

PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN BIẾN NGẪU NHIÊN

Định nghĩa. Cho $\{W(t)\}$ là một tiến trình Wiener trong một không gian xác suất (Ω, \mathcal{A}, P) , X_0 là hàm thực trên Ω , f và g là hàm thực trên $[0, T] \times \Omega$ và $\{X(t)\}$ là tiến trình ngẫu nhiên sao cho $\forall r \in (0, T]$

$$X(t, \omega) = X_0 + \int_0^t f(s, X(s, \omega)) dt + \int_0^t g(s, X(s, \omega)) dW,$$

hay $dX(t, \omega) = f(t, X(t, \omega)) dt + g(t, X(t, \omega)) dW$. Ta nói

X là nghiệm của phương trình vi phân ngẫu nhiên

$$(S) \begin{cases} \frac{dX(t)}{dt} = f(t, X(t)) + g(t, X(t)) \frac{dW(t)}{dt} & \forall t \in (0, T], \\ X(0) = X_0 \quad . \end{cases}$$

Chúng ta cần nêu rõ các điều kiện sao cho các tích phân Itô trong định nghĩa trên xác định.

Định nghĩa. Cho một số thực T dương, ta ký hiệu S_T là tập hợp các hàm số liên tục h trên $[0, T] \times \mathbb{R}$ có các tính chất sau : có một hằng số C phụ thuộc vào h và T sao cho

$$(C1) \quad |h(t, x)| \leq C(1 + |x|) \quad \forall t \in [0, T], x \in \mathbb{R},$$

$$(C2) \quad |h(t, x) - h(s, y)|^2 \leq C(|t - s| + |x - y|^2) \\ \forall t, s \in [0, T], x, y \in \mathbb{R}.$$

Bài toán 3.1. Cho họ $\{\mathcal{F}(t)\}$ nonanticipating đối với một tiến trình Wiener $\{W(t)\}$ trong một không gian xác suất (Ω, \mathcal{A}, P) . Cho $h \in S_T$, $X \in \mathbb{H}^1(0, T, \{\mathcal{F}(t)\})$ và $U \in \mathbb{H}^2(0, T, \{\mathcal{F}(t)\})$. Đặt $Y(t)(\omega) = h(t, X(t)(\omega))$ và $V(t)(\omega) = h(t, U(t)(\omega))$ với mọi $(t, \omega) \in [0, T] \times \Omega$. Chứng minh $Y \in \mathbb{H}^1(0, T, \{\mathcal{F}(t)\})$ và $V \in \mathbb{H}^2(0, T, \{\mathcal{F}(t)\})$.

H.D. Dùng tính liên tục của h chứng minh $Y(t)$ và $V(t)$ đo được trên $(\Omega, \mathcal{F}_{X(t)})$, nên đo được trên $(\Omega, \mathcal{F}(t))$. Dùng $X \in \mathbb{H}^1(0, T, \{\mathcal{F}(t)\})$ và $U \in \mathbb{H}^2(0, T, \{\mathcal{F}(t)\})$ và (C1), chứng minh $Y \in \mathbb{H}^1(0, T, \{\mathcal{F}(t)\})$ và $V \in \mathbb{H}^2(0, T, \{\mathcal{F}(t)\})$.

Bài toán 3.2. Cho một họ $\{\mathcal{F}(t)\}$ nonanticipating đối với một tiến trình Wiener $\{W(t)\}$ trong một không gian xác suất (Ω, \mathcal{A}, P) . Cho f và $g \in \mathcal{S}_T$, X_0 là một hàm thực đo được trên $(\Omega, \mathcal{F}(0))$ và $X_0 \in L^2(\Omega)$. Đặt

$$Y(t, \omega) = X_0(\omega) + \int_0^t f(s, X(s, \omega)) dt + \int_0^t g(s, X(s, \omega)) dW$$

$$\forall X \in \mathbb{H}^2(0, T, \{\mathcal{F}(t)\}), \forall (t, \omega) \in [0, t] \times \Omega.$$

Chứng minh $Y \in \mathbb{H}^2(0, T, \{\mathcal{F}(t)\})$.

