. Ta sẽ tính lần lượt I_1, I_2. Ta có

$$\begin{aligned} 2I_1 &= \text{Re}\left[\int_{-\infty}^\infty \frac{e^{i(m-n)z}}{a^2+z^2} dz\right] \\ &= \text{Re}\left[2\pi i \text{Res}\left[\frac{e^{i(m-n)z}}{a^2+z^2}, ia\right]\right] \\ &= \text{Re}\left[2\pi i \frac{e^{i(m-n)ia}}{(ia+ia)}\right] \\ &= \frac{\pi e^{a(n-m)}}{a} \end{aligned}$$

và

$$\begin{aligned} 2I_2 &= \text{Re}\left[\int_{-\infty}^\infty \frac{e^{i(m+n)z}}{a^2+z^2} dz\right] \\ &= \text{Re}\left[2\pi i \text{Res}\left[\frac{e^{i(m+n)z}}{a^2+z^2}, ia\right]\right] \end{aligned}$$

$$= \operatorname{Re}\left[2\pi i \frac{e^{i(m+n)ia}}{(ia+ia)}\right]$$
$$= \frac{\pi e^{a(-m-n)}}{a}.$$

Từ đó ta suy ra

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin mx \sin nx}{a^2+x^2} dx = \frac{1}{4}\left(\frac{\pi e^{a(n-m)}}{a} - \frac{\pi e^{a(-m-n)}}{a}\right).$$

Bài 6.6.3. Giả sử $v > 0$ và cho n là số nguyên dương:

1. Chứng minh
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ivx}dx}{(x-z_0)^n} = 0$$
với $\operatorname{Im}(z_0) < 0$.

2. Chứng minh
$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ivx}dx}{(x-z_0)^n} = 2\pi i \frac{(iv)^{n-1} e^{ivz_0}}{(n-1)!}$$
với $\operatorname{Im}(z_0) > 0$.

3. Dùng những kết quả trên để tính tích phân
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ix}dx}{(x-i)^4}$$

Giải.

1. Vì $v > 0$ và n nguyên dương nên ta có

$$\lim_{R\to\infty} \int_{C_1} \frac{e^{ivz}dx}{(z-z_0)^n} = 0$$

với C_1 là nửa đường tròn trên với tâm là gốc tọa độ (Tương tự hình 6.5-1). Ta cũng có hàm

$$f(z) = \frac{e^{ivz}}{(z-z_0)^n}$$

giải tích trên nửa trên của mặt phẳng phức nên ta suy ra

$$\lim_{R\to\infty}\int_C \frac{e^{ivz}dx}{(z-z_0)^n} = 0$$

với C là đường đi từ điểm $(-R,0)$ đến $(0,R)$ theo đường thẳng thực và cộng thêm đường C_1. Mà ta lại có

$$\lim_{R\to\infty}\int_C \frac{e^{ivz}dx}{(z-z_0)^n} = \lim_{R\to\infty}\int_{C_1} \frac{e^{ivz}dx}{(z-z_0)^n} + \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ivx}dx}{(x-z_0)^n}$$

từ đó ta suy ra

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ivx}dx}{(x-z_0)^n} = 0.$$

2. Với $\mathrm{Im} z_0 > 0$ thì ta có hàm

$$f(z) = \frac{e^{ivz}}{(z-z_0)^n}$$

giải tích trên nửa mặt phẳng phức trên ngoại trừ z_0. Theo bổ đề Jordan ta có

$$\lim_{R\to\infty}\int_{C_1} \frac{e^{ivz}dx}{(z-z_0)^n} = 0.$$

Từ đó ta suy ra

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ivx}dx}{(x-z_0)^n} &= 2\pi i \mathrm{Res}\left[\frac{e^{ivz}}{(z-z_0)^n}, z_0\right]\\ &= 2\pi i.\frac{1}{(n-1)!}\lim_{z\to z_0}\frac{d^{n-1}}{d_z^{n-1}}\left(e^{ivz}\right)\end{aligned}$$

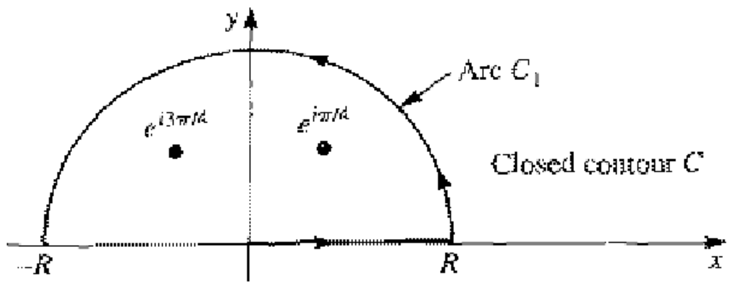


Figure 6.5–1

Hình 6.6.1

$$= \quad 2\pi i \frac{(iv)^{n-1} e^{ivz_0}}{(n-1)!}.$$

6.7 Integrals Involving Indented Contours

1. Tìm $\oint_{|z|=1} (z+1)/zdz$.

2. Tìm $\int_C (z+1)/zdz$, với C là nửa đường tròn $|z|=1, 0 \leq \arg z \leq \pi$. Tích phân ngược chiều kim đồng hồ.

3. Trong câu (2) bạn đã tính tích phân trên nửa đường trong dùng trong câu (1). Có phải kết quả câu (2) bằng một nửa kết quả câu (1). Giải thích.

Giải.

1. $\oint_{|z|=1} \frac{z+1}{z} dz = 2\pi i \text{Res}\left[\frac{z+1}{z}, 0\right] = 2\pi i$.

2. $\oint \frac{z+1}{z} dz = \int_0^\pi \left(1 + e^{-i\theta}\right) ie^{i\theta} d\theta = \left[e^{i\theta} + i\theta\right]_0^\pi = e^{i\pi} + i\pi - 1 = i\pi - 2.$

3. $i\pi - 2 \neq \frac{2\pi i}{2}$. Vì trong định lý 6 yêu cầu $r \to 0$.

Bài 6.7.2. [6.7.2]

1. Tính $\int_{1-\epsilon}^{1+\epsilon} (z+1)/(z-1)\, dz$ quanh nửa đường tròn tâm $(1, 0)$ bán kính ϵ.

2. Trong đáp án câu (1) cho $\epsilon \to 0$. Kiểm tra rằng bạn sẽ được

$$-2\pi i\,(1/2)\,\mathrm{Res}\,[(z+1)/(z-1)\,,1]$$

Giải.

1. Đặt $z = 1 + \epsilon e^{i\theta},\ 0 \le \theta \le \pi$

$$\begin{aligned}\int_{1-\epsilon}^{1+\epsilon} \frac{z+1}{z-1} dz &= \int_\pi^0 \frac{2+\epsilon e^{i\theta}}{\epsilon e^{i\theta}} i\epsilon e^{i\theta} d\theta \\ &= \int_\pi^0 i\left(2+\epsilon e^{i\theta}\right) d\theta \\ &= \left[-2\theta i + \epsilon e^{i\theta}\right]_0^\pi \\ &= -2\pi i + 2\epsilon.\end{aligned}$$

2. Cho $\epsilon \to 0$ thì được $-2\pi i$, và

$$-2\pi i \frac{1}{2} \mathrm{Res}\left[\frac{z+1}{z-1}, 1\right] = -2\pi i \frac{1}{2} 2 = -2\pi i.$$

Bài 6.7.3. [6.7.4] Tìm giá trị chính Cauchy của mỗi tích phân sau:

1. $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin 2x}{x+4} dx$
2. $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos 2x}{x^2-16} dx$
3. $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{(x-\pi/2)(x-\pi)} dx$
4. $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{(x-\pi/2)(x^2+1)} dx$
5. $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)}{(x-1)^2} dx$

Giải.

1. Ta có

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{2ix}}{x+4} dx = \pi i \mathrm{Res}\left[\frac{e^{2iz}}{z+4}, -4\right] = \pi i \frac{e^{2iz}}{1}\bigg|_{-4} = \pi \cos 8,$$

nên

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin 2x}{x+4} dx = \mathrm{Re}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{2ix}}{x+4} dx\right) = \pi \cos 8.$$

Bài 6.7.4. [6.7.9] Chứng minh

1. $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos mx}{ax^2+bx+c} dx = \dfrac{-2\pi \cos \dfrac{mb}{2a} \sin \dfrac{m\sqrt{b^2-4ac}}{2a}}{\sqrt{b^2-4ac}}$, với $m \geq 0, a, b, c$ là số thực. $b^2 > 4ac$ và $a \neq 0$.
2. $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos mx}{x^4-b^4} dx = \frac{-\pi}{2b^3} \sin mb - \frac{\pi e^{-mb}}{2b^3}$, với $m \geq 0, b > 0$
3. $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin bx}{\sinh ax} dx = \frac{\pi}{a} \tanh \frac{\pi b}{2a}$, với $a > 0$

Giải.

1. Cực điểm của $ax^2 + bx + z = 0$ là

$$z = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a},$$

nên

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{imx}}{ax^2 + bx + c} dx &= \pi i \sum \operatorname{Res}\left[\frac{e^{imz}}{ax^2 + bx + c}, \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right] \\
&= \pi i \left[\frac{e^{imz}}{2az + b}\bigg|_{\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}} + \frac{e^{imz}}{2az + b}\bigg|_{\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}}\right] \\
&= \frac{\pi i}{\sqrt{b^2 - 4ac}}\left(e^{im\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}} + e^{im\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}}\right) \\
&= \frac{\pi i}{\sqrt{b^2 - 4ac}} e^{\frac{-imb}{2a}} 2i \sin \frac{m\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \\
&= \frac{-2\pi}{\sqrt{b^2 - 4ac}} e^{\frac{-imb}{2a}} \sin \frac{m\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.
\end{aligned}$$

Từ đó ta suy ra

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos mx}{ax^2 + bx + c} dx &= \operatorname{Re}\left(\frac{-2\pi}{\sqrt{b^2 - 4ac}} e^{\frac{-imb}{2a}} \sin \frac{m\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right) \\
&= \frac{-2\pi \cos \dfrac{mb}{2a} \sin \dfrac{m\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}{\sqrt{b^2 - 4ac}}.
\end{aligned}$$

Bài 6.7.5. [6.7.12] Chứng minh

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \pi$$

Giải. Ta có

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ix}}{x} dx = \pi i \text{Res}\left[\frac{e^{iz}}{z}, 0\right] = \pi i \frac{e^{iz}}{1}\bigg|_0 = \pi i,$$

nên

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \text{Re}\,(\pi i) = \pi.$$

Bài 6.7.5. [6.7.13] Chứng minh rằng

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2} dx = \pi$$

Giải. Ta có

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1 - e^{2ix}}{2x^2} dx = \pi i \text{Res}\left[\frac{1 - e^{2iz}}{2z^2}, 0\right] = \pi i\,(-i) = \pi,$$

nên

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1 - \cos 2x}{2x^2} dx = \text{Re}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1 - e^{2ix}}{2x^2} dx\right) = \pi.$$

Bài 6.7.6. [6.7.14] Chứng minh

$$\int_0^{\infty} \left(\frac{\cos t - e^{-t}}{t}\right) dt = 0$$

Giải. Ta có

$$\int_0^{\infty} \frac{e^{it} - e^{-t}}{t} dt = \frac{2\pi i}{4} \text{Res}\left[\frac{e^{iz}}{z}, 0\right] = \frac{\pi i}{2},$$

nên

$$\int_0^{\infty} \left(\frac{\cos t - e^{-t}}{t}\right) dt = \text{Re}\left(\int_0^{\infty} \frac{e^{it} - e^{-t}}{t} dt\right) = 0.$$

Bài 6.7.7. [6.7.15] Chứng minh

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos ax - \cos bx}{x^2} dx = \pi (b - a)$$

với $b > 0, a > 0$.

Giải. Ta có

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{iax} - e^{ibx}}{x^2} dx = \pi i \text{Res} \left[\frac{e^{iax} - e^{ibx}}{x^2}, 0 \right] = \pi i i (a - b) = \pi (b - a),$$

nên

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos ax - \cos bx}{x^2} dx = \text{Re} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{iax} - e^{ibx}}{x^2} dx \right) = \pi (b - a).$$

6.8 Contour Integrations Involving Branch Points and Branch Cuts

Bài 6.8.1 Dựa vào hình 6.8-1,chứng minh rằng

1.
$$\int_0^{\infty} \frac{\text{Log} x}{x^2 + a^2} dx = \frac{\pi}{2a} \text{Log} a$$

2.
$$\int_0^{\infty} \frac{\text{Log} x}{(x^2 + a^2)^2} dx = \frac{\pi}{4a^3} \text{Log} \left(\frac{a}{e} \right)$$

3.
$$\int_0^{\infty} \frac{x^2 \text{Log} x}{x^4 + a^4} dx = \frac{\pi \sqrt{2}}{4a} \text{Log} a + \frac{\pi^2 \sqrt{2}}{16a}$$

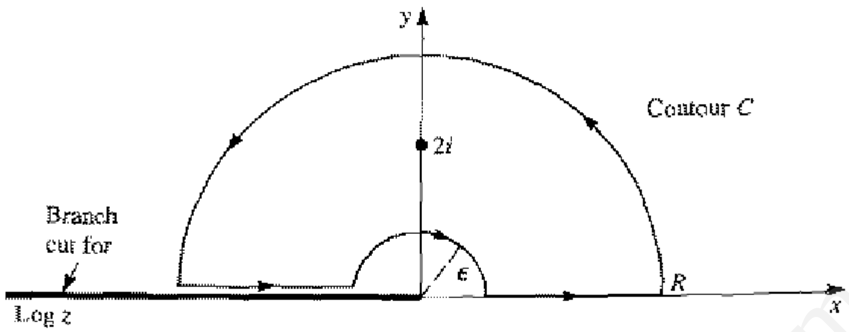


Figure 6.8–1

Hình 6.8.1

Giải.

1. Ta có

$$\int_{-R}^{-\varepsilon} \frac{\text{Log} z}{z^2+a^2} dz + \int_{|z|=\varepsilon} \frac{\text{Log} z}{z^2+a^2} dz + \int_{|z|=R} \frac{\text{Log} z}{z^2+a^2} dz + \int_{\varepsilon}^{R} \frac{\text{Log} x}{x^2+a^2} dx$$
$$= 2\pi i \text{Res}\left(\frac{\text{Log} z}{z^2+a^2}, ia\right).$$

Xét tích phân thứ nhất, vì

$$\text{Log} z = \text{Log}\,|z| + i\text{Arg} z = \text{Log} x + i\pi$$

nên
$$\int_{-R}^{-\varepsilon} \frac{\text{Log} z}{z^2+a^2} dz = \int_{\varepsilon}^{R} \frac{\text{Log} x}{x^2+a^2} dx + \int_{-R}^{-\varepsilon} \frac{i\pi}{x^2+a^2} dx.$$

Suy ra

$$\int_{\varepsilon}^{R} \frac{\text{Log} x}{x^2+a^2} dx + \int_{-R}^{-\varepsilon} \frac{i\pi}{x^2+a^2} dx + \int_{|z|=\varepsilon} \frac{\text{Log} z}{z^2+a^2} dz + \int_{|z|=R} \frac{\text{Log} z}{z^2+a^2} dz + \int_{\varepsilon}^{R} \frac{\text{Log} x}{x^2+a^2} dx$$

$$=2\pi i\text{Res}\left(\frac{\text{Log}z}{z^2+a^2}, ia\right).$$

Khi $\varepsilon \to 0$ và $R \to \infty$ thì

$$\int_{-\infty}^{0} \frac{i\pi}{x^2+a^2}dx + 2\int_0^\infty \frac{\text{Log}x}{x^2+a^2}dx = 2\pi i\text{Res}\left(\frac{\text{Log}z}{z^2+a^2}, ia\right).$$

Ta có

$$\begin{aligned}
&\text{Res}\left(\frac{\text{Log}z}{z^2+a^2}, ia\right) = \frac{\text{Log}z}{(z^2+a^2)'}(ia) = \frac{\text{Log}a + i\pi/2}{2ia} \\
\Rightarrow &2\pi i\text{Res}\left(\frac{\text{Log}z}{z^2+a^2}, ia\right) = \frac{\pi\text{Log}a}{a} + \frac{i\pi^2}{2a} \\
\Rightarrow &\int_0^\infty \frac{\text{Log}x}{x^2+a^2}dx = \frac{\pi\text{Log}a}{2a}.
\end{aligned}$$

3. Ta xét

$$\begin{aligned}
A &= \int_{-R}^{-\varepsilon} \frac{z^2\text{Log}z}{z^4+a^4}dz + \int_{|z|=\varepsilon} \frac{z^2\text{Log}z}{z^4+a^4}dz + \int_\varepsilon^R \frac{z^2\text{Log}z}{z^4+a^4}dz + \int_{|z|=R} \frac{z^2\text{Log}z}{z^4+a^4}dz \\
&= i\pi\int_\varepsilon^R \frac{x^2}{x^4+a^4}dx + 2\int_\varepsilon^R \frac{x^2\text{Log}x}{x^4+a^4}dx + \int_{|z|=\varepsilon} \frac{z^2\text{Log}z}{z^4+a^4}dz + \int_{|z|=R} \frac{z^2\text{Log}z}{z^4+a^4}dz.
\end{aligned}$$

Ta xác định các cực của

$$\frac{z^2\text{Log}z}{z^4+a^4}.$$

Đó là nghiệm của phương trình

$$z^4+a^4 = 0 \Leftrightarrow z = \left(-a^4\right)^{1/4} = \left(a^4 e^{i(\pi+k2\pi)}\right)^{1/4} = ae^{i\left(\frac{\pi}{4}+k\frac{\pi}{2}\right)}.$$

Chỉ có hai điểm cực nằm trong đường cong kín chúng ta đang xét, đó là $z_1 = ae^{i\frac{\pi}{4}}$ và $z_2 = ae^{\frac{3\pi}{4}}$. Suy ra

$$\begin{aligned}
A &= 2i\pi\left[\text{Res}\left(\frac{z^2\text{Log}z}{z^4+a^4}, z_1\right) + \text{Res}\left(\frac{z^2\text{Log}z}{z^4+a^4}, z_2\right)\right] \\
&= 2i\pi\left(\frac{z_1^2\text{Log}z_1}{4z_1^3} + \frac{z_2^2\text{Log}z_2}{4z_2^3}\right) \\
&= \frac{1}{2}i\pi\left(\frac{\text{Log}z_1}{z_1} + \frac{\text{Log}z_2}{z_2}\right) \\
&= \frac{i\pi}{2}\left(\frac{\text{Log}a + i\frac{\pi}{4}}{ae^{i\frac{\pi}{4}}} + \frac{\text{Log}a + i\frac{3\pi}{4}}{ae^{i\frac{3\pi}{4}}}\right) \\
&= \frac{i\pi}{2}\left(\frac{e^{-i\frac{\pi}{4}}\left(\text{Log}a + i\frac{\pi}{4}\right) + e^{-i\frac{3\pi}{4}}\left(\text{Log}a + i\frac{3\pi}{4}\right)}{a}\right) \\
&= \frac{i\pi}{2a}\left(\left(e^{-i\frac{\pi}{4}} + e^{-i\frac{3\pi}{4}}\right)\text{Log}a + \frac{i\pi}{4}e^{-i\frac{\pi}{4}} + \frac{i3\pi}{4}e^{-\frac{i3\pi}{4}}\right) \\
&= \frac{i\pi}{2a}\left(-i\sqrt{2}\text{Log}a - \frac{i\pi\sqrt{2}}{4} + \frac{\pi\sqrt{2}}{2}\right) \\
&= \frac{\pi^2\sqrt{2}}{8a} + \frac{\pi\sqrt{2}\text{Log}a}{2a} + i\frac{\pi^2\sqrt{2}}{4a}.
\end{aligned}$$

Ta chứng minh

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{|z|=\varepsilon}\frac{z^2\text{Log}z}{z^4+a^4}dz = \lim_{R\to\infty}\int_{|z|=R}\frac{z^2\text{Log}z}{z^4+a^4}dz = 0.$$

Xét

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{|z|=\varepsilon}\frac{z^2\text{Log}z}{z^4+a^4}dz,$$

ta có

$$\left|\int_{|z|=\varepsilon}\frac{z^2\text{Log}z}{z^4+a^4}dz\right| \le \frac{\varepsilon^2\left(|\text{Log}\varepsilon| + \pi\right)}{|a^4-1|}\pi\varepsilon$$

Đặt $\varepsilon = e^{-x}(x > 0)$ thì

$$\frac{\pi\varepsilon^3\left(|\mathrm{Log}\varepsilon| + \pi\right)}{|a^4 - 1|} = \frac{\pi e^{-3x}\left(x + \pi\right)}{|a^4 - 1|}.$$

Khi đó

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+} \frac{\pi\varepsilon^3\left(|\mathrm{Log}\varepsilon| + \pi\right)}{|a^4 - 1|} = \lim_{x\to\infty} \frac{\pi\left(x + \pi\right)}{e^{3x}\,|a^4 - 1|} = 0$$

Suy ra

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int_{|z|=\varepsilon} \frac{z^2\mathrm{Log}z}{z^4 + a^4}dz = 0.$$

Ta tiếp tục xét

$$\lim_{R\to\infty} \int_{|z|=R} \frac{z^2\mathrm{Log}z}{z^4 + a^4}dz,$$

ta có

$$\left|\int_{|z|=R} \frac{z^2\mathrm{Log}z}{z^4 + a^4}dz\right| \le \frac{R^2\left(|\mathrm{Log}R| + \pi\right)}{|R^4 - a^4|}\pi R,$$

$$\begin{aligned}
\lim_{R\to\infty} \frac{\pi R^3\left(|\mathrm{Log}R| + \pi\right)}{|R^4 - a^4|} &= \lim_{R\to\infty} \frac{\pi R^3\left(\mathrm{Log}R + \pi\right)}{R^4 - a^4} \\
&= \lim_{R\to\infty} \frac{6\pi R\left(\mathrm{Log}R + \pi\right)}{12R^2} \\
&= \lim_{R\to\infty} \frac{\pi}{2R} = 0.
\end{aligned}$$

Suy ra

$$\lim_{R\to\infty} \int_{|z|=R} \frac{z^2\mathrm{Log}z}{z^4 + a^4}dz = 0.$$

Vậy

$$\begin{aligned}
i\pi\int_0^\infty \frac{x^2}{x^4 + a^4}dx + 2\int_0^\infty \frac{x^2\mathrm{Log}x}{x^4 + a^4}dx &= \frac{1}{2}i\pi\left(\frac{\mathrm{Log}z_1}{z_1} + \frac{\mathrm{Log}z_2}{z_2}\right) \\
&= \frac{\pi^2\sqrt{2}}{8a} + \frac{\pi\sqrt{2}\mathrm{Log}a}{2a} + i\frac{\pi^2\sqrt{2}}{4a}.
\end{aligned}$$

Nên

$$\begin{cases} \displaystyle\int_0^{\infty} \frac{x^2 \text{Log} x}{x^4 + a^4} dx &= \dfrac{\pi^2 \sqrt{2}}{16a} + \dfrac{\pi\sqrt{2}\text{Log} a}{4a} \\ \displaystyle\int_0^{\infty} \frac{x^2}{x^4 + a^4} dx &= \dfrac{\pi\sqrt{2}}{4a} \end{cases}.$$

Bài 6.8.2 [6.8.4] Sử dụng hình 6.8-1, qua giới hạn hãy chứng minh hai kết quả sau

1. $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\text{Log} x}{x^4 + x^2 + 1} dx = -\frac{\pi^2}{12}$

2. $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{dx}{x^4 + x^2 + 1} = \frac{\pi\sqrt{3}}{6}$

Giải. Ta xét

$$\begin{aligned} A = &\quad \int_{-R}^{-\varepsilon} \tfrac{\text{Log} z}{z^4+z^2+1} dz + \int_{|z|=\varepsilon} \tfrac{\text{Log} z}{z^4+z^2+1} dz \\ &+ \int_{|z|=R} \tfrac{\text{Log} z}{z^4+z^2+1} dx + \int_{\varepsilon}^{R} \tfrac{\text{Log} z}{z^4+z^2+1} dz \\ = &\quad i\pi \int_{\varepsilon}^{R} \tfrac{dx}{x^4+x^2+1} + 2\int_{\varepsilon}^{R} \tfrac{\text{Log} x}{x^4+x^2+1} dx \\ &+ \int_{|z|=\varepsilon} \tfrac{\text{Log} z}{z^4+z^2+1} dz + \int_{|z|=R} \tfrac{\text{Log} z}{z^4+z^2+1} dz. \end{aligned}$$

Ta tìm điểm cực của hàm số dưới dấu tích phân

$$z^4 + z^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow z = e^{\pm i\frac{2\pi}{3}},\ z = e^{\pm i\frac{\pi}{3}}.$$

Chỉ có $z_1 = e^{i\pi/3}$ và $z_2 = e^{i2\pi/3}$ là nằm trong đường cong kín ta đang xét. Suy ra

$$\begin{aligned} A &= 2i\pi \left[\text{Res}\left(\frac{\text{Log} z}{z^4+z^2+1}, z_1\right) + \text{Res}\left(\frac{\text{Log} z}{z^4+z^2+1}, z_2\right)\right] \\ &= 2i\pi\left(\frac{\text{Log} z_1}{4z_1^3 + 2z_1} + \frac{\text{Log} z_2}{4z_2^3 + 2z_2}\right) = 2i\pi\left(\frac{i\frac{\pi}{3}}{4e^{i\pi} + 2e^{i\frac{\pi}{3}}} + \frac{i\frac{2\pi}{3}}{4e^{2i\pi} + 2e^{i\frac{2\pi}{3}}}\right) \\ &= \frac{\pi^2}{6}\left(-1 + i\sqrt{3}\right). \end{aligned}$$

Tiếp theo, ta chứng minh

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{|z|=\varepsilon}\frac{\mathrm{Log}z}{z^4+z^2+1}dz=\lim_{R\to\infty}\int_{|z|=R}\frac{\mathrm{Log}z}{z^4+z^2+1}dz=0.$$

Ta có

$$\left|\frac{\mathrm{Log}z}{z^4+z^2+1}\right|\le\frac{|\mathrm{Log}\varepsilon|+\pi}{|1-|z^2|\,|z^2+1||}\le\frac{|\mathrm{Log}\varepsilon|+\pi}{1-\varepsilon^2\left(\varepsilon^2+1\right)}.$$

Đặt $\varepsilon=e^{-x}\,(x>0)$, ta có

$$\frac{|\mathrm{Log}\varepsilon|+\pi}{1-\varepsilon^2\left(\varepsilon^2+1\right)}=\frac{x+\pi}{1-e^{-2x}\left(e^{-2x}+1\right)},$$

Nên

$$\begin{aligned}\left|\int_{|z|=\varepsilon}\frac{\mathrm{Log}z}{z^4+z^2+1}dz\right| &\le \frac{x+\pi}{1-e^{-2x}\left(e^{-2x}+1\right)}\varepsilon\pi\\ &= \frac{\pi\left(x+\pi\right)}{e^{x}-e^{-x}\left(e^{-2x}+1\right)}\end{aligned}$$

Từ đó ta suy ra

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\left|\int_{|z|=\varepsilon}\frac{\mathrm{Log}z}{z^4+z^2+1}dz\right|\le\lim_{x\to\infty}\frac{\pi\left(x+\pi\right)}{e^{x}-e^{-x}\left(e^{-2x}+1\right)}=0$$

hay

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{|z|=\varepsilon}\frac{\mathrm{Log}z}{z^4+z^2+1}dz=0.$$

Xét tích phân

$$\lim_{R\to\infty}\int_{|z|=R}\frac{\mathrm{Log}z}{z^4+z^2+1}dz.$$

Ta có

$$\left|\int_{|z|=R}\frac{\mathrm{Log}z}{z^4+z^2+1}dz\right|\le\frac{R+\pi}{R^2\left(R^2-1\right)-1}\pi R,$$

nên,

$$\lim_{R\to\infty}\left|\int_{|z|=R}\frac{\text{Log}z}{z^4+z^2+1}dz\right| \leq \lim_{R\to\infty}\frac{\pi\,(R+\pi)}{R\,(R^2-1)-1}=0$$

hay

$$\lim_{R\to\infty}\int_{|z|=R}\frac{\text{Log}z}{z^4+z^2+1}dz=0.$$

Vậy

$$i\pi\int_0^\infty\frac{dx}{x^4+x^2+1}+2\int_0^\infty\frac{\text{Log}x}{x^4+x^2+1}dx=\frac{\pi^2}{6}\left(-1+i\sqrt{3}\right)$$
$$\Leftrightarrow\begin{cases}\displaystyle\int_0^\infty\frac{\text{Log}x}{x^4+x^2+1}dx=\frac{-\pi^2}{12}\\ \displaystyle\int_0^\infty\frac{dx}{x^4+x^2+1}=\frac{\pi\sqrt{3}}{6}\end{cases}.$$

Bài 6.8.3 [6.8.6]

1. Chứng minh rằng $\int_0^\infty \frac{xdx}{x^4+x^2+1}=\frac{\pi}{3\sqrt{3}}$
2. Giả sử P và Q là hai đa thức với $deg(P)+2\leq deg\,(Q)$ và $Q\,(x)\neq 0$ nếu $x\geq 0$. Cắt nhánh của log được xác định bởi $y=0, x\geq 0$ và $\text{Im}\,(\text{log}z)\in[0,2\pi)$. Chứng minh rằng $\int_0^\infty \frac{P(x)}{Q(x)}dx=-\sum \text{Res}\left[\log\,(z)\,\frac{P(z)}{Q(z)}\right]$ tại mọi điểm cực. Kiểm tra công thức dẫn tới kết quả đã biết $\int_0^\infty \frac{dx}{x^2+1}=\frac{\pi}{2}$

Giải.

2. Xét

$$\oint_C\left[\text{log}z\frac{P\,(z)}{Q\,(z)}\right]dz$$
$$=\int_{\text{I}}f\,(z)\,dz+\int_{\text{II}}f\,(z)\,dz+\int_{\text{III}}f\,(z)\,dz+\int_{\text{IV}}f\,(z)\,dz$$
$$=\int_\varepsilon^R\text{Log}x\frac{P\,(x)}{Q\,(x)}dx+\int_R^\varepsilon(\text{Log}x+i2\pi)\,\frac{P\,(x)}{Q\,(x)}dx+\int_{\text{II}}f\,(z)\,dz+\int_{\text{IV}}f\,(z)\,dz$$

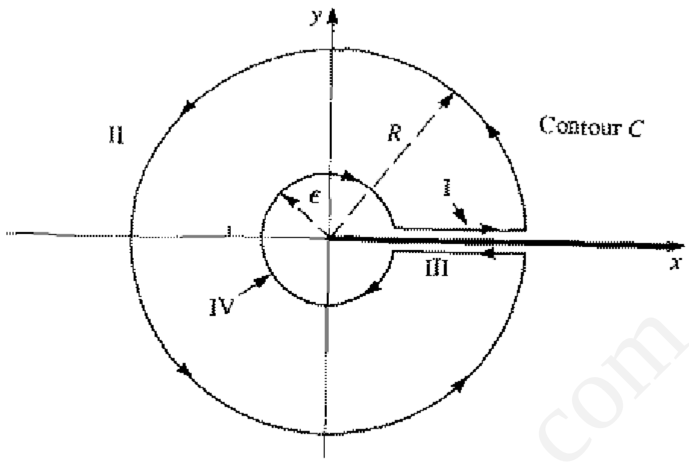


Figure 6.8-3

Hình 6.8.2

$$=2\pi i \sum \text{Res}\left[\log z \frac{P(z)}{Q(z)}\right].$$

Ta có

$$\lim_{R\to\infty}\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\text{II}} f(z)\,dz = \lim_{R\to\infty}\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\text{IV}} f(z)\,dz = 0$$

(Vì $deg(P) + 2 \leq deg(Q)$), nên

$$\int_0^\infty \text{Log}x\frac{P(x)}{Q(x)}dx + \int_\infty^0 (\text{Log}x + i2\pi)\frac{P(x)}{Q(x)}dx = 2\pi i \sum \text{Res}\left[\log z\frac{P(z)}{Q(z)}\right],$$
$$\int_\infty^0 2\pi i\frac{P(x)}{Q(x)}dx = 2\pi i \sum \text{Res}\left[\log z\frac{P(z)}{Q(z)}\right].$$

Vậy

$$\int_0^\infty \frac{P(x)}{Q(x)}dx = -\sum \text{Res}\left[\log z\frac{P(z)}{Q(z)}\right].$$

Bài 6.8.4 [6.8.7] Dựa vào hình 6.8-1, thêm vào hai nửa đường tròn nhỏ tại $z = \pm a$. Chứng minh rằng

$$\int_0^\infty \frac{\mathrm{Log}x}{x^2 - a^2} dx = \frac{\pi^2}{4a}$$

Giải. Tích phân đang xét bị gián đoạn trên khoảng lấy tích phân tại $\pm a$. Vì vậy ta phải lấy tại $\pm a$ hai nửa đường tròn nhỏ, sau đó qua giới hạn. Tương tự như các bài trên, ta có

$$i\pi \int_{-\infty}^0 \frac{dx}{x^2 - a^2} + 2\int_0^\infty f(x)\,dx - \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{z=a+\varepsilon e^{i\theta}} f(z)\,dz - \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{z=-a+\varepsilon e^{i\theta}} f(z)\,dz = 0$$

$$\Leftrightarrow i\pi \int_{-\infty}^0 \frac{dx}{x^2 - a^2} + 2\int_0^\infty f(x)\,dx - \pi i \mathrm{Res}(f(z), a) - \pi i \mathrm{Res}(f(z), -a) = 0$$

$$\Leftrightarrow i\pi \int_{-\infty}^0 \frac{dx}{x^2 - a^2} + 2\int_0^\infty f(x)\,dx - \pi i \frac{\mathrm{Log}a}{2a} + \pi i \frac{\mathrm{Log}(-a)}{2a} = 0$$

$$\Leftrightarrow \pi i \left(\int_{-\infty}^0 \frac{dx}{x^2 - a^2} - \frac{\mathrm{Log}a}{2a}\right) + 2\int_0^\infty f(x)\,dx + \frac{\pi i}{2a}(\mathrm{Log}a + i\pi) = 0$$

$$\Leftrightarrow i\pi \int_{-\infty}^0 \frac{dx}{x^2 - a^2} + 2\int_0^\infty f(x)\,dx - \frac{\pi^2}{2a} = 0$$

$$\Leftrightarrow \int_0^\infty f(x)\,dx = \int_0^\infty \frac{\mathrm{Log}x}{x^2 - a^2} dx = \frac{\pi^2}{4a}$$

Bài 6.8.5 [6.8.10]

1. Tính $\displaystyle\int_0^\infty \frac{dx}{x^{1/\alpha}(x+1)}$, sử dụng hình 6.8-4

2. Chứng minh $\displaystyle\int_0^\infty \frac{du}{u^{1/\alpha}(u-1)} = \pi \cot\frac{\pi}{a}$ với $\alpha > 1$ và $u^{1/\alpha} \geq 0$

Giải. Đặt $z^{1/\alpha} = e^{1/\alpha \mathrm{Log}_{(0,2\pi]}(z)}$.

Trên trục số thực dương, $z = re^{i2\pi} = r$, $dz = dr$, $z^{1/\alpha} = \sqrt[\alpha]{r}e^{\frac{i2\pi}{\alpha}}$

Trên trục số thực âm, $z = re^{i\pi} = -r$, $dz = -dr$, $z^{1/\alpha} = \sqrt[\alpha]{r}e^{\frac{i\pi}{\alpha}}$

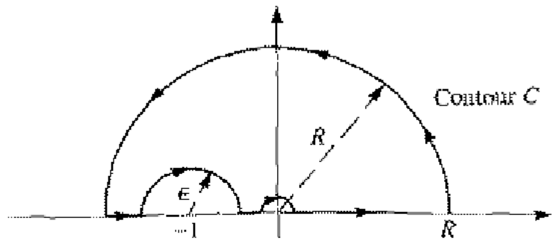


Figure 6.8–4

Hình 6.8.3

Ta có

$$\begin{aligned}
&\int_{-\infty}^{0} f(z)\,dz + \int_{0}^{\infty} f(z)\,dz - (\pi - 2\pi)\,i\mathrm{Res}\,(f,-1) = 0 \\
\Leftrightarrow &\int_{\infty}^{0} f(-r)\,(-dr) + \int_{0}^{\infty} f(r)\,dr - (\pi - 2\pi)\,i\mathrm{Res}\,(f,-1) = 0 \\
\Leftrightarrow &\int_{0}^{\infty} \frac{dr}{\sqrt[\alpha]{r}e^{\frac{i\pi}{\alpha}}(1-r)} + \int_{0}^{\infty} \frac{dr}{\sqrt[\alpha]{r}e^{\frac{i2\pi}{\alpha}}(r+1)} = -\pi i e^{\frac{-i\pi}{\alpha}} \\
\Leftrightarrow &e^{-\frac{i\pi}{\alpha}}\int_{0}^{\infty} \frac{dr}{\sqrt[\alpha]{r}(r+1)} - \int_{0}^{\infty} \frac{dr}{\sqrt[\alpha]{r}(r-1)} = -\pi i
\end{aligned}$$

Đặt

$$\int_{0}^{\infty} \frac{dr}{\sqrt[\alpha]{r}(r+1)} = I$$

và

$$\int_{0}^{\infty} \frac{dr}{\sqrt[\alpha]{r}(r-1)} = J.$$

Ta có

$$\left[\cos\left(\frac{\pi}{\alpha}\right) - i\sin\left(\frac{\pi}{\alpha}\right)\right] I - J = -\pi i$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} I\cos\left(\frac{\pi}{\alpha}\right) - J & = 0 \\ I\sin\left(\frac{\pi}{\alpha}\right) & = \pi \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} I & = \dfrac{\pi}{\sin\left(\frac{\pi}{\alpha}\right)} \\ J & = \pi\cot\left(\frac{\pi}{\alpha}\right) \end{cases}.$$

Bài 6.8.6 [6.8.11] Chứng minh

$$\int_0^\infty \frac{x^{1/\alpha}dx}{x^2-a^2} = \frac{\pi}{2a}\frac{a^{1/\alpha}}{\sin\frac{\pi}{\alpha}}\left(1-\cos\frac{\pi}{\alpha}\right)$$

Giải. Đặt

$$z^{1/\alpha} = e^{1/\alpha \mathrm{Log}_{(0,2\pi]}(z)}.$$

Xét

$$f(z) = \frac{z^{1/\alpha}}{z^2-a^2}.$$

Ta có

$$\int_\infty^0 f(-r)(-dr) + \int_0^\infty f(r)\,dr - (\pi-2\pi)\,i\mathrm{Res}(f,-a) - (\pi-2\pi)\,i\mathrm{Res}(f,a) = 0$$

$$\int_0^\infty \frac{\sqrt[\alpha]{r}e^{\frac{i\pi}{\alpha}}dr}{r^2-a^2} + \int_0^\infty \frac{\sqrt[\alpha]{r}e^{\frac{i2\pi}{\alpha}}dr}{r^2-a^2} = -i\pi\left[\mathrm{Res}(f,-a) + \mathrm{Res}(f,a)\right]$$

Tính

$$\mathrm{Res}(f,a) = \lim_{z\to a}\frac{z^{\frac{1}{\alpha}}}{z+a} = \frac{a^{\frac{1}{\alpha}}e^{i\frac{2\pi}{\alpha}}}{2a}$$

$$\mathrm{Res}(f,-a) = \lim_{z\to -a}\frac{z^{\frac{1}{\alpha}}}{z-a} = \frac{\left(ae^{i\pi}\right)^{1/\alpha}}{-2a} = \frac{-a^{1/\alpha}}{2a}e^{\frac{i\pi}{\alpha}}$$

Suy ra

$$-i\pi\left[\operatorname{Res}(f,-a)+\operatorname{Res}(f,a)\right]=i\pi\frac{a^{\frac{1}{\alpha}}}{2a}\left(e^{\frac{i\pi}{\alpha}}-e^{i\frac{2\pi}{\alpha}}\right).$$

Và

$$\begin{aligned}\int_0^\infty\frac{\sqrt[\alpha]{r}dr}{r^2-a^2} &= i\pi\frac{a^{\frac{1}{\alpha}}}{2a}\frac{e^{\frac{i\pi}{\alpha}}-e^{i\frac{2\pi}{\alpha}}}{e^{\frac{i\pi}{\alpha}}+e^{\frac{i2\pi}{\alpha}}}=i\pi\frac{a^{\frac{1}{\alpha}}}{2a}\cdot\frac{-i\sin\frac{\pi}{\alpha}}{1+\cos\frac{\pi}{\alpha}}\\ &= \frac{\pi a^{\frac{1}{\alpha}}\sin\frac{\pi}{\alpha}}{2a\left(1+\cos\frac{\pi}{\alpha}\right)}=\frac{\pi}{2a}\frac{a^{1/\alpha}}{\sin\frac{\pi}{\alpha}}\left(1-\cos\frac{\pi}{\alpha}\right).\end{aligned}$$

6.9 Residue Calculus Applied to Fourier Transforms

Bài 6.9.1 Chứng minh rằng

1. Nếu $f(t)$ chẵn và thực thì $F(\omega)$ cũng là hàm thực và chẵn
2. Nếu $f(t)$ lẻ và thực thì $F(\omega)$ cũng là hàm thực và lẻ
3. Nếu $f(t)$ có biến đổi Fourier là $F(\omega)$ thì $f(t-\tau)$ có biến đổi Fourier là $e^{-i\omega\tau}F(\omega)$

Giải.

1. Ta thấy rằng

$$F(-\omega)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\,e^{i\omega t}dt=\overline{F(\omega)}.$$

Đặt $t=-x$ thì

$$F(-\omega)=\overline{F(\omega)}=\frac{1}{2\pi}\int_{\infty}^{-\infty}f(-x)\,e^{-i\omega x}d(-x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\,e^{i\omega t}dt=F(\omega).$$

Vậy nên $F(\omega)$ là hàm thực và chẵn

3. Đặt $x = t - \tau$ thì

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(t-\tau)\, e^{-i\omega t} dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, e^{-i\omega(x+\tau)} dx = e^{-i\omega\tau} F(\omega).$$

Bài 6.9.2 [6.9.3] Tìm hàm $f(t)$ ứng với mỗi $F(\omega)$ sau ($a > 0$, $b > 0$), sử dụng giá trị chính

1. $\frac{1}{\omega^2+a^2}$
2. $\frac{-i}{\omega-ia}$
3. $\frac{e^{-ib\omega}}{\omega^2+a^2}$
4. $\frac{2}{(\omega-ia)^2}$
5. $\frac{1}{\omega^2-a^2}$
6. $\frac{\sin a\omega}{\omega}$
7. $\frac{\cos a\omega}{\omega^2+b^2}$

Giải.

4. Ta có

$$\begin{aligned} f(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)\, e^{i\omega t} d\omega \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2e^{i\omega t}}{(\omega - ia)^2} d\omega \\ &= \operatorname{Res}\left[\frac{2e^{izt}}{(z-ia)^2}, ia\right] \end{aligned}$$

Hàm $\frac{2e^{izt}}{(z-ia)^2}$ có cực điểm cấp 2 tại ia nên

$$\begin{aligned}\operatorname{Res}\left[\frac{2e^{izt}}{(z-ia)^2}, ia\right] &= \lim_{z\to ia}\left[(z-ia)^2 f(z)\right]' \\ &= \lim_{z\to ia} 2ite^{izt} = 2ite^{-at}.\end{aligned}$$

Vậy

$$f(t) = 2ite^{-at}.$$

Bài 6.9.3 [6.9.14] Tích chập của hai hàm $f(t)$ và $g(t)$ kí hiệu là $f(t) * g(t)$

$$f(t) * g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\, g(t-\tau)\, d\tau$$

1. Chứng minh $f(t) * g(t) = g(t) * f(t)$. Nghĩa là tích chập giao hoán

2. Chứng minh khai triển Fourier của tích chập bằng 2π nhân với tích của hai biến đổi Fourier của từng hàm.

3. Chứng minh biến đổi Fourier ngược của tích chập hai hàm theo ω là tích của hai biến đổi Fourier ngược tương ứng.

Giải.

2.

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\, g(t-\tau)\, d\tau\right) e^{-i\omega t}dt \\ =\ & \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\left(\tfrac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} g(t-\tau)\, e^{-i\omega t}dt\right) d\tau \\ =\ & \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\, G(\omega)\, e^{-i\omega\tau}d\tau = 2\pi F(\omega)\, G(\omega)\end{aligned}$$

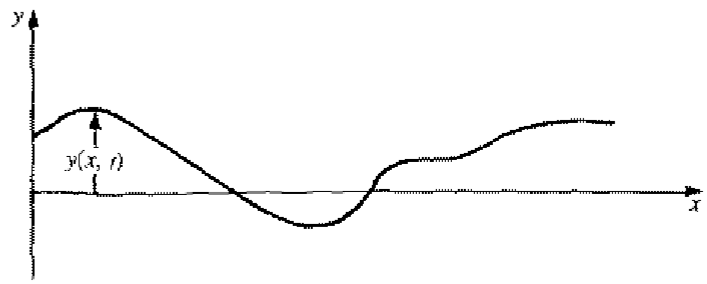


Figure 6.9–6

Hình 6.9.1

3.

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty}F(\sigma)\,G(\omega-\sigma)\,d\sigma\right)e^{i\omega t}d\omega$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty}F(\sigma)\left(\int_{-\infty}^{\infty}G(\omega-\sigma)\,e^{it\omega}d\omega\right)d\sigma$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty}F(\sigma)\,g(t)\,e^{it\sigma}d\sigma = f(t)\,g(t)$$

Bài 6.9.4 [6.9.21] Giả sử có một dây dao động dọc thao chiều trục x và có độ dịch chuyển theo thời gian t so với trục y là $y(x,t)$. Ta chứng minh được rằng

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

Với c là tốc độ của sự lan truyền sóng trên sợi dây. Ta sẽ dùng biến đổi Fourier để giải phương trình trên cho một dây dài vô hạn, tại lúc $t=0$, kí hiệu $y_0(x) = y(x,0)$ và vận tốc $v_0(x) = \frac{\partial y(x,0)}{\partial t}$. Ta sẽ dùng khai triển

$$Y(\omega,t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} y(x,t)\,e^{-i\omega x}dx$$

1. Chứng minh rằng
$$\frac{d^2Y}{dt^2}(\omega,t)+\omega^2c^2Y(\omega,t)=0$$

2. Chứng minh $Y(\omega,t)$ có dạng
$$Y(\omega,t)=A(\omega)\cos(\omega ct)+B(\omega)\sin(\omega ct)$$
Và
$$A(\omega)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}y_0(x)\,e^{-i\omega x}dx$$
$$B(\omega)=\frac{1}{\omega c2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}v_0(x)\,e^{-i\omega x}dx$$

3. Chứng minh
$$y(x,t)=\int_{-\infty}^{\infty}\left[A(\omega)\cos(\omega ct)+B(\omega)\sin(\omega ct)\right]e^{i\omega x}d\omega$$

4. Giả sử $v_0(x)=0$ và $y_0(x)=\Delta e^{-|x|}$ với $\Delta=const>0$. Dùng phương pháp thặng dư, tính $y(x,t)$ với $t>0$. Xét 3 trường hợp $x>ct$, $|x|<ct$, $x<-ct$.

Giải.

1.

$$\begin{aligned}
&\tfrac{d^2Y}{dt^2}(\omega,t)+\omega^2c^2Y(\omega,t)\\
=&\ \tfrac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\tfrac{\partial^2y}{\partial t^2}e^{-i\omega x}dx+\omega^2c^2\tfrac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}y(x,t)\,e^{-i\omega x}dx\\
=&\ \tfrac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\tfrac{\partial^2y}{\partial t^2}+\omega^2c^2y(x,t)\right]e^{-i\omega x}dx\\
=&\ \tfrac{c^2}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\tfrac{\partial^2y}{\partial x^2}+\omega^2y(x,t)\right]e^{-i\omega x}dx=0
\end{aligned}$$

2. Ta có phương trình

$$Y'' + \omega^2 c^2 Y = 0.$$

Phương trình đặc trưng

$$\lambda^2 + \omega^2 c^2 = 0 \Leftrightarrow \lambda = \pm i\omega c.$$

Suy ra nghiệm

$$\begin{aligned} & Y(\omega, t) = A(\omega)\cos(\omega ct) + B(\omega)\sin(\omega ct) \\ \Rightarrow\ & Y'(\omega, t) = \omega c\,[B(\omega)\cos(\omega ct) - A(\omega)\sin(\omega ct)] \end{aligned}$$

Cho $t = 0$ thì

$$A(\omega) = Y(\omega, 0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} y_0(x)\, e^{-i\omega x} dx$$

và

$$B(\omega) = \frac{1}{\omega c} Y'(\omega, 0) = \frac{1}{2\pi\omega c}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial y(x,0)}{\partial t} e^{-i\omega x} dx = \frac{1}{2\pi\omega c}\int_{-\infty}^{\infty} v_0(x)\, e^{-i\omega x} dx.$$

3. Ta có

$$y(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} Y(\omega, t)\, e^{i\omega x} d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} [A(\omega)\cos(\omega ct) + B(\omega)\sin(\omega ct)]\, e^{ix\omega} d\omega.$$

4. Vì $v_0(x) = 0$ nên $B(\omega) = 0$

$$\begin{aligned} A(\omega) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} y_0(x)\, e^{-i\omega x} dx \\ &= \frac{\Delta}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-|x|} e^{-i\omega x} dx \\ &= \frac{\Delta}{2\pi}\left[\int_{-\infty}^{0} e^{(1-i\omega)x} dx + \int_{0}^{\infty} e^{-x(1+i\omega)} dx\right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\Delta}{2\pi}\left[\int_0^\infty e^{(i\omega-1)x}dx + \int_0^\infty e^{-x(1+i\omega)}dx\right] \\
&= \frac{\Delta}{2\pi}\int_0^\infty e^{-x}\left(e^{i\omega x} + e^{-i\omega x}\right)dx \\
&= \frac{\Delta}{\pi}\int_0^\infty e^{-x}\cos(\omega x)\,dx \\
&= \frac{\Delta}{\pi}\frac{1}{\omega^2+1}.
\end{aligned}$$

Suy ra

$$y(x,t) = \frac{\Delta}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos(\omega ct)}{\omega^2+1}e^{ix\omega}d\omega$$

Xét hàm

$$f(z) = \frac{e^{ixz}\left(e^{ictz} + e^{-ictz}\right)}{2(z^2+1)},$$

ta có

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 2\pi i \mathrm{Res}\left[\frac{e^{ixz}\left(e^{ictz}+e^{-ictz}\right)}{2(z^2+1)}, i\right] = 2\pi i\frac{-i\cosh(ct)}{2e^x} = \frac{\pi\cosh(ct)}{e^x}.$$

Vậy

$$y(x,t) = \Delta e^{-x}\cosh(ct).$$

6.10 The Hilbert Transform

Bài 6.10.1 [6.10.1]

1. Tìm biến đổi Hilbert của hàm $g(t) = \frac{t}{t^2+4}$.
2. Xác định $g(t)$ từ biến đổi Hilbert của nó
3. Xét với hàm $g(t) = \frac{t\cos t}{t^2+1}$

Giải.

