Chương 3

BIẾN NGẪU NHIÊN

I. Định nghĩa

Hàm số với giá trị thực X xác định trên KGSKSC Ω, $X : \Omega \to \mathbb{R}$

được gọi là biến ngẫu nhiên nếu tập hợp

$\{\omega \in \Omega : X(\omega) = k, \quad k \in \mathbb{R}\}$ là sự kiện.

<u>Biến ngẫu nhiên rời rạc</u> : Khi tập hợp các giá trị của X có hữu hạn hoặc vô hạn đếm được các phân tử.

<u>Biến ngẫu nhiên liên tục</u> : Khi tập hợp các giá trị của X là một khoảng trên trục số (X có vô hạn không đếm được các giá trị) .

II. Bảng phân phối xác suất của biến ngẫu nhiên rời rạc

X	x_1	x_2	...	x_n
P	p_1	p_2	...	p_n

Trong đó x_i là các giá trị của X và

$$p_i = P(X = x_i)$$

Ta có $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$.

III. Hàm phân phối xác suất

Hàm số

$$F(x) = P(X \le x), \quad x \in \mathbb{R}$$

được gọi là hàm phân phối xác suất của biến ngẫu nhiên X .

<u>Tính chất</u> :

1) $0 \le F(x) \le 1$

2) $F(x)$ là hàm không giảm:

Nếu $a < b$ thì $F(a) \le F(b)$

3) $P(a < X \leq b) = F(b) - F(a)$

4) $F(+\infty) = 1$

$F(-\infty) = 0$

Trong đó ký hiệu $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = F(+\infty)$

Và $\lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = F(-\infty)$.

IV. Hàm mật độ phân phối xác suất của biến ngẫu nhiên liên tục

Nếu hàm phân phối $F(x)$ của biến ngẫu nhiên liên tục X có thể biểu diễn dưới dạng

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt, \quad x \in \mathbb{R}$$

thì $f(x)$ được gọi là hàm mật độ phân phối xác suất của X.

Tính chất :

1) $f(x) \geq 0, \quad x \in \mathbb{R}$

2) $f(x) = F'(x)$

tại điểm liên tục của $f(x)$

3) $P(a < X < b) = \int_a^b f(x)\,dx$

4) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 1$

5) Nếu X liên tục với hàm mật độ $f(x)$ thì

$$P(X=x) = 0,\ \forall x \in \mathbb{R}$$

Từ tính chất 5 suy ra:

$$P(a \le X \le b) = P(a < X < b) =$$

$$= P(a < X \le b) = P(a \le X < b)$$

Thật vậy, $P(a < X \le b) = P(a < X < b) + P(X = b)$

$$= P(a < X < b)$$

V. Các số đặc trưng của biến ngẫu nhiên

1. Kỳ vọng - Trung bình

- Nếu X rời rạc thì kỳ vọng của X được xác định như sau :

$$EX = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i$$

- Nếu X liên tục

$$EX = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx$$

Tính chất :

1) $EC = C$, C là hằng số

2) $ECX = C.EX$

3) $E(X+Y) = EX + EY$

4) $E(XY) = EX.EY$ nếu X và Y độc lập.

- Hai biến ngẫu nhiên X và Y là độc lập nếu với A và B là các khoảng bất kỳ thì các sự kiện $(X \in A)$ và $(Y \in B)$ là độc lập.

5) Cho hàm số $g(x)$, khi đó

$$Eg(X) = \sum_{i=1}^{n} g(x_i) p_i$$,nếu X rời rạc

$$Eg(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) f(x) dx$$, nếu X liên tục

<u>Thí dụ</u> : Cho $g(x) = x^2$, $g(X) = X^2$,

$$EX^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 p_i$$, nếu X rời rạc

$$EX^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x) dx$$, nếu X liên tục

Trong đó $f(x)$ là hàm mật độ của X.