H.D. Dùng (C1) và các bài tập 3.1 và 2.3

Đặt $H = \mathbb{H}^2(0, T, \{\mathcal{F}(t)\})$ và $A(X) = Y$ với mọi $X \in H$. Ta thấy A là một ánh xạ từ H vào H và có tính chất sau

Bài toán 3.3. Đặt $L = 2TC + 2C$, ta có

$$(i) \quad \int_{\Omega} |A(X)(t, \omega) - A(Y)(t, \omega)|^2 dP \leq \\ \leq L \int_0^t \int_{\Omega} |X(s, \omega) - Y(s, \omega)|^2 dP ds \quad \forall X, Y \in H.$$

$$(ii) \quad \|A^n(X) - A^n(Y)\| \leq \frac{L^{n-1} T^n}{n!} \|X - Y\| \quad \forall X, Y \in H,$$

ở đây $A^{k+1}(X) = A(A^k(X))$, với mọi $X \in H$.

H.D. Ta có

$$A(X)(t) - A(Y)(t) = \int_0^t [f(s, X(s)) - f(s, Y(s))] ds \\ + \int_0^t [g(s, X(s)) - g(s, Y(s))] dW,$$

Dùng bất đẳng thức Schwartz và bài tập 2.2 ta có

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} |A(X)(t, \omega) - A(Y)(t, \omega)|^2 dP \leq \\ & \leq 2t \int_0^t \int_{\Omega} |f(s, X(s)) - f(s, Y(s))|^2 dP ds \\ & \quad + \int_0^t \int_{\Omega} |g(s, X(s)) - g(s, Y(s))|^2 dP dW \\ & \leq 2Ct \int_0^t \int_{\Omega} |X(s) - Y(s)|^2 dP ds \\ & \quad + 2C \int_0^t \int_{\Omega} |X(s) - Y(s)|^2 dP ds \\ & \leq L \int_0^t \int_{\Omega} |X(t, \omega) - Y(t, \omega)|^2 dP ds . \end{aligned}$$

$$\text{Đặt } a_n = \int_{\Omega} |A^n(X)(t, \omega) - A^n(Y)(t, \omega)|^2 dP \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Theo bài toán trên, ta có

$$\begin{aligned} a_n(t) &\leq L \int_0^t a_{n-1}(s_1) ds_1 \leq L^2 \int_0^t \int_0^{s_1} a_{n-1}(s_2) ds_2 ds_1 \\ &\leq \dots \leq L^n \int_0^t \int_0^{s_1} \dots \int_0^{s_{n-1}} a_0(s_n) ds_n \dots ds_2 ds_1 \\ &\leq \frac{L^n t^{n-1}}{(n-1)!} \int_0^T a_0(s_n) ds_n = \frac{L^n t^{n-1}}{(n-1)!} \|X - Y\|^2. \end{aligned}$$

Từ đó suy ra (ii).

Bài toán 3.4. Có duy nhất một $X \in H$ sao cho $A(X) = X$

H.D. Để ý A^n là ánh xạ co khi n khá lớn.

Từ đây ta có kết quả sau

Định lý . Cho một họ $\{\mathcal{F}(t)\}$ nonanticipating đối với một tiến trình Wiener $\{W(t)\}$ trong không gian xác suất (Ω, \mathcal{A}, P) . Cho f và $g \in S_T$, X_0 là một hàm thực đo được trên $(\Omega, \mathcal{F}(0))$ và $X_0 \in L^2(\Omega)$. Lúc đó có một nghiệm duy nhất trong $\mathbb{H}^2(0, T, \{\mathcal{F}(t)\})$ của phương

trình

$$(S) \begin{cases} \frac{dX(t)}{dt} = f(t, X(t)) + g(t, X(t)) \frac{dW(t)}{dt} & \forall t \in (0, T], \\ X(0) = X_0 \quad . \end{cases}$$

Bài toán 3.5. Giải phương trình vi phân ngẫu nhiên

$$(S) \quad \begin{cases} \frac{dX}{dt}(t) = 1 + 2W(t) \frac{dW}{dt}(t) & \forall t \in (0, T], \\ X(0) = 0 \quad . \end{cases}$$

H.D. Theo bài toán 2.4. ta có

$$W^2(t) = T + 2 \int_0^T W dW = \int_0^T 1 dt + 2 \int_0^T W dW$$

Vậy $X(t) = W^2(t)$ là nghiệm của phương trình vi phân biến ngẫu nhiên (S)

Bài toán 3.5. Giải phương trình vi phân ngẫu nhiên

$$(S) \quad \begin{cases} \frac{dX}{dt}(t) = W(t) + t \frac{dW}{dt}(t) & \forall t \in (0, T], \\ X(0) = 0 \quad . \end{cases}$$