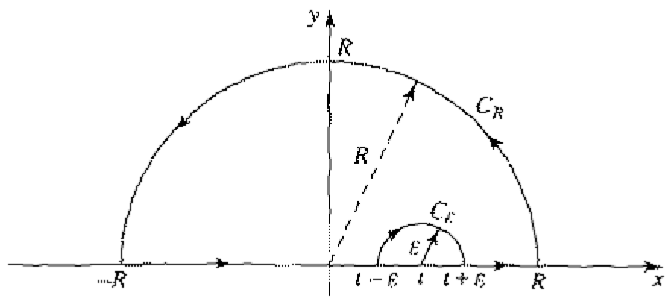


Figure 6.10–1

Hình 6.10.1

1. Ta có

$$\hat{g}(t) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{g(x)}{t-x}dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{(t-x)(x^2+4)}dx.$$

Đặt

$$f(z) = \frac{z}{(t-z)(z^2+4)}.$$

Hàm $f(z)$ có 3 đơn cực: tại t, tại $-2i$ và tại $2i$. Ta có

$$\begin{aligned}
& \int_{-\infty}^{\infty} f(z)\,dz - i\pi\text{Res}[f(z), t] = 2\pi i\text{Res}[f(z), 2i] \\
\Leftrightarrow\quad & \int_{-\infty}^{\infty} f(z)\,dz = i\pi\text{Res}[f(z), t] + 2\pi i\text{Res}[f(z), 2i] \\
\Leftrightarrow\quad & \int_{-\infty}^{\infty} f(z)\,dz = i\pi\lim_{z\to t}\frac{-z}{z^2+4} + 2\pi i\lim_{z\to 2i}\frac{z}{(t-z)(z+2i)} \\
\Leftrightarrow\quad & \int_{-\infty}^{\infty} f(z)\,dz = \frac{-\pi}{i(t-2i)} - i\pi\frac{t}{t^2+4} = \frac{i\pi}{t-2i} - i\pi\frac{t}{t^2+4} \\
\Leftrightarrow\quad & \int_{-\infty}^{\infty} f(z)\,dz = i\pi\frac{t+2i-t}{t^2+4} = \frac{-2\pi}{t^2+4}
\end{aligned}$$

Suy ra

$$\hat{g}(t) = \frac{1}{\pi}\frac{-2\pi}{t^2+4} = \frac{-2}{t^2+4}$$

Kí hiệu giải tích

$$g(t) + i\hat{g}(t) = \frac{t-2i}{t^2+4} = \frac{1}{t+2i}.$$

Hàm $h(z) = 1/(z+2i)$ giải tích trên nửa mặt phẳng $y \geq 0$, một điều kiện cần của việc áp dụng biến đổi Hilbert ngược được thỏa. Tiếp tục thử với hàm $h(z) = \frac{1}{z+2i}$, ta thấy

$$\lim_{R\to\infty} \frac{1}{\pi} \int_{C_R} \frac{dz}{(z+2i)(t-z)} = 0$$

(Định lý). Vì vậy một điều kiện đủ được thỏa. Công thức biến đổi Hilbert ngược có thể được áp dụng.

2. Đầu tiên ta có

$$g(t) = -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\hat{g}(x)}{t-x} dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\frac{2}{x^2+4}}{t-x} dx = \frac{2}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(t-x)(x^2+4)} dx.$$

Mặt khác

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(t-x)(x^2+4)} dx - i\pi \text{Res}\left[\frac{1}{(t-z)(z^2+4)}, t\right] = 2\pi i \text{Res}\left[\frac{1}{(t-z)(z^2+4)}, 2i\right]$$
$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(t-x)(x^2+4)} dx = -\pi i \frac{1}{t^2+4} + 2\pi i \frac{1}{4i(t-2i)} = \frac{\pi}{2(t-2i)} - \frac{\pi i}{t^2+4}$$
$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(t-x)(x^2+4)} dx = \pi \frac{t+2i-2i}{2(t^2+4)} = \frac{\pi t}{2(t^2+4)}$$

Suy ra

$$g(t) = \frac{2}{\pi} \frac{\pi t}{2(t^2+4)} = \frac{t}{t^2+4}.$$

3. Ta có

$$\hat{g}(t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{g(x)}{t-x} dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \cos x}{(t-x)(x^2+1)} dx.$$

Xét hàm

$$f(z) = \frac{ze^{iz}}{(t-z)(z^2+1)}.$$

Hàm có 3 đơn cực tại t, $-i$ và i. Ta thấy $f(z)$ thỏa bổ đề Jordan nên

$$\lim_{R\to\infty}\int_{C_R^{\frown}} f(z)\,dz = 0.$$

Vì vậy

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(z)\,dz - \pi i\text{Res}\,[f(z), t] = 2\pi i\text{Res}\,[f(z), i]$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(z)\,dz = \pi i\lim_{z\to t}\tfrac{-ze^{iz}}{z^2+1} + 2\pi i\lim_{z\to i}\tfrac{ze^{iz}}{(t-z)(z+i)}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(z)\,dz = \pi i\left(\frac{e^{-1}}{t-i} - \frac{te^{it}}{t^2+1}\right) = \pi i\frac{(t+i)e^{-1} - te^{it}}{t^2+1}$$

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(z)\,dz = \frac{ite^{-1} - e^{-1} - it(\cos t + i\sin t)}{t^2+1}$$

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(z)\,dz = \frac{t\sin t - e^{-1} + it(e^{-1} - \cos t)}{t^2+1}$$

Suy ra

$$\hat{g}(t) = \text{Re}\left[\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(z)\,dz\right] = \frac{t\sin t - e^{-1}}{t^2+1}$$

Kí hiệu giải tích:

$$g(t) + i\hat{g}(t) = \frac{t\cos t}{t^2+1} + i\frac{t\sin t - e^{-1}}{t^2+1} = \frac{te^{it} - e^{-1}}{t^2+1}$$

Hàm

$$\frac{ze^{iz} - e^{-1}}{z^2+1}$$

không giải tích trên nửa mặt phẳng trên, vì vậy công thức biến đổi Hilbert ngược không áp dụng được.

Bài 6.10.2 [6.10.2] Chứng minh rằng biến đổi Hilbert của một hàm thực hằng là 0

Giải. Với $a \in \mathbb{R}$,

$$g(t) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{a}{t-x}dx = \frac{a}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x}.$$

Ta có tích phân

$$\int_C \frac{dz}{z} = \int_{-R}^{-\varepsilon} \frac{dx}{x} + \int_{C_\varepsilon^\frown} \frac{dz}{z} + \int_{\varepsilon}^{R} \frac{dx}{x} + \int_{C_R^\frown} \frac{dz}{z} = 0.$$

Theo nguyên lý biến dạng đường cong

$$\int_{C_\varepsilon^\frown} \frac{dz}{z} + \int_{C_R^\frown} \frac{dz}{z} = 0.$$

Nên

$$p.v\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x} = 0.$$

Suy ra $g(t) = 0$.

Bài 6.10.3 [6.10.4]

1. Tìm biến đổi Hilbert cho hàm $g(t) = \frac{1-\cos t}{t^2}$
2. Tìm kí hiệu giải tích ứng với $g(t)$

Giải.

1. Đầu tiên ta có

$$\hat{g}(t) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1-\cos x}{x^2(t-x)}dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2(t-x)} - \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x dx}{x^2(t-x)}.$$

Mặt khác
$$\lim_{R\to\infty}\int_{C_R^{\frown}}\frac{dz}{z^2(t-z)}=0.$$

và
$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dz}{z^2(t-z)}-\pi i\left\{\mathrm{Res}\left[\frac{1}{z^2(t-z)},0\right]+\mathrm{Res}\left[\frac{1}{z^2(t-z)},t\right]\right\}=0$$
$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dz}{z^2(t-z)}=\pi i\left(\frac{1}{t^2}-\frac{1}{t^2}\right)=0$$

Suy ra
$$\hat{g}(t)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos x}{x^2(x-t)}dx.$$

Xét hàm
$$f(z)=\frac{e^{iz}}{z^2(z-t)}.$$

Hàm có một điểm cực cấp hai tại 0 và một đơn cực tại t. Hàm f thỏa bổ đề Jordan nên
$$\int_{-\infty}^{\infty}f(z)\,dz-i\pi\mathrm{Res}\left[\frac{e^{iz}}{z^2(z-t)},0\right]-i\pi\mathrm{Res}\left[\frac{e^{iz}}{z^2(z-t)},t\right]=0$$
$$\Leftrightarrow\int_{-\infty}^{\infty}f(z)\,dz=\pi i\left[\lim_{z\to 0}\left(\frac{e^{iz}}{z-t}\right)'+\lim_{z\to t}\frac{e^{iz}}{z^2}\right]=\pi i\left(\frac{-it-1}{t^2}+\frac{e^{it}}{t^2}\right)$$
$$\Leftrightarrow\int_{-\infty}^{\infty}f(z)\,dz=\pi\frac{t-\sin t+i(\cos t-1)}{t^2}$$

Suy ra
$$\hat{g}(t)=\frac{1}{\pi}\mathrm{Re}\left[\int_{-\infty}^{\infty}f(z)\,dz\right]=\mathrm{Re}\left[\frac{t-\sin t+i(\cos t-1)}{t^2}\right]=\frac{t-\sin t}{t^2}$$

2. Ta có
$$g(z)+i\hat{g}(z)=\frac{1-\cos z+iz-i\sin z}{z^2}=\frac{1+iz-e^{iz}}{z^2}.$$

Bài 6.10.4 [6.10.5] Chứng minh rằng không thể thay đổi thứ tự của biến đổi Hilbert và Fourier mà không làm thay đổi kết quả cuối cùng. Giả sử rằng tất cả biến đổi Hilbert và Fourier cần thiết đều tồn tại và có thể đổi thứ tự tích phân

Giải. Xét $g(t)$. Nếu biến đổi Hilbert trước:

$$\hat{g}(t) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{g(x)}{t-x}dx,$$
$$\hat{G}(\omega) = \tfrac{1}{2\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty}\tfrac{g(x)}{t-x}dx\right]e^{-i\omega t}dt$$
$$= \frac{1}{2\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty}\frac{g(x)\,e^{-i\omega t}}{t-x}dt\right]dx$$

Và nếu biến đổi Fourier trước:

$$G(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}g(t)\,e^{-i\omega t}dt,$$
$$\hat{G}(\omega) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{G(x)}{\omega-x}dx = \frac{1}{2\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\frac{\int_{-\infty}^{\infty}g(t)\,e^{-ixt}dt}{\omega-x}\right]dx$$

Nói chung,

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left[\frac{\int_{-\infty}^{\infty}g(t)\,e^{-ixt}dt}{\omega-x}\right]dx \neq \int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty}\frac{g(x)\,e^{-i\omega t}}{t-x}dt\right]dx$$

Bài 6.10.5 [6.10.10] Phần thực của một hàm truyền là $\frac{\omega^2}{\omega^4-\omega^2+1}$. Dùng biến đổi Hilbert chứng minh rằng phần ảo là $\frac{\omega\left(1-\omega^2\right)}{\omega^4-\omega^2+1}$

Giải. Phần ảo là đối của biến đổi Hilbert của phần thực

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x^2}{(x-\omega)(x^4-x^2+1)}dx.$$

Xét hàm

$$f(z) = \frac{z^2}{(z-\omega)(z^4 - z^2 + 1)}.$$

H$f(z)$ có 5 đơn cực tại ω, $e^{\pm i\pi/6}$ và $e^{\pm i5\pi/6}$. Ta chỉ xét 3 điểm cực nằm trong nửa mặt phẳng phức phía trên $y \geq 0$ ω, $e^{i\frac{\pi}{6}}$ và $e^{i\frac{5\pi}{6}}$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx - \pi i \mathrm{Res}\left[f(z), \omega\right] = 2\pi i \left\{\mathrm{Res}\left[f(z), e^{i\frac{\pi}{6}}\right] + \mathrm{Res}\left[f(z), e^{i\frac{5\pi}{6}}\right]\right\}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \pi i \left\{\mathrm{Res}\left[f(z), \omega\right] + 2\mathrm{Res}\left[f(z), e^{i\frac{\pi}{6}}\right] + 2\mathrm{Res}\left[f(z), e^{i\frac{5\pi}{6}}\right]\right\}$$

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \frac{\omega(1-\omega^2)}{\omega^4 - \omega^2 + 1}$$

6.11 Uniform Convergence of Integrals and the Gamma Function

Bài 6.11.1. [6.11.1] Không làm phép tính tích phân, chứng minh rằng tích phân

$$F(z) = \int_0^{\infty} \frac{e^{izt}}{(t+1)^{3/2}}\,dt$$

hội tụ đều với $z = x + yi$, $-a \leq x \leq a$ và $0 \leq y \leq b$, trong đó a, b là các số dương. Tính $F'(z)$.

Giải. Đặt

$$f(z,t) = \frac{e^{izt}}{(t+1)^{3/2}},$$

ta có

$$|f(z,t)| = \frac{\left|e^{i(x+iy)t}\right|}{(t+1)^{3/2}} = \frac{e^{-yt}}{(t+1)^{3/2}} \leq \frac{1}{(t+1)^{3/2}}$$

với mọi $t \geq 0$. Mà
$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{(t+1)^{3/2}} dt = 2$$
nên tích phân $F(z)$ hội tụ đều theo z. Lúc đó
$$F'(z) = \int_0^{+\infty} \frac{\partial f(z,t)}{\partial z} dt = \int_0^{+\infty} \frac{ite^{izt}}{(t+1)^{3/2}} dt.$$

Bài 6.11.2. [6.11.4] Tính $\Gamma(6)$.

Giải. $\Gamma(6) = 5!$.

Bài 6.11.3. [6.11.5-6] Cho $\Gamma(3+7i) = -.0044 - i.0037$. Hãy tính $\Gamma(4+7i)$ và $\Gamma(1+7i)$.

Giải. Ta có
$$\begin{aligned} \Gamma(4+7i) &= (3+7i)\,\Gamma(3+7i) = 0.0127 - 0.0419i \\ \Gamma(1+7i) &= \frac{\Gamma(3+7i)}{(1+7i)(2+7i)} = 0.0000487170 + 0.000100491i \end{aligned}$$

Bài 6.11.4.

1. Chứng minh rằng
$$\Gamma(1-z)\,\Gamma(1+z) = \frac{\pi z}{\sin(\pi z)}.$$

2. Tính
$$\Gamma(1-iy)\,\Gamma(1+iy).$$

Giải.

1. Ta có

$$z\frac{\pi}{\sin(\pi z)} = z\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \Gamma(1+Z)\Gamma(1-z).$$

2. Áp dụng câu (1) ta có

$$\Gamma(1-iy)\Gamma(1+iy) = \frac{\pi iy}{\sin(\pi iy)}.$$

Bài 6.11.5. Chứng minh

$$\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}\,(2n)!}{2^{2n}n!}$$

với n là số nguyên không âm.

Giải. Ta có

$$\begin{aligned}
\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right) &= \left(n+\frac{1}{2}-1\right)\Gamma\left(n+\frac{1}{2}-1\right)\\
&= \left(n+\frac{1}{2}-1\right)\left(n+\frac{1}{2}-2\right)\Gamma\left(n+\frac{1}{2}-2\right)\\
&= \dots\\
&= \left(n+\frac{1}{2}-1\right)\left(n+\frac{1}{2}-2\right)\dots\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\\
&= \sqrt{\pi}\left(n+\frac{1}{2}-1\right)\left(n+\frac{1}{2}-2\right)\dots\frac{1}{2}\\
&= \frac{\sqrt{\pi}\,(2n-1)(2n-3)\dots1}{2^n}\\
&= \frac{\sqrt{\pi}\,(2n)(2n-1)(2n-2)(2n-3)\dots1}{2^n(2n)(2n-2)\dots2}\\
&= \frac{\sqrt{\pi}\,(2n!)}{2^{2n}n!}.
\end{aligned}$$

Bài 6.11.6. Chứng minh rằng thặng dư của $\Gamma(z)$ tại $-m$, với m là số nguyên không âm, bằng $(-1)^m/m!$.

Giải. Ta có

$$\Gamma(z) = \frac{\Gamma(z+m+1)}{(z+m)(z+m-1)\dots z}.$$

Thặng dư tại $-m$, được tính bằng

$$\lim_{z\to -m} \frac{\Gamma(z+m+1)}{(z+m-1)(z+m-2)\dots z} = \frac{1}{(-1)(-2)\dots(-m)} = \frac{(-1)^m}{m!}.$$

6.12 Principle of the Argument

Bài 6.12.2. [6.12.7] Chứng minh rằng nếu $f(z)$ có cực điểm cấp p tại α, thì thặng dư của $f'(z)/f(z)$ tại α bằng p.

Giải. Ta biểu diễn $f(z)$ thành $g(z)/(z-\alpha)^p$, với $g(\alpha) \neq 0$ và $g(z)$ giải tích tại α. Khi đó ta có

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{\dfrac{g'(z)(z-\alpha)^p - pg(z)(z-\alpha)^{p-1}}{(z-\alpha)^{2p}}}{\dfrac{g(z)}{(z-\alpha)^p}} = \frac{g'(z)}{g(z)} - \frac{p}{z-\alpha}.$$

Do hàm $g'(z)/g(z)$ giải tích tại α nên theo đẳng thức trên ta có thặng dư của $f'(z)/f(z)$ tại α bằng p.

Bài 6.12.3. [6.12.8] (Định lý Rouche) Cho $f(z)$ và $g(z)$ giải tích trên đường cong đơn đóng C và phần trong của nó. Giả sử $|f(z)| > |g(z)|$ trên C. Chúng ta sẽ chứng minh rằng $f(z)$ và $(f(z)+g(z))$ có cùng số không điểm bên trong C.

1. Giải thích tại sao
$$\frac{\Delta_C \arg f(z)}{2\pi} = N_f$$
và
$$\frac{\Delta_C \arg (f(z) + g(z))}{2\pi} = N_{f+g}$$
trong đó N_f là số không điểm của $f(z)$ bên trong C và N_{f+g} là số không điểm của $(f(z) + g(z))$ bên trong C.

2. Chứng minh rằng
$$N_{f+g} = \frac{1}{2\pi}\Delta_C \arg f(z) + \frac{1}{2\pi}\Delta_C \arg \left(1 + \frac{g(z)}{f(z)}\right).$$

3. Nếu $|g| / |f| < 1$ trên C, giải thích tại sao
$$\Delta_C \arg \left(1 + \frac{g(z)}{f(z)}\right) = 0.$$

4. Chứng minh rằng
$$N_f = N_{f+g}.$$

Giải.

1. Do
$$|f(z)| > |g(z)| \geq 0$$
và
$$|f(z)| > |f(z) + g(z) - f(z)|$$
trên C nên $f(z)$ và $(f(z) + g(z))$ không có không điểm trên C. Do đó theo nguyên lý Argument ta có
$$\frac{\Delta_C \arg f(z)}{2\pi} = N_f$$

và

$$\frac{\Delta_C \arg\left(f(z)+g(z)\right)}{2\pi} = N_{f+g}.$$

2. Ta có

$$\begin{aligned} N_{f+g} &= \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f'(z)+g'(z)}{f(z)+g(z)}dz \\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_C \left(\frac{f'(z)}{f(z)} + \frac{\dfrac{g'(z)}{f'(z)}}{1+\dfrac{g(z)}{f(z)}}\right) dz \\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f'(z)}{f(z)}dz + \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{\left(1+\dfrac{g(z)}{f(z)}\right)'}{1+\dfrac{g(z)}{f(z)}}dz \\ &= \frac{1}{2\pi}\Delta_C \arg f(z) + \frac{1}{2\pi}\Delta_C \arg\left(1+\frac{g(z)}{f(z)}\right). \end{aligned}$$

3. Do $|g|/|f| < 1$ trên C nên $\mathrm{Log}\left(1+g(z)/f(z)\right)$ giải tích trên C và do C là đường cong đóng nên

$$\int_C \frac{\left(1+\dfrac{g(z)}{f(z)}\right)'}{1+\dfrac{g(z)}{f(z)}}dz = \int_C \left(\mathrm{Log}\left(1+\frac{g(z)}{f(z)}\right)\right)' dz = 0.$$

Do đó

$$\Delta_C \arg\left(1+\frac{g(z)}{f(z)}\right) = 0.$$

4. Ta có
$$N_{f+g} = N_f + N_{1+g/f} = N_f.$$
Vậy ta có điều phải chứng minh.

Bài 6.12.4. [6.12.9] (Định lý cơ bản của đại số) Cho
$$h(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_0 z^0$$
là đa thức bậc n. Chứng minh $h(z)$ có đúng n không điểm qua các bước sau.

1. Cho
$$\begin{aligned} f(z) &= a_n z^n, \\ g(z) &= a_{n-1} z^{n-1} + a_{n-2} z^{n-2} + \cdots + a_1 z + a_0. \end{aligned}$$
Xét đường tròn C bán kính $r > 1$ với tâm tại 0. Chứng minh rằng trên C ta có
$$\left|\frac{g(z)}{f(z)}\right| < \frac{|a_0| + |a_1| + \cdots + |a_{n-1}|}{|a_n| r}$$
và với r đủ lớn thì $|g(z)| < |f(z)|$ trên C.

2. Dùng định lý Rouche chứng minh rằng $h(z)$ có đúng n không điểm.

Giải. Nếu $a_0, \ldots, a_{n-2}$ đều bằng 0 thì hiển nhiên ta có kết luận của định lý. Xét trường hợp còn lại.

1. Ta có
$$\begin{aligned} \left|\frac{g(z)}{f(z)}\right| &= \frac{|a_0 + a_1 z + \cdots + a_{n-1} z^{n-1}|}{|a_n z^n|} \\ &\le \frac{|a_0| + |a_1| |z| + \cdots + |a_{n-1}| |z|^{n-1}}{|a_n| |z|^n} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{|a_0| + |a_1| r + \cdots + |a_{n-1}| r^{n-1}}{|a_n| r^n} \\
&= \frac{|a_0|}{|a_n| r^n} + \frac{|a_1|}{|a_n| r^{n-1}} + \cdots + \frac{|a_n|}{|a_n| r} \\
&< \frac{|a_0| + |a_1| + \cdots + |a_{n-1}|}{|a_n| r}.
\end{aligned}$$

Ngoài ra, nếu

$$r > \max\left\{\frac{|a_n|}{|a_0| + |a_1| + \cdots + |a_{n-1}|}, 1\right\}$$

thì ta có

$$\left|\frac{g(z)}{f(z)}\right| < 1, \quad z \in C.$$

2. Dễ thấy $f(z)$ có đúng n nghiệm trong mọi đĩa tròn có tâm tại 0. Áp dụng định lý Rouche, ta có

$$h(z) = g(z) + f(z)$$

có đúng n nghiệm trong đĩa tròn có tâm tại 0 với bán kính đủ lớn bất kì. Vậy ta đã chứng minh định lý cơ bản của đại số.

Bài 6.12.5. [6.12.10-11] Chứng minh rằng mọi nghiệm của phương trình $z^4 + z^3 + 1 = 0$ đều nằm trong $|z| = 3/2$ và nằm ngoài $|z| = 3/4$.

Giải. Đặt $f(z) = z^4$ và $g(z) = z^3 + 1$, dễ thấy ghiệm của $f(z)$ và $g(z)$ không nằm trên các đường tròn $|z| = 3/2$ và $|z| = 3/4$. Với z nằm trên $|z| = 3/2$ ta có

$$|g(z)| = \left|z^3 + 1\right| \le |z|^3 + 1 = \frac{35}{8} < \frac{81}{16} = |z|^4 = |f(z)|.$$

Suy ra số không điểm của $g(z) + f(z)$ bằng số không điểm của $f(z) = z^4$, tức bằng 4, trong hình tròn $|z| < 3/2$. Mặt khác, với z nằm trên $|z| = 3/4$, ta có

$$|f(z)| = \frac{81}{256} < 1 - \frac{27}{64} = 1 - |z|^3 \leq \left|1 + z^3\right| = |g(z)|.$$

Nên số nghiệm của $f(z) + g(z)$ trong hình tròn $|z| < 3/4$ bằng số nghiệm của $g(z) = z^3 + 1$ trong đó, và bằng 0. Vậy ta đã chứng minh rằng mọi nghiệm của phương trình $z^4 + z^3 + 1 = 0$ đều nằm trong $|z| = 3/2$ và nằm ngoài $|z| = 3/4$.

Bài 6.12.6. [6.12.14] Chứng minh rằng phương trình $5\sin z - e^z = 0$ có một nghiệm trong hình vuông $|x| \leq \pi/2$, $|y| \leq \pi/2$ và nghiệm này là nghiệm thực.

Giải. Trên hai cạnh $|x| = \pi/2$, thì

$$e^x < 5 = 5\sqrt{\sin^2 x},$$

trên cạnh $|y| = \pi/2$, $-\pi/2 \leq x \leq \pi/2$ thì

$$e^x \leq e^{\pi/2} < 5 < 5\sqrt{\sinh^2(\pm\pi/2)}.$$

Vậy, trên hình vuông đang xét, ta có

$$|e^z| = e^x < 5\sqrt{\sin^2 x + \sinh^2 y} = |5\sin z|.$$

Theo địng lý Rouche, thì phương trình $5\sin z - e^z = 0$ chỉ có một nghiệm trong hình vuông đang xét. Mặt khác phương trình, ta có $e^{-\pi/2} - 5\sin(-\pi/2) > 0$ và $e^{\pi/2} - 5\sin(\pi/2) < 0$ nên $e^z + 5\sin z = 0$ có nghiệm thực trong khoảng $(-\pi/2, \pi/2)$. Vậy ta đã chứng minh xong bài toán.

Bài 6.12.7. [6.12.17] Tìm số nghiệm của phương trình $e^z - \sin z$ bên trong các đường tròn $|z| = 2$ và $|z| = 4$ bằng cách phân tích trên đồ thị phép biến đổi $e^z - \sin z$

trên các đường tròn đó.

Phần III

Các bài tập lý thuyết

Chương 1

Tính chất cơ bản của hàm giải tích

Bài 1.1. Nếu A và B là hai tập rời nhau trong mặt phẳng phức, A là một tập compact, và B là một tập đóng. Chứng minh rằng có một số thực dương $\delta > 0$ sao cho $|\alpha - \beta| \geq \delta$ với mọi $\alpha \in A$ và $\beta \in B$.

Giải. Ta chứng minh điều này bằng phản chứng. Giả sử với mọi $n \in \mathbb{N}$, tồn tại a_n, b_n lần lượt trong A, B thỏa mãn $|a_n - b_n| < \frac{1}{n}$. Vì A là compact nên ta trích được dãy con $\{a_{n_k}\}$ hội tụ về a. Khi đó ta có $\{b_{n_k}\}$ cũng hội tụ về a. Mặt khác A và B đều là tập đóng nên ta suy ra

$$a \in A \cap B \neq \emptyset.$$

Điều này mâu thuẫn và kết thúc chứng minh.

Bài 1.2. Giả sử f là một hàm nguyên ,và với mọi chuỗi lũy thừa

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n$$

có ít nhất một hệ số bằng 0. Chứng minh rằng f là một đa thức.

Giải. Vì mọi biểu diễn như vậy đều có một hệ số bằng 0 nên ta suy ra với mọi $a \in \mathbb{C}$, tồn tại $n \in \mathbb{N}$ sao cho $f^{(n)}(a) = 0$. Với mọi $n \in \mathbb{N}$, ta đặt

$$A_n = \left\{x \in \mathbb{C} : \quad f^{(n)}(a) = 0\right\} = f^{(n)^{-1}}(\{0\})$$

thì ta có A_n Lebesgue-đo được (vì là tập đóng) và $A_n \uparrow \mathbb{C}$.

Mặt khác nếu f không là đa thức thì $f^{(n)}$ không là hàm đồng nhất 0 với mọi n. Do đó ta suy ra A_n là tập con đếm được của $\mathbb{C}$ nên có độ đo Lebesgue là 0. Điều này mâu thuẫn vì độ đo Lebesgue của $\mathbb{C}$ là ∞.

Bài 1.3. Giả sử f và g là các hàm nguyên, và $|f(z)| \leq |g(z)|$ với mọi z. Có thể kết luận gì về hai hàm này?

Giải. Nếu g là hàm hằng thì theo Định lý Liouville hiển nhiên ta có f cũng là hàm hằng. Trong trường hợp ngược lại, nếu $f = 0$ thì hiển nhiên giải thiết đã cho đúng.

Giả sử $f \neq 0$, ta gọi A là tập các không điểm của g, ta chứng minh $\frac{f}{g}$ có điểm kì dị bỏ được tại các không điểm này. Thật vậy, xét không điểm a trong A và gọi bậc của nó là n, ta có $g(z) = (z-a)^n \hat{g}(z)$ với $\hat{g}(a) \neq 0$. Rõ ràng ta thấy a cũng là không điểm (giả sử cấp m) của f, do đó $f(z) = (z-a)^m \hat{f}(z)$ với $\hat{f}(a) \neq 0$. Trong trường hợp $m < n$, ta có

$$\left|\hat{f}(z)\right| \leq \left|(z-a)^{n-m}\right| |\hat{g}(z)| \qquad \forall z \in \mathbb{C}.$$

(Điều này đúng trên $\mathbb{C} \setminus \{a\}$ nên sẽ đúng trên $\mathbb{C}$). Như vậy mâu thuẫn sẽ xảy ra khi ta thế $x = a$, điều đó dẫn đến $m \geq n$ hay

$$\lim_{z \to a} (z-a) \frac{f(z)}{g(z)} = 0 \qquad \forall a \in A$$

tức tồn tại hàm nguyên h để $h(z) = \frac{f(z)}{g(z)} \quad \forall z \in \mathbb{C} \setminus A$. Mặt khác vì A đếm được nên ta có $\mathbb{C} \setminus A$ trù mật trong $\mathbb{C}$, suy ra $|h(z)| \leq 1 \quad \forall z \in \mathbb{C}$. Áp dụng Định lý Liouville, ta có h là hằng số có modulus nhỏ hơn 1.

Vậy tất cả các bộ (f, g) thỏa yêu cầu là:

$$\begin{cases} f(z) & \equiv a \\ g(z) & \equiv b \\ |a| & < |b| \end{cases} \quad \vee \quad f(z) \equiv 0 \quad \vee \quad \begin{cases} f(z) & = cg(z) \\ |c| & \leq 1 \end{cases}.$$

Bài 1.4. Giả sử f là một hàm nguyên, và

$$|f(z)| \leq A + B|z|^k$$

với mọi z, trong đó A, B, và k là các số dương . Chứng minh rằng f phải là một đa thức.

Giải. Trong trường hợp k không là số tự nhiên, ta dễ dàng tìm được các hằng số dương C, D sao cho $A + B|z|^k \leq C + D|z|^n$ với n là số nguyên dương nhỏ nhất không nhỏ hơn k. Vậy ta chỉ cần xét trường hợp khi $k \in \mathbb{Z}^+$. Khi đó ta xét đạo hàm bậc k của f như sau

$$f^{(k)}(z) = \frac{1}{2\pi i.(k+1)!} \oint_\gamma \frac{f(\xi)\, d\xi}{(\xi - z)^{k+1}}.$$

Ta có $\left|f^{(k)}(z)\right| \leq \frac{1}{(k+1)!} . \frac{A + B(|z| + r)^k}{r^k}$ với mọi $r > 0$. Cho r dần về vô cùng ta được

$$\left|f^{(k)}(z)\right| \leq \frac{B}{(k+1)!}.$$

Định lý Liouville cho ta $f^{(k)} = 0$ và do đó f là đa thức.

Bài 1.5. Giả sử $\{f_n\}$ là dãy hàm giải tích bị chặn đều trên Ω mà $\{f_n(z)\}$ hội tụ với mọi $z \in \Omega$. Chứng minh rằng dãy hàm đã cho hội tụ đều trên từng tập compact.

Giải. Ta giả sử rằng $\{f_n\}$ không Cauchy trên K, nghĩa là tồn tại dãy $\{z_k\}$ trong K, bộ (m_k, n_k) thỏa m_k, n_k lớn hơn k và $\varepsilon > 0$ sao cho

$$|f_{m_k}(z_k) - f_{n_k}(z_k)| \geq \varepsilon.$$

Vì K compact nên tồn tại một dãy con của $\{z_k\}$ hội tụ, vì việc trích các dãy con không làm thay đổi mệnh đề trên, ta có thể giả sử dãy $\{z_k\}$ hội tụ về z_0 trong K. Mặt khác tồn tại $R > 0$ sao cho $\overline{D(z_0, 2R)}$ chứa trong Ω nên với mọi $z \in D(z_0, R)$, ta có

$$[f_m(z) - f_n(z)] - [f_m(z_0) - f_n(z_0)] = \oint_{|\zeta - z_0| = 2R} [f_m(\zeta) - f_n(\zeta)] \frac{z - z_0}{(\zeta - z)(\zeta - z_0)} d\zeta$$

nên

$$|[f_m(z) - f_n(z)] - [f_m(z_0) - f_n(z_0)]| \leq |z - z_0| .2M.\frac{1}{2R^2} = \frac{M|z - z_0|}{R^2}.$$

Chọn k đủ lớn để $\frac{M|z_k - z_0|}{R^2} < \frac{\varepsilon}{2}$ và $|f_m(z_0) - f_n(z_0)| < \frac{\varepsilon}{2}$ với mọi m, n lớn hơn k (do dãy $\{f_n(z_0)\}$ Cauchy), ta có

$$|f_{m_k}(z_k) - f_{n_k}(z_k)| \leq |f_{m_k}(z_0) - f_{n_k}(z_0)| + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

Điều này mâu thuẫn với giả thiết và kết thúc chứng minh.

Bài 1.6. Biết rằng tồn tại một miền Ω thỏa mãn $\exp(\Omega) = D(1,1)$. Chứng minh rằng exp là song ánh trên Ω và có nhiều tập Ω thỏa tính chất này. Chọn một miền Ω như vậy và thiết lập hàm $\log z$ với $|z - 1| < 1$ là một số w thuộc Ω sao cho $e^w = z$.

Chứng minh rằng $\log'(z) = z^{-1}$. Tìm các hệ số $\{a_n\}$ để

$$\frac{1}{z} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-1)^n,$$

từ đó suy ra khai triển

$$\log z = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-1)^n.$$

Giải. Đầu tiên ta chứng minh exp là đơn ánh. Thật vậy, giả sử tồn tại z_1, z_2 để $e^{z_1} = e^{z_2}$, ta suy ra $z_1 - z_2 = k2\pi i$, không mất tính tổng quát, với $k > 0$. Do đó với mọi $t \in [\mathrm{Im}(z_2), \mathrm{Im}(z_2) + 2\pi]$, tồn tại $z_t \in \Omega$ để $\mathrm{Im}(z_t) = t$. Khi đó ta có $\arg e^{z_t} \equiv \mathrm{Im}(z_t) = t \pmod{2\pi}$. Điều này vô lý vì $e^z \in D(1,1)$ nên không thể có argument tùy ý $(\mathrm{mod}\ 2\pi)$.

Việc tồn tại nhiều tập Ω với tính chất này là hiển nhiên, do ta có thể tịnh tiến Ω theo vector $k2\pi i$. Với một miền Ω như vậy, ta có $f(z) = e^z$ là một vi đồng phôi, với hàm ngược $\log w$ có đạo hàm là

$$\frac{d\log w}{dw} = \left(\frac{de^z}{dz}\right)^{-1} = \frac{1}{e^z} = \frac{1}{w}.$$

Trên $D(1,1)$, ta có

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{1-(1-z)} = \sum_{n=0}^{\infty} (1-z)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (z-1)^n,$$

do đó

$$\log z = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} (z-1)^n.$$

Bài 1.7. Giả sử $f \in H(\Omega)$, công thức Cauchy cho đạo hàm của f,

$$f^n(z) = \frac{n!}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}} d\zeta, \quad (n = 1,\ 2,\ 3, \ldots)$$

đúng với điều kiện nhất định. Hãy đưa ra các điều kiện đó, và chứng minh công thức trên.

Giải. Điều này đúng khi $\operatorname{Ind}(\Gamma, z) = 1$. Chứng minh cụ thể được trình bày ở phần lý thuyết.

Bài 1.8. Giả sử P và Q là các đa thức, bậc của Q lớn hơn bậc của P ít nhất là 2, và hàm hữu tỷ $R = P/Q$ không có cực điểm trên trực thực. Chứng minh rằng tích phân của R trên $(-\infty, \infty)$ là $2\pi i$ nhân với tổng thặng dư của R trên nủa mặt phẳng trên. Phát biểu tương tự cho nửa mặt phẳng dưới? Dùng phương pháp trên tính tích phân

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{1 + x^4}\, dx.$$

Giải. Vế đầu đã được trình bày cụ thể ở phần lý thuyết, ta chỉ áp dụng nó để tính tích phân ở đề bài. Ta có

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{1 + x^4}\, dx &= 2\pi i \left[\operatorname{Res}\left(\frac{z^2}{1 + z^4}, e^{i\frac{\pi}{4}}\right) + \operatorname{Res}\left(\frac{z^2}{1 + z^4}, e^{i\frac{3\pi}{4}}\right)\right] \\
&= 2\pi i \left[\lim_{z \to e^{i\frac{\pi}{4}}} \frac{z^2}{4z^3} + \lim_{z \to e^{i\frac{3\pi}{4}}} \frac{z^2}{4z^3}\right] \\
&= 2\pi i \left[\frac{z_1^2}{4z_1^3} + \frac{z_2^2}{4z_2^3}\right]
\end{aligned}$$

với $z_1 = e^{i\frac{\pi}{4}}$ và $z_2 = e^{i\frac{3\pi}{4}}$ nên $z_1 + z_2 = i\sqrt{2}$ và $z_1 z_2 = -1$. Do đó

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{1 + x^4}\, dx = 2\pi i \frac{z_1^2 z_2^2 (z_1 + z_2)}{4z_1^3 z_2^3}$$

$$\begin{aligned} &= -2\pi i \frac{i\sqrt{2}}{4} \\ &= \frac{\pi}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

Bài 1.9. Tính $\int_{-\infty}^{\infty} e^{itx}/\left(1+x^2\right) dx$ với một số thực t, bằng phương pháp được mô tả trong Bài 1.8..

Giải. Theo công thức ở phần lý thuyết, ta có

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{itx}}{(1+x^2)} dx &= 2\pi i \text{Res}\left(\frac{e^{itz}}{(1+z^2)}, i\right) \\ &= 2\pi i \lim_{z\to i} \frac{e^{itz}}{2z} \\ &= \frac{\pi}{e^t} \end{aligned}$$

Bài 1.10. Cho γ là đường tròn đơn vị được định hướng dương, tính

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{e^z - e^{-z}}{z^4} dz.$$

Giải. Tích phân trên chỉnh là tổng thặng dư tại các cực của hàm $f(z) = \frac{e^z - e^{-z}}{z^4}$. Hàm này chỉ có thể nhận $z = 0$ làm cực, và để tính bậc của cực này, ta nhận thấy

$$\begin{aligned} e^z - e^{-z} &= \left(1 + z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{6} + \frac{z^4}{24}\dots\right) - \left(1 - z + \frac{z^2}{2} - \frac{z^3}{6} + \frac{z^4}{24} - \dots\right) \\ &= 2z + 2\frac{z^3}{6} + \left[z^5\right] \end{aligned}$$

Do đó ta có

$$\frac{e^z - e^{-z}}{z^4} = 2z^{-3} + \frac{1}{3}z^{-1} + [z]$$

nên $\text{Res}(f(z), 0) = \frac{1}{3}$. Vậy tích phân cần tính bằng $\frac{1}{3}$.

Bài 1.11. Giả sử α là một số phức, $|\alpha| \neq 1$, tính

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{1 - 2\alpha\cos\theta + \alpha^2}$$

bằng cách tính tích phân $(z-\alpha)^{-1}(z-1/\alpha)^{-1}$ trên đường tròn đơn vị.

Giải. Đặt $z = e^{i\theta}$ với $0 \leq \theta \leq 2\pi$ thì $dz = zd\theta$, và

$$\cos\theta = \frac{z+\overline{z}}{2} = \frac{z+z^{-1}}{2}$$

nên

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{1-2\alpha\cos\theta+\alpha^2} &= \oint_{\partial D(0,1)} \frac{dz}{z\left(1-\alpha\left(z+z^{-1}\right)+\alpha^2\right)} \\
&= \oint_{\partial D(0,1)} \frac{dz}{-\alpha z^2 + \left(1+\alpha^2\right)z - \alpha} \\
&= \oint_{\partial D(0,1)} \frac{dz}{-(z-\alpha)(\alpha z - 1)}
\end{aligned}$$

- Nếu $|\alpha| < 1$ thì $\dfrac{1}{-(z-\alpha)(\alpha z-1)}$ chỉ có một cực nằm trong $D(0,1)$ là $z = \alpha$. Do đó

$$\begin{aligned}
\oint_{\partial D(0,1)} \frac{dz}{-(z-\alpha)(\alpha z-1)} &= \operatorname{Res}\left[\frac{1}{-(z-\alpha)(\alpha z-1)}, \alpha\right] \\
&= \lim_{z\to\alpha} \frac{z-\alpha}{-(z-\alpha)(\alpha z-1)} \\
&= \lim_{z\to\alpha} \frac{-1}{\alpha z-1} = \frac{1}{1-\alpha^2}
\end{aligned}$$

- Nếu $|\alpha| > 1$ thì $\dfrac{1}{-(z-\alpha)(\alpha z-1)}$ chỉ có một cực điểm nằm trong $D(0,1)$ là

$z = \dfrac{1}{\alpha}$. Do đó

$$\begin{aligned}\oint_{\partial D(0,1)} \frac{dz}{-(z-\alpha)(\alpha z-1)} &= \operatorname{Res}\left[\frac{1}{-(z-\alpha)(\alpha z-1)}, \frac{1}{\alpha}\right] \\ &= \lim_{z\to\frac{1}{\alpha}} \frac{z-\frac{1}{\alpha}}{-(z-\alpha)(\alpha z-1)} \\ &= \lim_{z\to\frac{1}{\alpha}} \frac{-1}{\alpha(z-\alpha)} = \frac{-1}{1-\alpha^2}\end{aligned}$$

Bài 1.12. Tính

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 e^{itx}dx \quad (t \text{là số thực}).$$

Giải. Tích phân này hội tụ vì $\left|\frac{\sin x}{x}\right|^2 \le \frac{1}{x^2}$ và tích phân $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{itx}}{x^2}\, dx$ hội tụ. Không mất tính tổng quát, ta chỉ xét trường hợp $t \ge 0$ vì khi t đổi dấu, tích phân vẫn giữ nguyên. Ta có

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 e^{itx}dx &= -\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i2z}+e^{-i2z}-2}{4z^2} e^{itz}dz \\ &= -\int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{e^{i(t+2)z}}{4z^2} + \frac{e^{i(t-2)z}}{4z^2} - \frac{e^{itz}}{2z^2}\right] dz \\ &= -\pi i \operatorname{Res}\left(\frac{e^{i(t+2)z}}{4z^2} + \frac{e^{i(t-2)z}}{4z^2} - \frac{e^{itz}}{2z^2}, 0\right) \\ &= \pi i \operatorname{Res}\left(\frac{\sin^2 z}{z^2}, 0\right) = 0\end{aligned}$$

nếu $t \ge 2$. Trong trường hợp $0 < t < 2$ thì

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 e^{itx}dx &= -\pi i \operatorname{Res}\left(\frac{e^{i(t+2)z}}{4z^2} + \frac{e^{i(2-t)z}}{4z^2} - \frac{e^{itz}}{2z^2}, 0\right) \\ &= -\pi i \operatorname{Res}\left(\frac{i(t+2)z}{4z^2} + \frac{i(2-t)z}{4z^2} - \frac{itz}{2z^2} + \left[z^0\right], 0\right)\end{aligned}$$

$$= \quad -\pi i\left(\frac{4i-2it}{4}\right) = \pi\left(1-\frac{t}{2}\right)$$

Vậy trong tất cả các trường hợp, ta có

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 e^{itx}dx = \max\left\{\pi\left(1-\frac{|t|}{2}\right), 0\right\}$$

Bài 1.13. Tính

$$\int_0^{\infty}\frac{dx}{1+x^n} \quad (n = 2,\ 3,\ 4, \ldots)$$

Nếu n là một số chẵn, có thể sử dụng phương pháp trong Bài 1.8.. Tuy nhiên, một đường khác có thể được chọn để tính đơn giản hơn và dùng được để tính cho cả số lẻ: từ 0 đến R, đến $R\exp(2\pi i/n)$, đến 0.

Giải.

- Nếu $n = 2m$ với m nguyên và $m \geq 1$, ta có

$$\int_0^{\infty}\frac{dx}{1+x^n} = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{1+x^n} = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dz}{1+z^n}$$

Ta tính tích phân từ $-R$ đến R, qua nửa đường tròn trên tâm 0 bán kính R(kí hiệu là C_R), sau đó qua giới hạn. Suy ra

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dz}{1+z^n} = 2\pi i\sum_{k=0}^{m-1}\operatorname{Res}\left[\frac{1}{1+z^n}, \operatorname{cis}\left(\frac{\pi}{n}+k\frac{2\pi}{n}\right)\right].$$

Ta có

$$\begin{aligned}\operatorname{Res}\left[\frac{1}{1+z^n}, \operatorname{cis}\left(\frac{\pi}{n}+k\frac{2\pi}{n}\right)\right] &= \frac{1}{n\left[\operatorname{cis}\left(\frac{\pi}{n}+k\frac{2\pi}{n}\right)\right]^{n-1}} = \frac{1}{n\operatorname{cis}\left[\left(1-\frac{1}{n}\right)\pi\left(2k+1\right)\right]}\\ &= \frac{1}{n\operatorname{cis}\left[\left(\pi-\frac{(2k+1)\pi}{n}\right)\right]} = -\frac{1}{n}\operatorname{cis}\frac{(2k+1)\pi}{n}\end{aligned}$$

nên

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dz}{1+z^n} &= -\frac{2\pi i}{n}\sum_{k=0}^{m-1}\left[\text{cis}\frac{(2k+1)\pi}{n}\right] \\
&= -\frac{2\pi i}{n}\text{cis}\left(\frac{\pi}{n}\right)\frac{1-\left(\text{cis}\frac{2\pi}{n}\right)^m}{1-\text{cis}\frac{2\pi}{n}} \\
&= -\frac{2\pi i}{n}\text{cis}\left(\frac{\pi}{n}\right)\frac{1-\text{cis}\pi}{1-\text{cis}\frac{2\pi}{n}} \\
&= -\frac{2\pi i}{n}\frac{2\text{cis}\left(\frac{\pi}{n}\right)}{1-\text{cis}\frac{2\pi}{n}} = -\frac{2\pi i}{n}\frac{2e^{i\frac{\pi}{n}}}{1-e^{i\frac{2\pi}{n}}} \\
&= \frac{2\pi i}{n}\frac{1}{\frac{e^{i\frac{\pi}{n}}-e^{-i\frac{\pi}{n}}}{2}} = \frac{2\pi i}{n}\frac{1}{i\sin\frac{\pi}{n}} = 2\frac{\pi}{n}\frac{1}{\sin\frac{\pi}{n}}
\end{aligned}$$

Suy ra

$$\int_0^{\infty}\frac{dx}{1+x^n} = \frac{\pi}{n}\frac{1}{\sin\frac{\pi}{n}} \text{ (nếu } n \text{là số chẵn)}$$

- Nếu $n = 2m+1, m \geq 1$. Đặt $f(z) = \frac{1}{1+z^n}$ và $I = \int_0^{\infty} f(z)\,dz$, ta xét

$$\int_0^R f(z)\,dz + \int_C f(z)\,dz + \int_{Re^{i\frac{2\pi}{n}}}^0 f(z)\,dz = 2\pi i\text{Res}\left[f(z), \text{cis}\frac{\pi}{n}\right],$$

với C là cung tròn bán kính R quay từ 0 đến $\frac{2\pi}{n}$ theo chiều dương. Khi đó đường cong kín ta thu được quay một vòng quanh một cực duy nhất $z = \text{cis}\frac{\pi}{n}$. Ta có

$$\left|\int_C f(z)\,dz\right| = \left|\int_C \frac{dz}{1+z^n}\right| \leq \int_C \frac{dz}{|R^n-1|} = \frac{R\frac{2\pi}{n}}{|R^n-1|} \longrightarrow 0 \text{ với } n \geq 3,$$

và

$$\int_{Re^{i\frac{2\pi}{n}}}^0 f(z)\,dz = \int_{Re^{i\frac{2\pi}{n}}}^0 \frac{dz}{1+z^n} = \int_R^0 \frac{d\left(re^{i\frac{2\pi}{n}}\right)}{1+\left(re^{i\frac{2\pi}{n}}\right)^n} = \int_R^0 \frac{e^{i\frac{2\pi}{n}}dr}{1+r^n} = -e^{i\frac{2\pi}{n}}I$$

Suy ra

$$\begin{aligned}\left(1-e^{i\frac{2\pi}{n}}\right)I &= 2\pi i\mathrm{Res}\left[f(z),\mathrm{cis}\frac{\pi}{n}\right] = 2\pi i\frac{1}{n\mathrm{cis}\left(\frac{n-1}{n}\pi\right)}\\ &= \frac{2\pi i}{n}\frac{1}{e^{i\left(\pi-\frac{\pi}{n}\right)}} = -\frac{2\pi i}{n}e^{i\frac{\pi}{n}}\end{aligned}$$

nên

$$I=\frac{2\pi i}{n}\frac{e^{i\frac{\pi}{n}}}{e^{i\frac{2\pi}{n}}-1}=\frac{\pi i}{n}\frac{1}{\frac{e^{i\frac{\pi}{n}}-e^{-i\frac{\pi}{n}}}{2}}=\frac{\pi i}{n}\frac{1}{i\sin\frac{\pi}{n}}=\frac{\pi}{n}\frac{1}{\sin\frac{\pi}{n}}$$

Vậy tích phân trên hội tụ khi và chỉ khi $n\geq 2$, khi đó, tích phân này chính là

$$\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^n}=\frac{\pi}{n}\frac{1}{\sin\frac{\pi}{n}}.$$

Bài 1.14. Cho Ω_1 và Ω_2 là các miền phẳng, f và g theo thứ tự là các hàm phức khác hằng xác định trên Ω_1 và Ω_2, và $f(\Omega_1)\subset\Omega_2$. Đặt $h=g\circ f$. Nếu f và g là các hàm giải tích thì như ta đã biết, h cũng là hàm giải tích. Giả sử ta có được f và h là các hàm giải tích, ta có kết luận gì về g? Chúng ta có được gì nếu g và h giải tích?