2. Phương sai – Độ phân tán :

Phương sai hay độ phân tán của biến ngẫu nhiên X được xác định như sau:

$$DX = E(X - EX)^2$$

a) X rời rạc

$$DX = \sum_{i=1}^{n} (x_i - EX)^2 p_i$$

b) X liên tục

$$DX = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - EX)^2 f(x)\,dx$$

Tính chất :

1) $DC = 0$, C là hằng số

2) $DCX = C^2 DX$

3) $D(X+Y) = DX + DY$, nếu X và Y độc lập

Công thức tính phương sai :

$$DX = EX^2 - (EX)^2$$

VI. Các luật phân phối xác suất

1. Luật Bernoulli – $B(1, p)$

$X \sim B(1, p)$ nếu X có bảng phân phối

X	0	1
P	q	p

$P(X=1) = p \quad , \quad P(X=0) = 1-p = q$

$EX = p \ , \ DX = pq$

- Phép thử Bernoulli :

- Có 2 sự kiện A và $\overline{A}$.

  Ký hiệu $\mathrm{P(A)}= p$, $\mathrm{P}(\overline{A})= 1\text{-}p = q$.

- Khi A xuất hiện ta nói phép thử thành công, và gọi p là xác suất thành công.

- Mô hình Bernoulli

+ Xét 1 phép thử Bernoulli.

+ Trong đó xác suất thành công là p.

+ X – số lần xuất hiện thành công trong phép thử.

  Khi đó $X \sim B(1, p)$.

2. Luật Nhị thức – $B(n, p)$

$X \sim B(n, p)$ nếu

$$P(X = k) = C_n^k p^k q^{n-k}$$

với $k = 0, 1, \ldots, n$

Ta có

$$EX = np \;,\; DX = npq.$$

- Mô hình Nhị thức :

+ Xét n phép thử Bernoulli.

+ Trong đó xác suất thành công là p.

+ Các phép thử độc lập với nhau.

(Kết quả của phép thử này không ảnh hưởng đến kết quả của phép thử kia)

+ X – số lần xuất hiện thành công trong n phép thử.

Khi đó $X \sim B(n, p)$.

3. Luật Poisson – $P(\lambda)$

$X \sim P(\lambda)$ nếu

$$P(X = k) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$$, với $k = 0, 1, \ldots$

$$EX = \lambda\,,\ DX = \lambda$$

- Định lý Poisson

$$\lim_{\substack{n \to \infty \\ p \to 0 \\ np \to \lambda}} C_n^k p^k q^{n-k} = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$$

• Mô hình Poisson

+ Xét n phép thử Bernoulli.

+ Trong đó xác suất thành công là p.

+ Các phép thử độc lập với nhau.

(Kết quả của phép thử này không ảnh hưởng đến kết quả của phép thử kia)

+ X – số lần hành công trong n phép thử.

+ Với n lớn ($n \geq 100$) và p nhỏ ($p \leq 0,01$) và $\lambda = np \leq 20$.

Khi đó $X \sim P(\lambda)$.

4. Luật chuẩn (Luật Gauss) $N(\mu, \sigma^2)$

$X \sim N(\mu, \sigma^2)$ nếu X có hàm mật độ

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$, với $x \in \mathbb{R}$

$$EX = \mu \;;\; DX = \sigma^2$$

- Luật chuẩn tắc – $N(0, 1)$

Khi $\mu = 0,\ \sigma^2 = 1$ ta có luật $N(0, 1)$, được gọi là luật chuẩn tắc và ký hiệu hàm mật độ là

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$, với $x \in \mathbb{R}$

- Hàm phân phối luật chuẩn tắc ký hiệu là

$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \varphi(t)\,dt$$, $x \in \mathbb{R}$

- Tính chất: $\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$

- Nếu $Z \sim N(0, 1)$, ta có

$$P(a < Z < b) = \Phi(b) - \Phi(a)$$

- Công thức chuyển đổi : Cho $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ khi đó

$$P(a < X < b) = \Phi\left(\frac{b-\mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right)$$

Đặt

$$X' = \frac{X - EX}{\sqrt{DX}} = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

khi đó X' được gọi là biến ngẫu nhiên chuẩn hóa từ X hay là thu gọn, qui tâm từ X, ta có $EX' = 0$, $DX' = 1$.