H.D. Đặt $X = tW$. Theo bài toán 2.5

$$rW(r, \omega) = \int_0^r W(t, \omega) dt + \int_0^r t dW.$$

cuu duong than cong. com

Bài toán 3.6. Cho f là một hàm số thực khả vi trên \mathbb{R} . Giải phương trình vi phân ngẫu nhiên

$$(S) \quad \begin{cases} \frac{dX}{dt}(t) = f(t) & \forall t \in (0, T], \\ X(0) = 0 \quad . \end{cases}$$

cuuduongthancong.com

H.D. Theo bài toán 2.6

$$X(r) = X(s) + \int_s^r f' dt \quad \forall \quad 0 \leq s < r \leq T$$

cuuduongthancong.com

Bài toán 3.7. Cho f là một hàm thực khả vi trên \mathbb{R} , (Ω, \mathcal{A}, P) là một tiến trình ngẫu nhiên trong không gian xác suất với tiến trình Wiener $\{W(t)\}$, sao cho $X(t, \omega) = f(t)F(\omega)$ với mọi $t \in [0, T]$, $\omega \in \Omega$, và F là một biến ngẫu nhiên khả tích và độc lập với $\mathcal{O}^+(0)$.
Giải phương trình ngẫu nhiên

$$(S) \quad \begin{cases} \frac{dX}{dt}(t) = f'(t)F & \forall t \in (0, T], \\ X(0) = 0 \end{cases} .$$

H.D. $X(t, \omega) = f(t)F(\omega)$ với mọi $t \in [0, T]$, $\omega \in \Omega$. Đề ý theo bài toán 2.7

$$X(r) = X(s) + \int_s^r f' F dt \quad \forall 0 \leq s < r \leq T$$

Bài toán 3.8. Cho (Ω, \mathcal{A}, P) là một không gian xác suất với tiến trình Wiener $\{W(t)\}$. Giải phương trình vi phân ngẫu nhiên

$$(S) \quad \begin{cases} \frac{dX}{dt}(t) = G \frac{dW}{dt} & \forall t \in (0, T], \\ X(0) = 0 \end{cases} .$$

H.D. Đặt $X(t, \omega) = G(\omega)W(t, \omega)$ với mọi $t \in [0, T]$, $\omega \in \Omega$.

Đề ý theo bài toán 2.8

$$\int_r^s G dW = GW(s) - GW(r) \quad \forall 0 \leq r < t.$$

Bài toán 3.9. Cho (Ω, \mathcal{A}, P) là một không gian xác suất với một tiến trình Wiener $\{W(t)\}$, F trong $L^1(\Omega)$ và G trong $L^2(\Omega)$ và độc lập với $\mathcal{V}^+(0)$. Giải phương trình vi phân ngẫu nhiên

$$(S) \quad \begin{cases} \frac{dX}{dt}(t) = F + G \frac{dW}{dt} & \forall t \in (0, T], \\ X(0) = 0 \quad . \end{cases}$$

H.D. Đặt

$$X(t, \omega) = tF(\omega) + G(\omega)W(t, \omega) \quad \forall t \in [0, T], \omega \in \Omega.$$

Dùng các bài tập trên chứng minh X có vi phân ngẫu nhiên $dX = Fdt + GdW$.

Định lý . Cho một họ $\{\mathcal{F}(t)\}$ nonanticipating đối với một tiến trình Wiener $\{W(t)\}$ trong một không gian xác suất (Ω, \mathcal{A}, P) . Cho f và $g \in S_T$, X_0 là một hàm thực đo được trên $(\Omega, \mathcal{F}(0))$ và $X_0 \in L^2(\Omega)$. Lúc đó có một nghiệm duy nhất trong $\mathbb{H}^2(0, T, \{\mathcal{F}(t)\})$ của phương trình

$$(S) \begin{cases} \frac{dX(t)}{dt} = f(t, X(t)) + g(t, X(t)) \frac{dW(t)}{dt} & \forall t \in (0, T], \\ X(0) = X_0 \quad . \end{cases}$$

$$(C1) \quad |h(t, x)| \leq C(1 + |x|) \quad \forall t \in [0, T], x \in \mathbb{R},$$

$$(C2) \quad |h(t, x) - h(s, y)|^2 \leq C(|t - s| + |x - y|^2) \\ \forall t, s \in [0, T], x, y \in \mathbb{R}.$$