Giải. Nếu f và h giải tích, ta chưa thể kết luận gì về g. Thật vậy, ta chọn Ω_2 sao cho nó thực sự chứa Ω_1 và f là hàm đồng nhất, khi đó ta thiết lập $g=\chi_{f(\Omega_1)}$ thì g và f đều khác hằng, f và h giải tích nhưng g thì không.

Nếu g và h giải tích, ta cũng chưa thể kết luận gì về f. Thật vậy ta chọn f là một hàm không liên tục trên Ω_1, chỉ nhận 2 giá trị là 0 và 1, Ω_2 là một tập mở chứa $\{0,1\}$. Chọn $g=z(1-z)$, ta có g và h đều giải tích nhưng f thì không.

Bài 1.15. Giả sử Ω là một miền, $\varphi\in H(\Omega),\varphi'$ không có không điểm trong Ω, $f\in H(\varphi(\Omega))$, $g=f\circ\varphi$, $z_0\in\Omega$ và $w_0=\varphi(z_0)$. Chứng minh rằng nếu f có không điểm bậc m tại w_0 thì g cũng có không điểm bậc m tại z_0. Điều này thay đổi như thế nào nếu φ' có không điểm bậc k tại z_0?

Giải. Nếu f có không điểm bậc m tại w_0 thì nó viết được dưới dạng $f(z) = (z-w_0)^m f_1(z)$ với $f_1(w_0) \neq 0$. Do đó

$$g(z) = f(\varphi(z)) = (\varphi(z) - \varphi(z_0))^m f_1(\varphi(z))$$

Ta đếm bậc không điểm tại z_0 của $\varphi_1(z) = \varphi(z) - \varphi(z_0)$. Rõ ràng bậc này là 1 vì $\varphi_1'(z_0) = \varphi'(z_0) \neq 0$. Vậy bậc không điểm tại tại z_0 của g là m.

Trong trường hợp $\varphi' = \varphi_1'$ có không điểm bậc k tại z_0, ta suy ra φ_1 có không điểm bậc $k+1$ tại z_0, do đó g có không điểm bậc $m(k+1)$ tại z_0.

Bài 1.16. Cho μ là một độ đo phức trên không gian đo được X, Ω là miền mở trong mặt phẳng phức, φ là một hàm phức bị chặn trên $\Omega \times X$ thỏa mãn $\varphi(z,t)$ là hàm đo được theo biến t và là hàm giải tích theo biến z. Đặt

$$f(z) = \int_X \varphi(z,t)\, d\mu(t)$$

với mọi $z \in \Omega$. Chứng minh rằng $f \in H(\Omega)$.

Giải. Ta có

$$\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \int_X \frac{\varphi(z,t) - \varphi(z_0,t)}{z - z_0}\, d\mu(t)$$

với $\frac{\varphi(z,t)-\varphi(z_0,t)}{z-z_0} \to \frac{\partial \varphi}{\partial z}(z_0,t)$ khi $z \to z_0$. Vậy để áp dụng định lý hội tụ bị chặn Lebesgue, ta chỉ cần chứng minh

$$\left| \frac{\varphi(z,t) - \varphi(z_0,t)}{z - z_0} \right| < M$$

với mọi z trên một lân cận nào đó của z_0. Vì $z_0 \in \Omega$ nên tồn tại $D(z_0,r)$ sao cho $\overline{D(z_0,2r)} \subset \Omega$, khi đó ta có

$$\frac{\varphi(z,t) - \varphi(z_0,t)}{z - z_0} = \frac{1}{2\pi i (z - z_0)} \oint_{\partial D(z_0,2r)} \varphi(\zeta,t) \left(\frac{1}{\zeta - z} - \frac{1}{\zeta - z_0} \right) d\zeta$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial D(z_0,2r)} \frac{\varphi(\zeta,t)}{(\zeta-z)(\zeta-z_0)}\, d\zeta$$

Vì $|\varphi|$ bị chặn trên bởi M_0 và $|(\zeta-z)(\zeta-z_0)| > 2r^2$, ta suy ra

$$\left|\frac{\varphi(z,t)-\varphi(z_0,t)}{z-z_0}\right| < \frac{M_0.4\pi r}{2\pi.2r^2} = \frac{M_0}{r}.$$

Vậy ta kiểm chứng được các điều kiện của định lý hội tụ bị chặn, do đó ta có điều phải chứng minh.

Bài 1.17. Tìm miền xác định và miền mà các hàm sau đây giải tích:

$$f(z) = \int_0^1 \frac{dt}{1+tz}, \quad g(z) = \int_0^\infty \frac{e^{tz}\, dt}{1+t^2}, \quad h(z) = \int_{-1}^1 \frac{e^{tz}\, dt}{1+t^2}.$$

Giải. Với hàm f, ta tìm được miền xác định là $D = \mathbb{C} \setminus (-\infty,-1]$, ta chứng minh f giải tích trên D. Thật vậy, với mọi $\alpha \in (0,\pi)$, gọi

$$D_\alpha = \{z \in \mathbb{C} : \ \mathrm{Arg} z \in (-\alpha,\alpha)\},$$

ta chỉ cần chứng minh f giải tích trên D_αvới mọi $\alpha \in (0,\pi)$ là đủ. Thật vậy, với mọi $z \in D_\alpha$, ta có $1+tz \in 1+D_\alpha$ nên $|1+tz| \geq \sin\alpha$, do đó $\frac{1}{1+tz}$ bị chặn trên $[0,1]\times D_\alpha$. theo Bài 1.16., ta có f giải tích trên D_α và do đó cũng giải tích trên D.

Với hàm h, ta chỉ cần chứng minh h giải tích trên mọi dĩa $D(0,r)$ là đủ. Điều này hiển nhiên theo Bài 1.16. vì

$$\left|\frac{e^{tz}}{1+t^2}\right| \leq e^{|\mathrm{Re}(z)|} \leq e^r.$$

Do đó ta có h giải tích trên $\mathbb{C}$.

Với hàm g, trước mắt ta xem tại những điểm nào g sẽ xác định. Với $z = x+iy$, ta có

$$\begin{aligned} g(z) &= \int_0^\infty \frac{e^{tz}}{1+t^2}\,dt \\ &= \int_0^\infty \frac{e^{tx}(\cos ty + i\sin ty)}{1+t^2}\,dt \end{aligned}$$

Ta chứng minh tích phân này hội tụ khi và chỉ khi $x \le 0$, tức trên nữa mặt phẳng bên trái. Thật vậy, với $x \ge 0$, nếu $y = 0$, hiển nhiên

$$g(z) = \int_0^\infty \frac{e^{tx}}{1+t^2} = +\infty.$$

Trong trường hợp $y \ne 0$, ta có

$$\begin{aligned} \int_{\frac{2k\pi}{y}}^{\frac{(2k+1)\pi}{y}} \frac{e^{tx}\sin ty}{1+t^2}\,dt &\ge \frac{e^{x\frac{2k\pi}{y}}}{1+\left[\frac{(2k+1)\pi}{y}\right]^2}\int_{\frac{2k\pi}{y}}^{\frac{(2k+1)\pi}{y}} \sin ty\,dt \\ &= \frac{e^{x\frac{2k\pi}{y}}}{1+\left[\frac{(2k+1)\pi}{y}\right]^2}.\frac{2}{y} \end{aligned}$$

tiến về ∞ khi $k \in \mathbb{N}$ dần về vô cùng. Điều này chứng tỏ tích phân không hội tụ. Trong khi với nửa mặt phẳng dưới, hàm trong dấu tích phân bị chặn bởi $\frac{1}{1+t^2}$ nên tích phân tồn tại. Vậy g xác định và liên tục trên nửa mặt phẳng bên trái, ta cũng sẽ chứng minh nó giải tích trên miền trong của nửa mặt phẳng này, tức miền $D = \{z \in \mathbb{C} :\ \mathrm{Re}(z) < 0\}$. Trên miền này, rõ ràng ta có

$$\left|\frac{e^{tz}}{1+t^2}\right| < 1,$$

nên theo Bài 1.16., ta có $g \in H(D)$.

Bài 1.18. Giả sử $f \in H(\Omega)$, $\overline{D}(a,r) \subset \Omega$, γ là đường tròn được định hướng dương với tâm tại a bán kính r và f không có không điểm trên γ^*. Với $p = 0$, ta có tích phân

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)} z^p dz$$

bằng số không điểm của f trong $D(a,r)$. Tính giá trị của tích phân với $p = 1, 2, 3, \ldots$? Nếu ta thay z^p bởi $\varphi \in H(\Omega)$ thì kết quả như thế nào?

Giải. Xét tích phân

$$I = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)} \varphi(z)\,\mathrm{d}z,$$

ta có

$$\begin{aligned} I &= \sum_{i=1}^n \operatorname{Res}\left(\frac{f'(z)}{f(z)}\varphi(z), a_i\right) \\ \operatorname{Ind}(\gamma, a_i) &= \sum_{i=1}^n \operatorname{Res}\left(\frac{f'(z)}{f(z)}\varphi(z), a_i\right) \end{aligned}$$

với $a_i$là nghiệm của z (số nghiệm này là hữu hạn trong $B(a,r)$). Mặt khác

$$\operatorname{Res}\left(\frac{f'(z)}{f(z)}\varphi, a_i\right) = \varphi(a_i)\operatorname{Res}\left(\frac{f'(z)}{f(z)}, a_i\right)$$

Do đó ta suy ra I chính là $\sum_{i=1}^n n_i\varphi(a_i)$ hay nói cách khác là tổng các $\varphi(z)$ trên tập nghiệm của f (trong đó mỗi nghiệm được đếm đúng bằng số bội của nó).

Bài 1.19. Gọi U là quả cầu đơn vị trong $\mathbb{C}$. Cho f và g giải tích trên U thỏa mãn chúng không có không điểm trên $\underline{U}$. Giả sử

$$\frac{f'}{f}\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{g'}{g}\left(\frac{1}{n}\right) \quad (n = 1, 2, 3\ldots)$$

Tìm mối liên hệ (đơn giản hơn) giữa f và g.

Giải. Đặt $h = \dfrac{f}{g}$. Vì f, g giải tích và không có không điểm nên $h \in H(U)$ và $h \neq 0$. Ta có

$$\frac{h'}{h} = \frac{f'}{f} - \frac{g'}{g}$$

suy ra $\dfrac{h'}{h}\left(\dfrac{1}{n}\right) = 0$ với mọi $n = 1, 2, 3 \ldots$. Do đó ta có $\dfrac{h'}{h} = 0$ trên U, suy ra $h = \text{const} = c \neq 0$. Vậy $f = cg$ với $c \neq 0$.

Bài 1.20 (A.Hurwitz). Giả sử Ω là một miền, $f_n \in H(\Omega)$ với $n = 1, 2, 3...$, không có hàm f_n nào có không điểm trong Ω, và $\{f_n\}$ hội tụ đều về f trên một tập con compact của Ω. Chứng minh rằng hoặc f không có không điểm trong Ω hoặc là $f(z) = 0$ với mọi z trong Ω

Nếu Ω' là miền chứa mọi $f_n(\Omega)$, và nếu f_n không phải là hàm hằng, chứng minh rằng $f(\Omega) \subset \Omega'$.

Giải. Giả sử f nhận z_0 làm không điểm và f không triệt tiêu trọn toàn Ω, khi đó tồn tại một dĩa đóng $D = \overline{D(z_0, r)}$ chứa trong Ω sao cho z_0 là không điểm duy nhất trong dĩa này. Vậy ta có

$$\oint_{\partial D} \frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)} d\zeta \neq 0.$$

Tuy nhiên, trên compact D, ta có các dãy hàm $\{f_n\}$ và $\{f_n'\}$ lần lượt hội tụ đều về f và f', do đó khi n dần về vô cùng thì

$$\oint_{\partial D} \frac{f_n'(\zeta)}{f_n(\zeta)} d\zeta \to \oint_{\partial D} \frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)} d\zeta \neq 0$$

Điều này vô lý do dãy các tích phân này triệt tiêu. Từ đó ta có kết luận đầu tiên của bài toán.

Giả sử tồn tại $w_0 \in f(\Omega) \setminus \Omega'$, áp dụng kết quả trên cho dãy hàm $\{f_n - w_0\}$ hội tụ đều về giới hạn $f - w_0$, ta được f là hàm hằng. Điều này mâu thuẫn với giả thiết và kết thúc chứng minh.

Bài 1.21. Giả sử $f \in H(\Omega)$ với Ω chứa dĩa đóng đơn vị, và $|f(z)| < 1$ nếu $|z| = 1$. Có bao nhiêu điểm bất động mà f có trong dĩa?

Giải. Đặt $g(z) = f(z) - z$, ta có g là hàm giải tích trên Ω và

$$|g(z) - (-z)| = |f(z)| < |-z|$$

trên đường tròn đơn vị. Do đó số điểm bất động của f, cũng chính là số nghiệm của g, trong dĩa đóng đơn vị đúng bằng số nghiệm của hàm $-z$. Vậy f có đúng một điểm bất động trong dĩa.

Bài 1.22. Giả sử $f \in H(\Omega)$, Ω chứa đĩa đóng đơn vị, $|f(z)| > 2$ nếu $|z| = 1$ và $f(0) = 1$. Khi đó f có không điểm trong dĩa đơn vị không?

Giải. Nhận thấy không điểm của f không thể nằm trên đường tròn đơn vị, vậy nên ta có thể giả sử f không có không điểm trên một miền Ω_1 chứa dĩa đóng đơn vị. Đặt $g = \frac{1}{f}$ là hàm giải tích trên Ω_1. Khi đó ta có

$$g(z) < \frac{1}{2} \qquad \forall z \in \Omega_1,\ |z| = 1,$$

điều này mâu thuẫn với chi tiết $g(0) = 1$ theo Nguyên lý modulus cực đại và kết thúc chứng minh.

Ghi chú. Ban đầu, ta có thể nghĩ đến việc đặt $f = 1 + zh(z)$ với h là hàm giải tích thỏa mãn $|h(z)| > 1$ trên đường tròn đơn vị. Tuy nhiên nỗ lực sử dụng Bài 1.21. cho hàm h^{-1} để giải bài toán này là vô vọng vì h có thể có không điểm trong dĩa tròn.

Bài 1.23. Giả sử $P_n(z) = 1 + \frac{z}{1!} + \cdots + \frac{z^n}{n!}$, $Q_n(z) = P_n(z) - 1$, với $n = 1, 2, 3...$ ta có thể nói gì về vị trí của không điểm của P_n và Q_n với n lớn?

Giải. Đầu tiên ta xét dãy $\{P_n\}$, nghiệm của mỗi đa thức trong dãy đối xứng qua trục thực vì các đa thức này đều thuộc $\mathbb{R}[z]$. Ta chứng minh rằng các nghiệm của dãy này càng lúc càng xa gốc tọa độ, nghĩa là với mọi $n \in \mathbb{N}$. Nghĩa là nếu gọi r_n là số thực dương sao cho $D(0, r_n)$ không chứa nghiệm nhưng $D(0, 2r_n)$ chứa ít nhất một nghiệm của P_n (số r_n như vậy luôn tồn tại do 0 không là nghiệm của họ đa thức này) thì ta có

$$\lim_{n\to\infty} r_n = +\infty.$$

Thật vậy, giả sử ngược lại, ta suy ra tồn tại dãy con $\{r_{n_k}\}$ bị chặn trên bởi M, khi đó với mọi $k \in \mathbb{N}$, tồn tại z_k là nghiệm của P_{n_k} sao cho $|z_k| < 2r_{n_k} < 2M$. Do đó tồn tại dãy con $\{z_{k_j}\}$ của dãy này hội tụ về $\alpha \in \overline{D(0, M)}$. Mặt khác dãy $\{P_{n_k}\}$ hội tụ đều về exp trên $\overline{D(0, M)}$, ta suy ra

$$\begin{aligned} \left|P_{n_{k_j}}\left(z_{k_j}\right) - e^{\alpha}\right| &\leq \left|P_{n_{k_j}}\left(z_{k_j}\right) - e^{z_{k_j}}\right| + \left|e^{z_{k_j}} - e^{\alpha}\right| \\ &\leq \left\|P_{n_{k_j}} - \exp\right\|_{\overline{D(0,M)}} + \left|e^{z_{k_j}} - e^{\alpha}\right| \end{aligned}$$

Do đó ta có $|e^{\alpha}| \to 0$ khi $j \to \infty$. Điều này vô lý và chứng tỏ

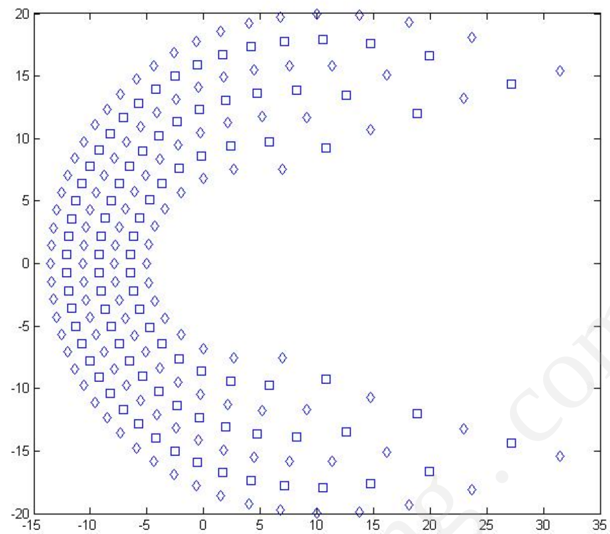
$$\lim_{n\to\infty} r_n = +\infty,$$

tức các nghiệm của $\{P_n\}$ càng lúc càng xa gốc tọa độ.

Với dãy $\{Q_n\}$, lý do tương tự cho ta nghiệm của mỗi đa thức cũng đối xứng qua trục thực. Ngoài ra, 0 là mọi nghiệm của các đa thức trong dãy. Ta đặt

$$Q_n = zH_n$$

với $H_n = 1 + \frac{z}{2!} + \frac{z^2}{3!} + \cdots + \frac{z^{n-1}}{n!}$, ta có các nghiệm còn lại của Q_n là các nghiệm của H_n. Các nghiệm của dãy đa thức $\{H_n\}$ này nhìn chung cũng càng lúc càng xa gốc tọa độ, các nghiệm còn lại sẽ hội tụ về một điểm trên trục ảo (cụ thể là các điểm $ik2\pi$ với $k \in \mathbb{Z}$). Cụ thể, ta sẽ chứng minh rằng nếu tồn tại một dãy $\{z_k\}$ bị chặn



Hình 1.0.1: Nghiệm của dãy $\{P_n\}$ với $n = 15, 20, 25, 30, 35, 40, 45$.

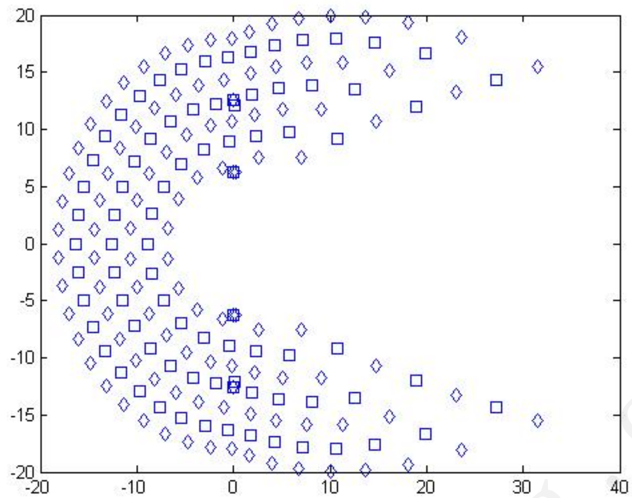
sao cho z_k lần lượt là nghiệm của các đa thức H_{n_k}, khi đó dãy này thực chất là hội của các dãy con hội tụ về các điểm $ik2\pi$ trên trục ảo, tức nếu xét

$$A = \{ik2\pi : \ k \in \mathbb{Z}\}$$

thì khoảng cách nhỏ nhất từ z_k đến A tồn tại và dần về 0. Phần tồn tại được chứng minh dễ dàng, ta sẽ dùng phản chứng để cho thấy $\{d(z_k, A)\}$ dần về 0. Thật vậy, nếu dãy này không hội tụ về 0, ta tìm được $\varepsilon > 0$ và trích được dãy con $\left\{z_{k_j}\right\}$ sao cho

$$d\left(z_{k_j}, A\right) > \varepsilon \quad \forall j \in \mathbb{N}.$$

Nhưng do $\{z_k\}$ bị chặn nên tồn tại M để $\left\{z_{k_j}\right\} \subset \overline{D(0, M)}$, do đó ta trích được dãy con $\left\{z_{k_{j_t}}\right\}$ hội tụ về α. Sử dụng lập luận tương tự như với $\{P_n\}$, ta có $\alpha \in A$. Điều này mâu thuẫn và chứng tỏ nhận xét của ta.



Hình 1.0.2: Nghiệm của dãy $\{H_n\}$ với $n = 15, 20, 25, 30, 35, 40, 45$.

Bài 1.24. Chứng minh dạng tổng quát của định lý Rouché: Cho Ω là miền trong của compact K trong $\mathbb{C}$.Giả sử f và g liên tục trên K và giải tích trên Ω thỏa mãn

$$|f(z) - g(z)| < |f(z)| \quad \forall z \in K \backslash \Omega$$

Khi đó f và g có cùng số nghiệm trong Ω.

Giải. Với mọi n, xét các hình vuôn cạnh $\frac{1}{2^n}$và các đỉnh dạng $\left(\frac{i}{2^n}, \frac{j}{2^n}\right)$.Gọi P_n là họ các hình vuông như thế chứa trong Ω và Ω_n là hội các phần tử trong P_n. Ta có $\Omega_n \uparrow \Omega$. Định hướng biên các hình vuôn trong P_n theo chiều dương. Ta có $\sum_{R \in P_n} \partial R = \partial \Omega_n$ do các cạnh không nằm trên $\partial \Omega_n$ đều triệt tiêu.

Ta sẽ chứng minh với n đủ lớn thì các nghiệm trong Ω của f và g sẽ nằm trong Ω_n. Giả sử ngược lại, khi đó tồn tại một dãy các nghiệm của f hội tụ về một điểm trên biên Ω. Do đó f (hoặc g) có nghiệm trên biên (vô lý). Mặt khác mỗi nghiệm trong Ω đều được chứa trong một hình vuông R có cạnh đủ nhỏ nằm hoàn toàn trong Ω. Vậy với N đủ lớn, tất cả các nghiệm trong Ω của f, g nằm ở miền trong Ω_n.

Ta có $|f(z) - g(z)| < |f(z)|$ trên $K \backslash \Omega$, suy ra f, g vô nghiệm trên $K \backslash \Omega$ và do $K \backslash \Omega$ là tập compact nên có $c < 1$ để

$$\left|\frac{g(z)}{f(z)} - 1\right| < c < 1 \quad \text{trên } K \backslash \Omega$$

Ta sẽ chứng minh $\left|\frac{g(z)}{f(z)} - 1\right| < \frac{c+1}{2}$ trên $\partial \Omega_M$ với M đủ lớn. Thật vậy, ta có $\left|\frac{g(z)}{f(z)} - 1\right|$ là hàm liên tục trên compact $K \backslash \mathring{\Omega}_N$ nên liên tục đều. Do đó tồn tại $\delta > 0$ sao cho $\left|\frac{g(z)}{f(z)} - 1\right| < \frac{c+1}{2}$ nếu $z \in K \backslash \mathring{\Omega}_N$ và $B(z, \delta) \cap (K \backslash \Omega) \neq \emptyset$.
Như vậy,với $M > N$ đủ lớn sao cho $\frac{1}{2M} < \frac{\delta}{2}$ thì với mọi $z \in \partial \Omega_M$, tồn tại điểm z_1 trong $B\left(z, \frac{\sqrt{2}}{2^M}\right) \cap \overline{\Omega}$, ta suy ra

$$\left|\frac{g(z)}{f(z)} - 1\right| < \frac{c+1}{2} < 1 \quad \forall z \in \partial \Omega_M$$

Cuối cùng, ta chứng minh $\partial \Omega_M$ thỏa mãn những điều kiện của Định lý Rouché. Thật vậy, rõ ràng $\operatorname{Ind}(\gamma, a) = 0$ với mọi $a \notin \Omega$ và với mọi $a \in \Omega \backslash \partial \Omega_M$, ta có

$$\operatorname{Ind}(\partial \Omega_M, a) = \begin{cases} 0 & \text{nếu } a \notin \mathring{\Omega}_M \\ 1 & \text{nếu } a \in \mathring{R} \text{ với một } R \in P_M \end{cases}$$

Trong trường hợp còn lại, tức $a \in \cup \partial R \backslash \partial \Omega_M$, ta giả sử a nằm trên cạnh l của hình vuông R. Khi đó xét b là tâm R với $R \in P_M$ thì a và b nằm trên cùng 1 thành phần liên thôn (đối với Ω_M). Suy ra $\operatorname{Ind}(\partial \Omega_M, a) = \operatorname{Ind}(\partial \Omega_M, b) = 1$.

Bài 1.25. Cho hình vành khăn $A = \{z : r_1 < |z| < r_2\}$ với r_1 và r_2 là các số dương cho trước.

(a) Chứng minh định lý Cauchy

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\left(\oint_{\gamma_1} + \oint_{\gamma_2}\right)\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta$$

với $f \in H(A)$ và $r_1 + \varepsilon < |z| < r_2 - \epsilon$; $\gamma_1(t) = (r_1 + \varepsilon)e^{-it}$; $\gamma_2(t) = (r_2 - \varepsilon)e^{it} \quad (0 \le t \le 2\pi)$

(b) Dùng câu trên, chứng minh rằng $\forall f \in H(A)$, f có thể viết dưới dạng $f = f_1 + f_2$ với f_1 giải tích ngoài $\overline{D(0, r_1)}$và $f_2 \in H(D(0, r_2))$. Phân tích này là duy nhất dưới điều kiện $f_1 \to 0$ khi $|z| \to \infty$.

(c) Dùng phân tích trên để chứng minh $\forall f \in H(A)$, có chuỗi Laurent

$$\sum_{-\infty}^{\infty} c_n z^n$$

hội tụ về f trên A. Chứng minh rằng chuỗi này là duy nhất và nó hội tụ đều trên mọi compact của A.

(d) Nếu $f \in H(A)$ và bị chặn trong A, chứng minh rằng f_1, f_2 cũng bị chặn.

(e) Chuỗi trên như thế nào khi $r_1 = 0$ (hay $r_2 = \infty$, hoặc cả hai)?

(f) Chuỗi trên như thế nào khi miền A bị chặn bởi hữu hạn (nhiều hơn 2) đường tròn.

Giải. Các ý (a), (b) và phần đầu ý (c) đã được trình bày trong phần lý thuyết. Ta chỉ giải quyết những ý còn lại.

(c) Do mọi compact chứa trong A cũng bị chứa trong một hình vành khăn đóng $\{z : \rho_1 \le |z| \le \rho_2\}$. Mặt khác, sự hội tụ của các chuỗi Taylor của f_1 trên $\mathbb{C} \setminus D(0, \rho_1)$ và của f_2 trên $\overline{D(0, \rho_2)}$ là đều nên ta suy ra sự hội tụ của chuỗi Laurent về f cũng là đều.

(d) Ta có

$$f_1(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma_1}\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta$$
$$f_2(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma_2}\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta$$

nên nếu $|f| \leq M$ thì ta cũng có được

$$|f_1(z)| \leq r_1 M$$
$$|f_2(z)| \leq r_2 M$$

trong đó bất đẳng thức thứ nhất có được từ việc $|f_1(z)| \leq rM$ với mọi $r > r_1$.

(e) Các bước xây dựng đều có thể được lặp lại khi $r_1 = 0$ hay $r_2 = \infty$. Khi đó ta vẫn có thể tách f thành tổng 2 hàm f_1 và f_2 (mặc dù khi $r_1 = 0$ và $r_2 = \infty$ thì chúng có cùng miền xác định) và chuỗi Laurent vẫn tồn tại. Tuy nhiên, hy vọng về việc các chuỗi lũy thừa có hữu hạn phần tử khác 0 trong trường hợp đặc biệt này bị dập tắt khi ta xét hàm $f(z) = e^{\frac{1}{z}} + e^z$ trên $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.

(f) Trong trường hợp miền vành khăn được thay bằng hội các miền

$$A = \bigcup_{k=1}^{n}\{z : \ r_k < |z| < R_k\}$$

với $r_i < R_i \leq r_{i+1}$. Lặp lại các xây dựng trên, ta vẫn có thể viết f dưới dạng

$$f = \sum_{k=1}^{n}(f_k + g_k)$$

với f_k giải tích trên $\mathbb{C} \setminus \overline{D(0, r_k)}$ và g_k giải tích trên $D(0, R_k)$. Chuỗi Laurent khi ấy vẫn tồn tại và các hệ số được thay đổi trên mỗi thành phần liên thông của A.

Bài 1.26. Ta cần khai triển hàm số

$$\frac{1}{1-z^2}+\frac{1}{3-z}$$

dưới dạng $\sum_{-\infty}^{\infty} c_n z^n$

Có bao nhiêu khai triển như vậy? Những khai triển này đúng cho vùng nào?

Giải. Đặt $f(z)=\frac{1}{1-z^2}+\frac{1}{3-z}$. Ta cần xác định $\sum_{-\infty}^{\infty} c_n z^n$, khai triển Laurent tại tâm 0.

Xét trên 3 miền sau: miền I: $|z|<1$, miền II: $1<|z|<3$, miền III: $3<|z|$, ta có:

$$f(z)=\frac{1}{1-z^2}+\frac{1}{3-z}=\frac{1}{2(1-z)}+\frac{1}{2(1+z)}+\frac{1}{3-z}$$

Trên miền I,

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-z}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+z}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1-\frac{z}{3}} \\ &= \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty} z^n+\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-z)^n+\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{3}\right)^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}+\frac{(-1)^n}{2}+\frac{1}{3^{n+1}}\right)z^n \end{aligned}$$

Trên miền II,

$$\begin{aligned} f(z) &= -\frac{1}{2z}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{z}}+\frac{1}{2z}\cdot\frac{1}{1+\frac{1}{z}}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1-\frac{z}{3}} \\ &= -\frac{1}{2z}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{z}\right)^n+\frac{1}{2z}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{z}\right)^n+\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{3}\right)^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{z^{n+1}}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2}\cdot\frac{(-1)^n}{z^{n+1}}+\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1} z^n \end{aligned}$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{(-1)^n}{2} - \frac{1}{2} \right) z^{-k} + \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{3} \right)^{n+1} z^n$$

Trên miền III,

$$\begin{aligned} f(z) &= -\frac{1}{2z} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{z}} + \frac{1}{2z} \cdot \frac{1}{1+\frac{1}{z}} - \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1-\frac{3}{z}} \\ &= -\frac{1}{2z} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{z} \right)^n + \frac{1}{2z} \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{z} \right)^n - \frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{3}{z} \right)^n \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{2} + \frac{(-1)^n}{2} - 3^n \right) z^{-k} \end{aligned}$$

Bài 1.27. Cho Ω là miền nằm ngang, giới hạn bởi $a < y < b$. Giả sử $f \in H(\Omega)$ và $f(z) = f(z+1)$ với mọi $z \in \Omega$. Chứng minh rằng f có khai triển Fourier trong Ω,

$$f(z) = \sum_{-\infty}^{\infty} c_n e^{2\pi i n z},$$

hội tụ đều trong $\{z : a + \varepsilon \le y \le b - \varepsilon\}$ với mọi $\varepsilon > 0$.

Hãy thiết lập công thức tích phân mà qua đó, ta tính được các hệ số c_n của f.

Giải. Xét $g(w) = f\left(\frac{\log w}{2\pi i}\right)$, tính tuần hoàn của f cho ta g đơn trị và giải tích trên hình vành khăn $\left\{w \in \mathbb{C} : e^{-2\pi b} < |w| < e^{-2\pi a}\right\}$. Do đó ta có khai triển Laurent

$$g(w) = \sum_{-\infty}^{\infty} c_n w^n.$$

Đặt $z = \frac{\log w}{2\pi i}$, ta có $w = e^{2\pi i z} = e^{-2\pi y + 2\pi i x}$ và $g(w) = f(z)$, suy ra

$$f(z) = \sum_{-\infty}^{\infty} c_n e^{2\pi i n z}.$$

Chuỗi Laurent này hội tụ đều khi

$$e^{2\pi\varepsilon}e^{-2\pi b} \le |w| = e^{-2\pi y} \le e^{-2\pi a}e^{-2\pi\varepsilon}$$

với mọi $\varepsilon > 0$, tức là $a + \varepsilon \le \operatorname{Im}(z) \le b - \varepsilon$.

Ta có công thức tính c_n như sau, với $\exp(-2\pi b) < r < \exp(-2\pi a)$:

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{2\pi i}\oint_{|w|=r} \frac{g(w)\, dw}{w^{n+1}} \\ &= \int_{-\frac{\ln r}{2\pi}}^{-\frac{\ln r}{2\pi}+1} f(z)\, e^{-2\pi i n z}\, dz \end{aligned}$$

trong đó tích phân thứ 2 được lấy theo đường thẳng song song với trục thực. Kết quả này trùng khớp, và cũng có thể suy ra từ khai triển Fourier của hàm f thu hẹp trên đường thẳng nối Ri và $R_i + 1$ và tính duy nhất của khai triển Laurent.

Bài 1.28. Giả sử Γ là một đường đóng không trơn từng khúc trên mặt phẳng, với khoảng tham số $[0, 2\pi]$ và $\alpha \notin \Gamma^*$. Xấp xỉ đều Γ bằng một dãy các đường trơn, đóng Γ_n (dãy này tồn tại, chẳng hạn như dãy tổng riêng phần trong khai triển Fourier của Γ). Chứng minh rằng $\operatorname{Ind}(\Gamma_m, \alpha) = \operatorname{Ind}(\Gamma_n, \alpha)$ nếu m và n đủ lớn. Định nghĩa giá trị chung này là $\operatorname{Ind}(\Gamma, \alpha)$. Chứng minh rằng nó không phụ thuộc vào cách chọn $\{\Gamma_n\}$. Chứng minh Bổ đề 19 đúng cho đường cong đóng, và sử dụng điều này để đưa ra cách giải khác cho Định lý 20.

Giải. Nhận thấy $\{\Gamma_n\}$ hội tụ đều về Γ nên hiển nhiên là dãy Cauchy. Vì Γ^* là compact và $\alpha \notin \Gamma^*$ nên tồn tại $\varepsilon > 0$ để

$$|z - \alpha| > 2\varepsilon \quad \forall z \in \Gamma^*,$$

hay $|\Gamma - \alpha| > 2\varepsilon$. Mặt khác, với m, n đủ lớn thì $|\Gamma_m - \Gamma_n| < \varepsilon$, khi đó $|\Gamma_m - \Gamma| \leq \varepsilon$, ta suy ra

$$|\Gamma_m - \Gamma_n| < \varepsilon < |\Gamma - \alpha| - |\Gamma_m - \Gamma| \leq |\Gamma_m - \alpha|\,.$$

Do đó ta có $\operatorname{Ind}(\Gamma_m, \alpha) = \operatorname{Ind}(\Gamma_n, \alpha)$. Chỉ số này không phụ thuộc vào dãy $\{\Gamma_n\}$ vì với hai dãy $\{\Gamma_n^1\}$ và $\{\Gamma_n^2\}$ cùng hội tụ đều về Γ, ta xét dãy xen kẽ $\hat{\Gamma}_n$ xác định bởi

$$\begin{cases} \hat{\Gamma}_{2n} & = \Gamma_n^1 \\ \hat{\Gamma}_{2n+1} & = \Gamma_n^2 \end{cases},$$

khi đó dãy $\left\{\hat{\Gamma}_n\right\}$ hội tụ đều về Γ và do đó các chỉ số chung của Γ_n^1 và Γ_n^2 từ một lúc nào đó là bằng nhau.

Ta chứng minh rằng nếu γ_1 và γ_2 là các đường đóng không nhất thiết trơn với khoảng tham số là $[0, 1]$ thỏa mãn

$$|\gamma_1(s) - \gamma_2(s)| < |\alpha - \gamma_1(s)| \quad \forall s \in [0, 1]$$

thì $\operatorname{Ind}(\gamma_1, \alpha) = \operatorname{Ind}(\gamma_2, \alpha)$. Thật vậy, do $[0, 1]$ là compact nên tồn tại $\varepsilon > 0$ để

$$|\gamma_1(s) - \gamma_2(s)| + \varepsilon < |\alpha - \gamma_1(s)| \quad \forall s \in [0, 1]\,.$$

Khi đó gọi $\{\Gamma_n^1\}$, $\{\Gamma_n^2\}$ là các dãy đường đóng trơn hội tụ về γ_1 và γ_2. Khi đó tồn tại n đủ lớn để

$$\left|\Gamma_n^i(s) - \gamma_i(s)\right| < \frac{\varepsilon}{3},$$

suy ra

$$\begin{aligned} \left|\Gamma_n^1(s) - \Gamma_n^2(s)\right| &< \frac{2}{3}\varepsilon + |\gamma_1(s) - \gamma_2(s)| \\ &< |\alpha - \gamma_1(s)| - \frac{\varepsilon}{3} \\ &< \left|\alpha - \Gamma_n^1(s)\right| \end{aligned}$$

Do đó ta có $\operatorname{Ind}(\Gamma_n^1, \alpha) = \operatorname{Ind}(\Gamma_n^2, \alpha)$ với mọi n đủ lớn. Cho n nần về vô cùng, ta được $\operatorname{Ind}(\gamma_1, \alpha) = \operatorname{Ind}(\gamma_2, \alpha)$.

Ghi chú. Sử dụng các kết quả này, ta có thể chứng minh các đường đồng luân thì đồng đều mà không cần phải xấp xỉ dãy hàm trung gian bằng các đường gấp khúc. Thực chất cách này chẳng có gì mới lại, vì việc xấp xỉ đều đã được thực hiện trong lúc định nghĩa chỉ số cho một đường không trơn.

Bài 1.29. Định nghĩa

$$f(z) = \frac{1}{\pi} \int_0^1 r dr \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{re^{i\theta} + z}$$

Chứng minh rằng $f(z) = \overline{z}$ nếu $|z| < 1$ và $f(z) = 1/z$ nếu $|z| \geq 1$. Vì thế f không giải tích trong đĩa đơn vị, dù cho tích phân là một hàm giải tích của z. Điều này có mâu thuẫn với Bài 1.16. không?

Giải. Ta sẽ tính tích phân $\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{re^{i\theta}+z}$ trước. Đặt $w = re^{i\theta}$, ta có $d\theta = \frac{dw}{iw}$, do đó

$$\oint_{|w|=r} \frac{1}{iw} . \frac{dw}{w+z}.$$

Vậy nên nếu $r < |z|$, tích phân này nhận giá trị

$$2\pi \operatorname{Res}\left(\frac{1}{w(w+z)}, 0\right) = \frac{2\pi}{z},$$

và trong trường hợp $r > |z|$ thì nhận giá trị là

$$2\pi \left[\operatorname{Res}\left(\frac{1}{w(w+z)}, 0\right) + \operatorname{Res}\left(\frac{1}{w(w+z)}, -z\right)\right] = 0.$$

Ta không quan tâm trường hợp $|r| = z$ vì độ đo Lebesgue (trong $\mathbb{R}^2$) của đường tròn này bằng 0. Do đó với $|z| \leq 1$, ta có

$$f(z) = \frac{1}{\pi}\int_0^{|z|} \frac{2\pi r}{z} dr = \frac{|z|^2}{z} = \overline{z},$$

và khi $|z| > 1$ thì

$$f(z) = \frac{1}{\pi}\int_0^{1} \frac{2\pi r}{z} dr = \frac{1}{z}.$$

Hàm f không giải tích và điều này không có gì mâu thuẫn với Bài 1.16. vì hai tích phân có dạng khác nhau.

Chương 2

Hàm điều hòa

Bài 2.1. Giả sử u và v là những hàm điều hòa thực trên miền Ω. Với điều kiện nào thì uv điều hòa. Chứng minh rằng u^2 không điều hòa trong Ω, trừ khi u là hàm hằng. Với $f \in H(\Omega)$ nào thì $|f|^2$ là điều hòa.

Giải. Đặt $w = uv$, ta có w là hàm điều hòa khi và chỉ khi

$$\frac{\partial w^2}{\partial^2 x} + \frac{\partial w^2}{\partial^2 y} = 0$$

tương đương với

$$\frac{\partial u^2}{\partial^2 x} + 2\frac{\partial u}{\partial x}.\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial v^2}{\partial^2 x} + \frac{\partial u^2}{\partial^2 y} + 2\frac{\partial u}{\partial y}.\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial v^2}{\partial^2 y} = 0$$

mà u, v là hai hàm điều hòa nên ta có

$$\frac{\partial u}{\partial x}.\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}.\frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

Ta sẽ chứng minh u^2 không thể là hàm điều hòa trừ khi u là hàm hằng. Thật vậy, đặt $f = u^2$ thì ta có

$$\frac{\partial f^2}{\partial^2 x} = \frac{\partial\left(2u\frac{\partial u}{\partial x}\right)}{\partial x} = 2.\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + 2u.\frac{\partial u^2}{\partial^2 x}$$

và

$$\frac{\partial f^2}{\partial^2 y} = \frac{\partial\left(2u\frac{\partial u}{\partial y}\right)}{\partial y} = 2.\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + 2u.\frac{\partial u^2}{\partial^2 y}$$

Vì vậy

$$\begin{aligned}\frac{\partial f^2}{\partial^2 x} + \frac{\partial f^2}{\partial^2 y} &= 2.\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + 2u.\frac{\partial u^2}{\partial^2 x} + 2.\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + 2u.\frac{\partial u^2}{\partial^2 y} \\ &= 2\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right] + u\left(\frac{\partial u^2}{\partial^2 x} + \frac{\partial u^2}{\partial^2 y}\right) \\ &= 2\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right] \geq 0\end{aligned}$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y} = 0$ hay nói cách khác u là hàm hằng. Ta có điều phải chứng minh.

Ta sẽ chứng minh nếu f là hàm giải tích thì $|f|^2$là hàm điều hòa. Thật vậy, đặt $f = u + iv$ với u, v là hai hàm thực biến phức, do f giải tích nên u, v là các hàm điều hòa. Từ đó, với $|f|^2 = u^2 + v^2$ và áp dụng điều vừa chứng minh, ta có

$$\begin{aligned}\frac{\partial |f|^2}{\partial^2 x} + \frac{\partial |f|^2}{\partial^2 y} &= 2\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2\right] \\ &\geq 0\end{aligned}$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y} = 0$ hay $f = u + iv$ là hàm hằng.

Bài 2.2. Giả sử $f(x)$ là một hàm phức trên mặt phẳng Ω, f và f^2 là điều hòa trên Ω. Chứng minh rằng f hoặc $\overline{f}$ điều hòa trên Ω.

Giải. Đặt $f = u + iv$ thì $f^2 = u^2 + 2iuv - v^2$. Do f là hàm điều hòa nên ta có $\Delta f = \Delta u + i\Delta v = 0$, suy ra $\Delta u = \Delta v = 0$. Tương tự, do f^2 là hàm điều hòa nên ta cũng có

$$\Delta f^2 = \Delta u^2 - \Delta v^2 + i\Delta(uv) = 0$$

suy ra

$$\begin{cases} \Delta u^2 - \Delta v^2 & = 0 \\ \Delta(uv) & = 0 \end{cases},$$

do đó ta có

$$\begin{cases} \left(\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial u}{\partial y}\right)^2 & = \left(\dfrac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial v}{\partial y}\right)^2 \\ \dfrac{\partial u}{\partial x}.\dfrac{\partial v}{\partial x} + \dfrac{\partial u}{\partial y}.\dfrac{\partial v}{\partial y} & = 0 \end{cases}$$

Hệ này tương đương với $\left(\dfrac{\partial u}{\partial x} + i\dfrac{\partial v}{\partial x}\right)^2 = \left(\dfrac{\partial v}{\partial y} - i\dfrac{\partial u}{\partial y}\right)^2$, suy ra

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} & = \dfrac{\partial v}{\partial y} \\ \dfrac{\partial v}{\partial x} & = -\dfrac{\partial u}{\partial y} \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} & = -\dfrac{\partial v}{\partial y} \\ \dfrac{\partial v}{\partial x} & = \dfrac{\partial u}{\partial y} \end{cases}$$

Vậy ta suy ra f giải tích hoặc $\overline{f}$ giải tích, từ đó ta có điều phải chứng minh.

Bài 2.3. Nếu u là một hàm điều hòa trên miền Ω. Có thể nói gì về tập các điểm mà tại đó $\nabla u = 0$ (đây là tập mà $u_x = u_y = 0$).

Giải. Ta có $\nabla u = 0$ khi và chỉ khi

$$f(z) = \frac{\partial u}{\partial x}(z) - i\frac{\partial u}{\partial y}(z) = 0.$$

Mặt khác, ta có u là hàm điều hòa khi và chỉ khi f là hàm giải tích, do đó các điểm làm triệt tiêu của một hàm điều hòa u chính là các không điểm của một hàm giải tích. Do đó ta có thể rút ra nhận xét rằng tập này không có điểm tụ ngoại trừ khi u là hàm hằng.

Bài 2.4. Giả sử $f \in H(\Omega)$ và f không có không điểm trong Ω. Chứng minh rằng $\log|f|$ là điều hòa trong Ω bằng cách tính Laplacian của nó. Có con đường khác dễ hơn không?

Giải. Đặt $f = u + iv$, ta có $g(x,y) = \log\left(\sqrt{u^2+v^2}\right)$. Vậy nên

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial g}{\partial x} &= \frac{\left(\sqrt{u^2+v^2}\right)'}{\sqrt{u^2+v^2}} = \frac{2u\frac{\partial u}{\partial x} + 2v\frac{\partial v}{\partial x}}{2\left(u^2+v^2\right)} = \frac{u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial x}}{u^2+v^2} \\
\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} &= \frac{1}{\left(u^2+v^2\right)^2}\left[\left(\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + u\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + v\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right)\left(u^2+v^2\right)\right. \\
&\quad \left. - \left(u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial x}\right)\left(2u\frac{\partial u}{\partial x} + 2v\frac{\partial v}{\partial x}\right)\right] \\
&= \frac{1}{\left(u^2+v^2\right)^2}\left[-u^2\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 - v^2\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + u^3\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + v^3\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right. \\
&\quad \left. + u^2\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + v^2\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + u^2 v\frac{\partial v^2}{\partial x^2} + uv^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 4uv\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x}\right] \\
\frac{\partial^2 g}{\partial y^2} &= \frac{1}{\left(u^2+v^2\right)^2}\left[-u^2\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 - v^2\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 + u^3\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + v^3\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right. \\
&= \left. + u^2\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 + v^2\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + u^2 v\frac{\partial v^2}{\partial y^2} + uv^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - 4uv\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y}\right]
\end{aligned}
$$

Vì f thỏa điều kiện Cauchy-Riemann nên

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y},\ \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

suy ra

$$\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y}$$

Vì u, v điều hòa nên

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0,\ \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0$$

Suy ra

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} = 0$$

điều này chứng tỏg là hàm điều hòa.

Ta có thể chứng minh ngắn hơn bằng cách sau. Xét hàm $h = \log f = \ln|f| + i\arg_{[-\pi,\pi)}(f)$, ta có h giải tích tại mọi điểm trừ $f^{-1}(\mathbb{R}^-)$. Do đó $\ln|f|$ là hàm điều hòa tại mọi điểm trừ $f^{-1}(\mathbb{R}^-)$. Lại sử dụng $\arg_{[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})}$, ta có $\ln|f|$ điều hòa tại mọi điểm trừ $f^{-1}(\mathbb{R}i)$.

Bài 2.5. Giả sử $f \in H(U)$, với U là đĩa mở đơn vị, f là một đơn ánh trong U, $\Omega = f(U)$, và $f(z) = \sum c_n z^n$. Chứng minh rằng miền của Ω là

$$\pi \sum_{n=1}^{\infty} n\,|c_n|^2\,.$$

Giải. Đặt $f = u + iv$, ta có f là một đồng phôi từ U vào Ω. Mặt khác, ta tính được

$$J_f = \begin{vmatrix} u_x & v_x \\ u_y & v_y \end{vmatrix} = u_x^2 + u_y^2 = |f'|^2\,.$$

Do đó ta có f là một vi đồng phôi từ U vào Ω. Vậy nên diện tích của Ω được tính bởi

$$\iint_U |f'|\,dx\,dy = \int_0^1 \left[r\int_0^{2\pi} \left|f'\left(re^{i\theta}\right)\right| d\theta \right] dr$$

Một hệ quả của định lý Parseval cho ta

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|f'\left(re^{i\theta}\right)\right|d\theta &= \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)^2\left|c_{n+1}\right|^2 r^{2n}\\ &= \sum_{n=1}^{\infty}n^2\left|c_n\right|^2 r^{2n-2}\end{aligned}$$

Suy ra diện tích của Ω chính là

$$\begin{aligned}\int_0^1\left[2\pi\sum_{n=1}^{\infty}n^2\left|c_n\right|^2 r^{2n-1}\right]dr &= 2\pi\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^1 n^2\left|c_n\right|^2 r^{2n-1}\,dr\\ &= 2\pi\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2}\left|c_n\right|^2\,dr\\ &= \pi\sum_{n=1}^{\infty}n\left|c_n\right|^2\end{aligned}$$

Đẳng thức được chứng minh.

Bài 2.6.

(a) Nếu $f \in H(\Omega), f(z) \neq 0$ với $z \in \Omega$, và $-\infty < \alpha < \infty$, chứng minh

$$\triangle\left(|f|^{\alpha}\right) = \alpha^2 |f|^{\alpha-2}\left|f'\right|^2$$

bằng cách chứng minh biểu thức

$$\partial\overline{\partial}\left(\psi\circ\left(f\overline{f}\right)\right) = \left(\varphi\circ|f|^2\right)\cdot\left|f'\right|^2$$

với ψ khả vi đến cấp hai trên $(0,\infty)$ và

$$\varphi(t) = t\psi''(t) + \psi'(t)$$

(b) Giả sử $f \in H(\Omega)$ và Φ là một hàm phức trên miền $f(\Omega)$, có đạo hàm liên tục đến cấp hai. Chứng minh rằng

$$\triangle [\Phi \circ f] = [(\triangle \Phi) \circ f] \cdot \left| f' \right|^2$$

Chứng minh rằng đây là một trường hợp đặc biệt của (a) khi $\Phi(w) = \Phi(|w|)$

Giải.

(a) Ta có

$$\begin{aligned}
\partial\overline{\partial}\left(\psi \circ (f\overline{f})\right) &= \frac{1}{4}\Delta\left[\psi \circ (f\overline{f})\right] \\
&= \frac{1}{4}\psi''(f\overline{f})\left[\left(\overline{f}\frac{\partial f}{\partial x} + f\frac{\partial \overline{f}}{\partial x}\right)^2 + \left(\overline{f}\frac{\partial f}{\partial y} + f\frac{\partial \overline{f}}{\partial y}\right)^2\right] \\
&\quad + \frac{1}{4}\psi'(f\overline{f})\left(2\frac{\partial \overline{f}}{\partial x}.\frac{\partial f}{\partial x} + 2\frac{\partial \overline{f}}{\partial y}.\frac{\partial f}{\partial y} + \overline{f}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + f\frac{\partial^2 \overline{f}}{\partial x^2} + \overline{f}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + f\frac{\partial^2 \overline{f}}{\partial y^2}\right) \\
&= \frac{1}{4}\psi''(f\overline{f})\left(f^2|f'|^2 + \overline{f}^2|f'|^2 + 2f\overline{f}|f'|^2\right) + \frac{1}{4}\psi'(f\overline{f})\left(4|f'|^2\right) \\
&= \left[\psi''(|f|^2)|f|^2 + \psi'(|f|^2)\right]|f'|^2 \\
&= \left(\varphi \circ |f|^2\right) \cdot \left|f'\right|^2
\end{aligned}$$

Áp dụng công thức trên với $\psi(t) = t^{\frac{\alpha}{2}}$, $\varphi(t) = \frac{\alpha^2}{4}t^{\frac{\alpha}{2}-1}$, ta có $\frac{1}{4}\triangle(|f|^a) = \frac{\alpha^2}{4}|f|^{\alpha-2}\left|f'\right|^2$, tức là

$$\triangle(|f|^a) = \alpha^2|f|^{\alpha-2}\left|f'\right|^2.$$

(b) Đặt $f = u + iv$

$$\triangle[\Phi \circ f] = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right] + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2}\left[\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2\right]$$

$$\begin{aligned} &+2\frac{\partial^2\Phi}{\partial x\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial x}.\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}.\frac{\partial v}{\partial y}\right)\\ =\ &\left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}\right)|f'|^2\\ =\ &[(\triangle\Phi)\circ f]\cdot\left|f^{'}\right|^2 \end{aligned}$$

Với $\Phi(w)=\Phi_1(|w|)$, ta có

$$\begin{aligned} \Delta\Phi(w) &= \Phi_1''(w)\left(\frac{x^2}{x^2+y^2}+\frac{y^2}{x^2+y^2}\right)+\Phi_1'(w)\left(\frac{y^2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}+\frac{x^2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}.\right)\\ &= \Phi_1''(w)+\frac{\Phi_1'(w)}{|w|} \end{aligned}$$

Do đó công thức đã cho thành

$$\Delta\Phi_1(|f|)=\Delta\Phi(f)=\left(\Phi_1''(f)+\frac{\Phi_1'(f)}{|f|}\right)|f'|^2.$$

Đây chính là kết quả của câu (a) với $\psi(t)=\Phi_1\left(\sqrt{t}\right)$.

Bài 2.7. Giả sử Ω là một miền, $f_n\in H(\Omega)$ với $n=1,2,3,\ldots$, u_n là phần thực của f_n, $\{u_n\}$ hội tụ đều trong tập con compact của Ω và $\{f_n(z)\}$ hội tụ tại ít nhất một $z\in\Omega$. Chứng minh $\{f_n(z)\}$ hội tụ đều trong tập con compact của Ω.

Giải. Do $\{u_n\}$ hội tụ đều về u nên ta suy ra u là hàm điều hòa. Giờ ta sẽ giải quyết bài toán trong dĩa tròn đóng $\overline{D(z_0,R)}$ thỏa mãn $\overline{D(z_0,2R)}$ chứa trong Ω. Không mất tính tổng quát, ta có thể giả sử $z_0=0$. Mặt khác ta có

$$f_n(z)=\frac{1}{2\pi i}\oint_{|\zeta|=2R}\frac{\zeta+z}{\zeta-z}.\frac{u_n(\zeta)}{\zeta}d\zeta+iC_n$$

với C_n là hằng số thực. Do đó với sự hội tụ của f_n tại điểm z_0 cho ta sự hội tụ của C_n về $C_0\in\mathbb{R}$. Kết hợp với việc $\left|\frac{\zeta+z}{\zeta-z}\right|<3$, ta có f_n hội tụ đều trên $\overline{D(z_0,R)}$.

Với trường hợp compact K tổng quát, ta xét họ các dĩa tròn phủ kín K

$$K = \bigcup_{k=1}^{n} D\left(z_k, r_k\right)$$

thỏa mãn $\overline{D\left(z_k, 2r_k\right)} \subset \Omega$. Vì f_n hội tụ đều trên các $\overline{D\left(z_k, r_k\right)}$ nên ta suy ra dãy hàm này cũng hội tụ đều trên

$$\bigcup_{k=1}^{n} \overline{D\left(z_k, r_k\right)} \supset K.$$

Bài 2.8. Giả sử u là hàm đo được Lebesgue trong miền Ω, và u trong L^1. Có nghĩa là tích phân của $|u|$ trên tập con compact của Ω là hữu hạn. Chứng minh rằng u là điều hòa nếu nó thỏa điều sau của tính chất giá trị trung bình

$$u\left(a\right) = \frac{1}{\pi r^2} \iint_{D(a,r)} u\left(x, y\right) dxdy$$

với $\overline{D}\left(a, r\right) \subset \Omega$.

Giải. Vấn đề đầu tiên ta cần giải quyết là sự liên tục của u. Thật vậy, ta sẽ chứng minh u liên tục bằng cách chỉ ra rằng tập $u^{-1}\left(\left(-\infty, M\right)\right)$ là tập mở. Chiều còn lại được chứng minh hoàn toàn tương tự hoặc áp dụng kết quả cho hàm $-u$. Giả sử tồn tại $z_0 \in \Omega$ sao cho $u\left(z_0\right) < M$ và một dãy $\{z_n\}$ trong Ω hội tụ về z_0 sao cho $u\left(z_0\right) \geq M$. Khi đó, gọi r_0 là số thực dương sao cho $\overline{D\left(z_0, 2r_0\right)} \subset \Omega$. Với mọi $n \in \mathbb{N}$, đặt $r_n = |z_n - z_0| + r_0$, ta có $\overline{D\left(z_n, r_n\right)}$ từ chỉ số n đủ lớn nào đó sẽ thỏa

$$D\left(z_0, r_0\right) \subset D\left(z_n, r_n\right) \subset D\left(z_0, 2r_0\right).$$

Khi đó

$$\left[\iint_{D(z_n,r_n)} - \iint_{D(z_0,r_0)}\right] u\left(x, y\right)\, dx\, dy = u\left(z_n\right) - u\left(z_0\right) \geq M - u\left(z_0\right) = \varepsilon. \quad (2.0.1)$$

Ta đặt $A_n = D(z_n, r_n) \setminus D(z_0, r_0)$, ta có $\chi_{A_n}(z)$ dần về 0 khi n dần về vô cùng và z cố đỉnh. Xét dãy hàm

$$f_n(z) = \chi_{A_n}(z) . u(z)$$

khả tích trên $\overline{D(z_0, 2r_0)}$ và hội tụ điểm về 0, do đó định lý hội tụ bị chặn Lebesgue cho ta$\iint_{A_n} u(x,y)\ dx\, dy$ dần về 0. Điều này mâu thuẫn với (2.0.1) và cho ta tính liên tục của u.

Với trường hợp u liên tục, ta sẽ chứng minh rằng khẳng định trên đúng với cả hai chiều, tức u là điều hòa khi và chỉ khi giá trị tại hàm số tâm là trung bình của các giá trị trên một dĩa tròn. Đầu tiên ta kiểm chứng hàm u thỏa tính chất trung bình

$$u(a) = \frac{1}{\pi r^2} \iint_{D(a,r)} u(x,y)\ dx\, dy$$

với mọi r thỏa $\overline{D(a,r)}$ chứa trong Ω thì là hàm điều hòa. Thật vậy, với R cố định sao cho $\overline{D(a,r)} \subset \Omega$, và $r < R$, đổi sang tọa độ cầu, ta có

$$\begin{aligned} u(a)\pi R^2 &= \iint_{D(a,R)} u(x,y)\ dx\, dy \\ &= \int_{r=0}^{R} \int_0^{2\pi} u\left(a + re^t\right) r\, dt\, dr \end{aligned}$$

Lấy đạo hàm 2 vế theo R, ta có

$$2\pi R u(a) = \int_0^{2\pi} u\left(a + Re^t\right) R\, dt.$$

Do đó u cũng thỏa tính chất trung bình với cách hiểu $u(a) = \int_0^{2\pi} u(a + Re^t)\ dt$. Điều này chứng tỏ u là hàm điều hòa.

Trong trường hợp u là hàm điều hòa, với mọi $r \leq R$ ta có

$$2\pi r u(a) = \int_0^{2\pi} u\left(a + re^t\right) r\, dt.$$

Lấy tích 2 vế theo r từ 0 đến R, ta có

$$\begin{aligned}\pi R^2 u(a) &= \int_0^R \int_0^{2\pi} u\left(a + re^t\right) r\,dt\,dr \\ &= \iint_{D(a,R)} u(x,y)\;dx\,dy.\end{aligned}$$

Do đó ta có

$$u(a) = \frac{1}{\pi R^2} \iint_{D(a,R)} u(x,y)\;dx\,dy.$$

Bài 2.9. Cho $I = [a,b]$ là một khoảng đóng trên trục thực và φ là hàm liên tục trên I. Đặt

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_a^b \frac{\varphi(t)}{t-z}\,dt \qquad (z \notin I),$$

chứng minh rằng

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \left[f(x+i\varepsilon) - f(x-\varepsilon)\right] \qquad (\varepsilon > 0)$$

tồn tại với mọi số thực x. Hãy tìm giới hạn này theo φ.

Giải. Ta có

$$\begin{aligned}f(x+i\varepsilon) - f(x-i\varepsilon) &= \frac{1}{2\pi i} \int_a^b \varphi(t) \left(\frac{1}{t-x-i\varepsilon} - \frac{1}{t-x+i\varepsilon}\right) dt \\ &= \frac{1}{\pi} \int_a^b \frac{\varepsilon \varphi(t)}{(t-x)^2 + \varepsilon^2}\,dt\end{aligned}$$

Nếu $x \notin I$, tức tồn tại khoảng cách d giữa x và I, với mọi $\varepsilon < 1$ ta có

$$\begin{aligned}\left|\frac{\varepsilon \varphi(t)}{(t-x)^2 + \varepsilon^2}\right| &\le \frac{\max_{t\in I} |\varphi(t)|}{d^2} \\ \int_a^b \frac{\max_{t\in I} |\varphi(t)|}{d^2}\,dt &= \frac{\max_{t\in I} |\varphi(t)|}{d^2}(b-a) < \infty\end{aligned}$$

$$\frac{\varepsilon\varphi(t)}{(t-x)^2+\varepsilon^2} \to 0 \qquad \text{khi } \varepsilon \to 0$$

Do đó theo Định lý hội tụ bị chặn của Lebesgue, ta có

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\left[f(x+i\varepsilon)-f(x-\varepsilon)\right] = \frac{1}{\pi}\lim_{\varepsilon\to 0}\int_a^b \frac{\varepsilon\varphi(t)}{(t-x)^2+\varepsilon^2}\,dt = \frac{1}{\pi}\int_a^b 0\,dt = 0.$$

Trong trường hợp $x \in I$, ta sẽ chứng minh tích phân đã cho hội tụ về $\varphi(x)$. Thật vậy, ta có

$$\frac{1}{\pi}\int_a^b \left[\frac{\varepsilon\varphi(t)}{(t-x)^2+\varepsilon^2} - \frac{\varepsilon\varphi(x)}{(t-x)^2+\varepsilon^2}\right] dt = \frac{1}{\pi}\int_a^b \frac{\varepsilon\left[\varphi(t)-\varphi(x)\right]}{(t-x)^2+\varepsilon^2}\,dt.$$

Ta sẽ chứng minh tích phân ở vế phải dần về 0. Đặt $M = \sup_{t\in I}|\varphi(t)|$, ta có

$$\begin{aligned}
\left|\int_a^b \frac{\varepsilon\left[\varphi(t)-\varphi(x)\right]}{(t-x)^2+\varepsilon^2}\,dt\right| &\leq \left(\int_a^{x-\delta} + \int_{x+\delta}^b + \int_{x-\delta}^{x+\delta}\right)\frac{\varepsilon\left|\varphi(t)-\varphi(x)\right|}{(t-x)^2+\varepsilon^2}\,dt \\
&\leq 2M\left(\int_{-\infty}^{x-\delta} + \int_{x+\delta}^{+\infty}\right)\frac{\varepsilon}{(t-x)^2+\varepsilon^2}\,dt + \int_{x-\delta}^{x+\delta}\frac{\varepsilon\left|\varphi(t)-\varphi(x)\right|}{(t-x)^2+\varepsilon^2}\,dt \\
&\leq 4M\int_{x+\delta}^{+\infty}\frac{\varepsilon}{(t-x)^2+\varepsilon^2}\,dt + \int_{x-\delta}^{x+\delta}\frac{\varepsilon\left|\varphi(t)-\varphi(x)\right|}{(t-x)^2+\varepsilon^2}\,dt
\end{aligned}$$

Với mọi $\varepsilon_1 > 0$ cho trước, tồn tại $\delta > 0$ để $|\varphi(t)-\varphi(x)| \leq \varepsilon_1$ với mọi $|t-x| \leq \delta$, ta suy ra

$$\begin{aligned}
\int_{x-\delta}^{x+\delta}\frac{\varepsilon\left|\varphi(t)-\varphi(x)\right|}{(t-x)^2+\varepsilon^2}\,dt &\leq \varepsilon_1\int_{x-\delta}^{x+\delta}\frac{\varepsilon}{(t-x)^2+\varepsilon^2}\,dt \\
&\leq \varepsilon_1\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\varepsilon}{(t-x)^2+\varepsilon^2}\,dt \\
&= 2\pi\varepsilon_1 i\operatorname{Res}\left(\frac{\varepsilon}{(t-x)^2+\varepsilon^2}, x+i\varepsilon\right) \\
&= \pi\varepsilon_1
\end{aligned}$$

Mặt khác với phép đổi biến $u = \frac{t-x}{\varepsilon}$, ta cũng có

$$\int_{x+\delta}^{+\infty} \frac{\varepsilon}{(t-x)^2+\varepsilon^2}\,dt = \int_{\frac{\delta}{\varepsilon}}^{+\infty} \frac{1}{u^2+1}du = \arctan(u)\Big|_{\frac{\delta}{\varepsilon}}^{+\infty} = \frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{\delta}{\varepsilon}\right).$$

Vậy nếu chọn ε đủ nhỏ để $\frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{\delta}{\varepsilon}\right) \le \varepsilon_1$, ta được

$$\left|\int_a^b \frac{\varepsilon[\varphi(t)-\varphi(x)]}{(t-x)^2+\varepsilon^2}\,dt\right| \le (4M+\pi)\,\varepsilon_1,$$

do đó ta suy ra

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\left\{\frac{1}{\pi}\int_a^b \left[\frac{\varepsilon\varphi(t)}{(t-x)^2+\varepsilon^2} - \frac{\varepsilon\varphi(x)}{(t-x)^2+\varepsilon^2}\right]dt\right\} = 0.$$

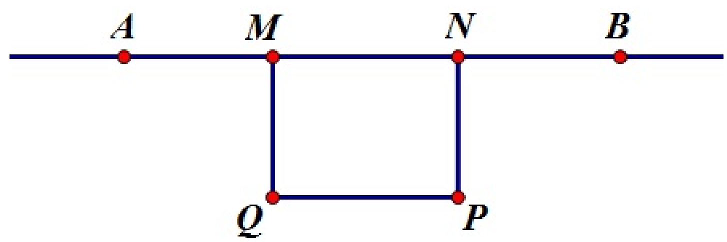
Mặt khác ta cũng có

$$\begin{aligned}
\lim_{\varepsilon\to 0}\left[\frac{1}{\pi}\int_a^b \frac{\varepsilon\varphi(x)}{(t-x)^2+\varepsilon^2}\,dt\right] &= \varphi(x)\lim_{\varepsilon\to 0}\left[\frac{1}{\pi}\int_a^b \frac{\varepsilon}{(t-x)^2+\varepsilon^2}\,dt\right] \\
&= \varphi(x)\lim_{\varepsilon\to 0}\left[\frac{1}{\pi}\int_{\frac{a-x}{\varepsilon}}^{\frac{b-x}{\varepsilon}} \frac{1}{u^2+1}\,du\right] \\
&= \frac{\varphi(x)}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{u^2+1}\,du \\
&= 2\varphi(x)\,i\mathrm{Res}\left(\frac{1}{u^2+1}, i\right) = \varphi(x)
\end{aligned}$$

với $u = \frac{t-x}{\varepsilon}$. Vậy giới hạn đã cho hội tụ về 0 khi $x \notin I$ và dần về $\varphi(x)$ khi $x \in I$.

Bài 2.10. Giả sử $I = [a, b]$, Ω là một miền, $I \subset \Omega$, f liên tục trong Ω, và $f \in H(\Omega \backslash I)$. Chứng minh $f \in H(\Omega)$.

Giải. Trước hết, ta chứng minh kết quả cho trường hợp tập I là đoạn thẳng $[a, b]$. Để làm điều này, theo định lý Morera, ta chỉ cần chứng minh tích phân của f trên



Hình 2.0.1: Hình chữ nhật $MNPQ$ có một cạnh nằm trên $[a, b]$ của Bài 2.10..

mọi hình chữ nhật đều triệt tiêu. Thực ra, ta chỉ cần chứng minh tích phân của f trên hình chữ nhật có 4 đỉnh là M, N, P, Q với M, N thuộc $[a, b]$ (như Hình 2.0.1) là đủ vì các trường hợp còn lại là hiển nhiên hoặc đưa về trường hợp trên.

Gọi $M_n = M - \frac{M-Q}{n}, N_n = N - \frac{N-P}{n}$, ta có tích phân của f trên biên hình chữ nhật M_nN_nPQ triệt tiêu. Do đó ta chỉ cần chứng minh tích phân của f trên biên của hình chữ nhật R_n với 4 đỉnh là M, N, N_n, M_n dần về 0 là đủ (thực chất các $\oint_{R_n} f\,dz$ bằng nhau). Mặt khác, f liên tục trong hình chữ nhật $MNPQ$ nên liên tục đều và bị chặn. Điều này cho ta

$$\begin{aligned} \int_{N_n}^{M_n} f(z)\,dz &\to \int_N^M f(z)\,dz \\ \int_{N_n}^{N} f(z) &\to 0 \\ \int_{M}^{M_n} f(z) &\to 0 \end{aligned}$$

khi n dần về vô cùng. Do đó bài toán được chứng minh.

Ta chứng minh kết quả với compact K tổng quát hơn đoạn $[a, b]$. Với một tập K bất kì chứa trong Ω, ta xét lưới chính tắc gồm các đường thẳng song song hai trục và cách nhau $\frac{1}{2^n}$ và gọi $\{R_k\}_{k\in I_n}$ là các hình vuông (tức các mắt lưới) của lưới chứa trong Ω và $\{R_h\}_{h\in J_n}$ là họ con của I_n các hình vuông có phần giao với K khác rỗng. Với tập K thỏa mãn các điều kiện sau:

1. K chứa trong $\bigcup_{h\in J_n} R_h$ từ n đủ lớn nào đó.

2. Số $\lambda_n = |J_n|$ thỏa mãn $\left\{\frac{\lambda_n}{2^n}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ bị chặn trên.

Khi đó một hàm f liên tục trên Ω, giải tích trên $\Omega \setminus K$ thì cũng sẽ giải tích trên toàn Ω.

Thật vậy, xét tại điểm $z_0 \in \Omega$ với dĩa tròn $D(z_0, r)$ chứa trong Ω, ta sẽ chứng minh f giải tích trong $D(z_0, r)$, tức tích phân của f triệt tiêu trên biên các hình vuông R trong họ $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \{R_k\}_{k\in I_n}$. Ta chia R thành các họ $\mathscr{A}$ hình vuông con cạnh $\frac{1}{2^n}$ với n đủ nhỏ. Khi đó phần giao của K với R được phủ bởi một họ $\mathscr{B}$ có ít hơn λ_n các hình vuông con này. Vậy ta có

$$\oint_{\partial R} f(z)\, dz = \sum_{R_i\in\mathscr{B}} \oint_{\partial R_i} f(z)\, dz + \sum_{R_i\in\mathscr{A}\setminus\mathscr{B}} \oint_{\partial R_i} f(z)\, dz,$$

nhưng vì $\oint_{\partial R_i} f(z)\, dz = 0$ với các hình vuông R_i trong $\mathscr{A} \setminus \mathscr{B}$ (do $R_i \subset \Omega \setminus K$) nên ta có

$$\oint_{\partial R} f(z)\, dz = \sum_{R_i\in\mathscr{B}} \oint_{\partial R_i} f(z)\, dz.$$

Vì f liên tục đều trên R nên với mọi $\varepsilon > 0$, tồn tại n đủ lớn để $|f(z_1) - f(z_2)| < \varepsilon$ với mọi $z_1, z_2 \in \Omega$ thỏa $|z_1 - z_2| < \frac{\sqrt{2}}{2^n}$. Do đó ta có

$$\left|\oint_{\partial R_i} f(z)\, dz\right| < \frac{1}{2^n}\varepsilon + \frac{1}{2^n}\varepsilon = \frac{1}{2^{n-1}}\varepsilon.$$

Như vậy ta có

$$\left|\oint_{\partial R} f(z)\, dz\right| \;\leq\; \sum_{R_i\in\mathscr{B}} \left|\oint_{\partial R_i} f(z)\, dz\right|$$

$$\leq \quad |\mathscr{B}| \frac{1}{2^{n-1}} \varepsilon$$
$$\leq \quad 2\varepsilon \frac{\lambda_n}{2^n}$$

Vậy nên với $\left\{\frac{\lambda_n}{2^n}\right\}$ bị chặn trên, ta sẽ có được $\oint_{\partial R} f(z)\, dz$ và do đó kết quả được chứng minh.

Ghi chú.

1. Ta có một điều khá "hợp lý", đó là các tập K chứa điểm trong sẽ không thỏa tính chất trên. Thật vậy, nếu K có điểm trong, tức sẽ chứa một hình chữ nhật R thuộc lưới $\frac{1}{2^N}$ với N đủ lớn. Do đó số hình vuông trong lưới $\frac{1}{2^n}$ có giao với R sẽ không nhỏ hơn $\left(2^{n-N}\right)^2 = 2^{2n-2N}$, ta được $\frac{\lambda_n}{2^n} \geq 2^n 2^{-2N}$ và do đó không bị chặn khi n dần về vô cùng.

2. Các tập K có chứa các điểm "quá gần" biên của Ω cũng sẽ không thỏa tính chất trên vì nó không thể được phủ bởi họ $\{R_h\}_{h \in J_n}$. Tuy nhiên trường hợp này đôi lúc vẫn có thể giải quyết được, chẳng hạn như khi K là đường thẳng thực và Ω là một miền bị chặn có phần giao với K khác rỗng. Lúc này, ta vẫn có thể sử dụng kết quả trên bằng cách "địa phương hóa" điều kiện thứ 2 như sau: phần giao của K với hình vuông R luôn được phủ bởi họ con chứa trong R của họ $\{R_h\}_{h \in J_n}$. Vì phát biểu này khá dài dòng nên nhóm biên soạn quyết định giữ nguyên điều kiện thứ 2 như lời giải phía trên.

Bài 2.11. (Bất đẳng thức Harnack) Giả sử Ω là một miền, K là tập con compact của Ω, $z_0 \in \Omega$. Chứng minh rằng tồn tại một số dương α và β (phụ thuộc vào z_0, K, và Ω). sao cho

$$\alpha u(z_0) \leq u(z) \leq \beta u(z_0)$$

với mọi hàm điều hòa dương u trong Ω và với mọi $z \in K$.

Nếu $\{u_n\}$ là dãy các hàm điều hòa dương trong Ω và nếu $\{u_n(z_0)\} \to 0$, mô tả dãy $\{u_n\}$ trên phần còn lại của Ω. Làm tương tự với $\{u_n(z_0)\} \to \infty$. Chứng minh giả thiết dương của $\{u_n\}$ là cần thiết cho kết quả này.

Giải. Nhận thấy rằng nếu $b = a + re^{i\theta}$ là một điểm trong dĩa $D(a, R) \subset \Omega$ thì

$$\begin{aligned} u(b) &= \int_0^{2\pi} \frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2Rr\cos(\theta - t) + r^2} u\left(a + Re^{it}\right) dt \\ u(a) &= \int_0^{2\pi} u\left(a + Re^{it}\right) dt \end{aligned}$$

Do đó $\frac{R-r}{R+r} u(a) \leq u(b) \leq \frac{R+r}{R-r} u(a)$, vậy nên nếu $r < \frac{R}{2}$ thì ta có

$$\frac{1}{3} u(a) \leq u(b) \leq 3u(a).$$

Mặt khác Ω liên thông nên với $z_1 \in K$, tồn tại đường Γ trong Ω từ z_0 đến z_1. Với mỗi $x \in \Omega$, tồn tại bán kính δ_x đủ nhỏ để $\overline{D(x, 2\delta_x)}$ chứa trong Ω. Do $K \cup \Gamma$ cũng là compact nên họ phủ mở

$$K \cup \Gamma = \bigcup_{x \in K \cup \Gamma} D(x, \delta_x)$$

có phủ mở con hữu hạn

$$K \cup \Gamma = \bigcup_{k=1}^{n} D\left(x_k, \delta_{x_k}\right).$$

Mặt khác, với 2 điểm a, b bất kì trong cùng một dĩa $D\left(x_k, \delta_{x_k}\right)$, ta có

$$\frac{1}{9} u(b) \leq \frac{1}{3} u(x_k) \leq u(a) \leq 3u(x_k) \leq 9u(b).$$

Do đó với mọi $z \in K \cup \Gamma$, ta có

$$\frac{1}{9^n} u(z) \leq u(z_0) \leq 9^n u(z).$$

Điều này có thể được lập luận chặt chẽ hơn bằng việc xét một đồ thị có n đỉnh là x_k với $k = \overline{1, n}$ trong đó x_i được nối với x_j nếu và chỉ nếu $D(x_i, \delta_{x_i}) \cap D\left(x_j, \delta_{x_j}\right) = \emptyset$. Đồ thị này liên thông vì nó không có đỉnh cô lập và do đó từ một đỉnh luôn có đường đi đến các đỉnh khác với chiều dài không quá n (đường đi sơ cấp). Bài toán được chứng minh.

Với u_n là một dãy các hàm điều hòa dương thỏa $u_n(z_0) \to 0$ thì tại mọi điểm $z \in \Omega$, ta có $\{z\}$ cũng là một compact và do đó

$$\beta_z u(z_0) \geq u_n(z) \to 0.$$

Tương tự với $u_n(z_0) \to \infty$, ta cũng có $u(z) \to \infty$. Các sự hội tụ này không đều, chẳng hạn khi ta xét hàm $u_n(z) = \frac{1}{n} \log |z|$ trên $\mathbb{C} \setminus \overline{D(0,1)}$. Ngoài ra, việc các u_n dương là quan trọng. Thật vậy, ta xét dãy $u_n = \log |z|$ trên $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, ta có $u_n(1)$ dần về 0 nhưng tại các điểm $z \neq \partial D(0,1)$ thì $\{u_n(z)\}$ là dãy hằng khác 0.

Chương 3

Nguyên lý modulus cực đại

Bài 3.1. Cho Δ là tam giác đều trên mặt phẳng phức có các đỉnh là a, b, c. Tìm giá trị lớn nhất của $|(z-a)(z-b)(z-c)|$ khi z di chuyển bên trong tam giác.

Giải. Xét $f(z) = (z-a)(z-b)(z-c)$, rõ ràng $f \in H(\Delta)$. Do đó f đạt giá trị lớn nhất trên $\partial\Delta$. Vì tính đối xứng, ta có thể giả sử z thuộc cạnh nối b và c. Vì tính đồng dạng, ta chỉ cần xét tam giác đều có cạnh bằng 1. Kẻ đường cao từ đỉnh a và gọi δ là khoảng cách từ z đến chân đường cao này, theo Định lý Pythagore, ta có $|(z-a)(z-b)| = \frac{1}{4} - \delta^2$ và $|z-c| = \sqrt{\frac{3}{4} + \delta^2}$. Do đó

$$
\begin{aligned}
|(z-a)(z-b)(z-c)| &= \left(\frac{1}{4} - \delta^2\right)\sqrt{\frac{3}{4} + \delta^2} \\
&\leq \frac{1}{\sqrt{3}}.\sqrt{\frac{1}{4} - \delta^2}.\sqrt{\frac{3}{4} - 3\delta^2}.\sqrt{\frac{3}{4} + \delta^2} \\
&\leq \frac{1}{\sqrt{3}}.\sqrt{\frac{1}{4} - \delta^2}.\frac{1}{2}\left(\frac{3}{4} - 3\delta^2 + \frac{3}{4} + \delta^2\right) \\
&\leq \frac{1}{\sqrt{3}}.\sqrt{\frac{1}{4} - \delta^2}.\frac{1}{2}\left(\frac{3}{2} - 2\delta^2\right)
\end{aligned}
$$

$$\leq \quad \frac{1}{\sqrt{3}}.\frac{1}{2}.\frac{1}{2}.\frac{3}{2} = \frac{\sqrt{3}}{8}.$$

Đẳng thức xảy ra khi z là trung điểm một cạnh của tam giác. Vậy giá trị lớn nhất của $|(z-a)(z-b)(z-c)|$ là $\frac{\sqrt{3}}{8}|a-b|^3$ với $|a-b|$ là độ dài cạnh tam giác.

Bài 3.2. Cho $f \in H(\Pi^+)$ với Π^+ là nửa mặt phẳng trên, $|f| \leq 1$. Tìm giá trị lớn nhất của$|f'(i)|$.

Giải. Do ánh xạ $\frac{1-iz}{z-i}$ biến hình tròn đơn vị thành Π^+ và biến 0 thành i nên ta xét hàm giải tích g xác định như sau trên $U = D(0,1)$.

$$g(z) = f\left(\frac{1-iz}{z-i}\right).$$

Ta có $|g(z)| \leq 1$ với mọi $z \in U$. Theo định lý Cauchy, ta có

$$|g'(0)| \leq \frac{\sup_{|z|=r<1}|g(z)|}{r} \leq \frac{1}{r}$$

Cho r tiến đến 1, ta có $|g'(0)| \leq 1$, đẳng thức xảy ra khi $g(z) = z$. Do đó ta có

$$1 \geq |g'(0)| = |2f'(i)|,$$

suy ra $|f'(i)| \leq \frac{1}{2}$. Đẳng thức có xảy ra khi $f(z) = \frac{iz+1}{i+z}$.

Bài 3.3. Cho $f \in H(\Omega)$. Với điều kiện nào thì $|f|$ có cực tiểu địa phương trong Ω.

Giải. Nếu f có nghiệm trong Ω thì hiển nhiên $|f|$ có cực tiểu địa phương tại Ω. Trong trường hợp $|f(z)| > 0$ với mọi $z \in \Omega$, xét hàm

$$g(z) = \frac{1}{f(z)},$$

ta suy ra $g \in H(\Omega)$, khi đó f có cực tiểu địa phương khi và chỉ khi g có cực đại địa phương. Điều này xảy ra khi và chỉ khi f là hàm hằng.

Vậy điều kiện cần và đủ để $|f|$ có cực tiểu địa phương trong Ω là f hằng hoặc có nghiệm trong Ω.

Bài 3.4.

(a) Cho Ω là một miền và D là một đĩa tròn thỏa $\overline{D} \subset \Omega$. Xét $f \in H(\Omega)$và khác hằng số. Giả sử $|f|$ không đổi trên biên của D, chứng minh rằng f có ít nhất một nghiệm trong D.

(b) Tìm các hàm nguyên f thỏa mãn $|f(z)| = 1$ khi $|z| = 1$.

Giải.

(a) Vì nếu f triệt tiêu trên biên D thì hiển nhiên f là hàm hằng. Vậy ta có thể giả sử $|f(z)| = c > 0$ trên biên D. Nếu f không có nghiệm trong D, khi đó $g = \frac{1}{f}$ giải tích trên D, liên tục trên $\overline{D}$ và có độ lớn bằng c^{-1} trên biên của D. Theo Nguyên lý Modulus cực đại, ta có $|f(z)|^{-1} = |g(z)| \leq c^{-1}$ trên $\overline{D}$. Mặt khác áp dụng nguyên lý này cho f, ta cũng có $|f(z)| \leq c$ trên $\overline{D}$.

Kết hợp hai điều trên ta có $|f| = c$ trên D, điều này xảy ra khi và chỉ khi f là hàm hằng. Vậy ta suy ra f phải có nghiệm trong D.

(b) Ta chứng minh rằng f có dạng $f = \lambda \prod_{i=1}^{N} \varphi_{\alpha_i}^{k_i}$ với $|\lambda| = 1$ và

$$\varphi_\alpha = \frac{z - \alpha}{1 - \overline{\alpha} z},$$

tức f là một phép biến đổi tuyến tính bảo toàn hình tròn đơn vị. Ý tưởng của chúng ta ở đây là dùng câu trên để sinh tiếp nghiệm cho f, quá trình này chắc chắn phải dừng lại do tính compact của $\overline{U}$, tức f là tích của hữu hạn các phép biến đổi $\lambda\varphi_\alpha$ như trên. Tuy nhiên ta có thể kiểm chứng được tích của hữu hạn các phép biến đổi loại này cũng có cùng dạng và từ đó suy ra kết luận của bài toán.

Cụ thể, ta chứng minh quy nạp theo số nghiệm N_f (không kể bậc) của f trong $\overline{U}$. Nếu f không có nghiệm trong $\overline{U}$ thì theo câu trên, ta có $f(z) = \lambda$ với $|\lambda| - 1$. Ta chỉ xét thêm các trường hợp khác hằng số, khi đó, với mỗi hàm nguyên f khác 0, số nghiệm trong $\overline{U}$ phải là hữu hạn vì mọi tập con vô hạn của compact $\overline{U}$ đều có điểm tụ. Gọi α là một nghiệm của f, ta xét ánh xạ g xác định bởi

$$g(z) = f(\varphi_{-\alpha}(z)),$$

Vì $\varphi_{-\alpha}$ giữ nguyên ∂D nên ta có $|g(z)| = 1$ trên ∂D. Mặt khác ta có $g(0) = f(\alpha) = 0$, tức là $g(z) = z^n h(z)$ với $h(0) \neq 0$ và $|h(z)| = 1$ trên ∂D. Do với mỗi nghiệm $\beta \neq 0$ của h, ta có β cũng là nghiệm của g nên $\varphi_{-\alpha}(\beta)$ cũng là nghiệm của f và $\varphi_{-\alpha}$ là song ánh nên ta suy ra $N_h \leq N_f - 1$. Theo nguyên lý quy nạp, ta có $h = \lambda\prod_{i=1}^{N}\varphi_{\alpha_i}^{k_i}$. Suy ra

$$f(z) = g(\varphi_\alpha(z)) = \varphi_\alpha^n(z).\lambda\prod_{i=1}^{N}\varphi_{\alpha_i}^{k_i}.$$

Bài toán kết thúc theo nguyên lý quy nạp.

Bài 3.5. Cho Ω là một miền bị chặn, $\{f_n\}$ là một dãy các hàm liên tục trên $\overline{\Omega}$, giải tích trên Ω và hội tụ đều trên biên của Ω. Chứng minh rằng $\{f_n\}$ cũng hội tụ đều trên $\overline{\Omega}$.

Giải. Ta có dãy $\{f_n\}$ Cauchy trên $\partial\Omega$, tức với mọi $\varepsilon > 0$, tồn tại $M_\varepsilon > 0$ đủ lớn để

$$|f_m(z) - f_n(z)| \leq \varepsilon \quad \text{với mọi } z \in \partial\Omega.$$

Theo Nguyên lý Modulus cực đại, ta có

$$|f_m(z) - f_n(z)| \le \varepsilon \quad \text{với mọi } z \in \overline{\Omega}.$$

Vậy dãy $\{f_n\}$ Cauchy trên Ω và do tính đầy đủ của $C\left(\overline{\Omega}, \mathbb{C}\right)$, ta có điều phải chứng minh.

Bài 3.6. Giả sử $f \in H(\Omega)$, Γ là một chu trình trong Ω sao cho $\Gamma \sim 0 \pmod{\Omega}$, $|f(\zeta)| \le 1$ với mọi $\zeta \in \Gamma^*$ và $\mathrm{Ind}_\Gamma(z) \ne 0$. Chứng minh rằng $|f(z)| \le 1$.

Giải. Gọi Ω' là tập các điểm $z \in \Omega$ thỏa mãn $\mathrm{Ind}_\Gamma(z) \ne 0$. Vì $\Gamma \sim 0 \pmod{\Omega}$ nên Ω' là hội của các thành phần liên thông của $\Omega \setminus \Gamma^*$, do đó Ω' là một tập mở. Ta cũng có được biên của Ω' chứa trong Γ^*. Thật vậy, với mỗi $\zeta \in \partial\Omega'$, nếu $\zeta \notin \Gamma^*$ thì tồn tại đĩa $D(\zeta, r)$ không có giao với Γ^*. Điều này khiến $D(\zeta, r)$ chứa trong Ω' và do đó ζ không là điểm biên.

Do $\Omega' \subset \Omega$ bị chặn nên theo Nguyên lý Modulus cực đại, ta có

$$\sup_{z \in \Omega'} |f(z)| \le \sup_{\zeta \in \partial\Omega'} |f(\zeta)| \le 1$$

và bài toán được chứng minh.

Bài 3.7. Cho

$$\Omega = \{x + iy : \ a < x < b\}, \quad \overline{\Omega} = \{x + iy : \ a \le x \le b\},$$

f liên tục trên $\overline{\Omega}$, giải tích trên Ω. Giả sử $|f(z)| < B < +\infty$ với mọi $z \in \Omega$. Ta đặt

$$M(x) = \sup\{|f(x + iy)| : \ -\infty < y < +\infty\} \qquad (a \le x \le b).$$

Khi đó ta đã có

$$M(x)^{b-a} \leq M(a)^{b-x} M(b)^{x-a} \qquad (a \leq x \leq b).$$

nếu $M(a), M(b) > 0$. Giả sử rằng $M(a) = 0$, chứng minh rằng ta cũng có $f(z) = 0\ \forall z \in \Omega$.

Giải. Đặt $M(g,x) = \sup\{|g(x+iy)| : -\infty < y < +\infty\}$ thì với mọi $\lambda > 0$ đủ nhỏ, ta có $M(f+\lambda, a) = \lambda > 0$ và $M(f+\lambda, b) > 0$. Do đó

$$M(f+\lambda, x) < M(f+\lambda, a)^{\frac{b-x}{b-a}} M(f+\lambda, b)^{\frac{x-a}{b-a}},$$

tức là

$$\begin{aligned} |f(x+iy)| - \lambda &\leq |f(x+iy) + \lambda| \\ &\leq \lambda^{\frac{b-x}{b-a}} M(f+\lambda, b)^{\frac{x-a}{b-a}} \\ &\leq \lambda^{\frac{b-x}{b-a}} (M(b) + \lambda)^{\frac{x-a}{b-a}} \end{aligned}$$

suy ra

$$f(x+iy) \leq \lambda + \lambda^{\frac{b-x}{b-a}} (M(b) + \lambda)^{\frac{x-a}{b-a}}$$

Cố định x và cho λ dần về 0 ta có điều phải chứng minh.

Bài 3.8. Cho Π là nửa mặt phẳng mở bên phải ($z \in \Pi$ nếu và chỉ nếu $\mathrm{Re}(z) > 0$). Giả sử f liên tục trên bao đóng của Π và giải tích trên Π và tồn tại các hằng số $A < \infty$ và $\alpha < 1$ sao cho

$$|f(z)| < A \exp(|z|^{\alpha})$$

với mọi $z \in \Pi$. Ngoài ra, $|f(iy)| \leq 1$ với mọi $y \in \mathbb{R}$. Chứng minh rằng $|f(z)| \leq 1$ trên Π. Hãy chỉ ra rằng kết quả trên sai khi $\alpha = 1$.

Kết quả trên có thể mở rộng thế nào nếu như ta thay Π bởi miền bao bởi hai tia đi qua góc tọa độ, có góc xen giữa khác π.

Giải. Trước hết ta chứng minh $|f(z)| \le 1$ trên Π. Để làm điều này, ta xét hàm $g_\varepsilon(z) = \exp\left(-\varepsilon z^\beta\right)$ với $\alpha < \beta < 1$ trên $\overline{\Pi} \setminus \{0\}$ và $g_\varepsilon(0) = 0$. Ta có g_ε:

$$\begin{aligned} |f(z)\, g_\varepsilon(z)| &< \left|A \exp\left(|z|^\alpha - \varepsilon z^\beta\right)\right| \\ &< |A| \exp\left(r^\alpha - \varepsilon r^\beta \cos\beta\theta\right) \end{aligned}$$

Vì $\beta < 1$ và $\theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ nên $\cos\beta\theta \ge \cos\frac{\beta\pi}{2} > 0$. Vậy tồn tại $r_\varepsilon > 0$ để

$$|f(z)\, g_\varepsilon(z)| < 1 \qquad \forall r > r_\varepsilon.$$

Trong đường tròn $\overline{D(0, r_\varepsilon)}$, ta có

$$\sup_{z \in \overline{D(0, r_\varepsilon)}} |f(z)\, g_\varepsilon(z)| = \sup_{r = r_\varepsilon} |f(z)\, g_\varepsilon(z)| \le 1,$$

do đó ta có $|f(z)\, g_\varepsilon(z)| \le 1$ $\forall z \in \mathbb{C}$, nghĩa là $|f(z)| \le \left|\exp\left(-\varepsilon z^\beta\right)\right|$. Cố định z và cho ε tiến về 0, ta có $|f(z)| \le 1$ trên Π.

Trường hợp $\alpha = 1$, ta chọn $f(z) = e^z$, ta có $f(iy) = 1$ nhưng f không bị chặn trên $\mathbb{R}^+$. Ta sẽ mở rộng kết quả này như sau:

Cho u, v là hai điểm trên đường tròn đơn vị, xét hai đường thẳng tương ứng $D_1 = \{z = tu : \ t \in \mathbb{R}^+\}, D_2 = \{z = tv : \ t \in \mathbb{R}^+\}$. và $|f(z)| \le 1$ trên $D_1 \cup D_2$. Gọi Ω là miền được bao bởi D_1, D_2 và φ là góc xen giữa tương ứng. Khi đó nếu ta có $|f(z)| \le 1$ trên $D_1 \cup D_2$ và

$$|f(z)| \le A \exp\left(|z|^\alpha\right)$$

với $\alpha < \frac{\pi}{\varphi}$ thì $|f(z)| \le 1$ trên Ω.

Thật vậy, một cách tương tự, ta đặt $g_\varepsilon(z) = \exp\left(-\varepsilon \frac{z}{\lambda}^\beta\right)$ với $\alpha < \beta < \frac{\pi}{\varphi}$ và $\lambda = e^{i\frac{\beta\varphi}{2}}$, khi đó

$$|f(z)\, g_\varepsilon(z)| \le A \exp\left(r^\alpha - \varepsilon r^\beta. \cos\left[\beta\left(\theta - \frac{\varphi}{2}\right)\right]\right)$$

Do $\theta - \frac{\varphi}{2} \in \left(-\frac{\varphi}{2}, \frac{\varphi}{2}\right)$ nên ta có $\beta\left(\theta - \frac{\varphi}{2}\right) \in \left(-\frac{\beta\varphi}{2}, \frac{\beta\varphi}{2}\right)$ với $0 < \frac{\beta\varphi}{2} < \frac{\pi}{2}$. Vậy ta có

$$|f(z)\, g_\varepsilon(z)| \le A \exp\left(r^\alpha - \varepsilon r^\beta. \cos\frac{\beta\varphi}{2}\right),$$

Do đó, lập luận tương tự bên trên, tồn tại $r_\varepsilon > 0$ để

$$|f(z)\, g_\varepsilon(z)| < 1 \qquad \forall z \in \mathbb{C},$$

nghĩa là $|f(z)| \le \exp\left(-\varepsilon \frac{z}{\lambda}^\beta\right)$. Cố định z và cho ε tiến về 0, ta có $|f(z)| \le 1$ trên Ω.

Bài 3.9. Cho Π là nửa mặt phẳng mở bên phải. Giả sử $f \in H(\Pi)$ và $|f(z)| < 1$ với mọi $z \in \Pi$ và tồn tại $\alpha \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ sao cho

$$\frac{\log |f(re^{i\alpha})|}{r} \to -\infty \quad \text{khi} \quad r \to \infty.$$

Chứng minh rằng $f = 0$.

Giải. Từ giới hạn ở giả thiết, ta có: Với mọi $M > 0$ lớn tùy ý, tồn tại $R_M > 0$ để $|f(re^{i\alpha})| < e^{-Mr}$ với mọi $r > R_M$. Do đó nếu đặt

$$g_M = f(z)\, e^{Mz},$$

ta có g giải tích trên $\Omega = \left\{z \in \mathbb{C} : \ \alpha < \arg z < \frac{\pi}{2}\right\}$ và liên tục trên $\overline{\Omega}$. Mặt khác ta cũng có

$$|g_M(z)| \le A \exp\left(|z|^\beta\right)$$

với $\beta = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{\pi}{\frac{\pi}{2}-\alpha}\right) \in \left(1, \frac{\pi}{\frac{\pi}{2}-\alpha}\right)$ và $A = \sup\left\{\exp\left(M|z| - |z|^{\beta}\right) : \ z \in \Omega\right\} < +\infty$. Vậy áp dụng phần mở rộng của Bài 3.8., ta có

$$|g_M(z)| \leq \sup_{\zeta \in \partial\Omega} |g(\zeta)| = B_1 < \infty \quad \forall z \in \Omega.$$

Hoàn toàn tương tự cho phần còn lại của Π, ta có

$$|g_M(z)| \leq \max\left\{\sup_{\zeta\in\partial\Omega} |g(\zeta)|, \sup_{\zeta\in\partial(\Pi\backslash\Omega)} |g(\zeta)|\right\} = B < \infty \quad \forall z \in \Omega.$$

Lại áp dụng Bài 3.8., ta có ngay

$$|g_M(z)| \leq \sup_{\zeta\in\partial\Pi} |g(\zeta)| = 1 \quad \forall z \in \Omega.$$

Vậy ta có được $|f(z)| < \left|e^{-Mz}\right| \quad \forall M \in \mathbb{R}^{+}$. Tại mỗi z trong Π, ta cho $M \to \infty$ và nhận được $f(z) = 0$, do đó cũng có $f = 0$ trên $\overline{\Pi}$.

Bài 3.10. Cho Γ là biên của một miền Ω không bị chặn và $f \in H(\Omega)$, liên tục trên $\Omega \cup \Gamma$. Giả sử tồn tại các hằng số $B, M < +\infty$ sao cho $|f| \leq M$ trên Γ và $|f| \leq B$ trên Ω. Chứng minh rằng ta cũng có $|f| \leq M$ trên Ω.

Giải. Ta chứng minh bài toán trong trường hợp $\mathbb{C} \setminus \Omega$ chứa một quả cầu mở, không mất tính tổng quát (qua việc đổi biến), ta có thể giả sử quả cầu mở này là U, hình tròn đơn vị. Xét hàm số $g_n(z) = \frac{f^n(z)}{z}$, ta có

$$\begin{aligned} |g_n(z)| &\leq M^n && \text{trên } \Gamma \\ |g_n(z)| \leq \frac{B^n}{R} &\leq M^n && \text{trên } \Omega\backslash D(0,R) \end{aligned}$$

với R đủ lớn. Vì $\partial\left(\Omega \cap D\left(0, R\right)\right) \subset \Gamma \cup \partial D\left(0, R\right)$ nên ta suy ra

$$\left|g_n\left(z\right)\right| < M^n \qquad \forall z \in \Omega \cup \Gamma,$$

tức là $\left|f\left(z\right)\right| < M\left|z\right|^{\frac{1}{n}}$. Cố định z và cho n dần về vô cùng ta có điều phải chứng minh.

Trong trường hợp $\mathbb{C} \setminus \Omega$ không chứa quả cầu mở nào, khi đó f là hàm phức liên tục trên $\overline{\Omega} = \mathbb{C}$. Với mọi $\varepsilon > 0$, xét Ω_ε là tập mở $\mathbb{C} \setminus |f|^{-1}\left((-\infty, M+\varepsilon]\right)$, ta có $\Omega_\varepsilon \subset \Omega$ và $\mathbb{C} \setminus \Omega_\varepsilon = |f|^{-1}\left((-\infty, M+\varepsilon]\right)$ chứa ít nhất một tập mở khác trống là $|f|^{-1}\left((-\infty, M+\varepsilon)\right)$. Mặt khác, nếu $\Omega_\varepsilon \neq \emptyset$, ta có

$$\partial\Omega_\varepsilon = \partial\left(\mathbb{C} \setminus \Omega_\varepsilon\right) \subset |f|^{-1}\left((-\infty, M+\varepsilon]\right) = \mathbb{C} \setminus \Omega_\varepsilon$$

Vì tính liên thông của Ω không được sử dụng trong trường hợp trên, ta có thể áp dụng bài toán với tập mở Ω_ε và có được $\left|f\left(z\right)\right| \leq M+\varepsilon$ trên Ω_ε Điều này mâu thuẫn và chứng tỏ $\Omega_\varepsilon = \emptyset$.

Trong trường hợp $\Omega_\varepsilon = \emptyset$ với mọi $\varepsilon > 0$, ta suy ra $|f|^{-1}\left((-\infty, M+\varepsilon]\right) \supset \overline{|f|^{-1}\left((-\infty, M+\varepsilon)\right)} = \mathbb{C}$, nghĩa là $\left|f\left(z\right)\right| \leq M+\varepsilon$ trên $\mathbb{C}$ với mọi $\varepsilon < \delta$. Cho ε dần về 0 ta cũng có điều phải chứng minh.

Bài 3.11. Cho f là hàm nguyên. Nếu có một ánh xạ γ từ $[0,1)$ vào mặt phẳng phức sao cho $\gamma\left(t\right) \to \infty$ và $f\left(\gamma\left(t\right)\right) \to \alpha$ khi $t \to 1$ thì ta gọi α là một *giá trị tiệm cận* (*asymptotic value*) của f. Chứng minh rằng mọi hàm nguyên khác hằng đều nhận ∞ là giá trị tiệm cận.