Bài toán 3.10. Cho $\{X(t)\}$ là nghiệm trong định lý trên. Chứng minh có một hằng số C_1 sao cho

$$\int_{\Omega} |X(t) - X(r)|^2 dP \leq C_1 |t - r| \quad r, t \in [0, T].$$

H.D. Dùng (C1) và bài toán 2.3 chứng minh

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |X(t) - X(r)|^2 dP &= \int_{\Omega} \left| \int_r^t f(s, X(s)) ds + \int_r^t g(s, X(s)) dW(s) \right|^2 dP \\ &\leq 2 \int_{\Omega} \left| \int_r^t f(s, X(s)) ds \right|^2 dP + 2 \int_{\Omega} \left| \int_r^t g(s, X(s)) dW(s) \right|^2 dP \\ &\leq 2 |t - r| \int_{\Omega} \int_r^t |f(s, X(s))|^2 ds dP + 2 \int_{\Omega} \left| \int_r^t g(s, X(s)) dW(s) \right|^2 dP \\ &\leq 2 |t - r| C \int_{\Omega} \int_r^t (1 + |X(s)|^2) ds dP + 2 \int_{\Omega} \left| \int_r^t g(s, X(s)) ds \right|^2 dP \\ &\leq 2 |t - r| \left[C \int_{\Omega} \int_r^t (1 + |X(s)|^2) ds dP + \int_{\Omega} \left| \int_r^t |g(s, X(s))|^2 ds dP \right] \\ &\leq 4 |t - r| C \int_{\Omega} \int_r^t (1 + |X(s)|^2) ds dP \leq 4 |t - r| C \int_{\Omega} \int_0^T (1 + |X(s)|^2) ds dP \end{aligned}$$

Bài toán 3.11. Cho $\{X(t)\}$ là nghiệm trong định lý trên. Chứng minh với mọi $t \in [0, T]$

$$\int_{\Omega} |X(t)|^2 dP \leq 3 \int_{\Omega} |X(0)|^2 dP + (3T^2 + 3T + 3)C \\ + (3T + 3)C \|X\|_{H^2} .$$

H.D. Đặt $a(t) = \int_{\Omega} |X(t)|^2 dP \quad \forall t \in [0, T].$

Dùng bất đẳng thức Schwarz và bài toán 2.3., ta có

$$\int_{\Omega} |X(t)|^2 dP \leq \int_{\Omega} \left| X(0) + \int_0^t f(s, X(s)) ds + \int_0^t g(s, X(s)) dW(s) \right|^2 dP \\ \leq 3a(0) + 3 \int_{\Omega} \left| \int_0^t f(s, X(s)) ds \right|^2 dP + 3 \int_{\Omega} \left| \int_0^t g(s, X(s)) dW(s) \right|^2 dP \\ \leq 3a(0) + 3 \int_0^t \int_{\Omega} |f(s, X(s))|^2 dP ds + 3 \int_0^t \int_{\Omega} |g(s, X(s))|^2 dP ds.$$

Dùng (C1), chứng minh

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |X(t)|^2 dP &\leq 3a(0) + (3t + 3)C \int_0^t \int_{\Omega} [1 + |X(s)|^2] dP ds \\ &\leq 3a(0) + (3T^2 + 3T + 3)C \\ &\quad + (3T + 3)C \int_0^T \int_{\Omega} |X(s)|^2 dP ds \\ &\leq 3 \int_{\Omega} |X(0)|^2 dP + (3T^2 + 3T + 3)C \\ &\quad + (3T + 3)C \|X\|_{H^2} . \end{aligned}$$

Định nghĩa. Cho $\{W_j(t)\}$ là m tiến trình Wiener độc lập với nhau trong một không gian xác suất (Ω, \mathcal{A}, P) , $X_{0,i}$ là d hàm thực trên Ω , f_i và g_{ij} là các hàm thực trên $[0, T] \times \Omega$ và $\{X_i(t)\}$ là d tiến trình ngẫu nhiên sao cho $\forall t \in (0, T]$

$$X_i(t, \omega) = X_{0,i} + \int_0^t f_i(s, X(s, \omega)) dt + \sum_{j=1}^m \int_0^t g_{ij}(s, X(s, \omega)) dW_j$$

Ta nói X là nghiệm hệ phương trình vi phân ngẫu nhiên

$$(S) \begin{cases} \frac{dX(t)}{dt} = f(t, X(t)) + g(t, X(t)) \frac{dW(t)}{dt} & \forall t \in (0, T], \\ X(0) = X_0 \end{cases}$$

ở đây $X = (X_1, \dots, X_d)$, $f = (f_1, \dots, f_d)$, $W = (W_1, \dots, W_m)$ và $g = (g_{ij})$.