Giải. Gọi $E_n = \left\{z \in \mathbb{C} :\ \left|f\left(z\right)\right| > n\right\}$, ta có E_n là các tập mở giảm dần (theo quan hệ bao hàm) và $E_n \downarrow \emptyset$. Ta thiết lập dãy $\left\{z_n\right\}_{n \geq 0}$ như sau:

- Chọn $z_0 = 0$.

- Tồn tại ít nhất một thành phần liên thông U_1 của E_1 sao cho $f(U_1)$ không bị chặn, khi đó ta cũng có U_1 không bị chặn. Chọn z_1 là một phần tử của U_1.

- Vì $f\left(E_2 \cap U_1 \setminus \overline{D(0,1)}\right)$ không bị chặn nên tồn tại một thành phần liên thông U_2 của tập mở $E_2 \cap U_1 \setminus \overline{D(0,1)}$ sao cho $f(U_2)$ không bị chặn. Ta chọn $z_2$là một phần tử của U_2 ...

- ... Vì $f\left(E_{n+1} \cap U_n \setminus \overline{D(0,n)}\right)$ không bị chặn nên tồn tại một thành phần liên thông U_{n+1} của tập mở $E_{n+1} \cap U_n \setminus \overline{D(0,n)}$. Ta chọn z_{n+1} là một phần tử của U_{n+1}...

Vậy bằng quy nạp, ta đã xây dựng được một dãy $\{z_n\}_{n\geq 0}$thỏa mãn tính chất sau

$$\begin{cases} |z_n| & > n-1 \\ |f(z_n)| & > n \\ z_n & \in U_n \ \forall n \geq 1 \end{cases}$$

Với $\{U_n\}$ là dãy các tập mở và liên thông giảm dần thỏa mãn $U_n \subset E_n$. Do mọi tập mở trong $\mathbb{R}^n$ đều liên thông đường nên ta có thể gọi γ_n là đường nối giữa z_n và z_{n+1} trong U_n. γ_0 được lấy trực tiếp là đường thẳng nối z_0 và z_1. Ta chọn khoảng tham số cho γ_n là $D_n = \left[1 - \frac{1}{n+1}, 1 - \frac{1}{n}\right]$. Đường γ được xác định bằng cách nối các đường γ_n này với nhau và có khoảng tham số là $[0,1)$. Khi đó với $t \in \left[1 - \frac{1}{n+1}, 1 - \frac{1}{n}\right]$, ta có

$$\begin{cases} f(\gamma(t)) = f(\gamma_n(t)) > n & \text{do } U_n \subset E_n \\ |\gamma(t)| = |\gamma_n(t)| > n-1 & \text{do } \gamma_n(t) \notin D(0, n-1) \end{cases}$$

Vậy đường γ thỏa yêu cầu đề bài.

Ghi chú. Thực chất mọi thành phần liên thông của E_n đều không bị chặn. Thật vậy, giả sử E_n có thành phần liên thông mở A bị chặn, khi đó

$$\sup_{z \in A} |f(z)| \leq \sup_{z \in \partial A} |f(z)|$$

Nhưng $|f(z)| \leq n$ với mọi $z \in \partial A$ (vì nếu ngược lại thì z là một điểm trong của A) nên ta có một mâu thuẫn.

Bài 3.12. Chứng minh rằng hàm exp có đúng hai giá trị tiệm cận là 0 và ∞. Đối với các hàm sin và costhì như thế nào? Với

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}, \quad \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}.$$

Giải. Do exp là hàm nguyên nên theo Bài 3.11., nó nhận ∞ làm giá trị tiệm cận qua đường tiệm cận (asymptotic curve) γ. Mặt khác, do $e^{-z} = \frac{1}{e^z}$ nên với đường $-\gamma$, ta cũng có 0 là một giá trị tiệm cận. Vậy ta chỉ cần chứng minh đây là các giá trị duy nhất. Thật vậy, giả sử tồn tại giá trị tiệm cận $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, khi đó có các hàm $x(t), y(t)$ xác định trên $[0,1)$ sao cho

$$e^{x(t)+iy(t)} \to \alpha = u + iv, \qquad x^2(t) + y^2(t) \to \infty$$

khi $t \to 1$. Vậy ta suy ra $e^{x(t)} = \left|e^{x(t)+iy(t)}\right| \to |\alpha|$, tức $x(t)$ bị chặn, điều đó cho ta $|y(t)| \to \infty$ khi $t \to 1$. Không mất tính tổng quát, ta có thể giả sử $y(t) \to +\infty$, khi đó ta có

$$e^{x(t)} \cos y(t) \to u,$$

suy ra $\cos y(t) \to u |\alpha|^{-1}$ khi $t \to 1$. Điều này mâu thuẫn và kết thúc chứng minh.

Ta chứng minh hàm $\cos z$ không có giá trị tiệm cận nào khác ngoài ∞. Dễ dàng nhận thấy ∞ là một giá trị tiệm cận của $\sin z$, giả sử $\alpha \in \mathbb{C}$ là một giá trị tiệm cận khác, khi đó tồn tại $\gamma(t) = x(t) + iy(t)$ xác định trên $[0, 1)$ thỏa mãn

$$e^{\gamma(t)} + e^{-\gamma(t)} \to \beta = 2i\alpha, \quad |\gamma(t)| \to \infty \tag{3.0.1}$$

khi $t \to 1$. Đặt $\beta = u + iv$, đẳng thức (3.0.1) cho ta

$$\begin{cases} \cos y(t)\left(e^{x(t)} + e^{-x(t)}\right) & \to u \\ \sin y(t)\left(e^{x(t)} - e^{-x(t)}\right) & \to v \end{cases}$$

khi $t \to 1$. Do đó ta có

$$\begin{cases} 2\cos 2y(t) + e^{2x(t)} + e^{-2x(t)} & \to u^2 + v^2 \\ \cos 2y(t)\left(e^{2x(t)} + e^{-2x(t)}\right) & \to u^2 - v^2 - 2 \end{cases}.$$

Vì $u^2 + v^2 + 2 > e^{2x(t)} + e^{-2x(t)} \geq e^{2|x(t)|}$ nên ta có $x(t)$ bị chặn, vậy không mất tính tổng quát, ta có thể giả sử $y(t) \to +\infty$. Mặt khác, do biểu thức $\cos 2y(t)\left(e^{2x(t)} + e^{-2x(t)}\right)$ luôn cùng dấu với $\cos 2y(t)$ và $\cos 2y(t)$ không hội tụ khi $y(t) \to \infty$ nên chỉ có thể biểu thức này chỉ có thể hội tụ về 0, tức $u^2 - v^2 = 2$. Vậy ta có

$$|\cos 2y(t)| \leq \frac{1}{2}\left|\cos 2y(t)\left(e^{2x(t)} + e^{-2x(t)}\right)\right|$$

nên ta suy ra $\cos 2y(t) \to 0$ khi $t \to 1$. Điều này mâu thuẫn và chứng tỏ $\cos z$ không có bất cứ giá trị tiệm cận nào khác ngoài ∞.

Hoàn toàn tương tự, ta cũng chứng minh được ∞ là giá trị tiệm cận duy nhất của $\cos z$.

Bài 3.13. Cho f là hàm nguyên và α không nằm trong miền giá trị của f. Chứng minh rằng α là một giá trị tiệm cận của f nếu f không là hàm hằng

Giải. Xét $g(z) = \frac{1}{f(z)-\alpha}$, theo giả thiết của bài toán, ta có g là hàm nguyên khác hằng. Theo Bài 3.11., tồn tại hàm phức γ xác định trên $[0,1)$ sao cho

$$\lim_{t\to 1} \frac{1}{f(\gamma(t)) - \alpha} = \lim_{t\to 1} g(\gamma(t)) = \infty$$

do đó ta có

$$\lim_{t\to 1} f(\gamma(t)) - \alpha = 0,$$

tức α là một giá trị tiệm cận của f.

Bài 3.14. Cho Ω là một miền bị chặn, $f \in H(\Omega)$ và

$$\lim_{n\to\infty} \sup |f(z_n)| \leq M$$

với mọi dãy $\{z_n\}$ hội tụ về một điểm trên biên của Ω. Chứng minh rằng $|f(z)| \leq M$ với mọi $z \in \Omega$.

Giải. Nếu f không bị chặn trên Ω, với mọi $n > 0$, tồn tại $z_n \in \Omega$ sao cho $|f(z_n)| \geq n$. Vì $\overline{\Omega}$ là compact nên tồn tại dãy con $\{z_{n_k}\}$ hội tụ về một điểm z_0 trong $\overline{\Omega}$. Nếu z_0 là điểm trong của Ω, tính liên tục của f tại z_0 cho ta điều mâu thuẫn. Ngược lại, nếu z_0 là một điểm biên của Ω, ta có

$$M \geq \lim_{k\to\infty} \sup |f(z_{n_k})| = \infty,$$

điều này vô lý và chứng tỏ f phải bị chặn trên Ω. Vậy ta có thể gọi

$$B = \sup_{z\in\Omega} |f(z)| < \infty.$$

Nếu $B > M$, gọi $\{z_n\}$ là một dãy trong Ω thỏa mãn tính chất $|f(z_n)| > B - \frac{1}{n}$, ta tìm được một dãy con $\{z_{n_k}\}$ hội tụ trong $\overline{\Omega}$. Nếu $\{z_{n_k}\}$ hội tụ về một điểm z_0 thuộc

Ω, ta suy ra $|f(z_0)| = B$ nên $|f|$ đạt cực đại trong Ω và do đó f là hàm hằng. Lấy một dãy trong Ω tiến về biên, ta có $B \le M$ và do đó phát sinh mâu thuẫn.

Vậy dãy $\{z_{n_k}\}$ phải hội tụ về một điểm z_0 nằm trên biển của Ω, sử dụng giả thiết, ta suy ra

$$M \ge \limsup_{k\to\infty} |f(z_{n_k})| \ge B.$$

Mâu thuẫn lại phát sinh và kết thúc chứng minh.

Phần IV

Các đề thi Qualifying

Đề 1 (Stanford).

(a) Cho $f(z)$ một hàm số phức. Nếu cả $f(z)$ và $zf(z)$ đều điều hòa trong một miền Ω, chứng minh rằng f giải tích trong Ω

(b) Giả sử f giải tích với $|f(z)| < 1$ trong $|z| < 1$ và $f(\pm a) = 0$ với a là một số phức với $0 < |a| < 1$. Chứng minh rằng $f(0) \leq a^2$. Ta suy ra được gì nếu đẳng thức xảy ra.

(c) Xác định tất cả các hàm nguyên f thỏa $|f'(z)| < |f(z)|$

Giải.

(a) Đặt $f = u + iv$ với u, v là các hàm từ $\mathbb{C}$ vào $\mathbb{R}$. Ta có $\Delta f = \Delta u + i\Delta v$ nên ta suy ra u, v là các hàm điều hòa. Mặt khác, ta cũng có

$$zf(z) = [u(x,y)x - v(x,y)y] + i[v(x,y)x + u(x,y)y]$$

Do đó ta có $\Delta(ux - vy) = 0$ và $\Delta(vx + uy) = 0$. Phương trình đầu tiên cho ta $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$ trong khi phương trình thứ hai cho ta $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$. Vậy ta có f là hàm giải tích.

(b) Định nghĩa

$$F(z) = f(z) \cdot \frac{1 - \overline{a}z}{z - a} \cdot \frac{1 + \overline{a}z}{z + a}$$

Khi đó $F(z)$ giải tích trong $\{|z| < 1\}$. Nếu $|z| = 1$, ta có

$$\left| \frac{1 - \overline{a}z}{z - a} \cdot \frac{1 + \overline{a}z}{z + a} \right| = 1,$$

do đó

$$\lim_{|z| \to 1} |F(z)| \leq 1$$

Suy ra rằng $|F(z)| \leq 1$ với $|z| < 1$. Cho $z = 0$, ta thu được

$$|f(0)| \leq |a|^2$$

Nếu đẳng thức xảy ra, ta có $F(z) \equiv e^{i\theta}$, nghĩa là

$$f(z) = e^{i\theta} \cdot \frac{z-a}{1-\bar{a}z} \cdot \frac{z+a}{1+\bar{a}z}$$

(c) Do $|f'(z)| < |f(z)|$, ta biết rằng f không có không điểm trong $\mathbb{C}$, suy ra $\frac{f'(z)}{f(z)}$ cũng là hàm nguyên. Vì $\left|\frac{f'(z)}{f(z)}\right| < 1$ nên $\frac{f'(z)}{f(z)}$ đồng nhất với hằng số c thỏa $|c| < 1$. Từ đó ta có $f'(z) = cf(z)$, suy ra $f(z) = Ae^{cz}$, với c và A là hằng số và $|c| < 1$.

Đề 2 (Indiana). Cho hình vuông đóng đơn vị $Q = [0,1] \times [0,1] \subset \mathbb{C}$ và f là hàm giải tích trên một lân cận của Q. Giả sử rằng

$$\begin{aligned} f(z+1) - f(z) &\in \mathbb{R}^+ \quad \forall z \in [0,i] \\ f(z+i) - f(z) &\in \mathbb{R}^+ \quad \forall z \in [0,1] \end{aligned}$$

Chứng minh f là hàm hằng.

Giải. Ta chứng minh thật ra $f(z+1) = f(z+i) = f(z)$. Thật vậy, ta có

$$\begin{aligned} 0 &= \oint_{\partial Q} f(\zeta)\, d\zeta \\ &= \int_0^1 [f(\zeta) - f(\zeta+1)]\, d\zeta + \int_i^0 [f(\zeta) - f(\zeta+i)]\, d\zeta \end{aligned}$$

với các tích phân từ 0 đến 1 và từ i đến 0 được lấy trên đường thẳng. Do đó tích phân thứ nhất có dạng r và tích phân thứ hai có dạng si với $r, s \in \mathbb{R}^- \cup \{0\}$. Vậy ta suy ra $f(z) = f(z+1) = f(z+i)$.

Mở rộng f thành F như là một hàm tuần hoàn với chu kì là 1 và i, ta có F là hàm nguyên và bị chặn nên là hàm hằng. Mặt khác mọi các mở rộng f đều là duy nhất do Q có điểm tụ. Vậy ta suy ra f cũng là hàm hằng.

Đề 3 (Indiana). Cho f là hàm liên tục trên $\overline{S}$ với S là hình vuông đơn vị

$$S = \{z = x + iy \in \mathbb{C} : \ 0 < x < 1, \ 0 < y < 1\}$$

và f giải tích trên S. Giả sử $\mathrm{Re}\,(f) = 0$ trên $\overline{S} \cap (\{y = 0\} \cup \{y = 1\})$ và $\mathrm{Im}\,(f) = 0$ trên $\overline{S} \cap (\{x = 0\} \cup \{x = 1\})$, chứng minh rằng $f = 0$ trên toàn S.

Giải. Ý tưởng của ta là dùng Nguyên lý đối xứng Schwarz. Ta giả sử $|f|$ đạt giá trị lớn nhất tại điểm $z_0 \in [0, 1]$ (các trường hợp khác là tương tự khi ta xét các hàm $f\,(-z + i + 1)$ và $f\,(iz + 1)$). Khi đó ta có thể mở rộng f thành hàm $\hat{f} = \hat{u} + i\hat{v}$ trên Ω gồm S, $[0, 1]$ miền đối xứng với nó qua trục thực. Khi đó ta suy ra v đạt giá trị lớn nhất tại điểm z_0 nằm tại miền trong Ω. Do đó ta suy ra $v = 0$. Mặt khác $|f|$ đạt cực đại tại một điểm trên $[0, 1]$ nên ta suy ra $\max_{z \in \overline{S}} |u| \leq \max_{z \in \overline{S}} |v| = 0$. Bài toán được chứng minh.

Đề 4 (Courant Inst.). Cho $P\,(z)$ là một đa thức bậc d với những nghiệm đơn $z_1, z_2, \ldots, z_d$. Một biểu diễn của hàm phân thức riêng phần của $\frac{1}{P}$ có dạng sau:

$$\frac{1}{P\,(z)} = \sum_{n=1}^{d} \frac{c_n}{z - z_n} \tag{0.0.2}$$

(a) Biểu diễn c_n theo P

(b) Chứng minh rằng $\frac{1}{P(z)}$ biểu diễn được ở dạng (0.0.2)

(c) Chỉ ra công thức tương tự như (0.0.2) giải quyết được trường hợp $z_1 = z_2$ nhưng tất cả các nghiệm đều là nghiệm đơn.

Giải.

(a) Ta có

$$\lim_{z \to z_n} \frac{z - z_n}{P(z)} = c_n,$$

do đó $c_n = \frac{1}{P'(z_n)}$.

(b) Giả sử $P(z) = a \prod_{n=1}^{d} (z - z_n)$, ta có $P'(z_k) = a \prod_{n \neq k} (z_k - z_n)$. Ta cần chứng minh

$$\sum_{n=1}^{d} \frac{P(z)}{P'(z_n)(z - z_n)} = 1,$$

nghĩa là

$$\sum_{n=1}^{d} \frac{\prod_{h \neq n} (z - z_h)}{\prod_{h \neq n} (z_n - z_h)} = 1.$$

Điều này là đúng theo công thức nội suy Lagrange.

(c) Ta có $P(z) = a(z - z_1)^2 \prod_{n=3}^{d} (z - z_n)$, do z_1 là cực bậc 2 và z_n là cực bậc 1 với mọi $n \geq 3$ nên ta có khai triển

$$\frac{1}{P(z)} = \frac{A}{z - z_1} + \frac{B}{(z - z_1)^2} + \sum_{n=3}^{d} \frac{c_n}{(z - z_n)}.$$

Sử dụng các công thức tính thặng dư, ta được $A = \frac{-2P'''(z_1)}{3P''(z_1)^2}$ và $B = \frac{2}{P''(z_1)}$. Vậy nên

$$\frac{1}{P(z)} = \frac{-2P'''(z_1)}{3P''(z_1)^2 (z - z_1)} + \frac{2}{P''(z_1)(z - z_1)^2} + \sum_{n=3}^{d} \frac{1}{P'(z_n)(z - z_n)}.$$

Đề 5 (Indiana). Cho f là hàm chỉnh hình trên một lân cận của quả cầu đóng $\overline{D(0,1)}$ và có duy nhất một cực tại $z = a \in D$. Giả sử $f(\partial D) \subset \mathbb{R}$, chứng minh rằng tồn tại các hằng số $A \in \mathbb{C}$ và $B \in \mathbb{R}$ sao cho

$$f(z) = \frac{Az^2 + Bz + \overline{A}}{(z-a)(1-\overline{a}z)}.$$

Giải. Trước hết ta đưa bài toán về trường hợp $a = 0$ bằng cách đặt

$$g(z) = f\left(\frac{z+a}{1+\overline{a}z}\right),$$

ta có $g(\partial D) \subset \mathbb{R}$ và 0 là cực đơn của g. Khi đó tồn tại hằng số phức $\overline{A}$ và hàm $h \in H\left(\overline{D(0,1)}\right)$ sao cho

$$h(z) = g(z) - \frac{\overline{A}}{z},$$

khi đó ta có $h(z) + \overline{A}\overline{z} = h(z) + \frac{\overline{A}}{z} \in \mathbb{R}$ với mọi $|z| = 1$. Vậy nếu đặt

$$H(z) = h(z) - Az = h(z) + \overline{A}\overline{z} - \left(\overline{Az} + Az\right),$$

ta có $H \in H\left(\overline{D(0,1)}\right)$ và $H(z) \in \mathbb{R}$ với mọi $|z| = 1$. Vậy nếu $H = u + iv$, ta sẽ có $v(z) = 0$ trên $\partial D(0,1)$ nên $v(z) = 0$ với mọi $z \in \overline{D(0,1)}$, nghĩa là $H(z) = B$ trên $\overline{D(0,1)}$với B là hằng số thực. Vậy ta suy ra

$$g(z) = h(z) + \frac{\overline{A}}{z} = H(z) + Az + \frac{\overline{A}}{z} = Az + B + \frac{\overline{A}}{z}.$$

Đổi biến để tính f, ta được

$$\begin{aligned} f(z) &= g\left(\frac{z-a}{1-\overline{a}z}\right) = A\frac{z-a}{1-\overline{a}z} + B + \frac{\overline{A}(1-\overline{a}z)}{z-a} \\ &= \frac{A(z-a)^2 + B(z-a)(1-\overline{a}z) + \overline{A}(1-\overline{a}z)^2}{(z-a)(1-\overline{a}z)} \\ &= \frac{\left(A - B\overline{a} + \overline{A}\overline{a}^2\right)z^2 + \left(-2aA + 1 + |a|^2 B - 2\overline{a}\overline{A}\right)z + \left(\overline{A} - aB + a^2 A\right)}{(z-a)(1-\overline{a}z)} \end{aligned}$$

$$= \frac{\left(A - B\overline{a} + \overline{A}\overline{a}^2\right) z^2 + \left(-4\mathrm{Re}\,(aA) + 1 + |a|^2 B\right) z + \overline{\left(A - B\overline{a} + \overline{A}\overline{a}^2\right)}}{(z-a)(1-\overline{a}z)}$$

Đặt $\mathcal{A} = A - B\overline{a} + \overline{A}\overline{a}^2$ và $\mathcal{B} = -4\mathrm{Re}\,(aA) + 1 + |a|^2 B$, ta có $\mathcal{A} \in \mathbb{C}$ và $\mathcal{B} \in \mathbb{R}$, ta có

$$f(z) = \frac{\mathcal{A}z^2 + \mathcal{B}z + \overline{\mathcal{A}}}{(z-a)(1-\overline{a}z)}.$$

Bài toán được giải quyết.

Đề 6 (Indiana). Cho K_1, K_2,..., K_n là các dĩa tròn đóng rời nhau trong $\mathbb{C}$ và cho f là các hàm giải tích trong $\mathbb{C} \setminus \bigcup_{j=1}^n K_j$. Chứng minh rằng tồn tại các hàm f_1, f_2,..., f_n sao cho f_j giải tích trong $\mathbb{C} \setminus K_j$ và

$$f(z) = \sum_{j=1}^n f_j(z) \qquad \forall z \in \mathbb{C} \setminus \bigcup_{j=1}^n K_j.$$

Giải. với mọi $z \in \mathbb{C} \setminus K_j$, gọi $C_j(z)$ là đường tròn đồng tâm với K_j, chứa thực sự K_j nhưng không chứa z. và $C(z)$ là đường tròn tâm 0 với bán kính đủ lớn để chứ z và các K_j. Khi đó ta đặt

$$f_j(z) = \left[\frac{1}{n}\oint_C - \oint_{C_j}\right] \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta,$$

ta có f_j giải tích trên $\mathbb{C} \setminus K_j$ và như lập luận để hình thành chuỗi Laurent, f_j không phụ thuộc vào cách chọn C_j, C. Ta có

$$\sum_{j=1}^n f_j(z) = \left[\oint_C - \sum_{j=1}^n \oint_{C_j}\right] \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta = f(z).$$

Bài toán được giải quyết.

Đề 7 (Harvard). Cho $D \subset \mathbb{C}$ là phần bù đơn liên của tập đóng $\left\{e^{\theta+i\theta} : \theta \in \mathbb{R}\right\} \cup \{0\}$. Gọi $\log z$ là một nhánh của hàm logarithm trên D sao cho $\log e = 1$. Tính $\log e^{15}$.

Giải. Ta xây dựng nhánh của hàm logarithm này bằng tích phân sau:

$$\log z = \int_e^z \frac{d\zeta}{\zeta} + 1$$

với tích phân được lấy trên một đường bất kì trong D. Vì D liên thông nên tích phân này xác định duy nhất. Ta cần tính

$$1 + \int_e^{e^{15}} \frac{d\zeta}{\zeta}.$$

Lấy đường đi L_1 dọc theo hình xoắn ốc từ e đến e^{15} và L_2 là đường thẳng từ e^{15} đến e, ta có $L_1 + L_2$ là đường cong kin và chỉ số của đường này với 0 đúng bằng số giao điểm của L_1 với (e, ∞), cũng chính là giao điểm của đường xoắn ốc với trục thực nằm giữa e và e^{15}. Ta có $e^{\theta+i\theta} \in (e, e^{15})$ khi và chỉ khi

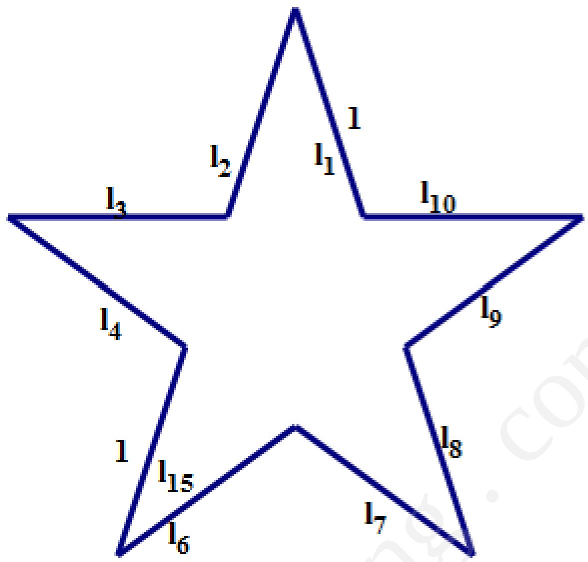
$$\begin{cases} \theta & \in (1, 15) \\ \theta & = k2\pi \end{cases},$$

tức $\theta = 2\pi$ hay $\theta = 4\pi$. Vậy $\mathrm{Ind}\,(L, 0) = 2$ và do đó

$$\left(\int_{L_1} + \int_{L_2}\right) \frac{d\zeta}{\zeta} = 2\pi i \mathrm{Res}\left(\frac{1}{z}, 0\right) = 4\pi i.$$

Vậy ta có

$$\begin{aligned} \log e^{15} &= 1 + \int_{L_1} \frac{d\zeta}{\zeta} \\ &= 1 + 4\pi i - \int_{L_2} \frac{d\zeta}{\zeta} \end{aligned}$$



Hình 0.0.1: Hình của Đề 8 (Stanford).

$$
\begin{aligned}
&= 1 + 4\pi i + \int_{e}^{e^{15}} \frac{dt}{t} \\
&= 15 + 4\pi i
\end{aligned}
$$

Đề 8 (Stanford). Xét hình sao năm cánh đều nhận gốc tọa độ làm tâm trong mặt phẳng phức. Cho u là một hàm điều hòa trong miền trong của hình sao năm cánh, bị nhận giá trị là 1 trên hai đoạn thẳng trong Hình 0.0.1 và 0 trên phần còn lại của biên. Giá trị của u ở tâm là gì? Chứng minh khẳng định của bạn.

Giải. Gọi l_i là các cạnh như hình vẽ.

Ta xét các hàm u_i điều hòa xác định duy nhất trên biên của hình ngôi sao như sau:

$$
\begin{aligned}
u_i(l_i) &= 1 \\
u_i(l_j) &= 0 \forall i \neq j
\end{aligned}
$$

Xét hình sao năm cánh đã cho, vì tính duy nhất của các u_i nên ta thấy rằng

$$\begin{aligned} u_1(z) &= u_3\left(e^{i\frac{2\pi}{5}}\right) = u_5\left(e^{i\cdot 2\cdot\frac{2\pi}{5}}\right) \\ &= u_7\left(e^{i\cdot 3\cdot\frac{2\pi}{5}}\right) = u_9\left(e^{i\cdot 4\cdot\frac{2\pi}{5}}\right) \\ u_2(z) &= u_4\left(e^{i\frac{2\pi}{5}}\right) = u_6\left(e^{i\cdot 2\cdot\frac{2\pi}{5}}\right) \\ &= u_8\left(e^{i\cdot 3\cdot\frac{2\pi}{5}}\right) = u_{10}\left(e^{i\cdot 4\cdot\frac{2\pi}{5}}\right) \end{aligned}$$

Suy ra

$$\begin{aligned} u_1(0) &= u_3(0) = \ldots = u_9(0) \\ u_2(0) &= u_4(0) = \ldots = u_{10}(0) \end{aligned}$$

Mà $u_1(-\overline{z}) = u_2(z)$ nên $u_1(0) = u_2(0)$. Do đó

$$u_1(0) = u_2(0) = \ldots = u_{10}(0).$$

Đặt $v = u_1 + u_2 + \ldots u_{10}$ thì v bằng 1 trên biên, do đó $v = 1$ tren toàn hình sao. Vậy $v(0) = 1$, suy ra $u_i(0) = \frac{1}{10}$ với mọi $i = \overline{1, 10}$.

Vậy

$$u(0) = u_1(0) + u_5(0) = \frac{1}{10} + \frac{1}{10} = \frac{1}{5}.$$

Đề 9 (Indiana). Cho γ là một cung của đường tròn đơn vị, u và v là các hàm điều hòa trên $D(0,1)$ và có đạo hàm liên tục trên $D \cup \gamma$. Chứng minh rằng nếu $u = v$ trên γ và $\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{\partial v}{\partial r}$ trên γ thì $u = v$ trên $D(0,1)$.

Giải. Ta nhận thấy rằng chỉ cần chứng minh nếu $u = 0$ và $\frac{\partial u}{\partial r} = 0$ trên γ thì $u = 0$ trên $D(0,1)$. Thật vậy, do D là miền đơn liên, tồn tại hàm điều hòa v và hàm giải tích $f = u + iv$. Hệ thức Cauchy-Riemann cho ta

$$r\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{\partial v}{\partial \theta},$$

Vì u có đạo hàm liên tục trên $D \cup \gamma$ (tức trên một lân cận mở của $D \cup \gamma$), ta suy ra v cũng có đạo hàm liên tục trên $D \cup \gamma$. Kết hợp với hệ thức trên, ta suy ra $\frac{\partial v}{\partial \theta} = 0$ trên γ, chứng tỏ v là hàm hằng trên γ. Vậy ta có thể chọn v liên hợp với u sao cho $v = 0$ trên γ.

Sử dụng Nguyên lý đối xứng Schwarz, ta có hàm F là mở rộng giải tích của f trên $\{z : |z| < 1\} \cup \gamma \cup \{z : |z| > 1\}$. Do tập các không điểm của F có điểm tụ nên ta suy ra $F \equiv 0$, chứng tỏ rằng $u = 0$ trên $D(0,1)$. Ta có điều phải chứng minh.

Đề 10 (Harvard).

(a) Cho f là hàm giải tích trên dĩa $|z| \le r$, có các không điểm lần lượt là a_1, a_2,..., a_n (đã tính cả bội). Giả sử rằng $|a_j| \le r$ với mọi $j = 1, 2, \ldots, n$ và $f(0) = 1$. Chứng minh công thức Jensen như sau

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log\left|f\left(re^{i\theta}\right)\right| d\theta = \sum_{j=1}^{n} \log\left(\frac{r}{|a_j|}\right).$$

(b) Với mọi t, ta gọi $n(t)$ là số nghiệm của f nằm trong $\overline{D(0,t)}$. Dùng công thức Jensen, hãy chứng minh rằng

$$\int_0^r n(t)\frac{dt}{t} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log\left|f\left(re^{i\theta}\right)\right| d\theta.$$

(c) Với $t < r$, hãy chặn $n(t)$ theo $\max\left\{\log\left|f\left(re^{i\theta}\right)\right| :\ 0 \le \theta \le 2\pi\right\}$.

(d) Ta có thể nói được gì về không điểm của các hàm giải tích và bị chặn trên dĩa tròn đơn vị?

Giải.

(a) Do các a_j là nghiệm, vậy nên ta có thể đặt

$$f(z) = \prod_{j=1}^{n} \frac{r(z - a_j)}{r^2 - \overline{a_j} z} F(z),$$

suy ra $F(z) \neq 0$ trong dĩa $|z| \leq r$ và $\left|f\left(re^{i\theta}\right)\right| = \left|F\left(re^{i\theta}\right)\right|$. Do đó ta có, theo công thức Poisson cho hàm điều hòa $\log|F|$ thì

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log\left|f\left(re^{i\theta}\right)\right| d\theta &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log\left|F\left(re^{i\theta}\right)\right| d\theta \\
&= \log|F(0)| \\
&= \log|f(0)| + \sum_{j=1}^{m} \log\left|\frac{r}{-a_j}\right| \\
&= \sum_{j=1}^{n} \log\left(\frac{r}{|a_j|}\right)
\end{aligned}$$

Ta có công thức Jensen.

(b) Ta có

$$n(t) = \sum_{j=1}^{n} \chi_{\overline{D(0,t)}}(a_j) = \sum_{j=1}^{n} \chi_{[|a_j|,r]}(t),$$

do đó

$$\begin{aligned}
\int_0^r n(t)\frac{dt}{t} &= \sum_{j=1}^{n} \int_0^r \chi_{[|a_j|,r]}(t)\frac{dt}{t} \\
&= \sum_{j=1}^{n} \int_{|a_j|}^r \frac{dt}{t} \\
&= \sum_{j=1}^{n} \log\left(\frac{r}{|a_j|}\right)
\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log\left|f\left(re^{i\theta}\right)\right|\,d\theta$$

Đẳng thức được chứng minh.

(c) Ta có

$$\begin{aligned}\max_{0\le\theta\le 2\pi}\left\{\log\left|f\left(re^{i\theta}\right)\right|\right\} &\ge \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log\left|f\left(re^{i\theta}\right)\right|\,d\theta\\ &= \int_0^r n(u)\frac{du}{u}\\ &\ge n(t)\int_t^r\frac{du}{u}\\ &= n(t)\ln\frac{r}{t}\end{aligned}$$

Vậy nên

$$n(t)\le\frac{\max_{0\le\theta\le 2\pi}\left\{\log\left|f\left(re^{i\theta}\right)\right|\right\}}{\ln\frac{r}{t}}.$$

(d) Với $f\in H(D(0,1))$ và bị chặn, ta giả sử 0 là nghiệm bậc N của f (với $N=0$ nếu 0 không thực sự là nghiệm). Khi đó ta đặt

$$g(z)=\frac{f(z)}{\alpha z^N}$$

với

$$\alpha^{-1}=\lim_{z\to 0}\frac{f(z)}{z^N}=\frac{f^{(N)}(0)}{N!},$$

thì $g\in H(D(0,1))$, $g(0)=1$ và các nghiệm khác 0 của f cũng là nghiệm khác 0 của g. Ta gọi các nghiệm này là $\{a_n\}$, do $\overline{D(0,1)}$ và tập $\{a_n\}$ không được có điểm tụ, ta suy ra $|a_n|\to 1$ khi $n\to\infty$. Khi đó công thức Jensen cho ta

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log\left|g\left(re^{i\theta}\right)\right|\,d\theta=\sum_{|a_j|\le r}\log\left(\frac{r}{|a_j|}\right),$$

trong đó tổng ở vế trái thực chất là tổng hữu hạn khi $r < 1$. Do

$$\log\left|g\left(re^{i\theta}\right)\right| = \log\left|\frac{f\left(re^{i\theta}\right)}{\alpha r^N e^{iN\theta}}\right| = \log\left|f\left(re^{i\theta}\right)\right| - \log\left|\alpha r^N\right|,$$

nên ta có

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log\left|f\left(re^{i\theta}\right)\right| d\theta = \sum_{|a_j|\le r}\log\left(\frac{r}{|a_j|}\right) + \log\left|\alpha r^N\right|.$$

Do f bị chặn nên ta suy ra hai vế của đẳng thức trên bị chặn khi r thay đổi, nhưng vì $\log\left|\alpha r^N\right|$ tăng khi r tăng, do đó với mọi $r_0 \in (0,1)$, tồn tại M để

$$\sum_{|a_j|\le r}\log\left(\frac{r}{|a_j|}\right) \le M \qquad \forall r \ge r_0.$$

Điều này thực ra cũng đúng với mọi $r \in (0,1)$ vì vế trái tăng theo r. Vậy ta được

$$\sum_{|a_j|\le r}\log\left(\frac{r}{|a_j|}\right) \le M \qquad \forall r \in (0,1).$$

Do $\log\left(\frac{r}{|a_j|}\right) \ge 0$ nên khi cho $r \to 1$, ta được sự hội tụ của chuỗi

$$\sum_j \log\left(\frac{1}{|a_j|}\right),$$

tức là các tổng và các tích

$$\sum_j \log|a_j|, \quad \prod_j |a_j|$$

hội tụ. Một hệ quả của sự hội tụ trên có thể kể đến như sau. Do hàm $x - \log x$ giảm trên $(0,1]$, ta suy ra

$$1 - \log 1 \le |a_j| - \log|a_j|,$$

suy ra $1 - |a_j| \leq \log\left(\frac{1}{|a_j|}\right)$, do cả 2 vế đều dương, ta suy ra chuỗi $\sum_j (1 - |a_j|)$ cũng hội tụ.

Đề 11 (Indiana). Cho $w = f(z)$ là song ánh bảo giác biến miền đơn liên G thành dĩa tròn $D(0, r)$ sao cho $f(a) = 0$ và $|f'(a)| = 1$ với điểm a thuộc G cho trước.

(a) Chứng minh rằng bán kính $r = r(G, a)$ chỉ phụ thuộc vào G và a.

(b) Tìm $r(G, a)$ nếu G là miền giới hạn bởi hyperbola $xy = 1$ với góc phần tư thứ nhất $(x > 0,\ y > 0)$ và $a = 1 + \frac{i}{2}$.

Giải.

(a) Giả sử tồn tại hai song ánh f_1, f_2 như đề bài, lần lượt biến G thành $D(0, r_1)$ và $D(0, r_2)$, ta gọi

$$F(z) = f_1\left(f_2^{-1}(z)\right) \quad \forall z \in D(0, r_2)$$

thì F là song ánh bảo giác biến $D(0, r_2)$ thành $D(0, r_1)$, giữ nguyên 0 và có

$$|F'(0)| = |f_1'(a)|\,|f_2'(a)|^{-1} = 1.$$

Với ý tưởng của bổ đề Schwarz, ta đặt $F(z) = zG(z)$, ta có $|G(z)| \leq \frac{r_1}{|z|}$. Vì $|G(z)|$ đạt cực đại trên biên nên $|G(z)| \leq \frac{r_1}{r_2}$. Vậy

$$1 = |F'(0)| = |G(0)| \leq \frac{r_1}{r_2}.$$

Vậy $r_1 \geq r_2$, chứng minh tương tự, ta có $r_2 \geq r_1$ và do đó $r(G, a)$ xác định duy nhất.

(b) Ta biến G thành dĩa tròn $D(0, 1)$ bằng cách ánh xạ sau:

- z^2 biến G thành $A_1 = \{z \in \mathbb{C} :\ 0 < \operatorname{Im}(z) < 2\}$, trong đó $1 + \frac{i}{2}$ thành $\frac{3}{4} + i$.

- $e^{\frac{\pi}{2}z}$ biến A_1 thành $A_2 = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im}(z) > 0\}$, trong đó $\frac{3}{4} + i$ thành $ie^{\frac{3\pi}{8}}$.
- $r\frac{z - ie^{\frac{3}{8}\pi}}{z + ie^{\frac{3}{8}\pi}}$ biến A_2 thành $D(0, r)$.

Đạo hàm tại $1 + \frac{i}{2}$ và $\frac{3}{4} + i$ của hai phép biến đổi đầu tiên có modulus lần lượt là $\sqrt{5}$ và $\frac{\pi}{2}e^{\frac{3}{8}\pi}$. Do đó để đạo hàm của hàm hợp nối tại $1 + \frac{i}{2}$ có modulus bằng 1, ta cần đạo hàm của ánh xạ thứ 3 có modulus bằng $\frac{2}{\sqrt{5}\pi e^{\frac{3}{8}\pi}}$, tức là

$$r(G, a) = \frac{4}{\sqrt{5}\pi}$$

Đề 12 (Indiana). Cho f là hàm giải tích trên dĩa tròn đơn vị, thỏa mãn $f(0) = 0$ và

$$|\operatorname{Re} f(z)| < 1 \quad \forall z \in D(0, 1).$$

Chứng minh rằng

$$|f'(0)| \leq \frac{4}{\pi}.$$

Giải. Ta tìm một hàm giải tích biến miền $A_1 = \{z \in \mathbb{C} : -1 < \operatorname{Re}(z) < 1\}$ thành dĩa tròn đơn vị, trong đó giữ nguyên điểm 0. Hàm này là hợp nối của các hàm sau:

- $i\frac{\pi}{2}z$ biến A_1 thành $A_2 = \left\{z \in \mathbb{C} : \frac{\pi}{2} < \operatorname{Im}(z) < \frac{\pi}{2}\right\}$, giữ nguyên 0.
- e^z biến A_2 thành $A_3 = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(z) > 0\}$ là nửa mặt phẳng bên phải, trong đó 0 thành 1.
- iz biến A_3 thành $A_4 = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im}(z) > 0\}$ là nửa mặt phẳng trên, trong đó 1 thành i.
- $\frac{iz+1}{z+i}$ biến A_4 thành dĩa tròn đơn vị $D(0, 1)$, trong đó i thành 0.

Do đó nếu gọi g là hợp nối của f và các hàm trên, ta có

$$g(z) = \frac{e^{i\frac{\pi}{2}f(z)} - 1}{e^{i\frac{\pi}{2}f(z)} + 1}i$$

biến $D(0,1)$ thành $D(0,1)$ và giữ nguyên 0, theo Bổ đề Schwarz, ta có

$$|g'(0)| \leq 1.$$

Khai triển bất đẳng thức này và sử dụng $f(0) = 0$, ta thu được

$$\left| \frac{-2i\left(i\frac{\pi}{2}f'(0)\right)}{-1(1+1)^2} \right| \leq 1,$$

tức là $|f'(0)| \leq \frac{4}{\pi}$. Ta có điều phải chứng minh.

Đề 13 (Idiana). Cho f là hàm giải tích trên $D(0,1)$ sao cho $f(0) = -1$ và giả sử

$$|1 + f(z)| < 1 + |f(z)| \quad \forall z \in D(0,1).$$

Chứng minh rằng $|f'(0)| \leq 4$.

Giải. Điều kiện đã cho tương đương với $f(z) \notin [0, +\infty)$ với mọi $z \in D(0,1)$. Gọi A_1 là miền thu được từ $\mathbb{C}$ khi bỏ đi $[0, +\infty)$. Ta đưa A_1 về $D(0,1)$ như sau:

- $\sqrt{-z}$ là đơn trị trên A_1 và biến A_1 thành $A_2 = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(z) > 0\}$ là nửa mặt phẳng bên phải, trong đó -1 thành 1.
- $\frac{z-1}{z+1}$ biến A_2 thành $D(0,1)$, trong đó 1 thành 0.

Vậy xét hàm $g(z) = \frac{\sqrt{-f(z)}-1}{\sqrt{-f(z)}+1}$, ta có $g(D(0,1)) \subset D(0,1)$ và g giữ nguyên 0. Do đó, theo bổ đề Schwarz, ta có $|g'(0)| \leq 1$ với

$$\begin{aligned} |g'(0)| &= \left| \frac{-2.\frac{1}{2\sqrt{-f(0)}}.(-f'(0))}{-\left(\sqrt{-f(0)}+1\right)^2} \right| \\ &= \left| \frac{f'(0)}{4} \right| = \frac{|f'(0)|}{4} \end{aligned}$$

Vậy nên $|f'(0)| \leq 4$.

Đề 14 (Minnesota). Cho P là tập các hàm f giải tích trên dĩa tròn đơn vị thỏa mãn

(i) Cả phần thực và phần ảo của f đều dương với mọi $|z| < 1$.

(ii) $f(0) = 1 + i$.

Đặt $E = \left\{ f\left(\frac{1}{2}\right) : \ f \in P \right\}$. Hãy tính cụ thể E.

Giải. Ta tìm ánh xạ biến phần tư mặt phẳng thứ nhất (gọi là A_1) thành dĩa tròn đơn vị bằng cách hợp nối các phép biến đổi sau:

- $\frac{z^2}{2}$ biến A_1 thành $A_2 = \{z \in \mathbb{C} : \ \mathrm{Im}(z) > 0\}$, trong đó $1 + i$ thành i.
- $\frac{iz+1}{z+i}$ biến A_2 thành $D(0, 1)$, trong đó i thành 0.

Vậy nếu gọi $g(z) = \frac{i\frac{z^2}{2}+1}{\frac{z^2}{2}+i} = \frac{iz^2+2}{z^2+2i}$, ta có $F = g \circ f$ bắn từ $D(0, 1)$ vào $D(0, 1)$, trong đó giữ nguyên 0. Từ bổ đề Schwarz, ta suy ra

$$\left| g\left(f\left(\frac{1}{2} \right) \right) \right| \leq \frac{1}{2},$$

nghĩa là $f\left(\frac{1}{2}\right) \in g^{-1}\left(\overline{D\left(0, \frac{1}{2}\right)}\right)$. Do với mọi $c \in \overline{D\left(0, \frac{1}{2}\right)}$, ta đều có hàm $F(z) = 2cz$ bắn từ $D(0, 1)$ vào $D(0, 1)$ và $F\left(\frac{1}{2}\right) = c$, do đó nếu chọn $f = g^{-1} \circ F$, ta có $f \in P$ và $f\left(\frac{1}{2}\right) = g^{-1}(c)$. Vậy nên

$$E = g^{-1}\left(\overline{D}\left(0, \frac{1}{2}\right)\right).$$

Bằng các tính toán trực tiếp, ta có

$$\begin{aligned} g^{-1}\left(\overline{D(0,1)}\right) &= \left\{\sqrt{z}:\ z\in \overline{D\left(\frac{10}{3}i,\frac{8}{3}\right)}\right\} \\ &= \left\{\sqrt{re^{i\theta}}:\ r^2-\frac{20}{3}r\sin\theta+4\le 0,\ \theta\in \overline{D\left(\frac{\pi}{2},\arcsin\frac{4}{5}\right)}\right\} \end{aligned}$$

Do đó, với mọi $\theta \in \overline{D\left(\frac{\pi}{4},\frac{1}{2}\arcsin\frac{4}{5}\right)}$, nếu ta đặt

$$\sigma_\theta = \left[\sqrt{\frac{10}{3}\sin 2\theta - \sqrt{\frac{100}{9}\sin^2 2\theta - 4}}, \sqrt{\frac{10}{3}\sin 2\theta + \sqrt{\frac{100}{9}\sin^2 2\theta - 4}}\right]$$

thì E được biểu diễn tường minh dưới dạng

$$\left\{re^{i\theta}:\ \theta\in\overline{D\left(\frac{\pi}{4},\frac{1}{2}\arcsin\frac{4}{5}\right)}, r\in\sigma_\theta\right\}.$$

Đề 15 (SUNY, Stony Brook). Cho D là nửa mặt phẳng trên và gọi f là ánh xạ bảo giác không đồng nhất biến D thành chính nó thỏa mãn $f\circ f=\mathrm{Id}$. Chứng minh rằng f có điểm cố định duy nhất trong D.

Giải. Ta có f phải là một phép biến đổi tuyến tính. Do đó nếu gọi $A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d\end{bmatrix}$ là ma trận biểu diễn của f thì ta có $A^2=\lambda I_2$ với $\lambda\ne 0$, a, b, c, d là các số thực với $ad-bc>0$, ta suy ra

$$\begin{cases} a^2+bc &= d^2+bc \\ b(a+d) &= 0 \\ c(a+d) &= 0 \end{cases}$$

Nếu $a+d\ne 0$, ta suy ra $b=c=0$ và do đó ta có $f(z)=z$ hay $f(z)=-z$. Cả hai hàm này đều bị loại. Nếu $a+d=0$, ta suy ra $d=-a$ và phương trình $f(z)=z$

tương đương với

$$cz^2 - 2az - b = 0$$

có $\Delta' = a^2 + bc = -(ad - bc) < 0$. Do đó phương trình có 2 nghiệm liên hợp $\alpha + i\beta$, $\alpha - i\beta$ và chỉ một trong số chúng nằm trong D. Bài toán được giải quyết.

Đề 16 (Indiana). Cho Ω là miền mở, lồi và $f \in H(\Omega)$ thỏa $\mathrm{Re} f'(z) > 0$ với mọi $z \in \Omega$. Chứng minh rằng f là đơn ánh.

Giải. Giả sử tồn tại a, b phân biệt sao cho $f(a) = f(b)$, ta có

$$\int_a^b f'(z)\, dz = 0$$

với tích phân lấy trên đường thẳng từ a đến b. Như vậy $(b-a)\int_0^1 f'(a + (b-a)t)\, dt = 0$. Vì $b - a \neq 0$ nên ta suy ra

$$0 = \int_0^1 f'(a + (b-a)t)\, dt = \int_0^1 \mathrm{Re}\left[f'(a + (b-a)t)\right] dt + i\int_0^1 \mathrm{Im}\left[f'(a + (b-a)t)\right] dt.$$

Điều này mâu thuẫn do $\mathrm{Re}\left[f'(a + (b-a)t)\right] > 0$ với mọi $t \in [0,1]$ và dẫn đến điều phải chứng minh.

Đề 17 (Courant Inst.). Cho $P(z)$ là đa thức trên mặt phẳng phức và không đồng nhất 0. Gọi $H = \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re} z > 0\}$ là nửa mặt phẳng bên phải.

(a) Chứng minh rằng nếu mọi nghiệm của P đều nằm trong H thì mọi nghiệm của P' cũng nằm trong H.

(b) Với mọi đa thức $P(z)$ không triệt tiêu, dùng kết quả câu (a) để chứng minh rằng bao lồi của các nghiệm của P cũng chứa các nghiệm của P'.

Giải. Xem định lý Lucas ở phần Lý thuyết.

Đề 18 (Stanford). Cho f là hàm giải tích trên dĩa tròn đơn vị thỏa mãn tính chất
$$|f'(z)| \leq (1-|z|)^{-1}.$$
Chứng minh rằng các hệ số trong khai triển Taylor
$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$
thỏa mãn tính chất $|a_n| < e$ với mọi $n \geq 1$.

Giải. Ước lượng Cauchy cho ta
$$\begin{aligned} \left|f^{(n+1)}(0)\right| &= \frac{n!}{2\pi i}\left|\oint_{|\zeta|=R} \frac{f'(\zeta)}{\zeta^{n+1}}\, d\zeta\right| \\ &\leq \frac{n! \max_{|\zeta|=R} |f(\zeta)|}{R^n} \\ &\leq \frac{n!}{R^n(1-R)} \end{aligned}$$
Vậy nên
$$|a_{n+1}| = \frac{\left|f^{(n+1)}(0)\right|}{(n+1)!} \leq \frac{1}{R^n(1-R)(n+1)} \quad \forall n \geq 0.$$
Mặt khác bất đẳng thức Cauchy cho ta
$$R^n(1-R) \leq n^n \left(\frac{1-R+\sum_{j=1}^{n} \frac{R}{n}}{n+1}\right)^{n+1} = \frac{n^n}{(n+1)^{n+1}}.$$
Do đó ta có
$$|a_{n+1}| \leq \left(\frac{n+1}{n}\right)^n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \quad \forall n \geq 0.$$

Vì dãy $\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ tăng về e nên ta suy ra $|a_n| \leq e$ với mọi $n \geq 1$.

Đề 19 (Stanford). Cho $f = u + iv$ là hàm nguyên.

(a) Chứng minh rằng nếu $u^2(z) \geq v^2(z)$ với mọi $z \in \mathbb{C}$ thì f phải là hàm hằng.

(b) Chứng minh rằng nếu $|f(z)| \leq A + B|z|^h$ với mọi $z \in \mathbb{C}$ $(A, B, h > 0)$ thì $f(z)$ là đa thức với bậc bị chặn bởi h.

Giải.

(a) Ta để ý rằng $u^2 - v^2$ chính là phần nguyên của $(u+iv)^2$, do đó nếu đặt $g(z) = f^2(z)$ thì g là hàm giải tích từ $\mathbb{C}$ vào nửa mặt phẳng bên phải $A_1 = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > 0\}$. Việc g không nhật các giá trị trên biên của A_1 là do g là ánh xạ mở. Ta đưa g thành một phép biến đổi đưa $\mathbb{C}$ vào $D(0,1)$ bằng cách hợp nối nó với các $\frac{z-1}{z+1}$, biến A_1 thành $D(0,1)$. Như vậy xét

$$h(z) = \frac{f^2(z) - 1}{f^2(z) + 1},$$

hàm này xác định và giải tích trên $\mathbb{C}$ nhưng có tập ảnh chứa trong $D(0,1)$, theo định lý Liouville, ta có h là hàm hằng. Do đó f^2 và f lần lượt cũng là hàm hằng. Ta có điều phải chứng minh.

(b) Với $N = \lfloor h \rfloor$ là phần nguyên của h, theo Ước lượng Cauchy, ta có

$$\begin{aligned}
\left|f^{(N+1)}(z)\right| &= \left|\frac{(N+1)!}{2\pi i} \oint_{\partial D(z,R)} \frac{f(\zeta)\, d\zeta}{(\zeta - z)^{N+2}}\right| \\
&\leq \frac{(N+1)!}{R^{N+1}} \left[A + B(|z| + R)^h\right]
\end{aligned}$$

Cho R dần về vô cùng, vế phải của bất đẳng thức trên tiến về 0, do đó ta có $f^{(N+1)}(z) = 0$ với mọi $z \in \mathbb{C}$. Ta có f là đa thức có bậc không quá N và do đó bậc của nó bị chặn bởi h.

Đề 20 (Indiana). Cho f là hàm nguyên thỏa mãn

$$|\mathrm{Re}(f(z))| \leq |z|^n \quad \forall z \in \mathbb{C}$$

với n là một số tự nhiên. Chứng minh rằng f là một đa thức có bậc không quá n.saq

Giải. Công thức Schwarz cho ta tính được f từ $u = \mathrm{Re}(f)$ như sau

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|\zeta|=R} \frac{\zeta + z}{\zeta - z} . \frac{u(\zeta)}{\zeta} d\zeta + iC$$

với $C = \mathrm{Im}(f(0))$. Do đó với mọi $R > |z|$, ta có

$$|f(z)| \leq C + \frac{R + |z|}{R - |z|} R^n$$

Chọn $R = 2|z| + 1$, ta có

$$|f(z)| \leq C + \frac{3|z| + 1}{|z| + 1} R^n \leq C + 4[2|z| + 1]^n .$$

Như vậy, f bị chặn bởi một hàm đa thức bậc n, do đó thực hiện tương tự như Đề 19 (Stanford)., ta có f là đa thức có bậc không quá n.

Đề 21 (Stanford, UCLA 2011F). Cho f là hàm giải tích trên $D(0,1) \setminus \{0\}$ và $f \in L^2$ đối với độ đo Lebesgue trên $\mathbb{R}^2$. Khi đó 0 có phải là điểm kì dị bỏ được của f hay không? Hãy chứng minh hoặc đưa ra phản ví dụ.

Giải. Ta chứng minh rằng khẳng định của đề bài là ĐÚNG. Thật vậy, xét chuỗi Laurent

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{-n}}{z^n} + g(z)$$

với g là hàm giải tích trên $D(0,1)$. Ta có

$$\begin{aligned} a_{-n} &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=r} f(z) z^{n-1} dz \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f\left(re^{i\theta}\right) \left(re^{i\theta}\right)^n d\theta \end{aligned}$$

Do đó với mọi $r \in [0,1]$, ta có

$$\frac{|a_{-n}|}{r^{n-1}} \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| f\left(re^{i\theta}\right) \right| r d\theta.$$

Lấy tích phân hai vế theo r, ta được

$$\int_0^1 \frac{|a_{-n}|}{r^{n-1}} dr \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^1 \left[\int_0^{2\pi} \left| f\left(re^{i\theta}\right) \right| r d\theta \right] dr = \frac{1}{2\pi} \iint_{D(0,1)} |f(x,y)| \, dxdy$$

Tích phân ở vế phải hội tụ do $L^2 \subset L^1$, nhưng tích phân $\int_0^1 \frac{|a_{-n}|}{r^{n-1}} dr$ chỉ hội tụ khi và chỉ khi $|a_{-n}| = 0$ hay $n = 1$. Vậy ta có $a_{-n} = 0$ với mọi $n \geq 1$. Vì g liên tục nên $g \in L^2$, ta suy ra $\frac{a_{-1}}{z}$ cũng thuộc L^2. Thử lại ta có

$$\begin{aligned} \iint_{D(0,1)} \frac{|a_{-1}|^2}{x^2+y^2} dxdy &= \iint_{[0,2\pi]\times[0,1]} \frac{|a_{-1}|^2}{r^2} r \, d\theta dr \\ &= \int_0^1 2\pi \frac{|a_{-1}|^2}{r} dr. \end{aligned}$$

Tích phân này hội tụ khi và chỉ khi $a_{-1} = 0$ nên ta suy ra 0 là điểm kì dị bỏ được của f.

Đề 22 (Minnesota).

(a) Cho C là đường tròn đơn vị và f là hàm liên tục trên C. Chứng minh rằng

$$F_f = \oint_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta$$

là hàm giải tích theo z trong $D(0,1)$.

(b) Tìm hàm f liên tục trên C không đồng nhất 0 sao cho hàm F_f tương ứng triệt tiêu trên $D(0,1)$.

Giải.

(a) Ta có hàm $\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}$ bị chặn trên $\zeta \in \overline{D(0,r)}$, do đó F_f giải tích trên $D(0,r)$ với mọi $r < 1$. Vậy ta có điều phải chứng minh

(b) Xét hàm $f(z) = z^{-1}$, ta có

$$\begin{aligned} F_f &= \oint_C \frac{1}{\zeta(\zeta - z)}\, d\zeta \\ &= \frac{1}{z}\oint_C \left(\frac{1}{\zeta - z} - \frac{1}{\zeta}\right) d\zeta \\ &= \frac{1}{z} 2\pi i \left[\operatorname{Ind}(C, z) - \operatorname{Ind}(C, 0)\right] = 0 \end{aligned}$$

Vậy hàm f này thỏa mãn yêu cầu đề bài.

Đề 23 (Indiana). Cho $a \in \mathbb{C}$, $|a| \le 1$ và xét đa thức

$$P(z) = \frac{a}{2} + \left(1 - |a|^2\right) z - \frac{\overline{a}}{2} z^2.$$

Chứng minh rằng $|P(z)| \le 1$ khi $|z| \le 1$.

Giải. Theo Nguyên lý modulus cực đại, ta chỉ cần chứng minh $|P(z)| \leq 1$ với mọi $|z| = 1$ là đủ. Thật vậy, với mọi $|z| = 1$, ta có

$$\begin{aligned}
|P(z)| &= \left|\frac{a}{2z} + \left(1 - |a|^2\right) - \frac{\overline{a}}{2}z\right| \\
&= \left|\frac{1}{2}(a\overline{z} - \overline{a}z) + \left(1 - |a|^2\right)\right| \\
&= \sqrt{\mathrm{Im}^2(a\overline{z}) + \left(1 - |a|^2\right)^2} \\
&\leq \sqrt{|a|^4 - |a^2| + 1} \leq 1
\end{aligned}$$

Ta có điều phải chứng minh.

Đề 24 (SUNY, Stony Brook). Cho f là hàm giải tích trên $D(0,1)$, liên tục trên $\overline{D(0,1)}$ thỏa mãn $|f(z)| = 1$ với mọi $|z| = 1$. Chứng minh f là hàm phân thức.

Giải. Một lời giải của bài toán này, sử dụng quy nạp, đã được trình bày ở phần Nguyên lý cực đại của chương Bài tập lý thuyết. Tuy nhiên ta vẫn có thể giải trực tiếp như sau. Gọi $\{z_k\}_{1\leq k\leq n}$ là các nghiệm trong $D(0,1)$ của f, số nghiệm này phải hữu hạn do $\overline{D(0,1)}$ là compact và $f \neq 0$ trên $\partial D(0,1)$. Xét hàm g xác định bởi

$$f(z) = g(z)\prod_{k=1}^{n}\frac{z - z_k}{1 - \overline{z_k}z},$$

ta có $|g(z)| = 1$ với mọi $|z| = 1$. Mặt khác g không có nghiệm trong $\overline{D(0,1)}$ nên có modulus đạt cực đại và cực tiểu trên biên. Vậy $|g(z)| = 1$ với mọi $z \in \overline{D(0,1)}$, tức $g(z) \equiv \lambda$ với λ là hằng số có modulus bằng 1. Vậy

$$f(z) = \lambda\prod_{k=1}^{n}\frac{z - z_k}{1 - \overline{z_k}z}$$

nên là hàm phân thức.

Đề 25 (Indiana). Cho f là hàm liên tục trên $\overline{D(0,1)}$ và giải tích trên $D(0,1)$. Giả sử $f = 1$ trên nửa đường tròn $\left\{e^{i\theta}: \theta \in [0,\pi]\right\}$, chứng minh rằng ta cũng có $f = 1$ trên $\overline{D(0,1)}$.

Giải.

Cách 1. Xét hàm $g(z) = [f(z) - 1][f(-z) - 1]$, ta có g liên tục trên $\overline{D(0,1)}$, giải tích trên $D(0,1)$ và triệt tiêu trên $\partial D(0,1)$. Do đó ta có $g \equiv 0$, chứng tỏ $f(z) = 1 \quad \forall z \in \overline{D(0,1)}$ hay $f(-z) = 1 \quad \forall z \in \overline{D(0,1)}$. Điều này có thể giải tích bằng việc trong 2 tập

$$A = \{z \in D(0,1): \; f(z) - 1 = 0\}, \; B = \{z \in D(0,1): \; f(-z) - 1 = 0\}$$

phải có một tập là không đếm được, từ đó ta áp dụng tính chất không điểm cô lập. Trong cả 2 trường hợp ta đều có $f \equiv 1$ trên $\overline{D(0,1)}$ do miền này đối xứng qua gốc tọa độ.

Cách 2. Ta sẽ giải quyết trường hợp tổng quát khi γ là một cung bất kỳ của đường tròn. Thật vậy, dùng nguyên lý đối xứng, ta mở rộng được f thành F giải tích trên $D(0,1) \cup \gamma \cup \{z \in \mathbb{C}: \; |z| > 1\}$. Mặt khác ta có $F = 1$ trên cung γ có vô hạn không đếm được điểm. Điều này chứng tỏ $F \equiv 1$ nên ta suy ra $f \equiv 1$ trên $\overline{D(0,1)}$. Ta có điều phải chứng minh.

Đề 26 (SUNY, Stony Brook). Cho S là phần góc trong mặt phẳng phức xác định bởi

$$S = \left\{z \in \mathbb{C}: \; -\frac{\pi}{4} < \arg z < \frac{\pi}{4}\right\}$$

và f là hàm liên tục trên $\overline{S}$, giải tích trên S thỏa tính chất

(i) $\quad |f(z)| \leq 1$ với mọi $z \in \partial S$.

(ii) $$|f(x+iy)| \le e^{\sqrt{x}} \text{ với mọi } x+iy \in S.$$

Chứng minh rằng $|f(z)| \le 1$ với mọi $z \in S$.

Giải. Với mọi $\varepsilon > 0$, xét hàm

$$g_\varepsilon(z) = f(z)\, e^{-\varepsilon z}$$

liên tục trên $\overline{S}$ và giải tích trên S, ta có

$$|g_\varepsilon(z)| \le e^{\sqrt{x}-\varepsilon x}.$$

Do đó với $x \ge M_\varepsilon$, ta có $|g_\varepsilon(z)| \le 1$. Xét miền $D = S \cap \{z = x+iy : \ x < M_\varepsilon\}$, ta có

$$|g_\varepsilon(z)| \le |f(z)| \le 1 \quad \forall z \in \partial S, \quad |g_\varepsilon(z)| \le 1 \quad \forall z = M_\varepsilon + iy.$$

Vậy nên theo Nguyên lý modulus cực đại, ta có $|g_\varepsilon(z)| \le 1$ trên $\overline{S}$, do đó

$$|f(z)| \le e^{\varepsilon z} \quad \forall z \in \overline{S}.$$

Cố định z và cho ε dần về 0 ta có điều phải chứng minh.

Đề 27 (Iowa). Giả sử f và g là các hàm giải tích khác hằng trên miền G, liên tục trên $\overline{G}$ và $\overline{G}$ là compact. Chứng minh rằng $|f| + |g|$ đạt giá trị lớn nhất tại biên của G.

Giải. Hiển nhiên $|f| + |g|$ có giá trị lớn nhất tại trên $\overline{G}$, ta giả sử rằng cực đại này đạt được tại điểm z_0 trong G. Gọi θ_1, θ_2 là các số thỏa

$$|f(z_0)| = e^{i\theta_1} f(z_0), \quad |g(z_0)| = e^{i\theta_2} g(z_0),$$

ta xét hàm $h(z) = e^{i\theta_1} f(z) + e^{i\theta_2} g(z)$. Hàm h giải tích trên G, liên tục trên $\overline{G}$ và thỏa tính chất

$$|h(z)| \leq |f(z)| + |g(z)| \leq \max_{z \in \overline{G}} \{|f(z)| + |g(z)|\} = h(z_0).$$

Điều này, theo Nguyên lý modulus cực đại, cho ta h là hằng trên $\overline{G}$ và chứng tỏ

$$|f(z) + g(z)| = |h(z)| = h(z_0) = |f(z)| + |g(z)|$$

nên tồn tại số thực dương λ sao cho $g(z) = \lambda f(z)$, tức $|g| = \lambda |f|$ với mọi $z \in \overline{G}$. Do đó f và g có modulus đạt giá trị lớn nhất tại cùng một điểm trên biên của G. Ta có điều phải chứng minh.

Đề 28 (Iowa). Cho f là hàm nguyên thỏa mãn

$$|f(z)| \leq \frac{1}{|\mathrm{Re} z|} \quad \forall z \in \mathbb{C}.$$

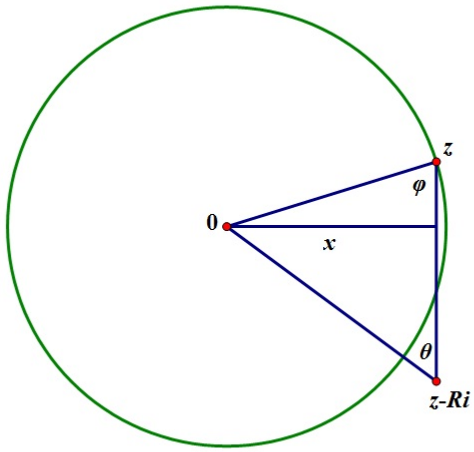
Chứng minh rằng f triệt tiêu trên toàn mặt phẳng.

Giải. Ta tìm cách khử $\frac{1}{x}$ để đưa ra ước lượng hiệu quả hơn (tại các điểm trên trục ảo). Với các điểm $|x + iy| = R$ có $x \neq 0$ và $y > 0$, xét Hình 0.0.2, ta có

$$\frac{|z - Ri|}{|x|} = \frac{1}{\sin\theta} = \frac{1}{\cos\frac{\varphi}{2}} \leq \sqrt{2} \qquad \forall |z| = R.$$

Điều này tất nhiên có thể chứng minh rõ ràng từ

$$\frac{|z - Ri|}{|x|} = \left|\frac{x + (y - R)i}{x}\right| \leq \sqrt{1 + \frac{\left(y - \sqrt{x^2 + y^2}\right)^2}{x^2}} = \sqrt{2 + \frac{2y(y - R)}{x^2}} \leq \sqrt{2}.$$



Hình 0.0.2: Quan hệ giữa x và $|z - Ri|$

Hoàn toàn tương tự, với nửa đường tròn dưới, ta cũng có $\frac{|z+Ri|}{|x|} \leq \sqrt{2}$. Vậy với mọi $z \in \partial D(0, R)$ có $\text{Re}z \neq 0$, ta đều được

$$\frac{|(z - Ri)(z + Ri)|}{|\text{Re}z|} \leq 2\sqrt{2}R.$$

Vậy với mọi $z \in \partial D(0, R)$, ta có

$$|(z - Ri)(z + Ri) f(z)| \leq 2\sqrt{2}R,$$

nên theo Nguyên lý Modulus cực đại thì

$$|f(z)| \leq \frac{2\sqrt{2}R}{|z^2 + R^2|} \leq \frac{2\sqrt{2}R}{R^2 - |z|^2} \quad \forall z \in D(0, R).$$

Cho R dần về vô cùng, ta có $f(z) = 0$ với mọi $z \in \mathbb{C}$.

Đề 29 (Indiana). Cho f là hàm giải tích trên $D(0,1) \setminus \{0\}$ và

$$|f(z)| \leq \ln \frac{1}{|z|}.$$

Chứng minh rằng $f \equiv 0$.

Giải. Ta có $|zf(z)| \leq |z| \ln \frac{1}{|z|}$ và

$$\lim_{z \to 0} \left(|z| \ln \frac{1}{|z|} \right) = 0,$$

do đó 0 là điểm kỳ dị bỏ được của f. Vậy ta mở rộng f thành hàm F giải tích trên $D(0,1)$. Theo nguyên lý modulus cực đại, với mọi $|z|$ và $r > |z|$ ta có

$$|F(z)| \leq \max \left\{ \left| F\left(re^{i\theta}\right) \right| : \ \theta \in [0, 2\pi] \right\} \leq \ln \frac{1}{r}$$

Cho $r \to 1$, ta được $F \equiv 0$ và do đó có điều phải chứng minh.

Đề 30 (Indiana). Cho f là hàm giải tích từ $D(0,1)$ vào $D(0,1)$ thỏa $f(0) = 0$.

(a) Chứng minh rằng $|f(z) + f(-z)| \leq 2|z|^2$ với mọi $z \in D(0,1)$ và nếu đẳng thức xảy ra tại một điểm khác 0 trong $D(0,1)$ thì ta phải có $f(z) = e^{i\alpha} z^2$.

(b) Chứng minh rằng

$$\left| \int_{-1}^{1} f(x)\, dx \right| \leq \frac{2}{3}$$

Giải.

(a) Theo Bổ đề Schwarz, ta có $f(z) = zg(z)$ với $|g(z)| \leq 1$ trên $D(0,1)$. Do đó bất đẳng thức đã cho tương đương với

$$|g(z) - g(-z)| \leq 2|z|.$$

Đặt $h(z) = g(z) - g(-z)$, ta có h là hàm giải tích từ $D(0,1)$ vào $D(0,2)$ thỏa $h(0) = 0$, do đó ta suy ra

$$|h(z)| \leq 2|z|,$$

và nếu dấu bằng xảy ra tại một điểm khác 0 thì sẽ tồn tại số phức λ có modulus bằng 1 sao cho $h(z) = 2\lambda z$, nghĩa là

$$g(z) - g(-z) = 2\lambda z.$$

Mặt khác, đẳng thức hình bình hành cho ta

$$|g(z) + g(-z)|^2 + |g(z) - g(-z)|^2 = 2\left(|g(z)|^2 + |g(-z)|^2\right) \leq 4.$$

Do đó ta suy ra $|g(z) + g(-z)| \leq 2\sqrt{\left(1 - |z|^2\right)}$, dẫn đến bất đẳng thức

$$\begin{aligned} |g(z) - \lambda z| &\leq \frac{1}{2}|2g(z) - (g(z) - g(-z))| \\ &= \frac{1}{2}|g(z) + g(-z)| \\ &\leq 2\sqrt{1 - |z|^2} \end{aligned}$$

Vậy theo Nguyên lý modulus cực đại, ta có

$$|g(z) - \lambda z| \leq 2\sqrt{1 - R^2} \quad \forall R \geq |z|.$$

Cố định z và cho R tiến dần đến 1, ta có $g(z) = \lambda z$ và do đó

$$f(z) = \lambda z^2 = e^{i\alpha} z^2.$$

(b) Theo câu (a) ta có $|f(x) + f(-x)| \leq 2x^2$ với mọi $x \in (-1, 1)$ nên

$$\left|\int_{-1}^{1} f(x)\, dx\right| = \frac{1}{2}\left|\int_{-1}^{1} [f(x) + f(-x)]\, dx\right|$$

$$\leq \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} 2x^2 dx \leq \frac{2}{3}$$

Bất đẳng thức được chứng minh.

Đề 31 (Rutgers). Giả sử f là hàm giải tích và $|f(z)| < 1$ trên $\overline{D(0,1)}$, chứng minh rằng f có đúng một điểm bất động.

Giải. Xét hàm $g = f(z) - z$, ta có

$$|g(z) - (-z)| = |f(z)| < 1 = |z|$$

trên $\partial D(0,1)$, do đó Định lý Rouche cho ta số nghiệm của g đúng bằng số nghiệm của hàm $-\mathrm{Id}$ trên $D(0,1)$. Do đó f có đúng một điểm bất động trong $D(0,1)$. Nhận thấy f không có điểm bất động tại biên, ta suy ra điều phải chứng minh.

Đề 32 (Iowa). Cho f là hàm giải tích trên một lân cần của $\overline{D(0,1)}$ thỏa mãn f khác 0 trên $C = \partial D(0,1)$. Giả sử rằng

(i) $$\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f'(z)}{f(z)} dz = 2.$$

(ii) $$\frac{1}{2\pi i}\oint_C z\frac{f'(z)}{f(z)} dz = 0.$$

(iii) $$\frac{1}{2\pi i}\oint_C z^2\frac{f'(z)}{f(z)} dz = \frac{1}{2}.$$

Hãy tìm tọa độ các nghiệm của f trong $D(0,1)$.

Giải. Ta nhắc lại công thức

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_C g(z)\frac{f'(z)}{f(z)} dz = \sum_{f(\alpha_j)=0} g(\alpha_j).$$

Theo công thức trên, ta suy ra f có 2 nghiệm α_1 và α_2 trong $D(0,1)$ thỏa mãn

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 & = 0 \\ \alpha_1^2 + \alpha_2^2 & = \frac{1}{2} \end{cases},$$

từ đó ta được

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 & = 0 \\ \alpha_1 \alpha_2 & = -\frac{1}{4} \end{cases}$$

Vậy theo định lý Viete, f có 2 nghiệm trong $D(0,1)$ là $\pm\frac{1}{2}$.

Đề 33 (Indiana - Purdue).

(a) Có bao nhiêu nghiệm của phương trình

$$z^4 + z + 5 = 0 \tag{0.0.3}$$

nằm trong phần tư mặt phẳng thứ nhất.

(b) Có bao nhiêu nghiệm của phương trình trên miền các điểm có argument nằm giữa $\frac{\pi}{4}$ và $\frac{\pi}{2}$.

Giải.

(a) Với D là phần đường tròn tâm 0 bán kính $R \geq 2$ trong góc phần tư thứ nhất, ta sẽ chứng minh

$$\left|\left(z^4 + z + 5\right) - \left(z^4 + 5\right)\right| = |z| < \left|z^4 + 5\right| \quad \forall z \in \partial D$$

Thật vậy, với $|z| \geq 2$, ta có $|z^4+5| \geq |z|^4 - 5 > \frac{|z|^4}{2} + 3 > 8|z| > |z|$. Mặt khác, trên phần dương của 2 trục, bất đẳng thức chính là

$$|z| < |z|^4 + 5,$$

hiển nhiên đúng vì $|z|^4 + 3 \geq 4|z|$ theo bất đẳng thức Cauchy. Vậy ta có được

$$\left|\left(z^4+z+5\right) - \left(z^4+5\right)\right| < \left|z^4+5\right| \quad \forall z \in \partial D$$

nên với R đủ lớn, ta có số nghiệm của (0.0.2) trong D cũng chính là số nghiệm của phương trình $z^4+5=0$ trong D. Phương trình (0.0.3) có đúng một nghiệm trong góc phần tư thứ nhất.

(b) Gọi D^+ là miền gồm các điểm trong D có argument nằm trong khoảng từ $\frac{\pi}{4}$ đến $\frac{\pi}{2}$, ta sẽ chứng minh bất đẳng thức

$$\left|\left(z^4+z+5\right) - \left(z^4+cz+5\right)\right| = (c-1)|z| < \left|z^4+5\right| - |z| \leq \left|z^4+z+5\right|$$

với mọi $z \in \partial D^+$ và $c \in [1,4]$. Thật vậy, với mọi điểm trên biên của D, ở trên ta đã có

$$\left|z^4+5\right| > 4|z| \geq c|z|,$$

do đó ta chỉ cần chứng minh bất đẳng thức trên tia $\left\{z \in \mathbb{C}:\ \arg z = \frac{\pi}{4}\right\}$, nghĩa là

$$\left|\left(\lambda e^{i\frac{\pi}{4}}\right)^4 + 5\right| > 4\lambda \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}^+.$$

Điều này tương đương với $\sqrt{\lambda^8+25} > 4\lambda$ và đúng do theo bất đẳng thức Cauchy thì

$$\lambda^8 + 25 = \lambda^8 + 16 + 9 > 8\left(\lambda^4+1\right) \geq 16\lambda^2.$$

Vậy số nghiệm của (0.0.3) trong D^+ cũng chính bằng số nghiệm của các phương trình

$$z^4 + cz + 5 = 0 \tag{0.0.4}$$

trong D^+ với $c \in [0, 4]$. Chọn $c = \frac{4}{3}\sqrt{\frac{14}{3}}$, phương trình (0.0.4) tương đương với

$$z^4 + \frac{14}{3}z^2 + \frac{49}{9} = \frac{14}{3}z^2 - \frac{4}{3}\sqrt{\frac{14}{3}}z + \frac{4}{9},$$

hay

$$\left(z^2 + \frac{7}{3}\right)^2 = \left(\sqrt{\frac{14}{3}}z - \frac{2}{3}\right)^2.$$

Các nghiệm của phương trình này là $\frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{14}{3}} \pm i\sqrt{\frac{22}{3}}\right)$ và $\frac{1}{2}\left(-\sqrt{\frac{14}{3}} \pm i\sqrt{2}\right)$ và có đúng một nghiệm là $\frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{14}{3}} + i\sqrt{\frac{22}{3}}\right)$ nằm trong D^+. Vậy phương trình (0.0.3) có đúng một nghiệm trong miền các điểm có argument giữa $\frac{\pi}{4}$ và $\frac{\pi}{2}$.

Đề 34 (Courant Inst.). Xét hàm

$$f(z) = 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2!z^2} + \cdots + \frac{1}{n!z^n}$$

(a) Tích phân sau đếm đại lượng gì?

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{|z|=r} \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz$$

(b) Cố định r và cho n dần về vô cùng, khi đó tích phân trên như thế nào?

(c) Điều này cho ta biết được gì về các nghiệm của $f(z)$ khi n lớn?

Giải.

(a) Đặt $\zeta = \frac{1}{z}$ và

$$F_n(\zeta) = f(z) = 1 + \zeta + \frac{1}{2}\zeta^2 + \cdots + \frac{1}{n!}\zeta^n.$$

Ta có

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{|z|=r} \frac{f'(z)}{f(z)}\, dz = -\frac{1}{2\pi i}\oint_{|\zeta|=r^{-1}} \frac{F_n'(\zeta)\frac{d\zeta}{dz}}{F_n(\zeta)}\, dz = -\frac{1}{2\pi i}\oint_{|\zeta|=r^{-1}} \frac{F_n'(\zeta)}{F_n(\zeta)}\, d\zeta.$$

Vậy tích phân đã cho chính là đối của số nghiệm của $F(\zeta)$ trong dĩa tròn bán kính r^{-1}, cũng chính là đối của số nghiệm của $f(z)$ bên ngoài dĩa tròn $\overline{D(z,r)}$.

(b) Ta có

$$\frac{F_n'(\zeta)}{F_n(\zeta)} = \frac{F_n(\zeta) - \frac{1}{n!}\zeta^n}{F_n(\zeta)} = 1 - \frac{\zeta^n}{n!F_n(\zeta)}$$

Do F_n hội tụ đều về exp trên $\overline{D(0,r^{-1})}$ nên ta có

$$\left|\frac{\zeta^n}{F_n(\zeta)}\right| \rightrightarrows \frac{r^{-n}}{e^\zeta} \quad \text{trên } |\zeta| = r^{-1}.$$

Vậy với $\varepsilon > 0$ cố định, với n đủ lớn ta có

$$\left|\frac{\zeta^n}{n!F_n(\zeta)}\right| \leq \frac{r^{-n}}{n!\left(\max_{|\zeta|=r} e^z + \varepsilon\right)}$$

nên $\left|\frac{\zeta^n}{n!F_n(\zeta)}\right|$ hội tụ đều về 0. Vậy ta có

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{|z|=r} \frac{f'(z)}{f(z)}\, dz = -\frac{1}{2\pi i}\oint_{|\zeta|=r^{-1}} \left[1 - \frac{\zeta^n}{n!F_n(\zeta)}\right] d\zeta \to -\frac{1}{2\pi i}\oint_{|\zeta|=r^{-1}} d\zeta = 0,$$

tức là tích phân dần về 0 khi n dần về vô cùng.

(c) Điều này cho ta thấy với mọi $r > 0$, tồn tại $N_r \in \mathbb{N}$ đủ lớn để với mọi $n > N_r$ thì hàm f (với n tương ứng) không có nghiệm ngoài $D(0, r)$, nói cách khác khi n càng lớn thì n nghiệm của f càng gần 0.

Đề 35 (Courant Inst.).

(a) Giả sử $f(z)$ là hàm giải tích trên $\overline{D(0, R)}$ và phương trình $f(z) = w$ có đúng một nghiệm z_1 trong $D(0, 1)$ và nghiệm này đơn. Chứng minh rằng ta có công thức

$$z_1 = \oint_{|z|=R} \frac{zf'(z)}{f(z) - w} \, dz.$$

(b) Chứng minh rằng với số nguyên n đủ lớn, phương trình

$$z = 1 + \left(\frac{z}{2}\right)^n$$

có duy nhất một nghiệm trong $D(0, 2)$.

(c) Chứng minh rằng nếu gọi z_n là nghiệm trong câu (b) thì ta có

$$\lim_{n \to \infty} (z_n - 1)^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{2}.$$

Giải.

(a) Công thức này được suy ra trực tiếp từ đẳng thức

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_C g(z) \frac{f'(z)}{f(z)} \, dz = \sum_{f(\alpha_j)=0} g(\alpha_j)$$

khi thế $g = \mathrm{Id}$.

(b) Xét $f(z) = z - 1 - \left(\frac{z}{2}\right)^n$ giải tích trong $\overline{D(0,2)}$, ta có

$$|f(z) - z| = \left|1 - \left(\frac{z}{2}\right)^n\right| < 1 + \frac{|z|^n}{2^n}.$$

Với mọi $n > 2$, ta sẽ chứng minh $1 + \frac{|z|^n}{2^n} < |z|$ trong $\partial D(0, 2-\varepsilon)$ với mọi ε đủ nhỏ, tức là $1 + \left(1 - \frac{\varepsilon}{2}\right)^n < 2 - \varepsilon$, hay

$$g(\varepsilon) = \left(1 - \frac{\varepsilon}{2}\right)^n + \varepsilon - 1 < 0.$$

Ta có $g'(\varepsilon) = -\frac{n}{2}\left(1 - \frac{\varepsilon}{2}\right)^{n-1} + 1 < 0$ với mọi $\varepsilon < \delta_n$, δ_n là nghiệm thực duy nhất trong $(0,1)$ của phương trình $\frac{n}{2}\left(1 - \frac{\varepsilon}{2}\right)^{n-1} = 1$. Do đó ta có $g(\varepsilon) < g(0)$, tức là

$$|f(z) - z| < |z| \quad \forall z \in \partial D(0, 2-\varepsilon)$$

với mọi $\varepsilon < \delta_n$. Cho ε dần về 0, ta được số nghiệm của f cũng chính bằng số nghiệm của Id trong $D(0,2)$, nghĩa là phương trình đã cho có nghiệm duy nhất với $|z| < 2$.

(c) Ta chứng minh nghiệm z_n này là thực. Thật vậy, ta có $f(1) = -\left(\frac{1}{2}\right)^n < 0$ trong khi $f\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{2} - \left(\frac{3}{4}\right)^n > 0$ với $n \geq 3$. Do vậy f có nghiệm duy nhất $z_n \in \left[1, \frac{3}{2}\right] \subset \mathbb{R}$. Khi đó ta có $z_n = 1 + \frac{z_n^n}{2^n}$ nên

$$\lim_{n\to\infty} (z_n - 1)^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{z_n}{2} = \frac{1}{2} \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{z_n^n}{2^n}\right).$$

Nhưng do $\left|\frac{z_n}{2}\right| \leq \frac{3}{4}$ nên ta suy ra giới hạn ở vế phải là $\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{z_n^n}{2^n}\right) = \frac{1}{2}$. Ta có điều phải chứng minh.

Đề 36 (Indiana). Cho

$$\Omega = D(0,1) \setminus \left\{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right\}.$$

Tìm tất cả các hàm $f:\ \Omega \to \Omega$ thỏa mãn tính chất: Nếu γ là một chu trình không đồng đều với 0 thì $f(\gamma)$ cũng là một chu trình không đồng đều với 0 (mod Ω).

Giải. Do f giải tích trên Ω và bị chặn bởi 1 nên ta có $\pm\frac{1}{2}$ là các điểm kỳ dị bỏ được của f. Vậy ta có thể xem f như là hàm giải tích từ $D(0,1)$ vào $\overline{D(0,1)}$.

Đầu tiên ta chứng minh $\left\{f\left(-\frac{1}{2}\right), f\left(\frac{1}{2}\right)\right\} \subset \left\{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right\}$. Thật vậy, không mất tính tổng quát, ta giả sử có $f\left(\frac{1}{2}\right) = \alpha \notin \left\{\pm\frac{1}{2}\right\}$, ta xét

$$\gamma_j = \left\{\frac{(-1)^j}{2} + \varepsilon e^{i\theta}:\ 0 \le \theta \le 2\pi\right\} \quad \forall j = \overline{1,2},$$

là các đường tròn bán kính ε với định hướng dương, ta có $\gamma \not\sim 0$ vì $\operatorname{Ind}\left(\gamma_2, \frac{1}{2}\right) = 1$ nhưng do f liên tục đều trên $\overline{D\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)}$ nên $|f(\gamma_2) - \{\alpha\}| \to 0$ khi $\varepsilon \to 0$, do đó $\operatorname{Ind}\left(f(\gamma_2), \pm\frac{1}{2}\right) = 0$. Ta có ngay điều mâu thuẫn.

Giờ ta chứng minh rằng $f\left(-\frac{1}{2}\right) \neq f\left(\frac{1}{2}\right)$, nghĩa là $\left\{f\left(-\frac{1}{2}\right), f\left(\frac{1}{2}\right)\right\} = \left\{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right\}$. Thật vậy, không mất tính tổng quát, ta giả sử

$$f\left(-\frac{1}{2}\right) = f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2},$$

ta có thể viết f dưới dạng

$$f(z) = \frac{1}{2} + \left(z - \frac{1}{2}\right)^m \left(z + \frac{1}{2}\right)^n g(z)$$

với $g(z)$ vô nghiệm trên các lân cận đủ nhỏ của $-\frac{1}{2}$ và $\frac{1}{2}$. Với mọi γ, ta có

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma \frac{f'(z)}{f(z) - \frac{1}{2}}\,dz = \frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma \left[\frac{m}{z - \frac{1}{2}} + \frac{n}{z + \frac{1}{2}} + \frac{g'(z)}{g(z)}\right] dz.$$

Vậy nếu chọn $\gamma = m\gamma_1 - n\gamma_2$ với ε đủ nhỏ, ta sẽ có $g \neq 0$ trên các đường tròn bán kính ε tâm $\pm\frac{1}{2}$ và $f(\gamma)$ đủ gần $\frac{1}{2}$ để $\mathrm{Ind}\left(f(\gamma), -\frac{1}{2}\right) = 0$. Khi đó

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma}\left[\frac{m}{z-\frac{1}{2}}+\frac{n}{z+\frac{1}{2}}+\frac{g'(z)}{g(z)}\right]dz &= \frac{1}{2\pi i}\left(m\oint_{\gamma_1} - n\oint_{\gamma_2}\right)\left[\frac{m}{z-\frac{1}{2}}+\frac{n}{z+\frac{1}{2}}\right]dz \\
&= \frac{1}{2\pi i}\left[m\oint_{\gamma_1}\frac{n}{z+\frac{1}{2}}dz - n\oint_{\gamma_1}\frac{m}{z-\frac{1}{2}}dz\right] \\
&= 0
\end{aligned}$$

Do đó ta được $f(\gamma) \sim 0$ dù $\gamma \not\sim 0$ và điều này chứng tỏ $f\left(\frac{1}{2}\right) \neq f\left(-\frac{1}{2}\right)$.

Ta xét trường hợp $f\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2}$ và $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$. Khi đó, gọi F là hàm số xác định bởi

$$F = \frac{f(z)-\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}f(z)} : \frac{z-\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}z},$$

ta có F giải tích (thực chất là có mở rộng giải tích) trên $D(0,1)$,$|F(z)| \leq 1$ và $F\left(-\frac{1}{2}\right) = 1$. Theo Nguyên lý modulus cực đại, ta có $F \equiv 1$, suy ra

$$\frac{f(z)-\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}f(z)} = \frac{z-\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}z}$$

nên ta có $f(z) \equiv z$.

Trong trường hợp $f\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$ và $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{-1}{2}$, áp dụng kết quả trên cho hàm $-f$, ta có được $f(z) \equiv -z$. Vậy các hàm thỏa mãn đề bài chỉ gồm hàm Id_{Ω} và$-\mathrm{Id}_{\Omega}$.

Đề 37 (Indiana). Cho chuỗi lũy thừa

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

có bán kính hội tụ là r. Gọi f là giới hạn của chuỗi trên, ta giả sử f chỉnh hình trên $\overline{D(0,r)}$ và chỉ có duy nhất cực đơn tại z_0 thỏa $|z_0| = r$. Chứng minh rằng

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = z_0.$$

Giải. Gọi $A \neq 0$ là thặng dư của f tại z_0, ta có hàm F xác định bởi

$$F(z) = f(z) - \frac{A}{z - z_0}$$

giải tích trên $\overline{D(0,1)}$. Do chuỗi Taylor của F tại 0 là duy nhất, ta tính được các hệ số của nó như sau

$$\begin{aligned} F(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n - \frac{A}{z - z_0} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n - \frac{\frac{A}{z_0}}{1 - \frac{z}{z_0}} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(a_n - \frac{A}{z_0^{n+1}}\right) z^n \end{aligned}$$

vì chuỗi này hội tụ tại z_0 nên ta phải có

$$\lim_{n\to\infty} \left(a_n - \frac{A}{z_0^{n+1}}\right) z_0^n = 0,$$

nghĩa là

$$\lim_{n\to\infty} a_n z_0^{n+1} = A,$$

do đó

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = z_0 \lim_{n\to\infty} \frac{a_n z_0^{n+1}}{a_{n+1} z_0^{n+2}} = z_0.$$

Ta có điều phải chứng minh.

Đề 38 (Indiana - Purdue). Cho f là hàm giải tích trên $D(0,1)$ thỏa mãn $f(0) = 0$ và $|f(z)| < 1$ với mọi $z \in D(0,1)$. Xét dãy hàm $\{f_n\}$ có được bởi việc liên tiếp hợp nối các hàm f như sau

$$f_n(z) = \underbrace{f(f(\dots f(z)))}_{n \text{ lần hàm } f}$$

và $f_n(z) \to g(z)$ với mọi $z \in D(0,1)$. Chứng minh rằng $g = 0$ hoặc $g(z) = \mathrm{Id}$.

Giải. Theo bổ đề Schwarz, tồn tại hàm h thỏa mãn $|h| \leq 1$ trên $D(0,1)$ và ta viết được f dưới dạng

$$f(z) = zh(z).$$

Nếu tồn tại z_0 khác 0 trong $D(0,1)$ để $|h(z_0)| = 1$, khi đó ta có $f(z) = \lambda z$ với $|\lambda| = 1$. Do vậy $f_n(z) = \lambda^n z$, hội tụ khi và chỉ khi

$$\lambda = \lim_{n\to\infty} \frac{\lambda^{n+1}}{\lambda^n} = \frac{\lim_{n\to\infty} \lambda^{n+1}}{\lim_{n\to\infty} \lambda^n} = 1.$$

Vậy ta có $g(z) = \mathrm{Id}$. Trong trường hợp ngược lại, tức $|h(z)| < 1$ với mọi $z \in D(0,1) \setminus \{0\}$, vì hàm này không thể có modulus cực đại tại điểm trong 0, ta cũng có $|h(z)| < 1$ với mọi $z \in D(0,1)$. Do vậy, cố định $R \in (0,1)$, tồn tại $\lambda_R \in (0,1)$ sao cho

$$|h(z)| < \lambda_R \qquad \forall z \in \overline{D(0,R)}.$$

Vậy ta được $|f(z)| < \lambda_R |z|$, suy ra

$$|f_n(z)| < \lambda_R^n |z| \leq \lambda_R^n R.$$

Cho n dần đến vô cùng, ta có $f_n(z) \to 0$ trong $\overline{D(0,R)}$, nghĩa là $g \equiv 0$ tại mọi điểm trong $\overline{D(0,R)}$, và do đó $g \equiv 0$ trên $D(0,1)$. Ta được g triệt tiêu trên $D(0,1)$ hoặc là hàm đồng nhất.

Đề 39 (Harvard). Cho z_1, z_2,..., z_n là các số phức phân biệt, f, g là các đa thức, f có bậc không quá $n-2$ và

$$g(z) = (z - z_1)(z - z_2)\ldots(z - z_n).$$

(a) Chứng minh rằng

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{f(z_j)}{g'(z_j)} = 0.$$

(b) Chứng minh rằng tồn tại một đa thức f có bậc không quá $n-2$ thỏa mãn $f(z_j) = a_j$ khi và chỉ khi

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{a_j}{g'(z_j)} = 0.$$

Giải.

(a) Xét $\overline{f}$ là đa thức nội suy Lagrange thỏa mãn $\overline{f}(z_j) = f(z_j)$ với mọi $j = \overline{1,n}$ như sau

$$\overline{f}(z) = \sum_{j=1}^{n} f(z_j) \frac{\prod_{k\neq j}(z - z_k)}{\prod_{k\neq j}(z_j - z_k)} = \sum_{j=1}^{n} f(z_j) \frac{\prod_{k\neq j}(z - z_k)}{g'(z_j)},$$

ta có $\deg f \leq n-2$ và $\deg \overline{f} \leq n-1$, suy ra $\deg\left(\overline{f} - f\right) \leq n-1$ nhưng vì đa thức $\overline{f}(z) - f(z)$ có n nghiệm $z_1, \ldots, z_j$ nên ta suy ra $\overline{f} \equiv f$.

Do $\deg \overline{f} < n-1$ nên hệ số bậc $n-1$ của nó triệt tiêu, tức

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{f(z_j)}{g'(z_j)} = 0.$$

(b) Với các số a_j $(j = \overline{1, n})$ thỏa

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{a_j}{g'(z_j)} = 0,$$

ta xét hàm

$$f(z) = \sum_{j=1}^{n} a_j \frac{\prod_{k \neq j}(z - z_k)}{\prod_{k \neq j}(z_j - z_k)} = \sum_{j=1}^{n} a_j \frac{\prod_{k \neq j}(z - z_k)}{g'(z_j)}.$$

Khi đó $f(z_j) = a_j$ và $\deg f \leq n - 1$ với hệ số bậc $n - 1$ đúng bằng

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{a_j}{g'(z_j)} = 0.$$

Vậy $\deg f \leq n - 2$ và ta có điều phải chứng minh.

Đề 40 (UCLA 2011F). Tính số nghiệm của phương trình

$$z - 2 - e^z = 0 \tag{0.0.5}$$

với z thuộc nửa mặt phẳng trên $H = \{z \in \mathbb{C} : \ \mathrm{Re} z > 0\}$.

Giải. Với mọi $z \in H$, ta xét $\zeta = \frac{z-1}{z+1}$ thì $\zeta \in D(0,1)$ và là phép tương ứng này là song ánh từ H vào $D(0,1)$. Thay $z = \frac{1+\zeta}{1-\zeta}$ vào (0.0.5), ta được số nghiệm của (0.0.5) trên H cũng chính là số nghiệm của phương trình

$$3\zeta - 1 + (\zeta - 1)\, e^{\frac{\zeta+1}{\zeta-1}} = 0 \tag{0.0.6}$$

trong $D(0,1)$. Mặt khác ta có

$$\begin{aligned} \left|3\zeta - 1 + (\zeta - 1)\, e^{\frac{\zeta+1}{\zeta-1}} - 3\zeta\right| &= \left|-1 + (\zeta - 1)\, e^{\frac{\zeta+1}{\zeta-1}}\right| \\ &\leq 1 + |(\zeta - 1)| \left|e^{\frac{\zeta+1}{\zeta-1}}\right| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\leq \quad 1 + e^{-\mathrm{Re} z} \\ &< \quad 2 \leq |3\zeta| \end{aligned}$$

với mọi ζ thỏa $|\zeta| \geq \frac{2}{3}$. Do đó Định lý Rouché cho ta số nghiệm của (0.0.6) trong $D(0,r)$ cũng đúng bằng số không điểm của hàm 3ζ trên $D(0,r)$ với mọi $r \in \left[\frac{2}{3}, 1\right)$ và bằng 1. Cho r dần về 1, ta được phương trình (0.0.5) có nghiệm duy nhất trong H.

Đề 41 (UCLA 2011F). Cho $\Omega \subset \mathbb{C}$ là một miền đơn liên thỏa mãn $\Omega \neq \mathbb{C}$ và $f : \Omega \to \Omega$ là một hàm giải tích. Giả sử tồn tại các điểm z_1, z_2 khác nhau sao cho $f(z_1) = z_1$ và $f(z_2) = z_2$. Chứng minh rằng f là hàm đồng nhất trên Ω, tức $f(z) = z$ với mọi $z \in \Omega$.

Giải. Đầu tiên ta chứng minh cho trường hợp Ω là $D(0,1)$. Khi đó ta xét

$$\varphi(z) = \frac{z - z_1}{1 - \overline{z_1} z}$$

là song ánh, giữ nguyên $D(0,1)$ và biến z_1 thành 0. Xét hàm g xác định bởi

$$g(z) = \varphi \circ f \circ \varphi^{-1}(z),$$

ta có $g(0) = 0$ và $g(\varphi(z_2)) = \varphi(z_2)$. Theo bổ đề Schwarz, ta có $|g(z)| \leq |z|$ trên $D(0,1)$ và đẳng thức có xảy ra tại điểm $\varphi(z_2) \neq \varphi(z_1) = 0$, do vậy tồn tại số phức λ có modulus bằng 1 sao cho $g(z) = \lambda z$ với mọi $z \in D(0,1)$. Thử lại với $z = \varphi(z_2)$, ta có $\lambda = 1$, tức $g(z) \equiv z$ trên $D(0,1)$. Do đó ta có

$$f(z) = \varphi^{-1} \circ g \circ \varphi(z) = \varphi^{-1}(\varphi(z)) = z \qquad \forall z \in D(0,1).$$

Bài toán được chứng minh cho trường hợp Ω là dĩa tròn đơn vị. Trong các trường hợp khác, Định lý ánh xạ Riemann cho ta sự tồn tại của một hàm h giải tích và là song ánh từ Ω vào $D(0,1)$. Khi đó, áp dụng kết quả trên với hàm

$$\hat{f} = h \circ f \circ h^{-1},$$

thì $\hat{f}$ có hai điểm bất động phân biệt là $h(z_1)$ và $h(z_2)$ nên là hàm đồng nhất, suy ra

$$f = h^{-1} \circ \hat{f} \circ h = \mathrm{Id}_\Omega.$$

Ta có điều phải chứng minh.

Đề 42 (UCLA 2011F). Cho $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ là hàm giải tích với $f(z) \neq 0$ với mọi $z \in \mathbb{C}$. Gọi

$$U = \left\{ z \in \mathbb{C} : \left| f^{-1}(z) \right| < 1 \right\}.$$

Chứng minh rằng mọi thành phần liên thông của U đều không bị chặn.

Giải. Ta chứng minh khẳng định trên bằng phản chứng. Vì U là ảnh ngược của một tập mở qua hàm liên lục nên U là tập mở. Khi đó U là hội của đếm được các thành phần liên thông và mỗi thành phần liên thông đều mở (điều này có thể được chứng minh cụ thể, với không nhiều khó khăn, từ các định nghĩa). Giả sử tồn tại thành phần liên thông Ω của U bị chặn, khi đó ta có $\partial\Omega \cap U = \emptyset$, nghĩa là $|f(z)| \geq 1$ với mọi $z \in \partial\Omega$. Thật vậy, giả sử tồn tại $z_0 \in \partial\Omega \cap U$, ta suy ra có quả cầu mở với bán kính đủ nhỏ $D(z_0, r)$ chứa trong U. Khi đó ta có $D(z_0, r) \subset U$ và $D(z_0, r) \cap \Omega \neq \emptyset$ nên $\Omega \cup D(z_0, r)$ là một tập mở, liên thông chứa hoàn toàn Ω. Điều này mâu thuẫn và cho ta $|f(z)| \geq 1$ với mọi $z \in \partial\Omega$.

Mặt khác, ta có $|f(z)| \leq 1$ với mọi $z \in \Omega$ nên cũng có $|f(z)| \leq 1$ với mọi $z \in \overline{\Omega} \supset \partial\Omega$, do đó

$$|f(z)| = 1 \quad \forall |z| \in \partial\Omega.$$

Theo Nguyên lý modulus cực đại, ta có

$$|f(z)| \le 1 \quad \forall z \in \Omega.$$

Nhưng vì f không có nghiệm nên ta cũng có thể tiếp tục áp dụng Nguyên lý modulus cực đại cho hàm $\frac{1}{f}$ với $\frac{1}{|f(z)|} = 1$ trên $\partial\Omega$. Khi đó ta có

$$\frac{1}{|f(z)|} \le 1 \quad \forall z \in \Omega,$$

nghĩa là $|f(z)| = 1$ trên Ω. Do vậy ta được $f(z) \equiv \lambda$ trên $\mathbb{C}$ với λ là hằng số có modulus bằng 1. Khi đó $U = \emptyset$ và không có thành phần liên thông nào nên mệnh đề hiển nhiên đúng. Vậy ta có điều phải chứng minh.

Đề 43 (UCLA 2011F). Một hàm giải tích $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ được gọi là *có kiểu mũ* (*of exponetial type*) nếu như tồn tại các hằng số dương c_1, c_2 sao cho

$$|f(z)| \le c_1 e^{c_2|z|} \quad \forall z \in \mathbb{C}.$$

Chứng minh rằng f có kiểu mũ khi và chỉ khi f' có kiểu mũ.

Giải. Nếu f là hàm nguyên có kiểu mũ, nghĩa là $|f(z)| \le c_1 e^{c_2|z|}$ trên $\mathbb{C}$, theo ước lượng Cauchy ta có

$$\begin{aligned} |f'(z)| &= \left| \frac{1}{2\pi i} \oint_{|\zeta - z| = 1} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^2} d\zeta \right| \\ &\le \max \left\{ c_1 e^{c_2|\zeta|} : |\zeta - z| = 1 \right\} \\ &\le c_1 e^{c_2(|z|+1)} \\ &\le \left(\max_{|z| \le 1} |f(z)| + c_1 \right) e^{2c_2|z|} \end{aligned}$$

Do đó f' cũng có kiểu mũ.

Giờ ta chứng minh chiều ngược lại, với giả sử f' có kiểu mũ, hay $|f'(z)| \leq c_1 e^{c_2|z|}$ trên $\mathbb{C}$. Khi đó ta có

$$\begin{aligned} |f(z)| &= \left| f(0) + \int_0^z f'(\zeta)\, d\zeta \right| \\ &\leq |f(0)| + \int_0^1 |f'(zt)\, z|\, dt \\ &\leq |f(0)| + |z| \int_0^1 c_1 e^{c_2|z|}\, dt \\ &= |f(0)| + |z|\, c_1 e^{c_2|z|} \end{aligned}$$

Vì $|z| \leq e^{|z|}$với mọi $z \in \mathbb{C}$ nên ta suy ra

$$|f(z)| \leq (|f(0)| + c_1)\, e^{(c_2+1)|z|}.$$

Vậy ta có điều phải chứng minh.

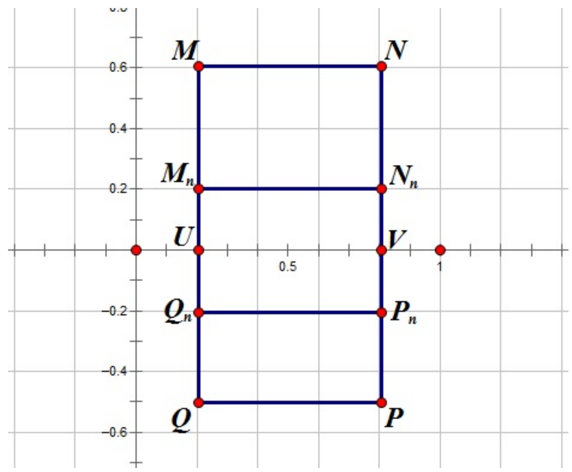
Đề 44 (UCLA 2011S). Ký hiệu $E \subset [0,1]$ là tập Cantor, được định nghĩa bởi

$$E = \left\{ \sum_{j \geq 1} b_j 3^{-j} : \quad b_j = 0, 2 \right\}.$$

Giả sử rằng $f : \mathbb{C} \setminus E \to \mathbb{C}$ là hàm giải tích và bị chặn. Chứng minh rằng f là hàm hằng.

Giải. Bài toán sẽ rất đơn giản nếu các phần tử của E đều cô lập vì khi đó f có mở rộng giải tích trên $\mathbb{C}$, tuy nhiên ta biết rằng mọi phần tử của tập Cantor đều là điểm tụ của chính nó và điều này khiến bài toán trở nên khó khăn. Gọi $\Omega = \mathbb{C} \setminus E$, ta sẽ giải quyết bài toán theo các bước sau.

1. Chứng minh tích phân của f trên mọi đường cong kín trong Ω đều triệt tiêu.
2. Chứng minh f là đạo hàm của một hàm F giải tích trên Ω và liên tục trên $\mathbb{C}$.



Hình 0.0.3: Các hình chữ nhật $M_nN_nP_nQ_n$ và $MNPQ$.

3. Chứng minh F giải tích trên $\mathbb{C}$, từ đó suy ra f có mở rộng giải tích trên $\mathbb{C}$.

4. Suy ra f là hàm hằng vì bị chặn.

Trước hết, ta sẽ chứng minh tích phân của f trên mọi đường cong kín trong Ω đều triệt tiêu. Ta chỉ cần chứng minh điều này cho mọi đường γ trong Ω có dạng biên của một hình chữ nhật với các cạnh song song với 2 trục là đủ. Giả sử $\gamma = \partial R$, ta cũng chỉ cần xét trường hợp γ là hình chữ nhật $MNPQ$ với M, N ở nửa mặt phẳng trên, P, Q ở nửa mặt phẳng dưới và các điểm này cùng có hoành độ nằm trong khoảng $[0, 1]$. Gọi $\gamma_n = \partial R_n$ là biên của hình chữ nhật có các cạnh dọc nằm trên cùng một đường thẳng với các cạnh dọc của ∂R và có các cạnh ngang cách trục thực một đoạn bằng $\frac{1}{n}$ và đặt tên các điểm như hình vẽ. Do f giải tích trên Ω, ta suy ra tích phân của f trên γ cũng đúng bằng tích phân của f trên γ_n.

Giờ ta đặt

$$\begin{aligned}
E_1 &= \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right) \\
E_2 &= \left(\frac{1}{9}, \frac{2}{9}\right) \cup \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right) \cup \left(\frac{7}{9}, \frac{8}{9}\right) \\
&\vdots
\end{aligned}$$

$$E_{n+1} = E_n \cup \bigcup_{j=1}^{N} \left(a_j + \frac{1}{3}(b_j - a_j), a_j + \frac{2}{3}(b_j - a_j) \right) \text{ nếu } [0,1] \setminus E_n = \bigcup_{j=1}^{N} [a_j, b_j] \text{với } a_j < b_j < a_j$$

thì ta có $E = [0,1] \setminus \bigcup_{k=1}^{\infty} E_n$ và $\mu(E_{n+1}) = \frac{2}{3}\mu(E_n) + \frac{1}{3}$, do đó

$$[\mu(E_n) - 1] = \frac{2}{3}[\mu(E_{n-1}) - 1] = \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}[\mu(E_1) - 1] = -\left(\frac{2}{3}\right)^{n},$$

tức

$$\mu(E_n) = 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{n} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

với μ là độ đo Lebesgue trên $\mathbb{R}$. Giả sử f bị chặn bởi K, ta có

$$\begin{aligned} \left| \oint_{\gamma_n} f(z)\, dz \right| &\leq \left| \int_{Q_n}^{P_n} f(z)\, dz - \int_{M_n}^{N_n} f(z)\, dz \right| + \left(\left| \int_{P_n}^{N_n} \right| + \left| \int_{M_n}^{Q_n} \right| \right) f(z)\, dz \\ &\leq \int_U^V \left| f\left(x - \frac{i}{n}\right) - f\left(x + \frac{i}{n}\right) \right| dx + 8\frac{K}{n} \end{aligned}$$

Với mọi $\varepsilon > 0$ cho trước, tồn tại $L_\varepsilon \in \mathbb{N}$ đủ lớn để $\mu([0,1] \setminus E_{L_\varepsilon}) < \varepsilon$. Giả sử

$$E_{L_\varepsilon} = \bigcup_{i=1}^{T} (a_i, b_i)$$

với các khoảng (a_i, b_i) và (a_j, b_j) rời nhau khi $i \neq j$, đặt

$$F_\varepsilon = \bigcup_{i=1}^{T} \left[a_i + \frac{\varepsilon}{2}(b_i - a_i), b_i - \frac{\varepsilon}{2}(b_i - a_i) \right],$$

ta có F_ε là compact chứa trong E_{L_ε} và

$$\mu(F_\varepsilon) = (1 - \varepsilon)\, \mu(E_{L_\varepsilon}) < (1 - \varepsilon)^2.$$

Do vậy f liên tục đều trên

$$F_\varepsilon \times [-1,1] = \{x + iy \in \mathbb{C} : \quad x \in F_\varepsilon,\ y \in [-1,1]\}.$$

Vậy tồn tại n đủ lớn sao cho $\frac{1}{n} < \varepsilon$ và

$$\left| f\left(x + \frac{i}{n}\right) - f\left(x - \frac{i}{n}\right) \right| < \varepsilon$$

với mọi $x \in F_\varepsilon$. Khi đó

$$\begin{aligned}
\int_U^V \left| f\left(x - \frac{i}{n}\right) - f\left(x + \frac{i}{n}\right) \right| dx &= \left(\int_{UV\cap F_\varepsilon} + \int_{UV\setminus F_\varepsilon} \right) \left| f\left(x - \frac{i}{n}\right) - f\left(x + \frac{i}{n}\right) \right| dx \\
&\le \int_{UV\cap F_\varepsilon} \varepsilon\, dx + \left[1 - (1-\varepsilon)^2\right] 2M \\
&\le \varepsilon + \left[1 - (1-\varepsilon)^2\right] 2M
\end{aligned}$$

do $\mu\left(UV \setminus F_\varepsilon\right) \le \mu\left([0,1] \setminus F_\varepsilon\right) < 1 - (1-\varepsilon)^2$. Vậy nên ta suy ra

$$\left| \oint_\gamma f(z)\ dz \right| = \left| \oint_{\gamma_n} f(z)\ dz \right| \le \varepsilon + \left[1 - (1-\varepsilon)^2\right] 2M + 8K\varepsilon.$$

Cho ε dần về 0, ta suy ra tích phân của f trên mọi đường cong kín trong Ω đều triệt tiêu. Do vậy, với mọi $z \in \mathbb{C}$, ta xét hàm g trên Ω xác định bởi

$$g(z) = \int_{\gamma_z} f(\zeta)\ d\zeta$$

với γ_z là một đường bất kì trong Ω đi từ i đến z thì có được $g'(z) = f(z)$ trên Ω. Mặt khác, với mọi z_1, z_2 khác nhau trong Ω, tồn tại đường $\Gamma(z_1, z_2)$ trong Ω từ z_1 đến z_2 có độ dài không quá $\pi|z_1 - z_2|$. Thật vậy, nếu đường thẳng nối z_1, z_2 nằm trong Ω, ta chọn $\Gamma(z_1, z_2)$ đúng bằng đường thẳng này. Trong trường hợp ngược lại, tức z_1 và z_2 cùng thuộc $[0,1]$, ta chọn $\Gamma(z_1, z_2)$ là nửa trên đường tròn đường kính z_1, z_2. Trong cả hai trường hợp này, độ dài của $\Gamma(z_1, z_2)$ đều không quá $\pi|z_1 - z_2|$.

Ta có

$$\begin{aligned}
|g(z_1) - g(z_2)| &= \left| \left(\int_{\gamma_{z_1}} - \int_{\gamma_{z_2}} \right) f(\zeta)\, d\zeta \right| \\
&= \left| \int_{\Gamma(z_1, z_2)} f(\zeta)\, d\zeta \right| \\
&\leq M\pi |z_1 - z_2|
\end{aligned}$$

nên g là hàm liên tục đều. Vậy g có thể được mở rộng thành hàm F xác định và liên tục trên $\mathbb{C}$ với

$$\begin{cases} F \in H(\mathbb{C} \setminus [0,1]) \\ F'(z) = f(z) \end{cases}$$

Theo Bài 2.10., ta có F giải tích trên $\mathbb{C}$, do vậy F' là mở rộng giải tích của f trên $\mathbb{C}$. Vì F' là hàm nguyên và bị chặn và là hàm hằng, ta cũng suy ra được f là hàm hằng. Bài toán được chứng minh.

Ghi chú. Lời giải trên thực chất chỉ cần những giả thiết ít hơn đề bài vì ta hoàn toàn có thể thay tính bị chặn của f trên toàn Ω bằng việc f bị chặn trên một lân cận chứa tập Cantor E là đủ.

Đề 45 (UCLA 2011S). Cho $\Omega = \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ và $\log(z)$ là nhánh của hàm logarithm trên Ω nhận giá trị thực trên $\mathbb{R}^+$ (và giải tích trên Ω). Chứng minh rằng với mọi $0 < t < \infty$ thì số nghiệm của phương trình

$$\log(z) = \frac{t}{z} \tag{0.0.7}$$

là hữu hạn và không phụ thuộc vào t.

Giải. Với mọi nghiệm z của phương trình (0.0.7), ta có

$$z = e^{\frac{t}{z}} \tag{0.0.8}$$

Ta có

$$\left|z - e^{\frac{t}{z}} - z\right| = \left|e^{\frac{t}{z}}\right| \le e^{\frac{t}{|z|}},$$

nên tồn tại R_t đủ lớn để

$$\left|z - e^{\frac{t}{z}} - z\right| < |z| \qquad \forall\, |z| > R_t.$$

Vậy số nghiệm của phương trình (0.0.8) trên $\mathbb{C}$ chính là số không điểm của hàm đồng nhất và đúng bằng 1. Do đó phương trình (0.0.7) có tối đa một nghiệm trên $\mathbb{C}$. Mặt khác ta thấy rằng phương trình

$$\ln(z) = \frac{t}{z}$$

luôn có một nghiệm thực dương vì

$$\begin{aligned} \lim_{z\to\infty} \frac{\ln(z)}{\frac{t}{z}} &= +\infty \\ \lim_{z\to 0} \frac{\ln(z)}{\frac{t}{z}} &= \lim_{z\to 0} \frac{\frac{1}{z}}{-\frac{t}{z^2}} = 0 \end{aligned}$$

Vậy với mọi t, phương trình (0.0.7) có hữu hạn nghiệm phức và số nghiệm này không phụ thuộc t.

Đề 46 (UCLA 2010F, Harvard 2011F). Cho $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ liên tục trên $\mathbb{C}$. Chứng minh rằng f là hàm nguyên trong các trường hợp sau.

(a) f giải tích trên $\mathbb{C} \setminus [0, 1]$.

(b) f giải tích trên $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$.

Giải. Tương tự Bài 2.10. phần Bài tập lý thuyết.

Đề 47 (UCLA 2010F). Gọi $A(\Omega)$ là không gian vector trên $\mathbb{C}$ gồm tất cả các hàm giải tích trên Ω. Cho L là một *toán tử tuyến tính nhân tính* (*multiplicative linear functional*) từ $A(D(0,1))$ vào $\mathbb{C}$, nghĩa là

$$L(af+bg) = aL(f) + bL(g), \qquad L(fg) = L(f)L(g).$$

Chứng minh rằng nếu L không đồng nhất 0 thì tồn tại $z_0 \in D(0,1)$ để L có dạng

$$L(f) = f(z_0) \qquad \forall f \in A(D(0,1)).$$

Giải. Trước hết, ta tìm $L(\lambda)$ với $\lambda \in \mathbb{C}$ chỉ hàm hằng, nhận giá trị đúng bằng λ trên $D(0,1)$. Do L là ánh xạ tuyến tính nên hiển nhiên $L(0) = 0$. Ta tính $L(1)$ bằng nhận xét

$$L(1) = L\left(1^2\right) = L(1)^2 = L\left(1^3\right) = L(1)^3$$

nên $L(1) = 0$ hay $L(1) = 1$. Nếu $L(1) = 0$, ta có $L(f) = L(1)L(f) = 0$ với mọi $f \in A(D(0,1))$ nên L triệt tiêu.

Trong trường hợp ngược lại, ta có $L(\lambda) = \lambda L(1) = \lambda$. Giờ ta sẽ chứng tỏ $L(\mathrm{Id}) \in D(0,1)$, thật vậy, nếu $L(\mathrm{Id}) \notin D(0,1)$, ta xét hàm $g \in A(D(0,1))$ xác định bởi

$$g(z) = \frac{1}{z - L(\mathrm{Id})} \qquad \forall z \in D(0,1).$$

thì có được $g(z)[z - L(\mathrm{Id})] = 1$ nên

$$L(g)L(\mathrm{Id} - L(\mathrm{Id})) = L(1) = 1.$$

Nhưng điều này mâu thuẫn vì $L(\mathrm{Id} - L(\mathrm{Id})) = L(\mathrm{Id}) - L(\mathrm{Id}) = 0$. Vậy nên ta suy ra $L(\mathrm{Id}) = z_0 \in D(0,1)$.

Giờ với mọi $f \in A(D(0,1))$, ta xét hàm $h \in A(D(0,1))$ xác định bởi

$$h(z) = \begin{cases} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} & \text{khi } z \neq z_0 \\ f'(z_0) & \text{khi } z = z_0 \end{cases}$$

thì h liên tục trên $D(0,1)$ và giải tích trên $D(0,1) \setminus \{z_0\}$ nên tất nhiên $h \in A(D(0,1))$. Mặt khác thì

$$\begin{aligned} L(f) - f(z_0) &= L(f - f(z_0)) = L((\mathrm{Id} - z_0).h) \\ &= L(h) L(\mathrm{Id} - z_0) = L(h)[L(\mathrm{Id}) - z_0] = 0 \end{aligned}$$

Vậy nên ta suy ra tồn tại $z_0 \in D(0,1)$ (z_0 đúng bằng $L(\mathrm{Id})$) để $L(f) = f(z_0)$ với mọi $f \in A(D(0,1))$.

Ghi chú. Hướng tiếp cận dễ nghĩ đến ban đầu là chứng minh L liên tục (tức nó là một toán tử tuyến tính) sau đó dùng khai triển Taylor cho $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ để có

$$L(f) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n L(\mathrm{Id})^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z_0^n = f(z_0).$$

Tuy nhiên việc chứng tỏ L bị chặn bằng những dữ kiện đã cho (với cả hai vế của các đẳng thức đều chỉ gồm các giá trị của hàm L) là không dễ. Ta có thể nghĩ đến việc chứng minh $A(D(0,1))$ là một đại số Banach để dùng tính chất của toán tử tuyến tính nhân tính trên đây, nhưng điều này không khả thi vì rất khó tìm một chuẩn trên $A(D(0,1))$ dù đây là không gian metric với hàm khoảng cách định nghĩa bởi

$$\delta(f,g) = \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k} \sup_{z \in D\left(0,1-\frac{1}{k}\right)} \frac{|f(z) - g(z)|}{1 + |f(z) - g(z)|}.$$

Đề 48 (UCLA 2010F). Cho

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

là hàm giải tích trên $D(0,1)$. Chứng minh rằng nếu

$$\sum_{n=0}^{\infty} n |a_n| \leq |a_1|$$

với $a_1 \neq 0$ thì f là đơn ánh.

Giải. Ta có

$$|f'(z)| = \left| \sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1} \right| \geq |a_1| - \left| \sum_{n=2}^{\infty} n a_n z^{n-1} \right| \geq |a_1| - \sum_{n=2}^{\infty} n |a_n| |z|^{n-1}.$$

Trong trường hợp $a_n = 0$ với mọi $n \geq 2$, hiển nhiên ta có $|f'(z)| > 0$. Ngược lại, nếu tồn tại N để $a_N \neq 0$, ta suy ra

$$|f'(z)| > |a_1| - \sum_{n=2}^{\infty} n |a_n| \geq 0$$

nên trong cả 2 trường hợp ta đều được $|f'(z)| > 0$ với mọi $z \in D(0,1)$. Giả sử tồn tại $z_1, z_2 \in D(0,1)$ phân biệt để $f(z_1) = f(z_2)$, xét

$$g(t) = f(z_1 + t(z_2 - z_1)),$$

ta suy ra $g(0) = g(1)$ và $g'(t) \neq 0$ với mọi $t \in (0,1)$. Điều này mâu thuẫn và chứng tỏ g là đơn ánh trên $D(0,1)$.

Đề 49 (UCLA 2010F). Cho $\Omega \subset \mathbb{C}$ là một miền mở khác rỗng và liên thông. Giả sử $f : \Omega \to \mathbb{C}$ là hàm điều hòa và f^2 cũng là hàm điều hòa. Chứng minh rằng f hoặc $\overline{f}$ phải là hàm giải tích trên Ω.

Giải. Xem Bài 2.2. phần Bài tập lý thuyết.

Đề 50 (UCLA 2010F). Cho $\mathcal{F}$ là họ các hàm f giải tích trên $D(0,1)$ với

$$\iint_{x^2+y^2<1} |f(x+iy)|^2 \, dx\, dy < 1.$$

Chứng minh rằng với mọi compact $K \subset D(0,1)$, tồn tại hằng số A sao cho $|f(z)| < A$ với mọi $z \in K$ và $f \in \mathcal{F}$.

Giải. Do mọi compact K đều chứa trong một compact có dạng $\overline{D(0,r)}$ với $r \in (0,1)$ nên ta chỉ cần chứng minh trong trường hợp $K = \overline{D(0,1)}$ là đủ. Xét khai triển Taylor của f như sau

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n,$$

ta có

$$\begin{aligned}
\iint_{x^2+y^2<1} |f(x+iy)|^2 \, dx\, dy &= \iint_{r<1} r f\left(re^{i\theta}\right) \overline{f\left(re^{i\theta}\right)} \, dr\, d\theta \\
&= \iint_{r<1} r \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n e^{in\theta}\right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} \overline{a_n} r^n e^{-in\theta}\right) dr\, d\theta \\
&= \iint_{r<1} \left(\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 r^{2n+1}\right) dr\, d\theta
\end{aligned}$$

theo đẳng thức Parseval. Vậy ta suy ra

$$1 > 2\pi \int_0^1 \left(\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 r^{2n+1} \right) dr = \pi \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|a_n|^2}{n+1},$$

nói cách khác ta có

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{|a_n|^2}{n+1} < \frac{1}{\pi}.$$

Mặt khác trên $\overline{D(0,r)}$, ta có

$$|f(z)| = \left| \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \right| \le \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| |z|^n \le \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| r^n.$$

Sử dụng bất đẳng thức Holder (với độ đo rời rạc), ta có

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| r^n \le \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|a_n|^2}{n+1} \right\}^{\frac{1}{2}} \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) r^{2n} \right\}^{\frac{1}{2}}.$$

Do vậy, đặt $M = \frac{1}{\sqrt{\pi}(1-r^2)^2}$, ta có

$$|f(z)| \le \frac{\sum_{n=0}^{\infty} (n+1) r^{2n}}{\sqrt{\pi}} = \frac{1}{\sqrt{\pi} (1-r^2)^2}.$$

Suy ra họ $\mathcal{F}$ bị chặn đều trên mọi compact.

Ghi chú. Một hệ quả của bài toán trên là họ $\mathcal{F}$ là một họ chính tắc (normal family).

Đề 51 (UCLA 2010S). Cho p_1, p_2,..., p_n là các điểm phân biệt trên mặt phẳng phức và U là miền xác định bởi

$$U = \mathbb{C} \setminus \{p_1, \ldots, p_n\}.$$

Gọi A là không gian vector gồm các hàm điều hòa thực trên U và B là không gian con của A bao gồm các hàm điều hòa thực viết được dưới dạng phần thực của một hàm giải tích trên U. Tìm số chiều của không gian thương A/B, hãy chỉ ra (kèm chứng minh) một cơ sở của không gian thương này.

Giải. Ta chứng minh rằng không gian thương A/B có đúng n chiều bằng cách đưa các yếu tố "điều hòa" về các yếu tố "giải tích", vốn quen thuộc và có nhiều công cụ hơn. Trước hết với mỗi hàm thực điều hòa u trên U, ta xét hàm điều hòa sau

$$f = \frac{\partial u}{\partial x} - i\frac{\partial u}{\partial y}.$$

Như đã nói ở phần lý thuyết, u là phần thực của một hàm điều hòa khi và chỉ khi f là đạo hàm của một hàm F giải tích trên U (khi đó u chính là $\mathrm{Re}\,(F)$, với sai khác một hằng số thực), tức tích phân của f triệt tiêu trên mọi đường cong kín trong U. Với mỗi hàm f giải tích trên U, ta xét hàm g giải tích trên U, xác định bởi

$$g\,(z) = f\,(z) - \sum_{j=1}^{n} \frac{\alpha_j}{z - p_j}$$

với $\alpha_j = \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_j} f\,(\zeta)\, d\zeta$ và C_j là đường tròn tâm p_j với bán kính r_j đủ nhỏ để $\overline{D\,(p_j, r_j)}$ không chứa các điểm p_k với $k \neq j$. Khi đó với mọi $j = \overline{1, n}$, ta được

$$\begin{aligned}
\oint_{C_j} g\,(\zeta)\, d\zeta &= \oint_{C_j} f\,(\zeta)\, d\zeta - \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \oint_{C_j} \frac{d\zeta}{\zeta - p_j} \\
&= 2\pi i\alpha_j - \sum_{j=1}^{n} 2\pi i\alpha_j \mathrm{Ind}\,(C_j, p_j) \\
&= 0
\end{aligned}$$

Do tích phân của g trên mọi đường cong kín trong U chính là tổ hợp tuyến tính của các tích phân trên C_j nên cũng đều triệt tiêu, chứng tỏ g có nguyên hàm là G xác định và giải tích trên U. Vậy nếu ta đặt

$$\begin{cases} f_j(z) & = \frac{1}{z-p_j} \\ u_j(z) & = \ln|z-p_j| \end{cases}$$

thì khi đó ta có

$$f_j = \frac{\partial u_j}{\partial x} - i\frac{\partial u_j}{\partial y}$$

và với mọi hàm f giải tích trên U, tồn tại các số α_j và hàm G giải tích trên U sao cho

$$f - \sum_{j=1}^{n} \alpha_j f_j = G'.$$

Đặt $h = \text{Re}(G)$, ta có

$$\frac{\partial\left(u - \sum_{j=1}^{n}\alpha_j u_j\right)}{\partial x} - i\frac{\partial\left(u - \sum_{j=1}^{n}\alpha_j u_j\right)}{\partial y} = \frac{\partial h}{\partial x} - i\frac{\partial h}{\partial y}.$$

Vậy nếu gọi $\varphi = u - \sum_{j=1}^{n}\alpha_j u_j - h$, ta sẽ có φ giải tích và $\frac{\partial\varphi}{\partial x} = i\frac{\partial\varphi}{\partial x}$, từ đó

$$\begin{cases} \frac{\partial \text{Re}(\varphi)}{\partial x} & = -\frac{\partial \text{Im}(\varphi)}{\partial y} \\ \frac{\partial \text{Re}(\varphi)}{\partial y} & = \frac{\partial \text{Im}(\varphi)}{\partial y} \end{cases}$$

nên theo hệ thức Cauchy Riemann, ta được $\text{Im}(\varphi) + i\text{Re}(\varphi)$ là hàm giải tích, hay nói cách khác, $\text{Re}(\varphi)$ là phần thực của hàm giải tích $\text{Re}(\varphi) - i\text{Im}(\varphi) = \overline{\varphi}$. Vậy ta suy ra

$$u - \sum_{j=1}^{n} \text{Re}(\alpha_j)\, u_j - h = \text{Re}(\varphi) = \text{Re}(\overline{\varphi})$$

là phần thực của một hàm giải tích, do đó

$$u - \sum_{j=1}^{n} \text{Re}(\alpha_j)\, u_j = h + \text{Re}(\overline{\varphi}) \in B.$$

Điều này chứng tỏ các lớp tương đương chứa u_j chính là một tập sinh của không gian thương A/B. Mặt khác các lớp này cũng độc lập tuyến tính. Thật vậy, giả sử tồn tại các số thực c_j không đồng thời bằng 0 và hàm G giải tích trên U sao cho

$$\sum_{j=1}^{n} c_j u_j = \mathrm{Re}\,(G)\,,$$

khi đó ta suy ra

$$\sum_{j=1}^{n} c_j f_j = \sum_{j=1}^{n} c_j \left(\frac{\partial u_j}{\partial x} - i \frac{\partial u_j}{\partial y} \right) = G',$$

tức là nguyên hàm trên mọi đường cong kín trên U của $\sum_{j=1}^{n} c_j f_j$ đều triệt tiêu. Chọn đường cong kín

$$\gamma = \sum_{j=1}^{n} b_j C_j,$$

ta có được

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \sum_{j=1}^{n} c_j f_j\,(\zeta)\; d\zeta \\ &= \frac{1}{2\pi i} \sum_{k=1}^{n} \left(b_k \oint_{C_k} \sum_{j=1}^{n} c_j f_j\,(\zeta)\; d\zeta \right) \\ &= \frac{1}{2\pi i} \sum_{k=1}^{n} \oint_{C_k} b_k c_k f_k\,(\zeta)\; d\zeta \\ &= \sum_{k=1}^{n} c_k b_k \end{aligned}$$

Vậy $(c_1, c_2, \ldots, c_n)$ có tích vô hường với mọi vector $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$ đều triệt tiêu. Chọn $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$ lần lượt là các vector đơn vị, ta suy ra $c_1 = c_2 = \cdots = c_n = 0$. Điều này mâu thuẫn, cho ta không gian thương A/B có đúng n chiều và nhận $\{u_j + B\}_{j=\overline{1,n}}$ làm một cơ sở.

Ghi chú. Ban đầu ta đã hy vọng rằng nếu trừ đi một tổ hợp tuyến tính $\sum_{j=1}^{n}\alpha_j u_j$ từ hàm u sẽ thu được một hàm điều hòa h là phần thực của một hàm giải tích trên U, tức $u-\sum_{j=1}^{n}\alpha_j u_j - h = 0$. Nhưng việc này thất bại với các α_j không cùng là số thực, do đó lời giải trên đã xử lý điều này bằng việc chứng tỏ rằng $\varphi = u-\sum_{j=1}^{n}\alpha_j u_j - h$ thực chất là liên hợp của một hàm giải tích nên phần thực của nó cũng chính là phần thực của một hàm giải tích trên U.

Đề 52 (UCLA 2010S). Cho f là hàm liên tục trên $\overline{D(0,1)}$ và giải tích trên $D(0,1)$ sao cho $f(0)\neq 0$.

(a) Chứng minh rằng nếu $0<r<1$ và $\inf_{|z|=r}|f(z)|>0$ thì

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log\left|f\left(re^{i\theta}\right)\right|d\theta \geq \log|f(0)|.$$

(b) Dùng câu (a) để chứng minh rằng $\left|\left\{\theta\in[0,2\pi]:\quad f\left(e^{i\theta}\right)=0\right\}\right|=0$ với $|E|$ là độ đo Lebesgue trên $\mathbb{R}$ của E.

Giải.

(a) Ta gọi $z_1, z_2, \ldots z_n$ là tất cả các không điểm (tính cả bội) của f trong $D(0,r)$. Đặt

$$g(z)=f(z)\prod_{j=1}^{n}\frac{r^2-\overline{z_j}z}{r(z-z_j)},$$

ta có $|g(z)|=|f(z)|$ trên $\partial D(0,r)$ và g không có nghiệm trong $\overline{D(0,r)}$. Do đó $\log|g(z)|$ là hàm điều hòa trên $D(0,r)$ và liên tục tại $\partial D(0,r)$. Ta được

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log\left|f\left(re^{i\theta}\right)\right|d\theta &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log\left|g\left(re^{i\theta}\right)\right|d\theta\\ &= \log|g(0)|\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \log|f(0)| + \sum_{j=1}^{n} \log \frac{r}{|z_j|} \\ &\geq \log|f(0)| \end{aligned}$$

Do đó ta có điều phải chứng minh.

(b) Giả sử tập $A = \left\{\theta \in [0, 2\pi] : \quad f\left(e^{i\theta}\right) = 0\right\}$có độ đo lớn hơn 0 khi đó, do $f(z)$ liên tục đều trên $\overline{D(0,1)}$ nên có modulus bị chặn bởi số thực dương M và với mọi $n \in \mathbb{N}$, tồn tại R_n để

$$\left|f\left(re^{i\theta}\right)\right| \leq \frac{1}{e^n} \qquad \forall r \geq R_n,\ \theta \in A.$$

Mặt khác, nếu với mọi $r \in \left[R_n, \frac{R_n+1}{2}\right]$ phương trình

$$f\left(re^{i\theta}\right) = 0$$

đều có nghiệm, ta suy ra số nghiệm của f trong $D\left(0, \frac{R_n+1}{2}\right)$ là không đếm được và do đó f là hàm đồng nhất. Điều này mâu thuẫn với giả thiết $f(0) \neq 0$ và chứng tỏ tồn tại một $r \in \left[R_n, \frac{R_n+1}{2}\right]$ để

$$\inf_{|z|=r} \left|f\left(re^{i\theta}\right)\right| > 0.$$

Do đó, áp dụng câu (a), ta được

$$\begin{aligned} \log|f(0)| &\leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log\left|f\left(re^{i\theta}\right)\right| d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi} \left(\int_{[0,2\pi]\setminus A} + \int_A\right) \log\left|f\left(re^{i\theta}\right)\right| d\theta \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \left(M\left|[0, 2\pi] \setminus A\right| - nA\right) \\ &= M - \frac{M+n}{2\pi} |A| \end{aligned}$$

với mọi $n \in \mathbb{N}$. Cho n dần về vô cùng, bất đẳng thức trên nảy sinh mâu thuẫn và kết thúc chứng minh.

Đề 53 (UCLA 2010S). Cho F là hàm chỉnh hình khác hằng trên mặt phẳng phức sao cho với mọi $z \in \mathbb{C}$ thì

$$F(z+1) = F(z), \qquad F(z+i) = F(z).$$

Gọi Q là hình chữ nhật với các đỉnh là z_0, z_0+1, z_0+i, z_0+i+1 sao cho F không có cực và không điểm trên ∂Q. Chứng minh rằng số không điểm và số cực của F (tính cả bội) trong Q là bằng nhau.

Giải. Do F tuần hoàn với chu kì 1 và i, nên ta cũng có

$$F'(z+1) = F'(z), \qquad F'(z+i) = F'(z).$$

Do vậy nếu gọi Δ là hiệu giữa số không điểm và số cực của F (tính cả bội), theo Nguyên lý Argument, ta có

$$\begin{aligned}
\Delta &= \frac{1}{2\pi i}\oint_{\partial Q} \frac{F'(\zeta)}{F(\zeta)}\,d\zeta \\
&= \frac{1}{2\pi i}\left\{\int_{z_0}^{z_0+1}\left[\frac{F'(\zeta)}{F(\zeta)} - \frac{F'(\zeta+i)}{F(\zeta+i)}\right]d\zeta + \int_{z_0+i}^{z_0}\left[\frac{F'(\zeta)}{F(\zeta)} - \frac{F'(\zeta+1)}{F(\zeta+1)}\right]d\zeta\right\} \\
&= 0
\end{aligned}$$

Do vậy ta có được số cực và số không điểm của F trong Q, tính cả bội, là bằng nhau.

Đề 54 (UCLA 2010S). Cho $\Omega \subset \mathbb{C}$ là một tập mở liên thông, $z_0 \in \Omega$ và $\mathcal{U}$ là họ các hàm điều hòa không âm U xác định trên Ω thỏa mãn $U(z_0) = 1$. Chứng minh rằng với mọi compact $K \subset \Omega$, tồn tại hằng số $M < +\infty$ chỉ phụ thuộc vào Ω, z_0 và

K sao cho

$$\sup_{U \in \mathcal{U}} \sup_{z \in K} U(z) \leq M.$$

Giải. Theo bất đẳng thức Harnack, tồn tại hằng số dương M chỉ phụ thuộc vào Ω, z_0 và K sao cho

$$U(z) \leq M.U(z_0) = M \qquad \forall z \in K.$$

Do đó hiển nhiên rằng

$$\sup_{U \in \mathcal{U}} \sup_{z \in K} U(z) \leq M.$$

Ta có điều phải chứng minh.

Đề 55 (UCLA 2010S). Cho F là một ánh xạ từ $D(0,1)$ vào $D(0,1)$ sao cho với mọi z_1, z_2, z_3 phân biệt trong $D(0,1)$, tồn tại hàm giải tích f_{z_1,z_2,z_3} từ $D(0,1)$ vào $D(0,1)$ thỏa mãn

$$F(z_j) = f(z_j), \quad j = 1, 2, 3.$$

Chứng minh F là hàm giải tích trên $D(0,1)$.

Giải. Trước hết, với mọi a cố định trong $D(0,1)$, ta chỉ cần chứng minh f có đạo hàm tại a. Trước hết, với mọi $z \in D(0,1) \setminus \{a\}$, ta có

$$\begin{aligned}
\left|\frac{F(z) - F(a)}{z - a}\right| &= \left|\frac{F(z) - F(a)}{1 - \overline{F(a)}F(z)}\right| \left|\frac{1 - \bar{a}z}{z - a}\right| \left|\frac{1 - \overline{F(a)}F(z)}{1 - \bar{a}z}\right| \\
&\leq \left|\frac{1 - \overline{F(a)}F(z)}{1 - \bar{a}z}\right| \\
&\leq \frac{2}{1 - |a|}
\end{aligned}$$

Do đó $\left\{\frac{F(z)-F(a)}{z-a} : z \in D(0,1)\right\}$ bị chặn và chứa trong $D(0,M)$ với $M > 0$. Với mọi b, c thuộc $D(a,\varepsilon)$ với bán kính ε đủ nhỏ để $\overline{D(a,\varepsilon)} \subset D(0,1)$, tồn tại hàm f giải tích từ $D(0,1)$ vào $D(0,1)$ để

$$f(a) = F(a), \quad f(b) = F(b), \quad f(c) = F(c).$$

Khi đó tồn tại hàm g giải tích trên $D(0,1)$ sao cho

$$f(z) = F(a) + (z-a)\, g(z),$$

ta có

$$g(b) = \frac{F(b) - F(a)}{b-a}, \quad g(c) = \frac{F(c) - F(a)}{c-a}.$$

Do đó $g(b), g(c)$ đều thuộc $D(0,M)$ suy ra

$$\begin{aligned}
\left|\frac{g(b) - g(c)}{b-c}\right| &= \left|\frac{M\left[g(b) - g(c)\right]}{M^2 - \overline{g(c)}g(b)}\right| \left|\frac{1-\overline{c}b}{b-c}\right| \left|\frac{M^2 - \overline{g(c)}g(b)}{M(1-\overline{c}b)}\right| \\
&\le \left|\frac{M^2 - \overline{g(c)}g(b)}{M(1-\overline{c}b)}\right| \\
&\le \frac{2M^2}{M\left[1-(|a|+\varepsilon)^2\right]} = \frac{2M}{1-(|a|+\varepsilon)^2}
\end{aligned}$$

Đặt $K = \frac{2M}{1-(|a|+\varepsilon)^2}$, ta có được g là hàm $K-$Lipchitz trên $\overline{D(a,\varepsilon)} \setminus \{a\}$ và K không phụ thuộc vào b, c. Giờ ta giả sử $\frac{F(z)-F(a)}{z-a}$ không hội tụ khi z dần về a, nghĩa là tồn tại $\delta > 0$ sao cho với mọi $\nu > 0$ nhỏ tùy ý, tồn tại các số phức b, c trong $D(a,\nu)$ sao cho

$$\left|\frac{F(b) - F(a)}{b-a} - \frac{F(c) - F(a)}{c-a}\right| > \delta.$$

Chọn $\nu < \frac{\delta}{2K}$, ta có

$$\left|\frac{F(b) - F(a)}{b-a} - \frac{F(c) - F(a)}{c-a}\right| = |g(b) - g(c)| \le K|b-c| \le 2K\nu < \delta.$$

Điều này mâu thuẫn và chứng tỏ F là hàm giải tích trên $D(0,1)$.

Đề 56 (UCLA 2009F). Cho f là hàm chỉnh hình khác hằng trên $\mathbb{C}$ sao cho

$$f(z) = f\left(z+\sqrt{2}\right) = f\left(z+i\sqrt{2}\right)$$

(Cả 3 hàm này có các cực trùng nhau). Giả sử f có tối đa một cực trên dĩa đóng đơn vị $\overline{D(0,1)}$.

(a) Chứng minh f có đúng một cực trong $\overline{D(0,1)}$.

(b) Chứng minh cực này không phải là cực đơn.

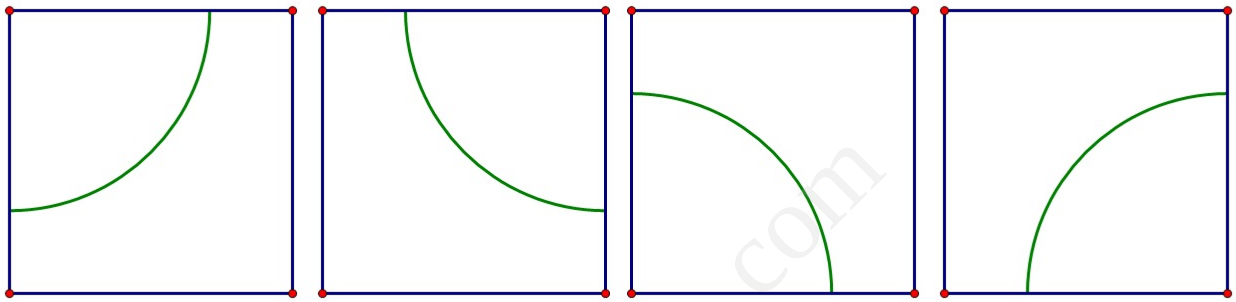
Giải.

(a) Giả sử f không có cực trong $\overline{D(0,1)}$, theo tính tuần hoàn, ở mọi hình vuông nằm trong lưới chính quy tạo bởi các cạnh song song với 2 trục và cách nhau một đoạn $\sqrt{2}$ sẽ không chứa cực ở các phần sau trong Hình 0.0.4. Mặt khác, Hình 0.0.5 cho thấy các phần này phủ hết hình vuông cạnh $\sqrt{2}$, do đó ta có được f không nhận điểm nào làm cực và theo tính tuần hoàn, là hàm nguyên và bị chặn. Điều này cho thấy f là hàm hằng và mâu thuẫn với giả thiết.

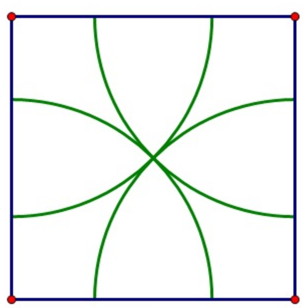
Vậy ta suy ra f phải có đúng một cực trong $D(0,1)$.

(b) Giả sử điểm cực nói trên là đơn, khi đó với một hình vuông R có các đỉnh là $ABCD$ với các cạnh độ dài $\sqrt{2}$ và không đi qua các cực, miền trong hình vuông này chứa đúng một cực z_0 và

$$\begin{aligned}
\oint_{\partial R} f(z)\,dz &= \left(\int_D^C - \int_A^B + \int_A^D - \int_B^C\right) f(z)\,dz \\
&= \int_D^C \left[f(z) - f\left(z+i\sqrt{2}\right)\right] dz + \int_A^D \left[f(z) - f\left(z+\sqrt{2}\right)\right] dz \\
&= 0
\end{aligned}$$



Hình 0.0.4: Cực không thể nằm trong phần giới hạn bởi các cung tròn và biên hình vuông.



Hình 0.0.5: Các phần ở Hình 0.0.4 phủ hết hình vuông cạnh $\sqrt{2}$.

Do đó ta suy ra

$$\text{Res}\,(f\,(z)\,, z_0) = 0.$$

Điều này chứng tỏ z_0 không là cực đơn và kết thúc chứng minh.

Đề 57 (UCLA 2009S). Cho f là hàm nguyên khác hằng thỏa mãn phương trình hàm

$$f\,(1-z) = 1 - f\,(z) \tag{0.0.9}$$

với mọi $z \in \mathbb{C}$. Chứng minh rằng $f\,(\mathbb{C}) = \mathbb{C}$.

Giải. Đặt $g\,(z) = f\left(z + \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2}$ tức $f\,(z) = g\left(z - \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2}$, phương trình hàm (0.0.9) tương đương với

$$g\left(\frac{1}{2} - z\right) + g\left(z - \frac{1}{2}\right) = 0$$

hay $g\,(z) + g\,(-z) = 0$, tức g là hàm lẻ. Vậy ta chỉ cần chứng minh ảnh của mọi hàm nguyên lẻ đều là $\mathbb{C}$. Theo Định lý Picard, ảnh của g là $\mathbb{C}$ hoặc $\mathbb{C}$ bỏ đi 1 điểm. Tuy nhiên nếu điểm α được bỏ đi thì điểm $-\alpha$ cũng phải được bỏ do g là hàm lẻ. Vậy nên ta suy ra $g\,(\mathbb{C}) = \mathbb{C}$. Điều này dẫn đến $f\,(\mathbb{C}) = \mathbb{C}$ và kết thúc chứng minh.

Đề 58 (UCLA 2009S). Cho f là hàm nguyên với $f\,(0) \neq 0$. Gọi $\{a_n\}$ là dãy các không điểm của f tính cả bội.

(a) Cho $R > 0$ thỏa mãn $|f\,(z)| > 0$ với mọi $|z| = R$. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log\left|f\left(Re^{i\theta}\right)\right| d\theta = \log|f\,(0)| + \sum_{|a_n|<R} \log\left(\frac{R}{a_n}\right).$$

(b) Giả sử rằng

$$|f\,(z)| \leq Ce^{|z|^\lambda}$$

với C và λ là các hằng số dương. Chứng minh rằng

$$\sum \left(\frac{1}{|a_n|}\right)^{\lambda+\varepsilon} < \infty$$

với mọi $\varepsilon > 0$.

Giải.

(a) Đây chính là nội dung của Định lý Jensen, lời giải được trình bày chi tiết tại Đề 10 (Harvard)..

(b) Gọi $n(r)$ là số không điểm của f trong $D(0,r)$, theo định lý Jensen (xem tạiĐề 10 (Harvard).), ta có

$$n(r) \leq \frac{\max_{0\leq\theta\leq 2\pi}\left\{\log\left|f\left(Re^{i\theta}\right)\right|\right\}}{\ln R - \ln r}$$

với mọi $R > r$ và $f(z) \neq 0$ trên $|z| = R$. Do số các bán kính R sao cho tồn tại $|z| = R$ để $f(z) = 0$ không nhiều hơn số không điểm của f nên hiển nhiên đếm được. Suy ra với mọi $\delta > 0$ nhỏ tùy ý, tồn tại R trong $[2r-\delta, 2r]$ để

$$n(r) \leq \frac{\max_{0\leq\theta\leq 2\pi}\left\{\log\left|f\left(Re^{i\theta}\right)\right|\right\}}{\ln R - \ln r} \leq \frac{\max_{0\leq\theta\leq 2\pi}\left\{\log\left|f\left(2re^{i\theta}\right)\right|\right\}}{\ln R - \ln r}.$$

Do đó bất đẳng thức đúng khi $R = 2r$, nghĩa là ta có được

$$n(r) \leq \frac{\max_{0\leq\theta\leq 2\pi}\left\{\log\left|f\left(2re^{i\theta}\right)\right|\right\}}{\ln 2} \leq \frac{\ln C + (2r)^{\lambda}}{\ln 2}.$$

Do số không điểm trong một dĩa tròn là hữu hạn, không mất tính tổng quát, ta có thể giả sử các không điểm $\{a_n\}$ được đánh số theo thứ tự tăng dần modulus. Ta có

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{|a_n|}\right)^{\lambda+\varepsilon} &= \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{k\le|a_n|<k+1}\left(\frac{1}{|a_n|}\right)^{\lambda+\varepsilon}\\
&\le \frac{n(1)}{|a_1|^{\lambda+\varepsilon}}+\sum_{k=1}^{\infty}\left[n(k+1)-n(k)\right]\left(\frac{1}{k}\right)^{\lambda+\varepsilon}\\
&= \frac{n(1)}{|a_1|^{\lambda+\varepsilon}}-n(1)+\sum_{k=1}^{\infty}n(k+1)\left[\left(\frac{1}{k}\right)^{\lambda+\varepsilon}-\left(\frac{1}{k+1}\right)^{\lambda+\varepsilon}\right]
\end{aligned}$$

vì

$$0\le\lim_{k\to\infty}\frac{n(k+1)}{k^{\lambda+\varepsilon}}\le\lim_{k\to\infty}\frac{\ln C+(2k+2)^{\lambda}}{k^{\lambda+\varepsilon}\ln 2}=0.$$

Do đó, ta chỉ cần chứng tỏ chuỗi sau hội tụ

$$\sum_{k=1}^{\infty}n(k+1)\left[\left(\frac{1}{k}\right)^{\lambda+\varepsilon}-\left(\frac{1}{k+1}\right)^{\lambda+\varepsilon}\right].$$

Ta có

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{\infty}n(k+1)\left[\left(\frac{1}{k}\right)^{\lambda+\varepsilon}-\left(\frac{1}{k+1}\right)^{\lambda+\varepsilon}\right] &\le \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\ln C+(2k+2)^{\lambda}}{\ln 2}\left[\left(\frac{1}{k}\right)^{\lambda+\varepsilon}-\left(\frac{1}{k+1}\right)^{\lambda+\varepsilon}\right]\\
&\le \frac{\ln C+(4)^{\lambda}}{\ln 2}+\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{k^{\lambda+\varepsilon}}\left[\frac{(2k+2)^{\lambda}}{\ln 2}-\frac{(2k)^{\lambda}}{\ln 2}\right]
\end{aligned}$$

Do đó ta cũng chỉ cần chứng minh chuỗi sau hội tụ

$$\sum_{k=2}^{\infty}\frac{(2k+2)^{\lambda}-(2k)^{\lambda}}{k^{\lambda+\varepsilon}\ln 2}.$$

Mặt khác ta có

$$\begin{aligned}\lim_{k\to\infty}\left\{\left[\frac{(2k+2)^{\lambda}-(2k)^{\lambda}}{k^{\lambda+\varepsilon}\ln 2}\right]:\left[\frac{1}{k^{1+\varepsilon}}\right]\right\} &= \lim_{k\to\infty}\frac{\left(2+\frac{2}{k}\right)^{\lambda}-(2)^{\lambda}}{k^{-1}\ln 2}\\ &= \lim_{t\to 0}\frac{(2+2t)^{\lambda}-(2)^{\lambda}}{t\ln 2}\\ &= \lim_{t\to 0}\frac{2\lambda\,(2+2t)^{\lambda-1}}{\ln 2}\\ &= \frac{2\lambda 2^{\lambda-1}}{\ln 2}\end{aligned}$$

nên chuỗi $\sum_{k=2}^{\infty}\frac{(2k+2)^{\lambda}-(2k)^{\lambda}}{k^{\lambda+\varepsilon}\ln 2}$ có cùng tính hội tụ/ phân kỳ với chuỗi

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k^{1+\varepsilon}}.$$

Định lý về chuỗi điều hòa cho ta

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k^{1+\varepsilon}}<+\infty,$$

từ đó ta có được điều phải chứng minh.

Đề 59 (UCLA 2009S). Cho $f : D(0,1)\to\mathbb{C}$ là hàm giải tích và đơn ánh trên hình vành khăn $\{z : r<|z|<1\}$. Chứng minh rằng f là đơn ánh trên $D(0,1)$.

Giải. Giả sử f không đơn ánh, nghĩa là tồn tại a và b trong $D(0,1)$ sao cho $f(a)=f(b)=\alpha$. Gọi R là số dương để

$$\max\{|a|,|b|,r\}<R<1,$$

khi đó ta có f là đơn ánh trên $\{z : R \leq |z| < 1\}$ nên $f(\partial D(0,R))$ là một đường cong Jordan với miền Jordan tương ứng là Ω. Khi đó ta chứng minh rằng

$$f(D(0,R)) = \Omega$$

Thật vậy, do $f(D(0,R))$ là liên thông nên ta chỉ có 2 trường hợp là

$$f(D(0,R)) \subset \Omega \quad \text{hay} \quad f(D(0,R)) \subset \mathbb{C} \setminus \overline{\Omega} = \Omega'.$$

Ta sẽ chứng minh rằng $f(D(0,R)) = \Omega$ hoặc $f(D(0,R)) = \Omega'$. Thật vậy, nếu $f(D(0,R)) \subset \Omega$ và tồn tại $w_0 \in \Omega$ sao cho $w_0 \notin f(D(0,R))$, xét w_1 là một điểm trong $f(D(0,R))$. Do Ω là liên thông nên tồn tại đường γ trong Ω nối w_1 và w_0 với khoảng tham số, không mất tính tổng quát, là $[0,1]$. Gọi

$$t_0 = \sup\{t \in [0,1] : \qquad \gamma(\zeta) \in f(D(0,R)) \ \forall \zeta \in [0,t]\},$$

khi đó ta có $t_0 > 0$ vì $f(D(0,R))$ là tập mở. Mặt khác, do với mọi $\varepsilon > 0$, tồn tại $t \in [t_0 - \varepsilon, t_0]$ sao cho $\gamma(t) \in f(D(0,R))$ nên ta suy ra

$$\gamma(t_0) \in \overline{f(D(0,R))} \subset f\left(\overline{D(0,R)}\right)$$

do $f\left(\overline{D(0,R)}\right)$ là compact nên đóng. Mặt khác, nếu $\gamma(t_0)$ thuộc $f(D(0,R))$ thì ta suy ra $t_0 \neq 1$ và do tính mở của $f(D(0,R))$, ta tìm được $\varepsilon > 0$ đủ nhỏ để

$$D(\gamma(t_0), \varepsilon) \subset f(D(0,R)).$$

Theo tính chất hàm liên tục, tồn tại $\delta > 0$ sao cho

$$\gamma(t) \in D(\gamma(t_0), \varepsilon) \subset f(D(0,R)) \quad \forall t \in (t_0 - \delta, t_0 + \delta).$$

Điều này chứng tỏ $\{t \in [0,1] : \quad \gamma(\zeta) \in f(D(0,R))\ \forall \zeta \in [0,t]\}$ chứa $t_0 + \frac{\delta}{2}$ nên không thể nhận t_0 là chặn trên.

Vậy ta suy ra

$$\gamma(t_0) \in f\left(\overline{D(0,R)}\right) \setminus f(D(0,R)) \subset f(\partial D(0,R)) = \partial\Omega.$$

Điều này mâu thuẫn và chứng tỏ $f(D(0,R))$ không thể chứa hoàn toàn trong Ω. Chứng minh tương tự, ta cũng có $f(D(0,R))$ không thể chứa hoàn toàn trong Ω', nghĩa là $f(D(0,R)) = \Omega$ hoặc $f(D(0,R)) \subset \Omega'$. Mặt khác thì $f(D(0,R))$ chứa trong compact $f\left(\overline{D(0,R)}\right)$ nên bị chặn, ta suy ra

$$f(D(0,R)) = \Omega.$$

Giờ với điểm α trong Ω, ta có

$$\operatorname{Ind}(f(\partial D(0,R)), \alpha) = 1$$

vì $f(\partial D(0,R))$ là đường Jordan. Điều này mâu thuẫn với việc phương trình

$$f(z) = \alpha$$

có ít nhất 2 nghiệm là a và b trong $D(0,R)$. Mâu thuẫn này cho ta f là đơn ánh trên $D(0,1)$ và kết thúc chứng minh.

Đề 60 (Harvard 2011S). Cho $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ là hàm giải tích khác hằng. Chứng minh rằng $f(\mathbb{C})$ trù mật trong $\mathbb{C}$.

Giải. Giả sử $f(\mathbb{C})$ không trù mật trong $\mathbb{C}$, nghĩa là tồn tại dĩa tròn $D(a,r)$ sao cho $f(\mathbb{C}) \cap D(a,r) = \emptyset$. Khi đó ta xét

$$g(z) = \frac{1}{f(z) - a},$$

ta được g là hàm nguyên và

$$|g(z)| = \frac{1}{|f(z) - a|} \leq \frac{1}{r}.$$

Suy ra g và hàm hằng nên f cũng là hàm hằng. Ta có điều phải chứng minh.

Đề 61 (Harvard 2011S, Harvard 2010S). Chứng minh rằng với mọi $\lambda > 1$, phương trình

$$ze^{\lambda - z} = 1 \tag{0.0.10}$$

có nghiệm duy nhất trong $D(0,1)$ và nghiệm này nằm trên trục thực.

Giải. Số nghiệm của phương trình (0.0.10) chính là số không điểm của hàm

$$f(z) = e^{z-\lambda} - z.$$

Mặt khác ta có

$$|f(z) - (-z)| = \left|e^{z-\lambda}\right| = e^{\mathrm{Re} z - \lambda} < 1 = |z|$$

với mọi $z \in \partial D(0,1)$. Vậy nên theo định lý Rouché, ta có số không điểm của f trong $D(0,1)$ đúng bằng số không điểm của $-\mathrm{Id}_{D(0,1)}$ và bằng 1.

Mặt khác ta có

$$\begin{cases} f(0) & = e^{-\lambda} > 0 \\ f(1) & = e^{1-\lambda} - 1 < 0 \end{cases}$$

nên tồn tại ít nhất một không điểm của f nằm trong $(0,1)$. Vậy phương trình (0.0.10) có nghiệm duy nhất và nghiệm này nằm trên trục thực.

Đề 62 (Harvard 2010F). Cho u là hàm điều hòa không âm trên $\mathbb{C}$. Chứng minh rằng u phải là hằng số.

Giải. Với mọi $z = re^{i\varphi} \in \mathbb{C}$, tích phân Poisson trên đường tròn bán kinh $R > r$ cho ta

$$u(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{R^2 - r^2}{R^2 + r^2 - 2Rr\cos(\theta - \varphi)} u\left(Re^{i\theta}\right) d\theta.$$

Suy ra

$$\frac{R-r}{R+r}u(0) \le u(z) \le \frac{R+r}{R-r}u(0).$$

Cố định z và cho R dần về vô cùng ta có $u(z) = u(0)$. Vậy ta được u phải là hằng số.

Đề 63 (Harvard 2010S). Cho f là hàm giải tích trên $\overline{D(0,3)}$ và giả sử rằng

$$f(1) = f(i) = f(-1) = f(-i) = 0.$$

Chứng minh rằng

$$|f(0)| \le \frac{1}{80}\max_{|z|=3}|f(z)|$$

và tìm tất cả các hàm để đẳng thức xảy ra.

Giải. Hàm f có dạng

$$f(z) = (z-i)(z+i)(z-1)(z+1)g(z) = \left(z^4 - 1\right)g(z)$$

với g là hàm giải tích trên $\overline{D(0,3)}$. Do đó ta có

$$\max_{|z|=3}|f(z)| \ge \left(3^4 - 1\right)\max_{|z|=3}|g(z)| \ge 80|g(0)| = 80|f(0)|.$$

Do đó ta có bất đẳng thức cần chứng minh. Để đẳng thức xảy ra, g phải có modulus đạt cực đại tại 0, do vậy g là hàm hằng. Thử lại với các hàm f dạng

$$f(z) = \lambda\left(z^4 - 1\right),$$

ta thấy đẳng thức được thỏa mãn nên đó cũng chính là các hàm cần tìm.

Đề 64 (Harvard 2009F). Cho $\Delta = \{z : |z| < 1\}$ là dĩa tròn đơn vị trong $\mathbb{C}$ và $\Delta^* = \Delta \setminus \{0\}$. Một hàm giải tích f được gọi là có *điểm kì dị cốt yếu* tại 0 nếu $z^n f(z)$ không thể mở rộng thành hàm giải tích trên Δ với mọi $n \in \mathbb{N}$.

Chứng minh rằng nếu f có điểm kì dị cốt yếu tại 0 thì miền giá trị của f trù mật trong $\mathbb{C}$, nghĩa là với bất kì số phức w, ta có

$$\forall \varepsilon, \delta > 0, \quad \exists z \in \Delta^* : \quad |z| < \delta \text{ và } |f(z) - w| < \varepsilon.$$

Giải. Lời giải chi tiết đã được trình bày ở phần lý thuyết.

Đề 65 (Wisconsin-Madison 2011S). Cho f_n, g_n là các hàm nguyên trên $\mathbb{C}$ và giả sử rằng

$$f_n(z)\, g_n(z) = z \qquad \forall z \in \mathbb{C}.$$

Giả sử rằng $\{f_n\}$ hội tụ đều trên mọi compact về hàm f với f khác hằng 0. Chứng minh rằng g_n cũng hội tụ đều trên mọi compact.

Giải. Ta có ngay f là hàm giải tích vì

$$f(z) = \lim_{n\to\infty} f_n(z) = \frac{1}{2\pi i} \lim_{n\to\infty} \oint_{|\zeta|=r} \frac{f_n(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|\zeta|=r} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta.$$

Nên nếu f khác hằng 0 thì với mọi khoảng $[a,b]$ khác trống, tồn tại $R \in [a,b]$ sao cho

$$|f(z)| > 0 \qquad \forall z \in \mathbb{C},\ |z| = R$$

vì nếu không f sẽ có vô hạn không đếm được các không điểm và do đó triệt tiêu trên toàn $\mathbb{C}$. Giờ với mọi $k \geq 3$, trên mỗi khoảng $\left[k - \frac{1}{k}, k + \frac{1}{k}\right]$ tồn tại một số R_k sao cho

$$|f(z)| \geq M_k > 0 \qquad \forall z \in \mathbb{C},\ |z| = R_k.$$

Ta có $\{R_k\}$ là dãy tăng và $g_n(z) = \frac{z}{f_n(z)}$ hội tụ về $g(z) = \frac{z}{f(z)}$ khi $n \to \infty$. Với mọi $z \in \mathbb{C}$ thỏa $|z| = R_k$ thì

$$\begin{aligned} |g_n(z) - g(z)| &= \frac{|z|}{|f_n(z)|\,|f(z)|}\,|f(z) - f_n(z)| \\ &\leq \frac{R_k}{M_k\,(M_k - |f_n(z) - f(z)|)}\,|f_n(z) - f(z)| \\ &\quad \frac{R_k}{M_k\left(M_k - \|f_n - f\|_{\overline{D(0,R_k)}}\right)}\,\|f_n - f\|_{\overline{D(0,R_k)}} \end{aligned}$$

nên ta suy ra g_n hội tụ đều về $g(z)$ trên $\partial D(0, R_k)$. Giờ ta xây dựng hàm g trên các điểm còn lại bằng công thức Cauchy

$$g(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint_{|\zeta| = R_k} \frac{g(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta$$

với mọi $z \in D(0, R_k)$ và chứng tỏ hàm g này được định nghĩa tốt. Thật vậy, với mọi $h > k$, ta có

$$\oint_{|\zeta|=R_h} \frac{g(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta = \lim_{n\to\infty}\oint_{|\zeta|=R_h} \frac{g_n(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta = \lim_{n\to\infty}\oint_{|\zeta|=R_k} \frac{g_n(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta = \oint_{|\zeta|=R_k} \frac{g_n(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta$$

với mọi $z \in D\left(0, R_{\min\{h,k\}}\right)$ nên g được định nghĩa tốt. Mặt khác, ta cũng thấy được g giải tích trên mọi dĩa tròn $D(0, R_k)$ với

$$\lim_{k\to\infty} R_k = +\infty$$

nên ta suy ra g là hàm nguyên. Mặt khác do điều này, ta cũng chỉ cần chứng minh $\{g_n\}$ hội tụ đều về g trên mọi compact dạng $\overline{D(0, R_k)}$ là đủ. Với mọi $k \in \mathbb{N}$, ta có

$$\|g_n - g\|_{\partial D(0,R_k)} \to 0 \quad \text{khi } n \to \infty$$

nên theo Nguyên lý Modulus cực đại, ta có

$$\|g_n - g\|_{\overline{D(0,R_k)}} \to 0 \quad \text{khi } n \to \infty.$$

Như vậy dãy hàm $\{g_n\}$ hội tụ đều hàm nguyên g trên mọi compact trong $\mathbb{C}$.

Đề 66 (Wisconsin-Madison 2011S). Cho $\mathcal{F}$ là họ các hàm giải tích $f : D(0,1) \to D(0,1)$ sao cho $f(0) = 0$ và $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{3}$. Tìm giá trị của

$$\sup\left\{\left|f\left(\frac{i}{2}\right)\right| : \quad f \in \mathcal{F}\right\}.$$

Giải. Theo Bổ đề Schwarz, f phải có dạng

$$f(z) = zg(z)$$

với $g : D(0,1) \to D(0,1)$ là hàm giải tích và

$$g\left(\frac{1}{2}\right) = 2f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{2}{3}.$$

Xét $\mathcal{G}$ là họ các hàm g giải tích từ $D(0,1)$ vào $D(0,1)$ với $g\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{2}{3}$, khi đó với mọi $g\in\mathcal{G}$, ta đều có $f(z)=zg(z)$ là một phần tử của $\mathcal{F}$, nói cách khác tương ứng giữa f trong $\mathcal{F}$ và g trong $\mathcal{G}$ là một-một. Ta suy ra

$$\sup\left\{\left|f\left(\frac{i}{2}\right)\right| \; : \quad f\in\mathcal{F}\right\}=\frac{1}{2}\sup\left\{\left|g\left(\frac{i}{2}\right)\right| \; : \quad g\in\mathcal{G}\right\}.$$

Ta dùng các phép biến đổi để đưa g thành một hàm giải tích từ $D(0,1)$ vào $D(0,1)$ giữ nguyên điểm 0. Xét hàm

$$h=\varphi_2\circ g\circ\varphi_1$$

với

$$\begin{cases}\varphi_1(z) &= \frac{z+\frac{1}{2}}{1+\frac{1}{2}z} \quad \text{biến } D(0,1) \text{thành } D(0,1) \text{và } 0 \text{thành } \frac{1}{2}\\ \varphi_2(z) &= \frac{z-\frac{2}{3}}{1-\frac{2}{3}z} \quad \text{biến } D(0,1) \text{thành } D(0,1) \text{và } \frac{2}{3} \text{thành } 0\end{cases}$$

Ta có $h: D(0,1)\to D(0,1)$ và giữ nguyên 0 như mong muốn. Mặt khác thì

$$g\left(\frac{i}{2}\right)=\varphi_2^{-1}\left(h\left(\varphi_1^{-1}\left(\frac{i}{2}\right)\right)\right)=\varphi_2^{-1}\left(h\left(\frac{-10+6i}{17}\right)\right)=\frac{h\left(\frac{-10+6i}{17}\right)+\frac{2}{3}}{1+\frac{2}{3}h\left(\frac{-10+6i}{17}\right)}$$

Do $|h(z)|\leq|z|$ theo Bổ đề Schwarz nên

$$\sup\left\{\left|g\left(\frac{i}{2}\right)\right| \; : \quad g\in\mathcal{G}\right\}\leq\sup\left\{\left|\frac{\alpha+\frac{2}{3}}{1+\frac{2}{3}\alpha}\right| : \; |\alpha|\leq\left|\frac{-10+6i}{17}\right|=\sqrt{\frac{8}{17}}\right\}.$$

Nhưng

$$\left|\frac{\alpha+\frac{2}{3}}{1+\frac{2}{3}\alpha}\right|=\left|\frac{3}{2}-\frac{5}{6+4\alpha}\right|\leq\frac{3}{2}-\frac{5}{|6+4\alpha|}\leq\frac{3}{2}-\frac{5}{6+4|\alpha|}=\frac{2\sqrt{17}+6\sqrt{2}}{3\sqrt{17}+4\sqrt{2}}$$

và đẳng thức có xảy ra khi $\alpha=\sqrt{\frac{8}{17}}$. Do vậy ta có

$$\left|f\left(\frac{i}{2}\right)\right|=\frac{1}{2}\left|g\left(\frac{i}{2}\right)\right|\leq\frac{\sqrt{17}+3\sqrt{2}}{3\sqrt{17}+4\sqrt{2}}.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi

$$h\left(\frac{-10+6i}{17}\right) = \left|\frac{-10+6i}{17}\right|$$

nên $h(z) = e^{i\theta} z$ với $\theta = -\arg\left(\frac{-10+6i}{17}\right)$, tức là

$$f(z) = zg(z) = \varphi_2^{-1}\left(h\left(\varphi_1^{-1}(z)\right)\right) = \varphi_2^{-1}\left(e^{i\theta}\varphi_1^{-1}(z)\right).$$

Vậy ta có

$$\sup\left\{\left|f\left(\frac{i}{2}\right)\right| \ : \quad f \in \mathcal{F}\right\} = \frac{\sqrt{17}+3\sqrt{2}}{3\sqrt{17}+4\sqrt{2}}.$$

Đề 67 (Wisconsin-Madison 2010F).

(a) Cho k là số nguyên dương và $A \geq 0$. Hãy tìm cụ thể các lớp các hàm nguyên $F : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ với tính chất

$$\int_0^{2\pi} \left|F\left(re^{i\theta}\right)\right|^2 d\theta \leq Ar^{2k}.$$

(b) Cho f là hàm giải tích trên $D(0,1)$ và đặt $u = \mathrm{Re}(f)$, $v = \mathrm{Im}(f)$ và giả sử rằng $u(0) = v(0)$. Chứng minh rằng

$$\int_0^{2\pi} u\left(re^{i\theta}\right)^2 d\theta = \int_0^{2\pi} v\left(re^{i\theta}\right)^2 d\theta.$$

Giải.

(a) Xét khai triển Taylor của F

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n,$$

ta có

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} \left|F\left(re^{i\theta}\right)\right|^2 d\theta &= \int_0^{2\pi} \left(\sum_{n=0}^{\infty} c_n r^n e^{in\theta}\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} \overline{c_n} r^n e^{-in\theta}\right) d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \left(\sum_{n=0}^{\infty} |c_n|^2 r^{2n}\right) d\theta \\ &= 2\pi \sum_{n=0}^{\infty} |c_n|^2 r^{2n}\end{aligned}$$

Như vậy ta có

$$\sum_{n=0}^{\infty} |c_n|^2 r^{2n} \le \frac{A}{2\pi} r^{2k}.$$

Suy ra

$$|c_n|^2 \le \frac{A}{2\pi} r^{2k-2n}$$

với mọi $n > k$. Cho r dần về cô cùng, ta suy ra

$$c_n = 0 \qquad \forall n > k,$$

tức F là đa thức có bậc không quá k. Nếu $A = 0$, hiên nhiên F phải là đa thức 0. Trong trường hợp $A > 0$, ta sẽ chứng minh một điều mạnh hơn rằng F phải là một đơn thức bậc k, nghĩa là nó có dạng $F = cz^k$ với

$$|c| \le \sqrt{\frac{A}{2\pi}}.$$

Thật vậy, gọi j là chỉ số nhỏ nhất để $c_j \ne 0$, giả sử $j < k$, ta suy ra

$$|c_j| + \sum_{n=j+1}^{k} |c_n|^2 r^{2n-2j} \le \frac{A}{2\pi} r^{2k-2j}.$$

Cho $r \to 0$, ta có $|c_j| = 0$. Điều này mâu thuẫn và chứng tỏ các hệ số c_j với $j < k$ đều triệt tiêu. Vậy f phải có dạng

$$f(z) = cz^k.$$

Thử lại, ta có điều kiện đã cho sẽ tương đương với

$$|c|^2 \le \frac{A}{2\pi}.$$

Do vậy với k và A cho trước, lớp các hàm cần tìm chính là

$$\left\{ f \in H(\mathbb{C}) : \quad f(z) = cz^k, \quad |c| \le \sqrt{\frac{A}{2\pi}} \right\}.$$

(b) Ta có $f = u + iv$ nên

$$f^2 = u^2 - v^2 + i2uv.$$

Ta suy ra $u^2 - v^2$ là hàm điều hòa, do đó

$$\int_0^{2\pi} \left[u\left(re^{i\theta}\right)^2 - v\left(re^{i\theta}\right)^2 \right] d\theta = 2\pi \left[u(0)^2 - v(0)^2 \right] = 0,$$

tức là ta có

$$\int_0^{2\pi} u\left(re^{i\theta}\right)^2 d\theta = \int_0^{2\pi} v\left(re^{i\theta}\right)^2 d\theta.$$

Đây chính là điều cần chứng minh.

Đề 68 (Wisconsin-Madison 2010F). Cho f là hàm giải tích trên miền nằm ngang

$$S = \{x + iy : \quad x \in \mathbb{R}, \ -1 < y < 1\}$$

thỏa mãn

$$|f(z)| \le (1 + |z|)^5$$

với mọi $z \in S$. Chứng minh rằng với mọi $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$ tồn tại hằng số C_n không phụ thuộc f sao cho

$$\left|f^{(n)}(x)\right| \leq C_n (1 + |x|)^5 \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Giải. Dễ dàng nhận thấy được $C_0 = 1$. Với $n \geq 1$, theo Ước lượng Cauchy, ta có

$$\left|f^{(n)}(x)\right| = \left|\frac{n!}{2\pi i} \oint_{|\zeta - x| = r} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - x)^{n+1}} d\zeta\right| \leq n! \frac{\sup_{|\zeta - x| = r} (1 + |\zeta|)^5}{r^n}$$

với $r < 1$ là số thực dương. Như vậy

$$\frac{\left|f^{(n)}(x)\right|}{(1 + |x|)^5} \leq \frac{n!}{r^n} . \left(\frac{1 + |x| + r}{1 + |x|}\right)^5 = \frac{n!}{r^n} . \left(1 + \frac{r}{1 + |x|}\right)^5 \leq \frac{n!}{r^n} (1 + r)^5 .$$

Cho r dần về 1, ta được

$$\left|f^{(n)}(x)\right| \leq 32.n! (1 + |x|)^5 .$$

Vậy với $C_n = 32.n!$, ta có điều phải chứng minh.

Đề 69 (Wisconsin-Madison 2010S). Cho f là hàm giải tích trên $D(0, 1)$ và giả sử rằng

$$\iint_{D(0,1)} |f'(x + iy)|^2 \, dx\, dy = M^2 < +\infty.$$

(a) Nếu $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, chứng minh rằng

$$M^2 = \pi \sum_{n=1}^{\infty} n |a_n|^2 .$$

(b) Chứng minh

$$\sup_{0 \leq r < 1} \int_0^{2\pi} \left|f\left(re^{i\theta}\right)\right|^2 d\theta < +\infty.$$

(c) Chứng minh tồn tại các hằng số thực $C, \alpha > 0$ sao cho $|f'(z)| \leq C(1-|z|)^{-\alpha}$ với mọi $z \in D(0,1)$. Tìm giá trị nhỏ nhất có thể của α.

Giải.

(a) Ta có

$$f'\left(re^{i\theta}\right) = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\,a_{n+1}r^n e^{in\theta}.$$

Do đó theo đẳng thức Parseval thì

$$\begin{aligned}
\iint_{D(0,1)} |f'(x+iy)|^2\, dx\, dy &= \iint_{D(0,1)} \left|f'\left(re^{i\theta}\right)\right|^2 r\, dr\, d\theta \\
&= \int_0^1 \left(\int_0^{2\pi}\left[\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\,a_{n+1}r^n e^{in\theta}\right]\left[\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\,\overline{a_{n+1}}r^n e^{-in\theta}\right] d\theta\right) r\, dr \\
&= \int_0^1 \left(2\pi\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)^2\,|a_{n+1}|^2\, r^{2n}\right) r\, dr \\
&= 2\pi\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+1)^2\,|a_{n+1}|^2}{2n+2} \\
&= \pi\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\,|a_{n+1}|^2 \\
&= \pi\sum_{n=1}^{\infty} n\,|a_n|^2
\end{aligned}$$

Vậy ta có

$$M^2 = \pi\sum_{n=1}^{\infty} n\,|a_n|^2\,.$$

(b) Ta có

$$\int_0^{2\pi}\left|f\left(re^{i\theta}\right)\right|^2 d\theta = \int_0^{2\pi}\left(\sum_{n=0}^{\infty}a_n r^n e^{in\theta}\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty}\overline{a_n}r^n e^{-in\theta}\right) d\theta$$

$$\begin{aligned} &= \int_0^{2\pi} \left(\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 r^{2n} \right) d\theta \\ &= 2\pi \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 r^{2n} \end{aligned}$$

nên suy ra

$$\int_0^{2\pi} \left| f\left(re^{i\theta}\right) \right|^2 d\theta = 2\pi \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 r^{2n} \leq 2\pi |a_0|^2 + 2\pi \sum_{n=1}^{\infty} n |a_n|^2 \leq 2\pi |a_0|^2 + 2M^2.$$

Do đó

$$\sup_{0 \leq r < 1} \int_0^{2\pi} \left| f\left(re^{i\theta}\right) \right|^2 d\theta \leq 2\pi |a_0|^2 + 2M^2 < +\infty.$$

(c) Theo bất đẳng thức Holder (với độ đo rời rạc), ta có

$$\left[\sum_{n=1}^{\infty} n |a_n|^2 \right] \left[\sum_{n=1}^{\infty} n |z|^{2n-2} \right] \geq \left[\sum_{n=1}^{\infty} n |a_n| |z|^{n-1} \right]^2.$$

Do vậy

$$\frac{M^2}{\pi} . \frac{1}{\left(1 - |z|^2\right)^2} \geq |f'(z)|^2,$$

ta suy ra

$$|f'(z)| \leq \frac{M}{\sqrt{\pi}\left(1 - |z|^2\right)} = \frac{\frac{M}{\sqrt{\pi}}}{(1 - |z|)(1 + |z|)} \leq \frac{\frac{M}{\sqrt{\pi}}}{1 - |z|}.$$

Vậy $C = \frac{M}{\sqrt{\pi}}$ và $\alpha = 1$ là các hằng số dương cần tìm. Giờ ta sẽ chứng minh $\alpha = 1$ là hằng số nhỏ nhất có thể, tức nếu tồn tại $\alpha < 1$ sao cho

$$|f'(z)| \leq \frac{C_f}{(1 - |z|)^\alpha} \qquad \forall z \in D(0,1)$$

với mọi f thỏa

$$\iint_{D(0,1)} |f'(x+iy)|^2 \, dx\, dy < +\infty$$

thì sẽ có điều vô lý. Xét hàm f giải tích trên $D(0,1)$ xác định bởi chuỗi Taylor

$$f(z) = \sum_{z=0}^{\infty} \frac{z^n}{n^{1+\varepsilon}},$$

ta có $\iint_{D(0,1)} |f'(x+iy)|^2 \, dx\, dy < +\infty$ vì chuỗi sau hội tụ

$$\sum_{n=1}^{\infty} n\,|a_n|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+2\varepsilon}}.$$

Do đó, theo giả sử, tồn tại hằng số $C_f > 0$ sao cho

$$|f'(|z|)| = \sum_{z=1}^{\infty} \frac{|z|^{n-1}}{n^{\varepsilon}} < \frac{C_f}{(1-|z|)^{\alpha}} = C_f\left(1 + \frac{\alpha}{1}z + \frac{\alpha(\alpha+1)}{2!}z^2 + \frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+3)}{3!}z^3 + \dots\right).$$

Với ε đủ nhỏ sao cho $\alpha < 1-\varepsilon < 1$, tồn tại số $\beta \in (\alpha, 1-\varepsilon)$, ta sẽ chứng minh rằng tồn tại $A > 0$ để

$$A\sum_{z=1}^{\infty} \frac{|z|^{n-1}}{n^{\varepsilon}} > \frac{1}{(1-|z|)^{\beta}} = 1 + \frac{\beta}{1}|z| + \frac{\beta(\beta+1)}{2!}|z|^2 + \frac{\beta(\beta+1)(\beta+3)}{3!}|z|^3 + \dots$$

với mọi $z \in D(0,1)$ bằng cách chỉ ra rằng

$$\frac{\beta+n-1}{n} < \left(\frac{n-1}{n}\right)^{\varepsilon} \qquad (0.0.11)$$

từ một $n > N$ đủ lớn nào đó. Thật vậy bất đẳng thức (0.0.11) tương đương với

$$\beta < (n-1)\left[\left(\frac{n}{n-1}\right)^{1-\varepsilon} - 1\right],$$

nhưng ta lại có

$$\lim_{n\to\infty}(n-1)\left[\left(\frac{n}{n-1}\right)^{1-\varepsilon}-1\right]=\lim_{t\to 0}\frac{(1+t)^{1-\varepsilon}-1}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{(1-\varepsilon)(1+t)^{-\varepsilon}}{1}=1-\varepsilon>\beta$$

với $t=\frac{1}{n-1}$. Do vậy, tồn tại $N\in\mathbb{N}$ để (0.0.11) đúng với mọi $n>N$, do vậy, chọn

$$\lambda=2+\max\left\{\frac{\frac{\beta+n-1}{n}}{\left(\frac{n-1}{n}\right)^{\varepsilon}}\ :\quad 1<n\leq N\right\},$$

ta có

$$\frac{\beta}{1}.\frac{\beta+1}{2}\ldots\frac{\beta+n-1}{n}<\lambda^{N}.\left(\frac{1}{2}.\frac{2}{3}\ldots\frac{n-1}{n}\right)^{\varepsilon}=\frac{\lambda^{N}}{n^{\varepsilon}}<\frac{\lambda^{N+1}}{(n+1)^{\varepsilon}}\quad\forall n\in\mathbb{N}.$$

Do đó nếu đặt $A=\lambda^{N+1}$, ta có

$$Af'(|z|)=\sum_{z=0}^{\infty}\frac{\lambda^{N+1}}{(n+1)^{\varepsilon}}|z|^{n}>1+\frac{\beta}{1}|z|+\frac{\beta(\beta+1)}{2!}|z|^{2}+\cdots=\frac{1}{(1-|z|)^{\beta}}.$$

Vì vậy, điều giả sử cho ta sự tồn tại của một số thực $C_f>0$ để

$$\frac{1}{(1-|z|)^{\beta}}<\frac{AC_f}{(1-|z|)^{\alpha}},$$

tức nếu đặt $x=|z|$, ta có

$$AC_f>(1-x)^{\alpha-\beta}\qquad\forall x\in[0,1).$$

Do $\alpha-\beta<0$ nên khi x dần về 1, vế trái sẽ dần về vô cùng. Điều này mâu thuẫn với việc nó bị chặn bởi AC_f và kết thúc chứng minh.

Đề 70 (Wisconsin-Madison 2010S). Cho miền nằm ngang S có độ dày là π như sau

$$S = \left\{ w \in \mathbb{C} : \ |\mathrm{Im}\,(w)| < \frac{\pi}{2} \right\}.$$

(a) Tìm một song ánh giải tích $\Phi : S \to D\,(0,1)$ có hàm ngược cũng giải tích.

(b) Cho $f : S \to S$ giải tích với $f\,(0) = 0$. Chứng minh rằng

$$\left| \frac{e^{f(z)} - 1}{e^{f(z)} + 1} \right| \leq \left| \frac{e^{z} - 1}{e^{z} + 1} \right|.$$

(c) Cho $f : S \to S$ giải tích với $f\,(0) = 0$. Ta có thể kết luận được gì nếu $f'\,(0) = 1$? Vì sao?

Giải.

(a) Ta thiết lập Φ như hợp nối của các phép biến đổi sau:

- $\varphi_1\,(z) = e^z$ biến S thành A_1 là nửa mặt phẳng bên phải, trong đó biến 0 thành 1.
- $\varphi_2\,(z) = \frac{z-1}{z+1}$ biến A_1 thành $D\,(0,1)$, trong đó biến 1 thành 0.

Vậy nếu chọn $\Phi = \varphi_2 \circ \varphi_1$, ta sẽ có Φ là song ánh và giải tích từ S vào $D\,(0,1)$, biến 0 thành 0. Hàm ngược của Φ hiển nhiên giải tích theo yêu cầu.

(b) Xét song ánh giải tích g từ S vào S xác định bởi

$$g = \Phi \circ f \circ \Phi^{-1},$$

khi đó ta có $f = \Phi^{-1} \circ g \circ \Phi$ và $g(0) = \Phi(f(\Phi^{-1}(0))) = 0$. Nên theo bổ đề Schwarz thì $|g(z)| \leq |z|$ với mọi $z \in D(0,1)$. Do vậy ta có

$$|\Phi(f(z))| = |g(\Phi(z))| \leq |\Phi(z)|,$$

tức là

$$\left|\frac{e^{f(z)}-1}{e^{f(z)}+1}\right| \leq \left|\frac{e^z-1}{e^z+1}\right|.$$

(c) Theo quy tắc đạo hàn của hàm hợp, ta có

$$f'(0) = \left(\Phi^{-1}\right)'(0) . g'(0) . \Phi'(0) = g'(0).$$

Do vậy nếu $f'(0) = 1$ thì theo bổ đề Schwarz, g phải là phép quay, tức có dạng

$$g(z) = \lambda z, \quad |\lambda| = 1.$$

Khi đó f phải có dạng

$$f = \Phi^{-1} \circ \lambda \mathrm{Id}_{D(0,1)} \circ \Phi \quad \text{với } \Phi = \frac{e^z-1}{e^z+1}.$$

Đề 71 (Wisconsin-Madison 2009F). Cho $F : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ là hàm nguyên.

(a) Chứng minh rằng nếu

$$\iint_{\mathbb{C}} |F(x+iy)|^2 \, dx \, dy < +\infty$$

thì $F(z) = 0$ với mọi $z \in \mathbb{C}$.

(b) Giả sử F khác hàm hằng. Chứng minh rằng với mọi $w \in \mathbb{C}$ và $\varepsilon > 0$, tồn tại $z \in \mathbb{C}$ sao cho

$$|F(z) - w| < \varepsilon.$$

(*Lưu ý: Không dùng Định lý Picard*)

(c) Giả sử rằng với mọi $w \in \mathbb{C}$, phương trình $F(z) = w$ có tối đa một nghiệm. Chứng minh rằng tồn tại các số phức $a \neq 0$ và b sao cho

$$F(z) = az + b.$$

Giải.

(a) Xét khai triển Taylor của f như sau

$$F(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n,$$

ta có

$$\begin{aligned}
\iint_{x^2+y^2<R} |F(x+iy)|^2 \, dx\, dy &= \iint_{r<R} rF\left(re^{i\theta}\right) \overline{F\left(re^{i\theta}\right)}\, dr\, d\theta \\
&= \iint_{r<R} r \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n e^{in\theta}\right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} \overline{a_n} r^n e^{-in\theta}\right) dr\, d\theta \\
&= \iint_{r<R} \left(\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 r^{2n+1}\right) dr\, d\theta \\
&= 2\pi \int_0^R \left(\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 r^{2n+1}\right) dr \\
&= 2\pi \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|a_n|^2}{2n+2} R^{2n+2}
\end{aligned}$$

Vậy nên nếu đặt

$$M = \iint_{\mathbb{C}} |F(x+iy)|^2 \, dx\, dy$$

thì ta suy ra

$$|a_n|^2 \leq \frac{(2n+2)\, M}{R^{2n+2}}$$

với mọi $R > 0$. Cho R dần về vô cùng, ta có $a_n = 0$ với mọi $n \in \mathbb{N}$, chứng tỏ F triệt tiêu trên toàn $\mathbb{C}$.

(b) Giả sử phản chứng rằng tồn tại $w_0 \in \mathbb{C}$ và $\varepsilon > 0$ sao cho

$$|F(z) - w_0| > \varepsilon \quad \forall z \in \mathbb{C}.$$

Khi đó xét

$$g(z) = \frac{1}{F(z) - w_0},$$

ta có g là hàm nguyên và bị chặn vì

$$|g(z)| = \frac{1}{|F(z) - w_0|} < \frac{1}{\varepsilon}.$$

Vậy ta suy ra g là hàm hằng, từ đó ta được F cũng là hàm hằng. Điều này mâu thuẫn và kết thúc chứng minh.

(c) Ta sẽ chứng minh mọi hàm nguyên F nếu là đơn ánh thì phải có dạng $az + b$. Thật vậy, xét hàm

$$g(z) = F\left(\frac{1}{z}\right),$$

ta suy ra g giải tích trên $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ và là đơn ánh. Nếu 0 là điểm kì dị bỏ được của g, ta suy ra $g(z)$ bị chặn trên $D(0,r)$, tức $F(z)$ bị chặn trên $\mathbb{C} \setminus \overline{D\left(0, \frac{1}{r}\right)}$. Kết hợp với việc F bị chặn trên compact $\overline{D\left(0, \frac{1}{r}\right)}$, ta suy ra F bị chặn và phải là hàm hằng. Điều này mẫu thuẫn với việc F đơn ánh.

Nếu 0 là một điểm kì dị cốt yếu của g, theo Định lý Casorati-Weierstrass, ta có $g(D(0,1) \setminus \{0\})$ trù mật trong $\mathbb{C}$. Mặt khác $g(D(0,1) \setminus \{0\})$ không có giao với tập mở $g\left(\mathbb{C} \setminus \overline{D(0,1)}\right)$ do tính đơn ánh của g. Mâu thuẫn này chứng tỏ 0 phải là một cực của g.

Nếu F không là đa thức, ta suy ra

$$F(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

với a_n không triệt tiêu kể từ một chỉ số nào đó. Như vậy chuỗi Laurent của g có dạng

$$g(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{-n}.$$

Vì các hệ số của chuỗi Laurent là duy nhất nên ta suy ra 0 không phải là cực của g. Điều này mâu thuẫn với nhận định của ta và chứng tỏ F phải là đa thức. Nếu bậc của F lớn hơn 2, hiên nhiên F có nhiều hơn 1 không điểm và do đó không là đơn ánh. Do vậy F phải có dạng

$$F(z)=az+b$$

với a, b là các số phức và $a \neq 0$.

Đề 72 (Wisconsin-Madison 2009F). Cho f là hàm giải tích trên $D(0,1)$.

(a) Giả sử $|f(z)| \leq 1$ với mọi $z \in D(0,1)$. Chứng minh rằng

$$\left|f^{(N)}(z)\right| \leq \frac{N!}{(1-|z|)^N}$$

với mọi $N \geq 1$ và $z \in D(0,1)$.

(b) Giả sử $|f(z)| \leq 1$ với mọi $z \in D(0,1)$. Gọi $0 \neq w_j \in D(0,1)$, $j=\overline{1,N}$, là các không điểm (tính cả bội) của f. Chứng minh rằng

$$|f(0)| \leq \prod_{j=1}^{N} |w_j|.$$

Ta có thể kết luận được gì khi đẳng thức xảy ra?

(c) Cho $\{x_n\}$ là dãy các số thực phân biệt thỏa mãn $|x_n| < \frac{1}{2}$ với mọi $n \geq 1$ và giả sử rằng $f(x_n)$ là số thực với mọi $n \geq 1$. Chứng minh rằng

$$f(\overline{z}) = \overline{f(z)}$$

với mọi $z \in D(0,1)$.

Giải.

(a) Theo ước lượng Cauchy, với mọi r sao cho $\overline{D(z,r)}$ chứa trong $D(0,1)$, tức $r < 1 - |z|$, ta có

$$\left|f^{(N)}(z)\right| = \left|\frac{N!}{2\pi i}\oint_{|\zeta - z| = r} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{N+1}}\,d\zeta\right| \leq \frac{N!}{r^N}.$$

Cho r dần về $1 - |z|$, ta có

$$\left|f^{(N)}(z)\right| \leq \frac{N!}{(1 - |z|)^N}$$

với mọi $z \in D(0,1)$.

(b) Đặt

$$f(z) = \prod_{j=1}^{N} \frac{z - w_j}{1 - \overline{w_j} z} g(z),$$

lập luận tương tự Đề 73 (Wisconsin-Madison 2009S)., ta có được

$$|g(z)| \leq 1 \qquad \forall z \in D(0,1).$$

Do đó ta có

$$|f(0)| \leq \prod_{j=1}^{N} |w_j|.$$

Nếu đẳng thức xảy ra, ta có g có modulus đạt cực đại tại 0 nên là hàm hằng. Do vậy f phải có dạng

$$f(z) = \prod_{j=1}^{N} \frac{z - w_j}{1 - \overline{w_j} z}.$$

(c) Gọi $u = \operatorname{Im}(f) = \operatorname{Re}(g)$ với $g = -if$, ta có $u(x_n) = 0$ với mọi $n \in \mathbb{N}$. Thật ra hàm u sẽ bằng 0 trên toàn phần giao của trục thực và miền xác định. Để cho thấy điều này, ta sẽ chứng minh u đúng bằng khai triển Taylor của chính nó tại 0. Giả sử $g = u + iv$, ta có

$$\begin{aligned}
g'(z) &= \frac{\partial u}{\partial x} - i\frac{\partial u}{\partial y} \\
g''(z) &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - i\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \\
&\vdots \\
g^{(n)}(z) &= \frac{\partial^n u}{\partial x^n} - i\frac{\partial^n u}{\partial x^{n-1}\partial y}
\end{aligned}$$

Do vậy ta có

$$\left|\frac{\partial^n u}{\partial x^n}(0)\right| \le \left|g^{(n)}(0)\right| \le \frac{\max_{|z|\le\frac{1}{2}} |g(z)|}{\left(\frac{1}{2}\right)^n} = \frac{\max_{|z|\le\frac{1}{2}} |f(z)|}{\left(\frac{1}{2}\right)^n},$$

theo Ước lượng Cauchy. Như vậy tồn tại $A > 0$ để

$$\left|\frac{\partial^n u}{\partial x^n}(0)\right| \le 2^n A,$$

suy ra phần dư Taylor

$$\left|\frac{\frac{\partial^n u}{\partial x^n}(s)}{n!}(x-0)^n\right| \le \frac{A\,|2x|^n}{n!}$$

hội tụ về 0 khi n dần ra vô cùng, tức khai triển Taylor (thực) của u tại 0 sẽ hội tụ về u. Giả sử chuỗi này là

$$u(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n,$$

ta xét hàm giải tích sau

$$h(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n,$$

ta thấy hàm này được định nghĩa tốt vì bán kính hội tụ với chuỗi thực và chuỗi phức là bằng nhau. Mặt khác, ta có

$$h(x_n) = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

và dãy $\{x_n\}$ có điểm tụ trong $\overline{D\left(0, \frac{1}{2}\right)}$, do vậy ta suy ra $h \equiv 0$, chứng tỏ $u(x) = 0$ với mọi $x \in (-1, 1)$, tức $f(z) \in \mathbb{R}$ với mọi $z \in \mathbb{R}$ trong miền xác định.

Giờ theo Nguyên lý đối xứng Schwarz, hàm thu hẹp của f trên phần nửa mặt phẳng trên có mở rộng là hàm F giải tích trên $D(0, 1)$ thỏa mãn

$$F(\overline{z}) = \overline{F(z)} \quad \forall z \in D(0, 1).$$

Do $f(z) = F(z)$ tại vô hạn không đếm được các điểm thuộc nửa hình tròn trên, ta suy ra $f \equiv F$ trên $D(0, 1)$, chứng tỏ

$$F(\overline{z}) = \overline{F(z)} \quad \forall z \in D(0, 1).$$

Ghi chú. Thực ra, ta có tính chất: Mọi hàm điều hòa u đều *giải tích thực* (*real analytic*), tức với mọi x_0 thuộc trục thực và nằm trong miền xác định của u, tồn tại các số thực $\{a_n\}$ sao cho

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n \quad \forall x \in (x_0 - r, x_0 + r).$$

Phần chứng minh của tính chất này có thể được thực hiện tương tự như trong lời giải trên.

Đề 73 (Wisconsin-Madison 2009S). Cho f là hàm giải tích trên $D(0,1)$ và $|f(z)| \leq 1$ với mọi $z \in D(0,1)$.

(a) Nếu $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ là khai triển Taylor của f, chứng minh rằng

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 \leq 1.$$

(b) Nếu

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = f\left(-\frac{1}{2}\right) = 0,$$

chứng minh rằng

$$|f(z)| \leq \left|\frac{4z^2-1}{4-z^2}\right|$$

với mọi $z \in D(0,1)$.

Giải.

(a) Ta có

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left|f\left(re^{i\theta}\right)\right|^2 d\theta &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f\left(re^{i\theta}\right)\overline{f\left(re^{i\theta}\right)}\, d\theta \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n e^{in\theta}\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} \overline{a_n} r^n e^{-in\theta}\right) d\theta \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|\, r^{2n}\, d\theta \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|\, r^{2n}
\end{aligned}$$

Do đó ta có được

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| \, r^{2n} \leq 1$$

với mọi $r < 1$. Cho r dần về 1, ta suy ra

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 \leq 1.$$

(b) Do $f\left(\frac{1}{2}\right) = f\left(-\frac{1}{2}\right) = 0$ nên f có thể viết dưới dạng

$$f(z) = \frac{z - \frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}z} . \frac{z + \frac{1}{2}}{1 + \frac{1}{2}z} . g(z)$$

Do hàm $\frac{z-\alpha}{1-\overline{\alpha}z}$, với $\alpha \in D(0,1)$, giải tích trên $\overline{D(0,1)}$, là song ánh từ $D(0,1)$ vào $D(0,1)$ và giữ nguyên đường tròn đơn vị. Do đó ta suy ra

$$\lim_{|z| \to 1} \left| \frac{z - \alpha}{1 - \overline{\alpha}z} \right| = 1.$$

Thật vậy, giả sử tồn tại dãy $\{z_n\}$ trong $D(0,1)$ sao cho $|z_n| \to 1$ và

$$\left| \frac{z_n - \alpha}{1 - \overline{\alpha}z_n} \right| < 1 - \varepsilon,$$

do $\overline{D(0,1)}$ là compact nên ta tìm được dãy con $\{z_{n_k}\}$ hội tụ về z_0 với $|z_0| = 1$ và

$$\left| \frac{z_0 - \alpha}{1 - \overline{\alpha}z_0} \right| < 1 - \varepsilon.$$

Điều này mẫu thuẫn với việc f giữ nguyên đường tròn đơn vì và chứng tỏ

$$\lim_{|z| \to 1} \left| \frac{z - \alpha}{1 - \overline{\alpha}z} \right| = 1.$$

Với mọi $z \in D(0,1)$ thỏa mãn $|z| \leq R < 1$, ta có

$$|g(z)| \leq \max_{|\zeta|=R} |g(\zeta)| = \max_{|\zeta|=R} \left| \frac{\zeta - \frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}\zeta} \right|^{-1} \cdot \left| \frac{\zeta + \frac{1}{2}}{1 + \frac{1}{2}\zeta} \right|^{-1}$$

Cho $R \to 1$, ta có

$$|g(z)| \leq 1 \quad \forall z \in D(0,1).$$

Vậy nên

$$|f(z)| \leq \left| \frac{z - \frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}z} \right| \cdot \left| \frac{z + \frac{1}{2}}{1 + \frac{1}{2}z} \right| = \left| \frac{4z^2 - 1}{4 - z^2} \right|.$$

Đề 74 (Wisconsin-Madison 2009S).

(a) Cho $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ là hàm nguyên. Giả sử

$$\lim_{|z| \to \infty} |f(z)| = +\infty,$$

chứng minh rằng f là đa thức.

(b) Kết luận ở câu (a) có còn đúng hay không nếu ta thay giả thiết bởi: Với mỗi $\theta \in [0, 2\pi]$ thì

$$\lim_{r \to \infty} \left| f\left(re^{i\theta}\right) \right| = +\infty$$

Giải.

(a) Xét $g(z) = f\left(\frac{1}{z}\right)$, ta có g là hàm giải tích trên $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. Nếu f không là đa thức, tức

$$g(z) = f\left(\frac{1}{z}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{-n}$$

với $\{a_n\}$ là dãy các hệ số trong khai triển Taylor của f không bị triệt tiêu kể từ một lúc nào đó. Do đó ta suy ra 0 là điểm kì dị cốt yếu của g. Do

$$\lim_{|z|\to\infty} |f(z)| = +\infty,$$

ta suy ra tồn tại $R > 0$ đủ lớn để

$$|f(z)| > 1 \quad \forall z \in \mathbb{C} : \ |z| > R,$$

tức

$$|g(z)| > 1 \quad \forall z \in D\left(0, \frac{1}{R}\right).$$

Nhưng theo Định lý Casorati-Weierstrass, ta có $g\left(D\left(0, \frac{1}{R}\right)\right)$ trù mật trong $\mathbb{C}$, điều này mâu thuẫn với việc $g\left(D\left(0, \frac{1}{R}\right)\right) \cap D(0,1) = \emptyset$ và kết thúc chứng minh.

(b) Ta chứng minh rằng trong trường hợp này kết luận đã cho sẽ SAI. Thật vậy, xét hàm nguyên

$$f(z) = z + e^z,$$

ta có

$$f\left(re^{i\theta}\right) = re^{i\theta} + e^{r(\cos\theta + i\sin\theta)} = re^{i\theta} + e^{r\cos\theta}\left[\cos(\sin\theta) + i\sin(\sin\theta)\right].$$

Nếu $\cos\theta \leq 0$, ta có

$$\left|f\left(re^{i\theta}\right)\right| \geq r - 1$$

nên dần về vô cùng khi $r \to +\infty$. Trong trường hợp $\cos\theta > 0$, ta được

$$\left|f\left(re^{i\theta}\right)\right| \geq e^{r\cos\theta} - r,$$

cũng dần về vô cùng khi $r \to +\infty$. Vậy trong mọi trường hợp, hàm f đều thỏa

$$\lim_{r\to\infty} \left|f\left(re^{i\theta}\right)\right| = +\infty$$

nhưng rõ ràng nó không là đa thức.

Chỉ mục

Tài liệu tham khảo

[1] Lars Valerian Ahlfors. *Complex Analysis*. McGraw-Hill, 1966.

[2] Walter Rudin. *Real and Complex Analysis*. McGraw-Hil, 1970.

[3] Chen Ji-Xiu Ta-Tsien Li. *Problems and Solutions in Mathematics*. World Scientific, 2003.

[4] David A. Wunsch. *Complex Variables With Applications*. Addison Wesley, 1983.